Aula 20

Vamos analisar a equação

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

nos casos em que exatamente um dos coeficientes A ou C é nulo.

1. Parábola

Definição 1

Sejam $\mathcal{L}$ uma reta no plano e F um ponto no plano não pertencente a $\mathcal{L}$. A **parábola** *$\mathcal{P}$ de* **diretriz** *$\mathcal{L}$ e foco F é o conjunto que consiste de todos os pontos P do plano que são eqüidistantes do ponto F e da reta $\mathcal{L}$.*

$$\boxed{\mathcal{P} = \{\, P \mid d(P, F) = d(P, \mathcal{L}) \,\}}$$

Terminologia

• Como dissemos na definição, o ponto F é o **foco** e a reta $\mathcal{L}$ é a diretriz da parábola.

• A reta ℓ que contém o foco e é perpendicular à diretriz $\mathcal{L}$ é chamada **reta focal** da parábola.

• O **vértice** da parábola é o ponto V da reta focal que eqüidista de F e de $\mathcal{L}$.

Em particular, $V \in \mathcal{P}$.

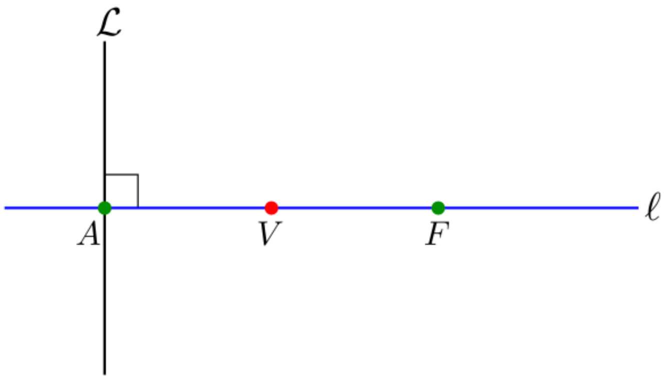

Fig. 1: Posição do vértice em relação ao foco e à diretriz da parábola.

• Se A é o ponto onde $\mathcal{L}$ intersecta ℓ, então V é o ponto médio do segmento AF, ou seja,

$$V = \frac{A+F}{2}.$$

• o número $2p = d(F, \mathcal{L})$ é o **parâmetro** da parábola. Note que $d(V, F) = d(V, \mathcal{L}) = p$.

Observação 1

Toda parábola é simétrica em relação à sua reta focal.

De fato, seja $\mathcal{P}$ *uma parábola de foco* F*, vértice* V*, diretriz* $\mathcal{L}$ *e reta focal* ℓ*.*

Seja $P \in \mathcal{P}$ *e seja* P' *o ponto simétrico de* P *em relação à reta focal* ℓ*.*

O segmento $PP' \perp \ell$ *intersecta a reta focal* ℓ *num ponto* Q *que é o ponto médio do segmento* PP'*.*

Os triângulos $\triangle PQF$ *e* $\triangle P'QF$ *são congruentes, pois o lado* QF *é comum,* $d(P,Q) = d(P',Q)$*, e os ângulos* $\widehat{PQF}$ *e* $\widehat{P'QF}$ *são retos. Em particular,* $d(P,F) = d(P',F)$*.*

Além disso, $d(P,\mathcal{L}) = d(Q,\mathcal{L}) = d(P',\mathcal{L})$*.*

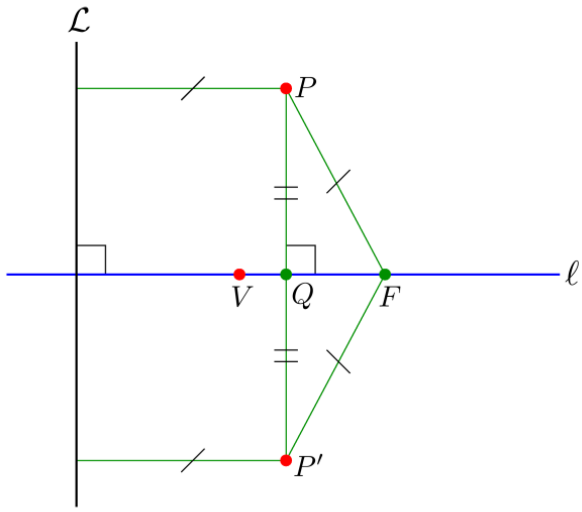

Fig. 2: Simetria da parábola em relação à reta focal ℓ*.*

Como $P \in \mathcal{P}$*, temos* $d(P,F) = d(P,\mathcal{L})$*. Portanto,* $d(P',F) = d(P',\mathcal{L})$*, isto é,* $P' \in \mathcal{P}$*.*

2. Formas canônicas da parábola

Vamos estabelecer as formas canônicas da parábola em relação a um sistema de coordenadas OXY no plano. Consideremos primeiro os casos em que o vértice da parábola é a origem e a reta focal é um dos eixos coordenados, e depois os casos em que o vértice é um ponto qualquer e a reta focal é paralela a um dos eixos coordenados.

Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo$-OX$

Caso I. O foco F está à direita da diretriz $\mathcal{L}$.

Como o vértice da parábola $\mathcal{P}$ é $V = (0,0)$, temos que o foco é $F = (p,0)$ e a diretriz é $\mathcal{L} : x = -p$, onde $2p = d(F,\mathcal{L})$.

Logo,

$$\begin{aligned} P = (x,y) \in \mathcal{P} &\iff d(P,F) = d(P,\mathcal{L}) \\ &\iff \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p| \\ &\iff (x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2 \\ &\iff x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2 \\ &\iff -2px + y^2 = 2px \\ &\iff \boxed{y^2 = 4px} \end{aligned}$$

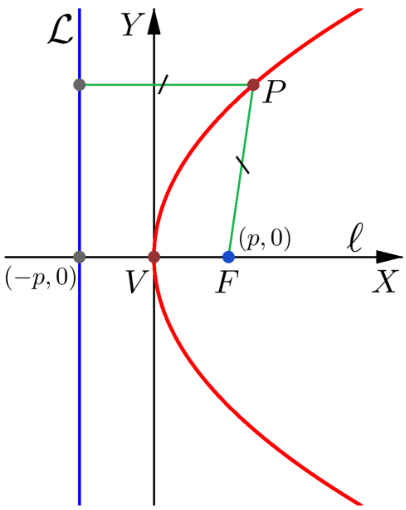

Fig. 3: Parábola $\mathcal{P} : y^2 = 4px$.

Caso II. O foco F está à esquerda da diretriz $\mathcal{L}$.

Neste caso, temos

$$F = (-p, 0) \text{ e } \mathcal{L} : x = p,$$

onde $2p = d(F, \mathcal{L})$.

Então,

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in \mathcal{P} &\iff d(P, F) = d(P, \mathcal{L}) \\ &\iff \sqrt{(x+p)^2 + y^2} = |x - p| \\ &\iff (x+p)^2 + y^2 = (x-p)^2 \\ &\iff x^2 + 2px + p^2 + y^2 = x^2 - 2px + p^2 \\ &\iff 2px + y^2 = -2px \\ &\iff \boxed{y^2 = -4px} \end{aligned}$$

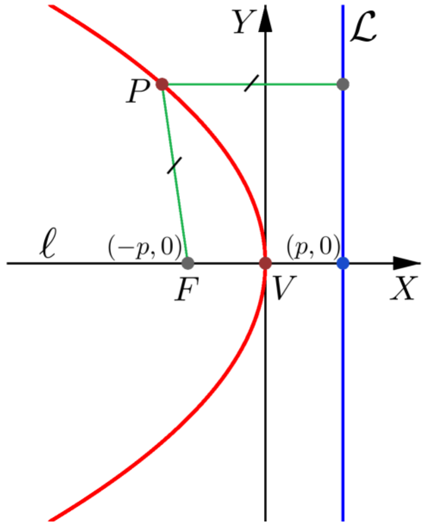

Fig. 4: Parábola $\mathcal{P} : y^2 = -4px$.

Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo$-OY$

Caso I. O foco F está acima da diretriz $\mathcal{L}$.

Neste caso, $F = (0, p)$ e $\mathcal{L} : y = -p$, onde $2p = d(F, \mathcal{L})$.

Logo, $P = (x, y) \in \mathcal{P}$ se, e somente se,

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y + p| \iff \boxed{x^2 = 4py}$$

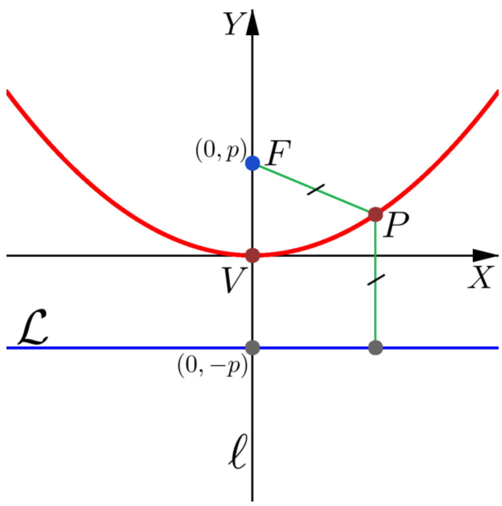

Fig. 5: Parábola $\mathcal{P} : x^2 = 4py$.

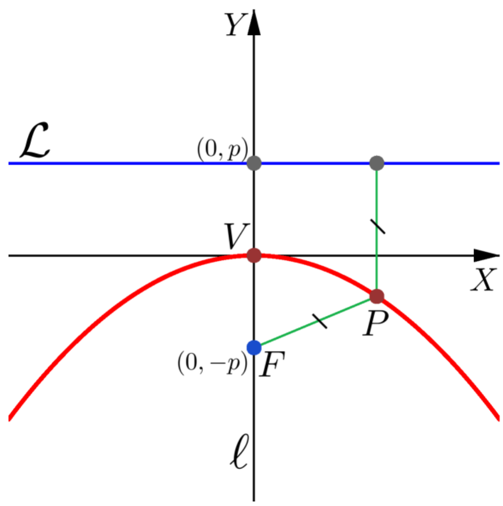

Fig. 6: Parábola $\mathcal{P} : x^2 = -4py$.

Caso II. O foco F está abaixo da diretriz $\mathcal{L}$.

Neste caso, $F = (0, -p)$ e $\mathcal{L} : y = p$, onde $2p = d(F, \mathcal{L})$.

Logo, $P = (x, y) \in \mathcal{P}$ se, e somente se,

$$\sqrt{x^2 + (y+p)^2} = |y - p| \iff \boxed{x^2 = -4py}$$

Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OX$

Para obter a forma canônica da parábola de vértice no ponto $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OX$, consideramos um sistema de coordenadas $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ com origem $\overline{O} = V = (x_0, y_0)$ e eixos $\overline{O}\,\overline{X}$ e $\overline{O}\,\overline{Y}$ paralelos e de igual sentido aos eixos OX e OY, respectivamente.

Caso I. O foco F está à direita da diretriz $\mathcal{L}$.

Sabemos que a equação da parábola no sistema de coordenadas $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, é $\overline{y}^2 = 4p\overline{x}$. Além disso, nesse sistema de coordenadas, o foco é $F = (p, 0)$; o vértice é $V = (0, 0)$; a diretriz é $\mathcal{L} : \overline{x} = -p$ e a reta focal é $\ell : \overline{y} = 0$.

Como $x = \overline{x} + x_0$ e $y = \overline{y} + y_0$, temos que a equação da parábola no sistema OXY é

$$\boxed{(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)}$$

Além disso, no sistema de eixos OXY, a parábola tem foco $F = (x_0 + p, y_0)$; vértice $V = (x_0, y_0)$; diretriz $\mathcal{L} : x - x_0 = -p$, ou seja, $\mathcal{L} : x = x_0 - p$ e reta focal $\ell : y - y_0 = 0$, ou seja, $\ell : y = y_0$.

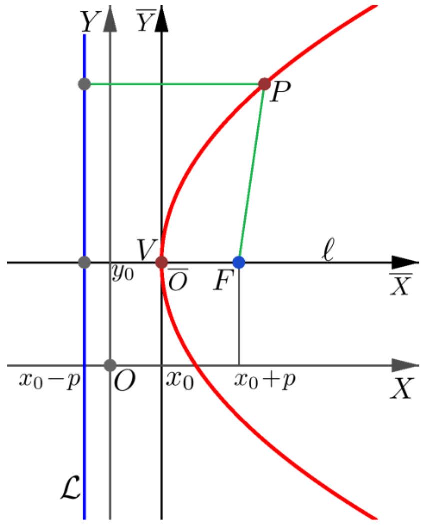

Fig. 7: Parábola $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$.

Caso II. O foco F está à esquerda da diretriz $\mathcal{L}$.

Neste caso, a equação da parábola no sistema $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ é $\overline{y}^2 = -4p\overline{x}$, e, nessas coordenadas, seus elementos são: foco $F = (-p, 0)$; vértice $V = (0, 0)$; diretriz $\mathcal{L} : \overline{x} = p$ e reta focal $\ell : \overline{y} = 0$.

Passando às coordenadas x, y do sistema OXY, a equação da parábola fica na forma:

$$\boxed{(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)}$$

e seus elementos são: foco $F = (x_0 - p, y_0)$; vértice $V = (x_0, y_0)$; diretriz $\mathcal{L} : x - x_0 = p$, ou seja, $\mathcal{L} : x = x_0 + p$ e reta focal $\ell : y - y_0 = 0$, ou seja, $\ell : y = y_0$.

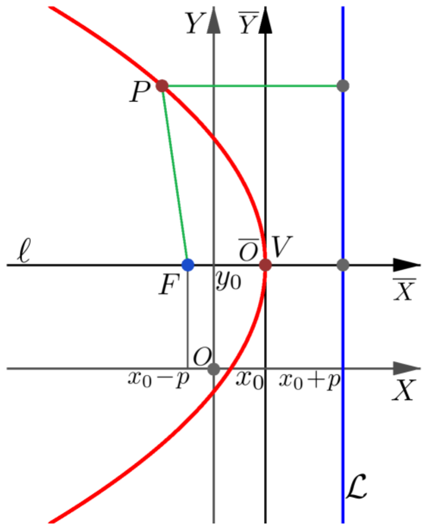

Fig. 8: Parábola $(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$.

Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OY$

Como nos casos anteriores, considerando um sistema de eixos ortogonais $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ com origem $\overline{O} = V = (x_0, y_0)$ e eixos $\overline{O}\,\overline{X}$ e $\overline{O}\,\overline{Y}$ paralelos e de igual sentido aos eixos OX e OY, respectivamente, obtemos as equações e os elementos das parábolas com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OY$.

Caso I. O foco F está <u>acima</u> da diretriz $\mathcal{L}$.

Neste caso, o foco é $F = (x_0, y_0 + p)$; a diretriz é $\mathcal{L} : y = y_0 - p$; a reta focal é $\ell : x = x_0$ e a equação da parábola é

$$\boxed{(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)}$$

Caso II. O foco F está <u>abaixo</u> da diretriz $\mathcal{L}$.

Neste caso, o foco é $F = (x_0, y_0 - p)$; a diretriz é $\mathcal{L} : y = y_0 + p$; a reta focal é $\ell : x = x_0$ e a equação da parábola é

$$\boxed{(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)}$$

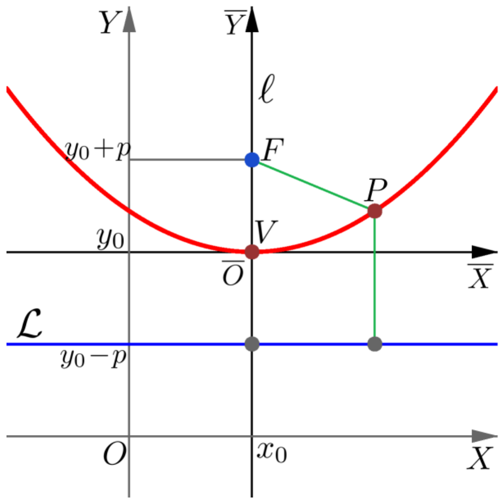

Fig. 9: Parábola $\mathcal{P} : (x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$.

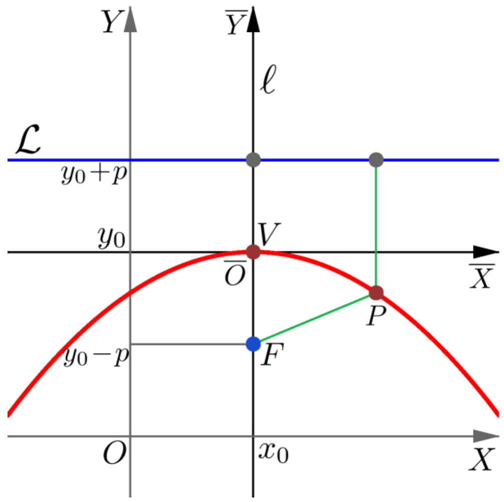

Fig. 10: Parábola $\mathcal{P} : (x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$.

3. Equação geral do segundo grau com $B = 0$ e $AC = 0$

Consideremos a equação canônica da parábola de vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OX$:

$$(y - y_0)^2 = \pm 4p(x - x_0)\,.$$

Desenvolvendo e agrupando os termos dessa equação, obtemos:

$$y^2 \mp 4px - 2y_0 y + y_0^2 \pm 4px_0 = 0\,.$$

Essa equação é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde $A = 0$, $B = 0$, $C = 1$, $D = \mp 4p$, $E = -2y_0$ e $F = y_0^2 \pm 4px_0$.

Analogamente, desenvolvendo a equação da parábola de vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OY$:

$$(x - x_0)^2 = \pm 4p(y - y_0)\,,$$

obtemos a equação

$$x^2 - 2x_0 x \mp 4py + x_0^2 \pm 4py_0 = 0\,,$$

que é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = -2x_0$, $E = \mp 4p$ e $F = x_0^2 \pm 4py_0$.

No primeiro caso, temos $A = 0$, $B = 0$ e $C \neq 0$. No segundo caso, temos $A \neq 0$, $B = 0$ e $C = 0$.

Reciprocamente, temos a seguinte proposição:

Proposição 1

Seja a equação do segundo grau com $B = 0$:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Se $A = 0$ e $C \neq 0$, essa equação representa:

- *uma parábola cuja reta focal é paralela ao eixo$-OX$, se $D \neq 0$.*
- *duas retas distintas paralelas ao eixo$-OX$, se $D = 0$ e $E^2 - 4CF > 0$.*
- *uma reta paralela ao eixo$-OX$, se $D = 0$ e $E^2 - 4CF = 0$.*
- *o conjunto vazio, se $D = 0$ e $E^2 - 4CF < 0$.*

O mesmo vale para o caso em que $C = 0$ e $A \neq 0$, trocando "paralelo ao eixo$-OX$" por "paralelo ao eixo$-OY$".

Prova.

Suponhamos $A = 0$, $C \neq 0$ e $D \neq 0$. Então a equação do segundo grau se escreve na forma:

$$y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{D}{C}x + \frac{F}{C} = 0.$$

Completando o quadrado, obtemos:

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 + \frac{D}{C}x + \frac{F}{C} - \frac{E^2}{4C^2} = 0\,.$$

Como $D \neq 0$, podemos escrever a equação na forma:

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{D}{C}\left(x + \frac{C}{D}\left(\frac{F}{C} - \frac{E^2}{4C^2}\right)\right),$$

que é a equação da parábola com reta focal paralela ao eixo$-OX$ e vértice

$$V = \left(-\frac{4C^2F - CE^2}{4C^2D}, -\frac{E}{2C}\right).$$

Se $D = 0$, a equação $Cy^2 + Ey + F = 0$ representa:

- as duas retas paralelas ao eixo$-OX$:

$$y = \frac{-E + \sqrt{E^2 - 4CF}}{2C} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{-E - \sqrt{E^2 - 4CF}}{2C},$$

se $E^2 - 4CF > 0$;

- a reta paralela ao eixo$-OX$: $y = -\dfrac{E}{2C}$, se $E^2 - 4CF = 0$;
- o conjunto vazio, se $E^2 - 4CF < 0$. ■

Os casos em que a equação do segundo grau $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com $AC = 0$, representa duas retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio são chamados de **casos degenerados da parábola**.

Exemplo 1

Verifique se as equações abaixo representam uma parábola ou uma parábola degenerada. Caso seja uma parábola, determine seus principais elementos:

(a) $x^2 - 8y = 0$.

Solução.

Como $x^2 = 8y$, a equação representa uma parábola, com:

- *vértice:* $V = (0, 0)$;
- *reta focal* $=$ *eixo*$-OY : x = 0$;
- *parâmetro:* $p = 2$.
- *foco:* $F = (0, 2)$, *acima da diretriz.*
- *diretriz:* $\mathcal{L} : y = -2$. □

(b) $2y^2 + 5x + 8y - 7 = 0$.

Solução.

Completando o quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned} & 2(y^2 + 4y) = -5x + 7 \\ \iff & 2(y^2 + 4y + 4) = -5x + 7 + 8 \\ \iff & 2(y + 2)^2 = -5x + 15 \\ \iff & 2(y + 2)^2 = -5(x - 3) \\ \iff & (y + 2)^2 = -\frac{5}{2}(x - 3)\,, \end{aligned}$$

que representa uma parábola com:

- *vértice:* $V = (3, -2)$;
- *reta focal:* $\ell : y = -2$, *paralela ao eixo*$-OX$;
- *parâmetro:* $2p = \dfrac{10}{8}$, *então,* $p = \dfrac{5}{8}$;
- *foco:* $F = \left(3 - \dfrac{5}{8}, -2\right) = \left(\dfrac{19}{8}, -2\right)$, *à esquerda da diretriz.*
- *diretriz:* $\mathcal{L} : x = 3 + \dfrac{5}{8} = \dfrac{29}{8}$. □

(c) $3y^2 + 7y - 6 = 0$.

Solução.

Como, nessa equação $A = B = D = 0$, *e seu discriminante é* $49 + 4 \times 3 \times 6 = 121 > 0$, *ela representa o par de retas* $y = \dfrac{-7 \pm 11}{6}$, *ou seja,* $y = -3$ *e* $y = \dfrac{2}{3}$, *paralelas ao eixo*$-OX$. $\square$

(d) $9x^2 + 42x + 49 = 0$

Solução.

Como, nessa equação $B = C = E = 0$ *e seu discriminante é* $42^2 - 4 \times 9 \times 49 = 1764 - 1764 = 0$, *ela representa a reta* $x = -\dfrac{42}{18} = -\dfrac{21}{9} = -\dfrac{7}{3}$, *paralela ao eixo*$-OY$ $\square$

(e) $3y^2 - 2y + 1 = 0$

Solução.

Nessa equação, $A = B = D = 0$ *e seu discriminante é* $4 - 12 = -8 < 0$. *Então, ela representa o conjunto vazio* $\square$

Exemplo 2

Determinar a equação da parábola $\mathcal{P}$ *com vértice* V *na origem, cujo foco é o ponto:*

(a) $F = (3, 0)$.

Solução.

Temos $p = d(V, F) = 3$ *e reta focal = eixo*$-OX$. *Como o foco* F *está à direita do vértice, temos que a diretriz é* $\mathcal{L} : x = -3$ *e a equação da parábola é* $\mathcal{P} : y^2 = 12x$. $\square$

(b) $F = (0, -2)$.

Solução.

Temos $p = d(V, F) = 2$ *e reta focal = eixo*$-OY$. *Como o foco* F *está abaixo do vértice, vemos que a diretriz é* $\mathcal{L} : y = 2$ *e a equação da parábola é* $\mathcal{P} : x^2 = -8y$. $\square$

Exemplo 3

Uma parábola $\mathcal{P}$ *com vértice* V *na origem, cuja reta focal é o eixo*$-OY$, *passa pelo ponto* $(4, -2)$. *Determine sua equação, o foco* F *e a equação da diretriz* $\mathcal{L}$.

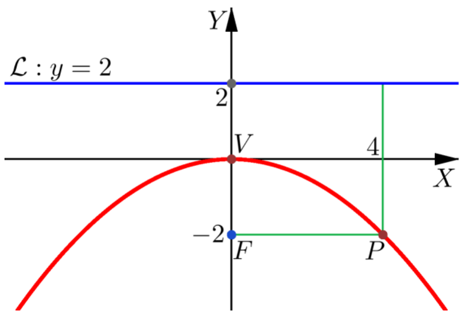

Fig. 11: Parábola $\mathcal{P} : x^2 = -8y$.

Solução.

A parábola tem equação $\mathcal{P} : x^2 = \pm 4py$, com $p = d(V, F) > 0$.

Como $(4, -2) \in \mathcal{P}$, temos que $\mathcal{P} : x^2 = -4py$ e $16 = 8p$. Logo, $p = 2$; $F = (0, -2)$, $\mathcal{L} : y = 2$ e a equação da parábola é $\mathcal{P} : x^2 = -8y$. $\square$

Exemplo 4

Uma circunferência $\mathcal{C}$ com centro no ponto $C = (4, -1)$ passa pelo foco F da parábola $\mathcal{P} : x^2 = -16y$. Mostre que $\mathcal{C}$ é tangente à diretriz $\mathcal{L}$ da parábola.

Solução.
A reta focal da parábola $\mathcal{P}$ é o eixo$-OY$, o vértice é a origem, e o foco está abaixo da diretriz. Então, $F = (0, -4)$ e $\mathcal{L} : y = 4$, pois $4p = 16$.

A equação da circunferência é $\mathcal{C} : (x-4)^2 + (y+1)^2 = r^2$.

Como $F = (0, -4) \in \mathcal{C}$, temos $16 + 9 = r^2$, ou seja, $r = 5$.

Sendo $d(C, \mathcal{L}) = d((4, -1), \mathcal{L}) = |-1-4| = 5 =$ raio de $\mathcal{C}$, temos que $\mathcal{L}$ é tangente a $\mathcal{C}$. □

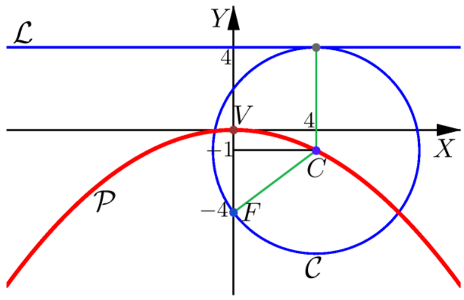

Fig. 12: Parábola $\mathcal{P}$ e circunferência $\mathcal{C}$.

Exemplo 5

Determinar a equação da parábola $\mathcal{P}$ de vértice $V = (3, 4)$ e foco $F = (3, 2)$. Determine, também, a equação de sua diretriz.

Solução.
Como $V = (3, 4)$ e $F = (3, 2)$, a reta focal é $\ell : x = 3$ e, nessa reta, F está abaixo de V e, portanto, abaixo da diretriz $\mathcal{L}$. Logo, a equação da parábola é da forma

$$\mathcal{P} : (x-3)^2 = -4p(y-4).$$

Temos que $p = d(V, F) = d((3, 4), (3, 2)) = 2$. Logo a diretriz é $\mathcal{L} : y = 6$ e

$$\mathcal{P} : (x-3)^2 = -8(y-4).$$

é a equação da parábola. □

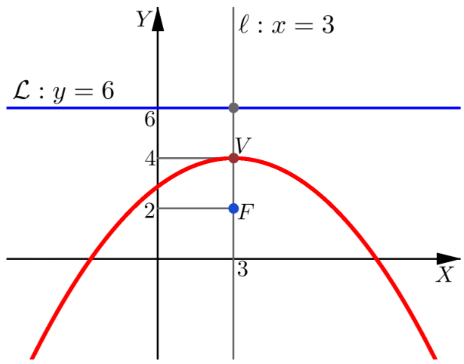

Fig. 13: Parábola $\mathcal{P} : (x-3)^2 = -8(y-4)$.

Exemplo 6

Determine a equação da parábola $\mathcal{P}$ cuja reta focal é paralela ao eixo$-OX$ e passa pelos pontos $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$, $(0, 5)$ e $(-6, -7)$.

Solução.
Como a reta focal da parábola $\mathcal{P}$ é paralela ao eixo$-OX$, sua equação deve ser da forma $\mathcal{P} : (y - y_0)^2 = \pm 4p(x - x_0)$, que se escreve, portanto, na forma:

$$\mathcal{P} : y^2 + Dx + Ey + F = 0\,.$$

Substituindo as coordenadas dos pontos dados nessa equação, temos:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}D - E + F &= -1 \\ 5E + F &= -25 \\ -6D - 7E + F &= -49\,. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $D = 8$, $E = -2$ e $F = -15$.

Portanto, a equaçao da parábola é

$$y^2 + 8x - 2y - 15 = 0\,,$$

isto é,

$$y^2 - 2y + 1 = 15 - 8x + 1$$

ou, ainda,

$$\mathcal{P} : (y-1)^2 = -8(x-2).$$

Assim, a parábola $\mathcal{P}$ tem vértice $V = (2,1)$ e reta focal $\ell : y = 1$, paralela ao eixo$-OX$. Como $4p = 8$, isto é, $p = 2$, e o foco F está à esquerda da diretriz, temos que $F = (0,1)$ e a diretriz $\mathcal{L} : x = 4$. □

Exemplo 7

Sejam $V = (-2,-1)$ o vértice de uma parábola $\mathcal{P}$ e $\mathcal{L} : x + 2y = 1$ a equação de sua diretriz. Achar a equação da parábola e seu foco.

Solução.
A reta focal ℓ é a reta perpendicular à diretriz que passa pelo vértice.

Como $\mathcal{L} \perp (1,2)$, temos $\ell \perp (2,-1)$ e, portanto, $\ell : 2x - y = -4 + 1 = -3$. Seja $A = (x,y)$ o ponto de interseção das retas ℓ e $\mathcal{L}$. Então, as coordenadas x e y satisfazem ao sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = -3 \\ -2x - 4y = -2\,. \end{cases}$$

Logo $-5y = -5$, isto é, $y = 1$ e $x = 1 - 2y = -1$.

Como V é o ponto médio do segmento AF, temos que $F = 2V - A$, ou seja,

$$F = 2(-2,-1) - (-1,1) = (-3,-3)\,,$$

Então $P = (x,y) \in \mathcal{P}$ se, e somente se, $d(P,F) = d(P,\mathcal{L})$, isto é, se, e só se,

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{(x+3)^2 + (y+3)^2}\right)^2 = \left(\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{5}}\right)^2 \\ \iff \quad & (x+3)^2 + (y+3)^2 = \frac{(x+2y-1)^2}{5} \\ \iff \quad & x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 = \frac{x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y + 1}{5} \\ \iff \quad & 5x^2 + 30x + 5y^2 + 30y + 90 = x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y + 1 \\ \iff \quad & \boxed{\mathcal{P} : 4x^2 - 4xy + y^2 + 32x + 34y + 89 = 0} \end{aligned}$$

que é a equação da parábola. □

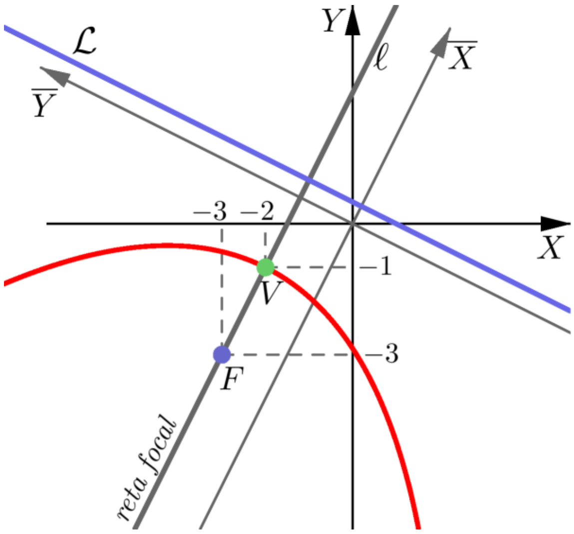

Fig. 14: Parábola $\mathcal{P} : 4x^2 - 4xy + y^2 + 32x + 34y + 89 = 0$.

Exemplo 8

A ***reta tangente*** *a uma parábola $\mathcal{P}$, num ponto $P \in \mathcal{P}$, é a única reta, não paralela à reta focal ℓ, que intersecta a parábola apenas no ponto P.*

Mostre que a reta tangente à parábola $\mathcal{P} : y^2 = 4px$, $p \neq 0$, no ponto $P = (x_0, y_0) \in \mathcal{P}$ é a reta $r : y_0x - 2x_0y = -y_0x_0$, se $x_0 \neq 0$, e é a reta $r : x = 0$, se $x_0 = 0$.

Solução.

Seja $r : \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$, a reta tangente à parábola $\mathcal{P}$ no ponto $P = (x_0, y_0)$.

Como r não é paralela à reta focal (eixo$-OX$), temos que $n \neq 0$. Além disso, $r \cap \mathcal{P}$ consiste apenas do ponto P, ou seja, a equação do segundo grau

$$\begin{aligned}
& (y_0 + nt)^2 = 4p(x_0 + mt) \\
\iff \; & n^2t^2 + 2y_0nt + y_0^2 = 4px_0 + 4pmt \\
\iff \; & n^2t^2 + (2y_0n - 4pm)t + (y_0^2 - 4px_0) = 0 \\
\iff \; & n^2t^2 + (2y_0n - 4pm)t = 0 \\
\iff \; & t\left[n^2t + (2y_0n - 4pm)\right] = 0\,,
\end{aligned}$$

possui uma única solução $t = 0$, que corresponde a $P = (x_0, y_0)$.

Portanto, $2y_0n - 4pm = 0$. Logo, $(m, n) \perp (2p, -y_0)$.

• Se $x_0 = 0$, então $y_0 = 0$, pois $y_0^2 = 4px_0$.

Nesse caso, $(m, n) \perp (2p, 0)$, isto é, a reta r passa pela origem e é perpendicular ao eixo$-OX$. Logo $r : x = 0$.

• Se $x_0 \neq 0$, temos $y_0 \neq 0$ e $2p = \dfrac{y_0^2}{2x_0}$.

Nesse caso, $(m, n) \perp \left(\dfrac{y_0^2}{2x_0}, -y_0\right)$, ou seja, $(m, n) \perp (y_0, -2x_0)$. Logo,

$$r : y_0 x - 2x_0 y = -x_0 y_0 \,,$$

já que $P = (x_0, y_0) \in r$. □

Exemplo 9

Considere um ponto P em uma parábola $\mathcal{P}$ e as seguintes retas passando por P:

- r, *paralela à reta focal,*
- η, *normal a $\mathcal{P}$ (isto é, perpendicular à reta tangente a $\mathcal{P}$ no ponto P),*
- s, *que passa pelo foco F de $\mathcal{P}$.*

Mostre que os ângulos entre r e η e entre s e η são iguais.

Solução.
Suponhamos, sem perda de generalidade (escolhendo os eixos coordenados de forma apropriada), que $\mathcal{P} : y^2 = 4px$, com $p > 0$.

Temos que: $F = (p, 0)$ é o foco de $\mathcal{P}$ e $\overrightarrow{PF} = (p - x_0, -y_0)$ é um vetor paralelo à reta s; o vetor $(1, 0)$ é paralelo à reta r e, pelo exemplo anterior, $\overrightarrow{n} = (y_0, -2x_0)$ é um vetor paralelo à reta η, normal a $\mathcal{P}$ no ponto $P = (x_0, y_0)$.

Sejam θ_1 o ângulo entre $\overrightarrow{PF}$ e $\overrightarrow{n}$, e θ_2 o ângulo entre $\overrightarrow{n}$ e o vetor $(1, 0)$. Então,

$$\cos\theta_1 = \frac{x_0 y_0 + p y_0}{\sqrt{y_0^2 + 4x_0^2}\sqrt{(p - x_0)^2 + y_0^2}} \qquad \text{e} \qquad \cos\theta_2 = \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2 + 4x_0^2}} \,.$$

Como

$$\begin{aligned}
(p - x_0)^2 + y_0^2 &= p^2 - 2x_0 p + x_0^2 + y_0^2 \\
&= p^2 - 2x_0 p + x_0^2 + 4p x_0 \\
&= p^2 + 2x_0 p + x_0^2 \\
&= (x_0 + p)^2 \,,
\end{aligned}$$

e $x_0 + p > 0$, temos que $x_0 + p = \sqrt{(p - x_0)^2 + y_0^2}$.

Logo,

$$\cos\theta_1 = \frac{x_0 y_0 + p y_0}{\sqrt{y_0^2 + 4x_0^2}\sqrt{(p - x_0)^2 + y_0^2}} = \frac{y_0 (x_0 + p)}{\sqrt{y_0^2 + 4x_0^2}\,(x_0 + p)} = \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2 + 4x_0^2}} = \cos\theta_2 \,.$$

Portanto, $\theta_1 = \theta_2$. □

Exemplo 10

Determine a equação da reta tangente à parábola $\mathcal{P} : x^2 = y + 1$ *paralela à reta* $r : 2x - y = 0$*, e o ponto de tangência.*

Solução.

Seja $r_m : 2x - y = m$ uma reta paralela à reta r.

Como r_m não é paralela ao eixo$-OY$ (reta focal), temos que r_m é tangente a $\mathcal{P}$ se, e só se, $r_m \cap \mathcal{P}$ consiste de um único ponto, ou seja, a equação $x^2 = 2x - m + 1$ possui uma única solução. Logo, o discriminante da equação $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ é igual a zero, ou seja, $\Delta = 4 - 4(m - 1) = 0$.

Então $m = 2$ e $2x - y = 2$ é a reta tangente a $\mathcal{P}$, paralela à reta $2x - y = 0$.

Como o ponto de tangência $P = (x, y)$ é o ponto de interseção da reta $2x - y = 2$ com a parábola $x^2 = y + 1$, temos $x^2 = 2x - 2 + 1 = 2x - 1$, ou seja, $x^2 - 2x + 1 = 0$.

Então $x = 1$ e $y = 2x - 2 = 0$, isto é, $(1, 0)$ é o ponto onde a reta $2x - y = 2$ tangencia a parábola $\mathcal{P} : x^2 = y + 1$. $\square$