Aula 22

1. Definição geral de uma cônica

Definição 1

Seja $e > 0$ *uma constante,* F *um ponto e* $\mathcal{L}$ *uma reta do plano tal que* $F \notin \mathcal{L}$*.*

A **cônica** $\mathcal{C}$ *de excentricidade* e*, foco* F *e diretriz* $\mathcal{L}$ *é o conjunto que consiste dos pontos* P *do plano tais que:*

$$\boxed{\frac{d(P,F)}{d(P,\mathcal{L})} = e}$$

Isto é,

$$\mathcal{C} = \left\{ P \;\middle|\; \frac{d(P,F)}{d(P,\mathcal{L})} = e \right\}$$

.

Observação 1

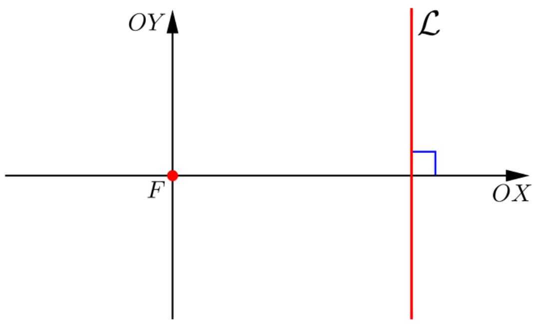
Quando $e = 1$*, a cônica é uma parábola, que já foi estudada.*

Vamos provar que, se $0 < e < 1$, a cônica é uma elipse, e se $e > 1$, a cônica é uma hipérbole.

Para isso, escolheremos um sistema de eixos ortogonais OXY tal que (veja a figura abaixo)

$$F = (0,0) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L} : x = m\,,$$

onde $m > 0$.



Temos, então, que:

$$
\begin{aligned}
P=(x,y)\in\mathcal{C} &\iff \sqrt{x^2+y^2}=e\,|x-m| \iff x^2+y^2=e^2(x-m)^2\\
&\iff x^2+y^2=e^2(x^2-2mx+m^2) \iff (1-e^2)\left(x^2+\frac{2me^2}{1-e^2}x\right)+y^2=m^2e^2\\
&\iff (1-e^2)\left(x+\frac{me^2}{1-e^2}\right)^2+y^2=m^2e^2+\frac{(1-e^2)m^2e^4}{(1-e^2)^2}\\
&\iff (1-e^2)\left(x+\frac{me^2}{1-e^2}\right)^2+y^2=m^2e^2\left(1+\frac{e^2}{1-e^2}\right)\\
&\iff (1-e^2)\left(x+\frac{me^2}{1-e^2}\right)^2+y^2=\frac{m^2e^2}{1-e^2}\\
&\iff \frac{\left(x+\frac{me^2}{1-e^2}\right)^2}{\frac{m^2e^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y^2}{\frac{m^2e^2}{1-e^2}}=1\,.
\end{aligned}
$$

• **Se** $0<e<1$, então $1-e^2>0$. Assim, $\mathcal{C}$ é uma elipse, cuja reta focal é o eixo$-OX$.

Como $0<1-e^2<1$, temos $\dfrac{m^2e^2}{(1-e^2)^2}>\dfrac{m^2e^2}{1-e^2}$.

Logo $a=\dfrac{me}{1-e^2}$, $b=\dfrac{me}{\sqrt{1-e^2}}$, e

$$
\begin{aligned}
&c^2=a^2-b^2=\frac{m^2e^2}{1-e^2}\left(\frac{1}{1-e^2}-1\right)=\frac{m^2e^2}{1-e^2}\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)\\
&\Longrightarrow c^2=\frac{m^2e^4}{(1-e^2)^2}\Longrightarrow c=\frac{me^2}{1-e^2}\,.
\end{aligned}
$$

Além disso:

- $\dfrac{c}{a}=\dfrac{me^2}{1-e^2}\times\dfrac{1-e^2}{me}=e$ é a excentricidade.
- $C=\left(\dfrac{-me^2}{1-e^2},0\right)$ é o centro.
- $F_1=C+(c,0)=(0,0)=F$ é um foco.
- $\mathcal{L}: x=+m$ é perpendicular à reta focal $=$ eixo$-OX$

e

$$
d(C,\mathcal{L})=|x-m|=\left|-\frac{me^2}{1-e^2}-m\right|=\left|\frac{me^2}{1-e^2}+m\right|=m\left|\frac{e^2+1-e^2}{1-e^2}\right|=\frac{m}{1-e^2}=\frac{a}{e}\,.
$$

• **Se** $e>1$ então $1-e^2<0$. Logo $\mathcal{C}$ é uma hipérbole com reta-focal $=$ eixo$-OX$, pois

$$
\frac{m^2e^2}{(1-e^2)^2}>0 \quad \text{e} \quad \frac{m^2e^2}{1-e^2}<0\,.
$$

Assim,

$$\mathcal{C}: \frac{\left(x + \frac{me^2}{1-e^2}\right)^2}{\frac{m^2e^2}{(1-e^2)^2}} - \frac{y^2}{\frac{m^2e^2}{e^2-1}} = 1\,,$$

onde

$$a = \sqrt{\frac{m^2e^2}{(1-e^2)^2}} = \frac{me}{e^2-1}\,,\; b = \sqrt{\frac{m^2e^2}{e^2-1}} = \frac{me}{\sqrt{e^2-1}}\,,$$

e

$$\begin{aligned}
c^2 = &\; a^2+b^2 = \frac{m^2e^2}{(1-e^2)^2} + \frac{m^2e^2}{e^2-1} = \frac{m^2e^2}{1-e^2}\left(\frac{1}{1-e^2}-1\right)\\
\Longrightarrow &\; c^2 = \frac{m^2e^2}{1-e^2}\left(\frac{1-1+e^2}{1-e^2}\right) = \frac{m^2e^4}{(1-e^2)^2}\\
\Longrightarrow &\; c = \frac{me^2}{e^2-1}\,.
\end{aligned}$$

Também:

- $\frac{c}{a} = \frac{me^2}{e^2-1} \times \frac{e^2-1}{me} = e$ é a excentricidade,
- $C = \left(-\frac{me^2}{1-e^2}, 0\right)$ é o centro,
- $F_1 = C + (c, 0) = (0, 0) = F$ é um foco,
- $\mathcal{L} : x = m$ é perpendicular à reta-focal $=$ eixo$-OX$ e

$$\begin{aligned}
d(C,\mathcal{L}) &= |x-m| = \left|-\frac{me^2}{1-e^2} - m\right| = \left|\frac{me^2}{1-e^2} + m\right| = m\left|\frac{e^2}{1-e^2}+1\right|\\
&= m\left|\frac{1}{1-e^2}\right| = \frac{m}{e^2-1} = \frac{a}{e}
\end{aligned}$$

Elipse

No caso de uma elipse de focos F_1 e F_2 temos duas diretrizes $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ correspondentes a cada um dos focos.

A diretriz $\mathcal{L}_i$ correspondente ao foco F_i, $i = 1, 2$, é a reta perpendicular à reta focal que está à distância $\frac{a}{e}$ do centro, com o foco F_i pertencente ao segmento CM_i, onde M_i é o ponto da interseção da reta focal ℓ com $\mathcal{L}_i$.

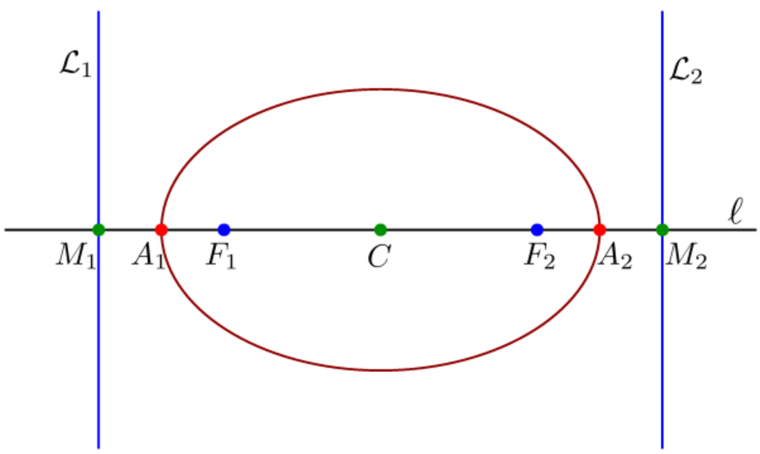


Fig. 1: Focos, vértices e diretrizes da elipse.

- Para a elipse

$$\mathcal{E} : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1\,,$$

de centro $C = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo-OX, a diretriz

$$\mathcal{L}_1 : x = x_0 - \frac{a}{e}$$

corresponde ao foco $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e a diretriz

$$\mathcal{L}_2 : x = x_0 + \frac{a}{e}$$

corresponde ao foco $F_2 = (x_0 + c, y_0)$.

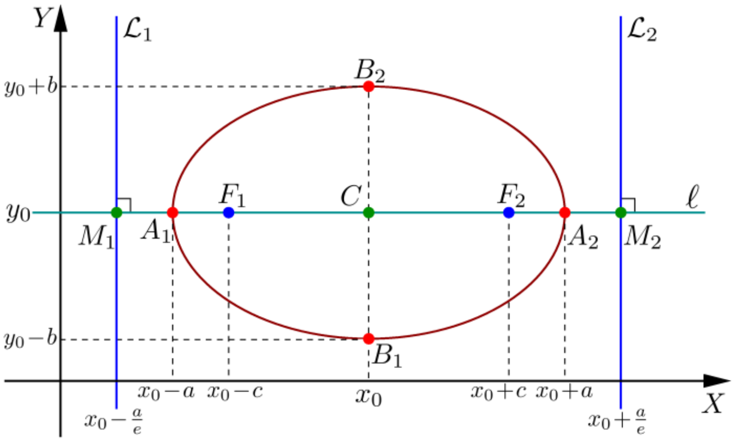


Fig. 2: Elipse $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ e seus principais elementos.

- Para a elipse

$$\mathcal{E} : \frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1\,,$$

de centro $C = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OY$,

$$\mathcal{L}_1 : y = y_0 - \frac{a}{e}$$

é a diretriz correspondente ao foco $F_1 = (x_0, y_0 - c)$, e

$$\mathcal{L}_2 : y = y_0 + \frac{a}{e}$$

é a diretriz correspondente ao foco $F_2 = (x_0, y_0 + c)$.

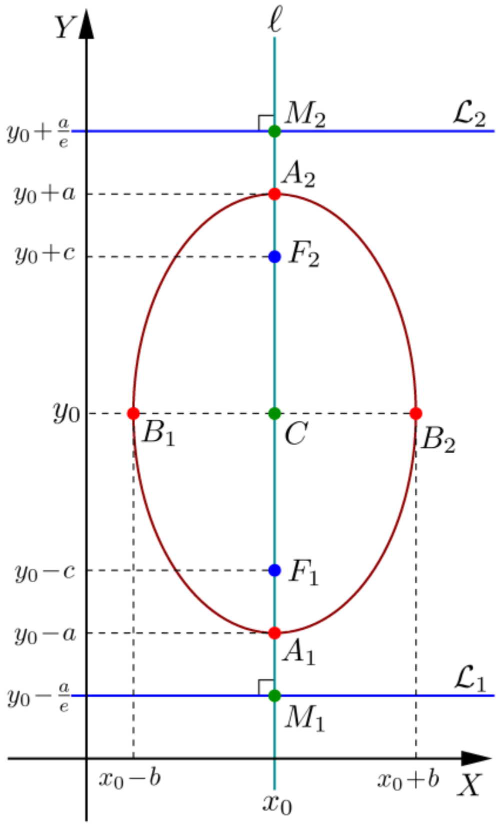


Fig. 3: Elipse $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$.

Hipérbole

No caso de uma hipérbole de focos F_1 e F_2 temos, também, duas diretrizes $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ correspondentes a cada um dos focos.

A diretriz $\mathcal{L}_i$ correspondente ao foco F_i, $i = 1, 2$, é a reta perpendicular à reta focal que está à distância $\frac{a}{e}$ do centro, com $M_i \in CF_i$, sendo M_i o ponto de interseção da diretriz $\mathcal{L}_i$ com a reta focal ℓ.

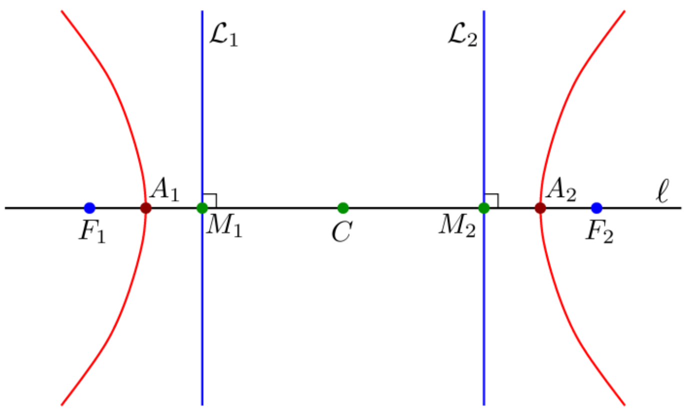


Fig. 4: Focos, vértices e diretrizes da hipérbole.

• Para a hipérbole

$$\mathcal{H} : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \,,$$

com centro $C = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OX$, a diretriz

$$\mathcal{L}_1 : x = x_0 - \frac{a}{e}$$

corresponde ao foco $F_1 = (x_0 - c, y_0)$, e a diretriz

$$\mathcal{L}_2 : x = x_0 + \frac{a}{e}$$

corresponde ao foco $F_2 = (x_0 + c, y_0)$.

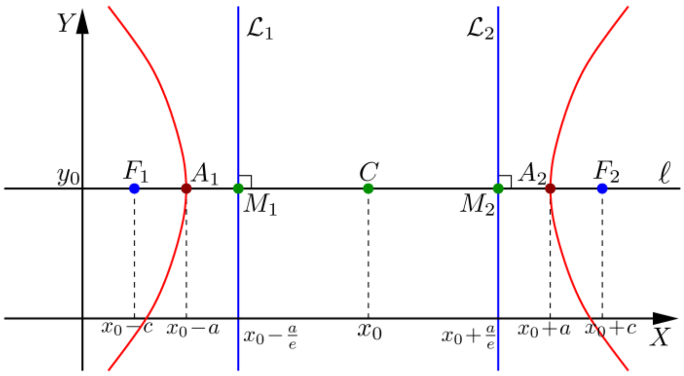


Fig. 5: Hipérbole $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$.

• Para a hipérbole

$$\mathcal{H} : \frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1 \,,$$

de centro $C = (x_0, y_0)$ e reta focal $\ell : x = x_0$ paralela ao eixo$-OY$, a diretriz

$$\mathcal{L}_1 : y = y_0 - \frac{a}{e}$$

corresponde ao foco $F_1 = (x_0, y_0 - c)$, e a diretriz

$$\mathcal{L}_2 : y = y_0 + \frac{a}{e}$$

corresponde ao foco $F_2 = (x_0, y_0 + c)$.

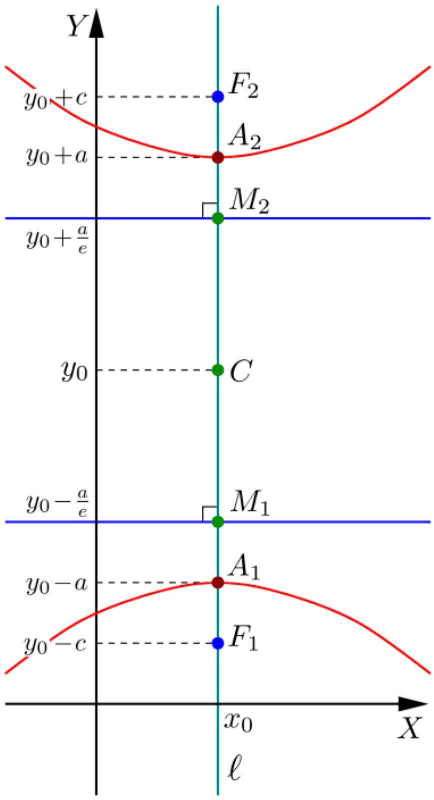


Fig. 6: Hipérbole $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$.

Exemplo 1

Determine os focos, os vértices e as equações das diretrizes das cônicas abaixo.

Faça um esboço da curva correspondente.

(a) $5x^2 + 9y^2 = 45$.

Solução.

A equação se escreve na forma $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ e representa a elipse com centro $C = (0, 0)$; reta focal: $y = 0$ (eixo$-OX$); $a^2 = 9$; $b^2 = 5$; $c^2 = a^2 - b^2 = 4$; focos: $F_1 = (-2, 0)$ e $F_2 = (2, 0)$; vértices sobre a reta focal: $A_1 = (-3, 0)$ e $A_2 = (3, 0)$; vértices sobre a reta não-focal: $B_1 = (0, -\sqrt{5})$ e $B_2 = (0, \sqrt{5})$; reta não-focal: $x = 0$ (eixo$-OY$); excentricidade $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{3}$; diretrizes: $\mathcal{L}_1 : x = -\dfrac{a}{e} = -\dfrac{9}{2}$ e $\mathcal{L}_2 : x = \dfrac{a}{e} = \dfrac{9}{2}$, correspondentes aos focos F_1 e F_2, respectivamente. □

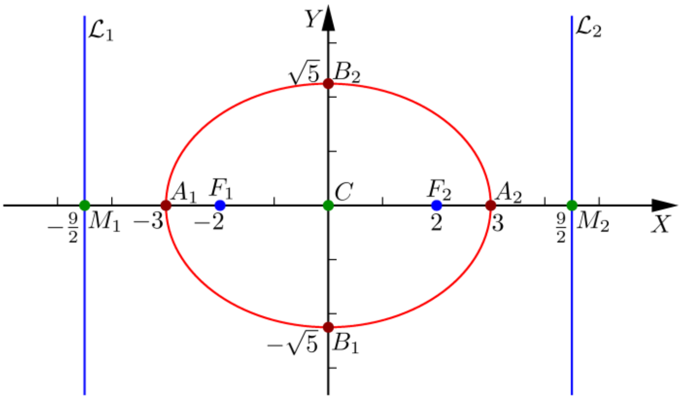


Fig. 7: Elipse $\mathcal{E} : 5x^2 + 9y^2 = 45$.

(b) $2y^2 - 7x^2 = 14$.

Solução.

A equação se escreve na forma

$$\mathcal{H} : \frac{y^2}{7} - \frac{x^2}{2} = 1,$$

e representa a hipérbole com centro $C = (0, 0)$; reta focal $\ell : x = 0$ (eixo$-OY$); $a^2 = 7$; $b^2 = 2$; $c^2 = a^2 + b^2 = 9$; focos: $F_1 = (0, -3)$ e $F_2 = (0, 3)$; vértices: $A_1 = (0, -\sqrt{7})$ e $A_2 = (0, \sqrt{7})$; vértices imaginários: $B_1 = (-\sqrt{2}, 0)$ e $B_2 = (\sqrt{2}, 0)$; excentricidade: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{\sqrt{7}}$; diretrizes: $\mathcal{L}_1 : y = -\dfrac{a}{e} = -\dfrac{7}{3}$ e $\mathcal{L}_2 : y = \dfrac{a}{e} = \dfrac{7}{3}$, correspondentes aos focos F_1 e F_2, respectivamente, e assíntotas: $r_{\pm} : x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} y$. □

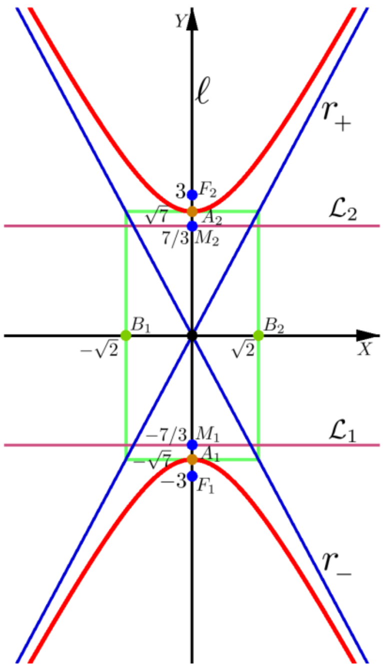


Fig. 8: Hipérbole $\mathcal{H} : 2y^2 - 7x^2 = 14$.

(c) $9x^2 - 18x + 25y^2 - 50y = 191$.

Solução.
Completando os quadrados na equação, temos:

$$\begin{aligned} & 9(x^2 - 2x) + 25(y^2 - 2y) = 191 \\ \iff & 9(x^2 - 2x + 1) + 25(y^2 - 2y + 1) = 191 + 9 + 25 \\ \iff & 9(x-1)^2 + 25(y-1)^2 = 225 \\ \iff & \mathcal{E} : \frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1\,. \end{aligned}$$

Assim, a cônica é a elipse com centro $C = (1, 1)$; reta focal $\ell : y = 1$, paralela ao eixo$-OX$; $a^2 = 25$, $b^2 = 9$, $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$; vértices sobre a reta focal: $A_1 = (1 - a, 1) = (-4, 1)$ e $A_2 = (1 + a, 1) = (6, 1)$; focos: $F_1 = (1 - c, 1) = (-3, 1)$ e $F_2 = (1 + c, 1) = (5, 1)$; vértices sobre a reta não-focal: $B_1 = (1, 1 - b) = (1, -2)$ e $B_2 = (1, 1 + b) = (1, 4)$; reta não-focal $\ell' : x = 1$, paralela ao eixo$-OY$; excentricidade: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$; diretrizes: $\mathcal{L}_1 : x = 1 - \frac{a}{e} = 1 - \frac{25}{4} = -\frac{21}{4}$ e $\mathcal{L}_2 : x = 1 + \frac{a}{e} = 1 + \frac{25}{4} = \frac{29}{4}$, correspondentes aos focos F_1 e F_2, respectivamente. □

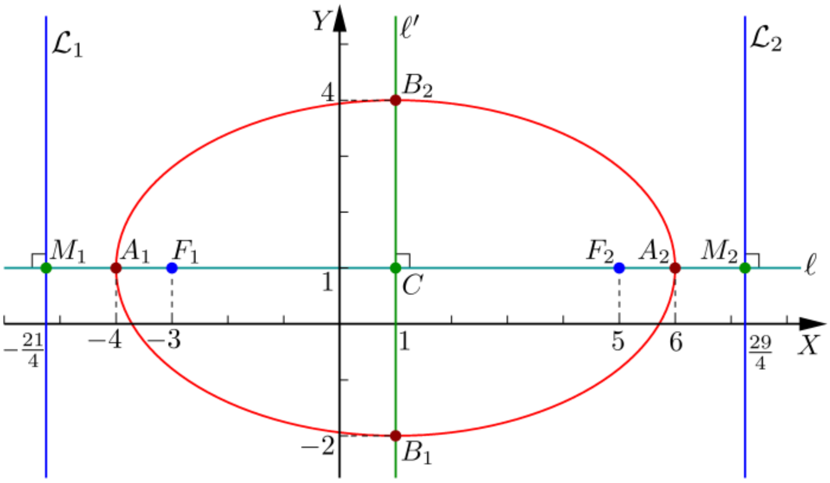


Fig. 9: Elipse $\mathcal{E} : 9x^2 - 18x + 25y^2 - 50y = 191$.

Exemplo 2

Considere a elipse de centro $C = (1, 1)$, foco $(3, 2)$ e excentricidade $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Determine os vértices, o outro foco, as diretrizes e a equação da elipse. Faça, também, um esboço da curva.

Solução.
Seja $F_2 = (3, 2)$ o foco dado. Temos que $c = d(C, F_2) = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

Como $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, temos $a = 3$. Logo $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 5 = 4$.

Seja F_1 o outro foco. Então $C = \frac{F_1 + F_2}{2}$, isto é, $F_1 = 2C - F2 = 2(1, 1) - (3, 2) = (-1, 0)$.

Seja ℓ a reta focal. Como $\ell \parallel \overrightarrow{CF_2} = (2,1)$, isto é, $\ell \perp (1,-2)$ e $C = (1,1) \in \ell$,

$$\ell : x - 2y = -1 .$$

Sejam $A_1 = (2y_1 - 1, y_1)$ e $A_2 = (2y_2 - 1, y_2)$ os vértices sobre a reta focal.

Como $d(A_1, C) = d(A_2, C) = a = 3$, temos que y_1 e y_2 são as raízes da equação:

$$\begin{aligned} & d((2y-1,y),C)^2 = 3^2 & \iff & \quad (2y-1-1)^2 + (y-1)^2 = 9 \\ \iff & \; 4(y-1)^2 + (y-1)^2 = 9 & \iff & \quad 5(y-1)^2 = 9 \\ \iff & \; (y-1)^2 = \frac{9}{5} & \iff & \quad y - 1 = \pm\frac{3}{\sqrt{5}} \\ \iff & \; y = 1 \pm \frac{3}{\sqrt{5}} & \iff & \quad y_1 = 1 - \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad \text{e} \quad y_2 = 1 + \frac{3}{\sqrt{5}} . \end{aligned}$$

Logo,

$$x_1 = 2y_1 - 1 = 2\left(1 - \frac{3}{\sqrt{5}}\right) - 1 = 1 - \frac{6}{\sqrt{5}}, \quad \text{e} \quad x_2 = 2y_2 - 1 = 2\left(1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right) - 1 = 1 + \frac{6}{\sqrt{5}} .$$

Assim,

$$A_1 = \left(1 - \frac{6}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{3}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{e} \quad A_2 = \left(1 + \frac{6}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right),$$

são os vértices sobre a reta focal.

Seja ℓ' a reta não-focal. Então $\ell' \parallel (1,-2) \parallel \dfrac{(1,-2)}{\sqrt{5}}$ e $C = (1,1) \in \ell'$. Logo,

$$\ell' : \begin{cases} x = 1 + \dfrac{t}{\sqrt{5}} \\ y = 1 - \dfrac{2t}{\sqrt{5}} \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R} ,$$

é a equação paramétrica da reta não-focal.

Seja B um dos vértices sobre a reta não-focal. Então,

$$B = (1,1) + t\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right), \quad \text{e} \quad |BC| = |t| \left|\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right| = |t| = b = 2 ,$$

ou seja, $t = \pm 2$. Logo,

$$\begin{aligned} B_1 &= (1,1) - 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{4}{\sqrt{5}}\right) \\ B_2 &= (1,1) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{4}{\sqrt{5}}\right) , \end{aligned}$$

são os vértices sobre a reta não-focal.

Como $\ell' \perp (2,1)$ e $C = (1,1) \in \ell'$, temos que $\ell' : 2x + y = 3$ é a equação cartesiana da reta não-focal.

Sejam $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ as diretrizes da elipse. Como essas retas são paralelas à reta não focal ℓ' e estão a distância $\dfrac{a}{e} = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$ de ℓ', temos que:

$$\mathcal{L}_1 : 2x + y = m_1\,, \qquad \mathcal{L}_2 : 2x + y = m_2\,, \quad \text{onde} \quad \frac{|m_1 - 3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|m_2 - 3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{a}{e} = \frac{9}{\sqrt{5}}\,.$$

Isto é, m_1 e m_2 são as soluções da equação $|m - 3| = 9$. Portanto, $m_1 = 3 - 9 = -6$ e $m_2 = 3 + 9 = 12$. Logo as diretrizes da elipse são:

$$\mathcal{L}_1 : 2x + y = -6\,, \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}_2 : 2x + y = 12\,.$$

Além disso, como $2 \times 3 + 2 = 8 < 12$, o foco $F_2 = (3, 2)$ está no semi-plano $2x + y < 12$ e, como $2 \times 3 + 2 = 8 > 3$, o foco F_2 está no semi-plano $2x + y > 3$. Logo o foco F_2 é o foco correspondente à diretriz $\mathcal{L}_2$ e, conseqüentemente, o foco $F_1 = (-1, 0)$ é o foco correspondente à diretriz $\mathcal{L}_1$.

Determinemos a equação da elipse $\mathcal{E}$.

Temos que $P = (x, y) \in \mathcal{E}$ se, e somente se,

$$\frac{d(P, F_2)}{d(P, \mathcal{L}_2)} = \frac{\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}}{\dfrac{|2x + y - 12|}{\sqrt{4+1}}} = \frac{\sqrt{5}}{3} = e\,,$$

isto é, se, e só se,

$$\begin{aligned}
& 9\,\left((x-3)^2 + (y-2)^2\right) = |2x + y - 12|^2\,, \\
\iff & 9\,\left(x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4\right) = (2x + y - 12)^2\,, \\
\iff & 9\,\left(x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4\right) = 4x^2 + y^2 + 4xy - 48x - 24y + 144\,, \\
\iff & \mathcal{E} : 5x^2 - 4xy + 8y^2 - 6x - 12y - 27 = 0\,,
\end{aligned}$$

Na seguinte figura mostramos o esboço da elipse $\mathcal{E}$. $\square$

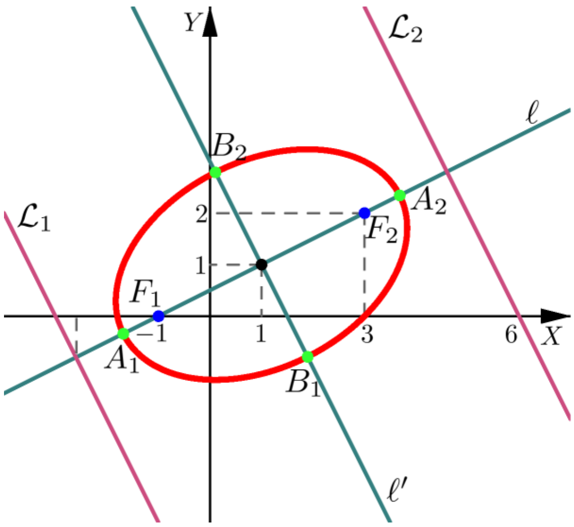


Fig. 10: Elipse $\mathcal{E} : 5x^2 - 4xy + 8y^2 - 6x - 12y - 27 = 0$.

Exemplo 3

Determine o vértice e a equação da parábola $\mathcal{P}$ que tem a reta $\mathcal{L} : 2x + y = 1$ como diretriz e foco na origem.

Solução.

Temos que um ponto $P = (x, y)$ pertence à parábola $\mathcal{P}$ se, e só se, $d(P, F) = d(P, \mathcal{L})$, ou seja, se, e somente se,

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{|2x+y-1|}{\sqrt{5}} \iff x^2+y^2 = \frac{(2x+y-1)^2}{5} \iff 5x^2+5y^2 = 4x^2+4xy+y^2-4x-2y+1\,.$$

Logo $x^2-4xy+4y^2+4x+2y-1=0$ é a equação da parábola $\mathcal{P}$.

A reta focal da parábola, ℓ, é a reta perpendicular à diretriz $\mathcal{L}$ que passa pelo foco $F=(0,0)$. Então $\ell : x-2y=0$.

Seja $A=(x,y)$ o ponto de interseção de ℓ e $\mathcal{L}$. Então as coordenadas x e y satisfazem o sistema

$$\begin{cases} x = 2y \\ 2x+y=1. \end{cases}$$

Substituindo $x=2y$ na segunda equação, obtemos $5y=1$, isto é, $y=\frac{1}{5}$. Logo $x=2y=\frac{2}{5}$ e $A=\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$.

Seja V o vértice da parábola. Como $d(V,F)=d(V,\mathcal{L})=d(V,A)$, temos que V é o ponto médio do segmento FA, isto é,

$$V = \frac{A+F}{2} = \left(\frac{2}{10},\frac{1}{10}\right) = \left(\frac{1}{5},\frac{1}{10}\right)\,.$$

A figura a seguir, mostra o esboço da parábola $\mathcal{P}$. $\square$

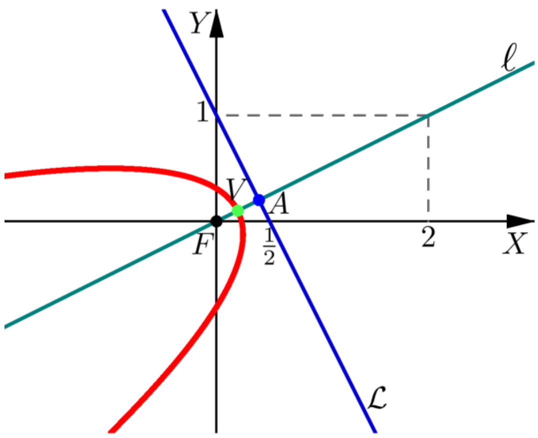


Fig. 11: Parábola $\mathcal{P} : x^2-4xy+4y^2+4x+2y-1=0$.

Exemplo 4

Determine o foco e a equação da parábola $\mathcal{P}$ que tem a reta $\mathcal{L} : 4x+3y=1$ como diretriz e vértice no ponto $V=(2,1)$.

Solução.

A reta focal ℓ é perpendicular ao vetor $(3,-4)$ e passa pelo vértice. Então $\ell : 3x-4y=2$.

Seja $A=(x,y)$ o ponto de interseção das retas ℓ e $\mathcal{L}$. Então,

$$\begin{cases} 4x+3y=1 & (\times 4) \\ 3x-4y=2 & (\times 3) \end{cases} \iff \begin{cases} 16x+12y=4 \\ 9x-12y=6 \end{cases} \Longrightarrow 25x=10\,,\; x=\frac{2}{5} \text{ e } y=\frac{1-4x}{3}=-\frac{1}{5}.$$

Isto é, $A = \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$.

Como V é o ponto médio do segmento AF, temos que $V = \frac{A+F}{2}$. Logo,

$$F = 2V - A = (4,2) - \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{18}{5}, \frac{11}{5}\right).$$

Determinemos a equação da parábola $\mathcal{P}$. Temos que $P = (x,y) \in \mathcal{P}$ se, e só se, $d(P,F) = d(P,\mathcal{L})$

$$\begin{aligned}
&\iff \left(x - \frac{18}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{5}\right)^2 = \frac{|4x+3y-1|^2}{25} \\
&\iff 25\left(x^2 - \frac{36}{5}x + \frac{324}{25}\right) + 25\left(y^2 - \frac{22}{5}y + \frac{121}{25}\right) = 16x^2 + 24xy + 9y^2 - 8x - 6y + 1 \\
&\iff 25x^2 - 180x + 324 + 25y^2 - 110y + 121 = 16x^2 + 24xy + 9y^2 - 8x - 6y + 1.
\end{aligned}$$

Logo $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 172x - 104y + 444 = 0$ é a equação da parábola $\mathcal{P}$.

Na seguinte figura mostramos o esboço do gráfico da parábola $\mathcal{P}$. $\square$

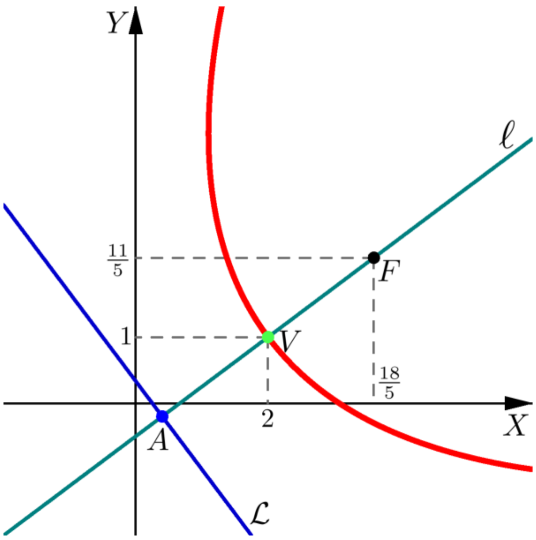


Fig. 12: Parábola $\mathcal{P} : 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 172x - 104y + 444 = 0$.

Exemplo 5

Determine a equação da elipse $\mathcal{E}$ e seus principais elementos, conhecendo-se um dos seus focos $(3,0)$, a equação da diretriz $x+y=1$ correspondente a esse foco e a sua excentricidade $e = 1/2$. Faça, também, um esboço da curva.

Solução.

Seja $\mathcal{L}_1 : x + y = 1$ a diretriz correspondente ao foco $F_1 = (3,0)$. Temos que $P = (x,y) \in \mathcal{E}$ se, e somente se, $\frac{d(P,F_1)}{d(P,\mathcal{L}_1)} = e = \frac{1}{2}$. Isto é,

$$\begin{aligned} P=(x,y)\in\mathcal{E} &\iff 2\,d(P,F)=d(P,\mathcal{L}_1)\iff 4\,d(P,F)^2=d(P,\mathcal{L}_1)^2\\ &\iff 4((x-3)^2+y^2)=\frac{(x+y-1)^2}{2}\\ &\iff 8(x^2-6x+9+y^2)=x^2+2xy+y^2-2x-2y+1\,. \end{aligned}$$

Logo $7x^2-2xy+7y^2-46x+2y+71=0$ é a equação da elipse $\mathcal{E}$.

Seja C o centro de $\mathcal{E}$. Como

$$d(F_1,\mathcal{L}_1)=d(C,\mathcal{L}_1)-d(C,F_1)=\frac{a}{e}-c=\frac{a}{e}-ae=2a-\frac{a}{2}=\frac{3a}{2}\,,$$

e $d(F_1,\mathcal{L}_1)=\dfrac{|3+0-1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, temos $\dfrac{3}{2}a=\sqrt{2}$, ou seja, $a=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$.

Logo $c=ae=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}\,\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ e $b^2=a^2-c^2=\dfrac{8}{9}-\dfrac{2}{9}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$, isto é, $b=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

A reta focal é a reta ℓ perpendicular a $\mathcal{L}_1$ que passa pelo foco $F_1=(3,0)$. Logo $\ell: x-y=3$ é a equação cartesiana de ℓ e

$$\ell:\begin{cases} x=t+3\\ y=t\end{cases}\;;\quad t\in\mathbb{R}\,,$$

é a equação paramétrica de ℓ.

Como o foco $F_1=(3,0)$ está contido no semi-plano $x+y>1$, determinado pela diretriz $\mathcal{L}_1$: $x+y=1$, para o qual o vetor $\overrightarrow{\mu}=(1,1)\parallel\ell$ aponta, e a cônica é uma elipse, temos que o centro $C\in\ell$ é da forma $C=(3+t,t)$, para algum $t>0$.

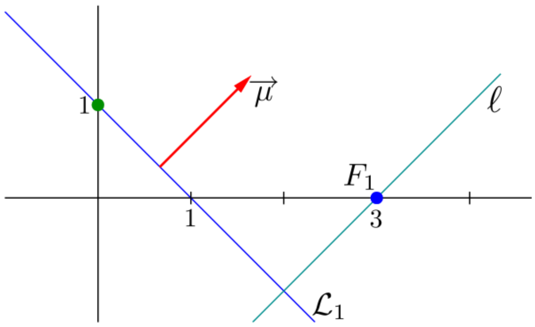


Fig. 13: Posição relativa de F_1 com respeito a $\mathcal{L}_1$.

Além disto, $d(F_1,C)=c=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, ou seja, $\|\overrightarrow{F_1C}\|=\|(t,t)\|=t\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Logo, $t=\dfrac{1}{3}$, e $C=\left(\dfrac{1}{3}+3,\dfrac{1}{3}\right)=\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

Seja A_1 o vértice sobre a reta focal ℓ que está entre F_1 e $\mathcal{L}_1$. Então $A_1=C+t(1,1)$ para algum $t<0$. Como $d(A_1,C)=\|\overrightarrow{A_1C}\|=|t|\sqrt{2}=-t\sqrt{2}=a=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, temos $t=-\dfrac{2}{3}$. Logo, $A_1=\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{1}{3}\right)-\dfrac{2}{3}(1,1)=\left(\dfrac{8}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$.

Seja A_2 o outro vértice sobre a reta focal. Então $C=\dfrac{A_1+A_2}{2}$, ou seja,

$$A_2 = 2C - A_1 = 2\left(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{12}{3}, \frac{3}{3}\right) = (4,1)\ .$$

Se F_2 é o outro foco, $C = \dfrac{F_1 + F_2}{2}$, isto é,

$$F_2 = 2C - F_1 = \left(\frac{20}{3}, \frac{2}{3}\right) - (3,0) = \left(\frac{11}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Seja ℓ' a reta não-focal. Como ℓ' é perpendicular a ℓ e passa pelo centro C, temos que:

$$\ell' : x + y = \frac{11}{3}.$$

Sejam B_1 e B_2 os vértices sobre a reta não-focal. Como $\ell' \parallel (1,-1)$ e $C \in \ell'$, temos que $B_i = C + t(1,-1)$ e $d(B_i, C) = |t|\sqrt{2} = b = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $i = 1,2$.

Logo $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Assim, os vértices sobre a reta não-focal ℓ' são:

$$B_1 = C + \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1) = \left(\frac{10}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ e } B_2 = C - \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1) = \left(\frac{10}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Falta determinar a diretriz $\mathcal{L}_2$ associada ao foco F_2.

Como $\mathcal{L}_2 \parallel \ell'$ e $d(\ell', \mathcal{L}_2) = \dfrac{a}{e} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$, temos que $\mathcal{L}_2 : x + y = m$ e $d(\ell', \mathcal{L}_2) = \dfrac{|m - 11/3|}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Logo $|m - 11/3| = \dfrac{8}{3}$, isto é,

$$m = \frac{11}{3} + \frac{8}{3} = \frac{19}{3} \qquad \text{ou} \qquad m = \frac{11}{3} - \frac{8}{3} = 1\,.$$

Assim, $\mathcal{L}_2 : x + y = \dfrac{19}{3}$, já que $x + y = 1$ é a diretriz $\mathcal{L}_1$.

Na figura abaixo, mostramos o esboço da elipse $\mathcal{E}$. $\square$

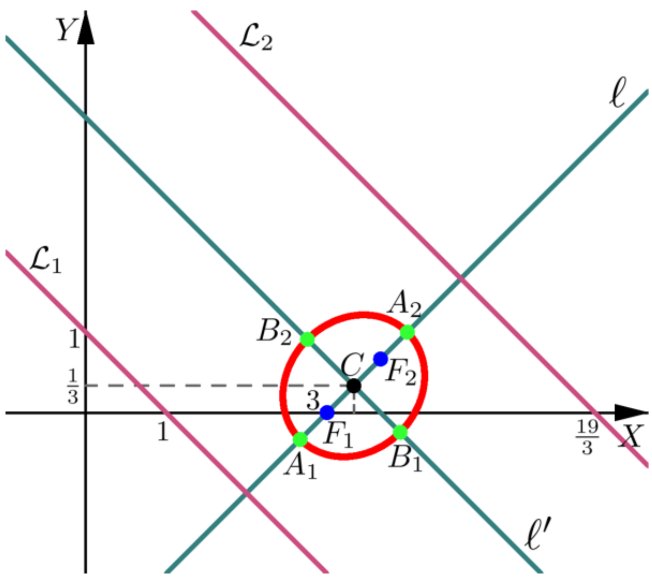


Fig. 14: Elipse $\mathcal{E} : 7x^2 - 2xy + 7y^2 - 46x + 2y + 71 = 0$.

Exemplo 6

O ponto $P_0 = (1, -2)$ pertence a uma cônica $\mathcal{C}$ em que um dos focos é o ponto $(-2, 2)$, sendo $2x - y = 1$ a diretriz correspondente a esse foco. Classifique a cônica, e determine sua equação e seus principais elementos.

Solução.

Sejam $F_1 = (-2, 2)$ e $\mathcal{L}_1 : 2x - y = 1$. Então,

$$P = (x, y) \in \mathcal{C} \iff \frac{d(P, F_1)}{d(P, \mathcal{L}_1)} = e = \frac{d(P_0, F_1)}{d(P_0, \mathcal{L}_1)}.$$

Como $d(P_0, F_1) = \sqrt{(-2-1)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ e $d(P_0, \mathcal{L}_1) = \frac{|2+2-1|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$, temos que $e = \frac{5\sqrt{5}}{3} > 1$. Então a cônica $\mathcal{C}$ é uma hipérbole, e um ponto $P = (x, y) \in \mathcal{C}$ se, e somente se, $\frac{d(P, F_1)}{d(P, \mathcal{L}_1)} = e = \frac{5\sqrt{5}}{3}$, isto é, se, e só se,

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}}{\dfrac{|2x-y-1|}{\sqrt{5}}} = \frac{5\sqrt{5}}{3} \quad &\iff \quad 9((x+2)^2 + (y-2)^2) = 25\,|2x-y-1|^2 \\
&\iff \quad 9(x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4) = 25\,(4x^2 - 4xy + y^2 - 4x + 2y + 1)\,.
\end{aligned}$$

Logo, $91x^2 - 100xy + 16y^2 - 136x + 86y - 47 = 0$ é a equação da hipérbole $\mathcal{C}$.

Como

$$\begin{aligned}
d(F_1, \mathcal{L}_1) &= c - \frac{a}{e} = ae - \frac{a}{e} = a\left(e - \frac{1}{e}\right) = a\left(\frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{3}{5\sqrt{5}}\right) \\
&= a\left(\frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{3\sqrt{5}}{25}\right) = a\,\frac{\sqrt{5}}{75}\,(125-9) = \frac{116\sqrt{5}}{75}\,a\,,
\end{aligned}$$

e $d(F_1, \mathcal{L}_1) = \frac{|-4-2-1|}{\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$, temos $\frac{116\sqrt{5}}{75}\,a = \frac{7\sqrt{5}}{5}$, isto é, $a = \frac{7\times 15}{116} = \frac{105}{116}$.

Logo, $c = ae = \frac{105}{116} \times \frac{5\sqrt{5}}{3} = \frac{175\sqrt{5}}{116}$ e

$$b^2 = c^2 - a^2 = \frac{175^2 \times 5 - 105^2}{116^2} = \frac{5^2 \times 7^2}{116^2}(125-9) = \frac{5^2 \times 7^2}{116^2}(116) = \frac{5^2 \times 7^2}{2^2 \times 29}.$$

Assim, $b = \frac{5\times 7}{2\sqrt{29}} = \frac{35}{2\sqrt{29}} = \frac{35\sqrt{29}}{58}$.

Como a reta focal ℓ é perpendicular a $\mathcal{L}_1$ e passa pelo foco F_1, temos que $\ell \perp (1, 2)$ e, portanto, $\ell : x + 2y = 2$ é a equação cartesiana da reta focal.

Seja C o centro da hipérbole.

Como o foco $F_1 = (-2, 2)$ pertence ao semi-plano $2x - y < 1$, determinado pela diretriz $\mathcal{L}_1$, e a cônica é uma hipérbole, temos que $C = F_1 + t(2, -1)$, para algum $t > 0$, pois o vetor $\overrightarrow{\mu} = (2, -1)$ aponta para o semi-plano $2x - y > 1$, no qual o centro C se encontra.

Além disso, $\|\overrightarrow{CF_1}\| = t\sqrt{5} = c = \dfrac{175\sqrt{5}}{116}$, isto é, $t = \dfrac{175}{116}$. Portanto,

$$\begin{aligned} C &= F_1 + \frac{175}{116}(2,-1) = (-2,2) + \frac{175}{116}(2,-1) \\ &= (-2,2) + \left(\frac{350}{116}, -\frac{175}{116}\right) \\ &= \left(\frac{-232+350}{116}, \frac{232-175}{116}\right) = \left(\frac{118}{116}, \frac{57}{116}\right). \end{aligned}$$

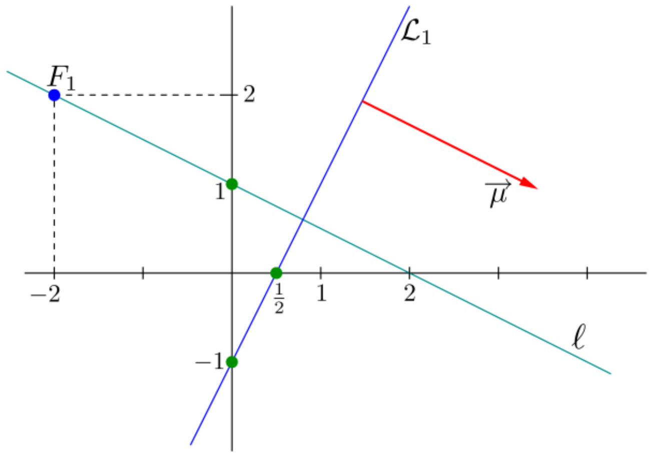


Fig. 15: Posição relativa do centro C com respeito à diretriz $\mathcal{L}_1$.

Seja A_1 o vértice da hipérbole entre C e F_1.

Então $A_1 = C + t(2,-1)$ para algum $t < 0$ e

$$d(A_1, C) = \|\overrightarrow{A_1C}\| = -t\sqrt{5} = a = \frac{105}{116}.$$

Logo, $\quad t = -\dfrac{105}{116\sqrt{5}} = -\dfrac{21\sqrt{5}}{116}$, e

$$A_1 = C - \frac{21\sqrt{5}}{116}(2,-1) = \left(\frac{118}{116}, \frac{57}{116}\right) - \frac{21\sqrt{5}}{116}(2,-1) = \left(\frac{118-42\sqrt{5}}{116}, \frac{57+21\sqrt{5}}{116}\right).$$

Seja A_2 o outro vértice da hipérbole. Então $C = \dfrac{A_1 + A_2}{2}$, isto é,

$$\begin{aligned} A_2 = 2C - A_1 &= 2C - C + \frac{21\sqrt{5}}{116}(2,-1) = C + \frac{21\sqrt{5}}{116}(2,-1) = \left(\frac{118}{116}, \frac{57}{116}\right) + \frac{21\sqrt{5}}{116}(2,-1) \\ &= \left(\frac{118+42\sqrt{5}}{116}, \frac{57-21\sqrt{5}}{116}\right). \end{aligned}$$

Seja F_2 o outro foco da hipérbole. Então $C = \dfrac{F_1 + F_2}{2}$, isto é,

$$\begin{aligned} F_2 = 2C - F_1 &= 2\left(F_1 + \frac{175}{116}(2,-1)\right) - F_1 = 2F_1 + 2\,\frac{175}{116}(2,-1) - F_1 \\ &= F_1 + 2\,\frac{175}{116}(2,-1) = (-2,2) + \frac{175}{116}(4,-2) \\ &= \left(\frac{-2\times 116 + 175\times 4}{116}, \frac{2\times 116 - 175\times 2}{116}\right) \\ &= \left(\frac{468}{116}, -\frac{118}{116}\right). \end{aligned}$$

Seja ℓ' a reta não-focal. Como $\ell' \parallel \mathcal{L}_1$ e $C \in \ell'$, temos que $\ell' : 2x - y = \dfrac{2\times 118 - 57}{116} = \dfrac{179}{116}$.

Seja $\mathcal{L}_2$ a diretriz associada ao foco F_2. Então $\mathcal{L}_2 \parallel \ell'$ e $d(\ell', \mathcal{L}_2) = \dfrac{a}{e} = \dfrac{105}{116} \times \dfrac{3}{5\sqrt{5}} = \dfrac{63}{116\sqrt{5}}$.

Logo, $\mathcal{L}_2 : 2x - y = m \quad$ e $\quad \dfrac{|m - 179/116|}{\sqrt{5}} = \dfrac{63}{116\sqrt{5}}$, isto é, $m = \dfrac{242}{116}$ ou $m = \dfrac{116}{116} = 1$. Como a segunda alternativa corresponde à diretriz $\mathcal{L}_1$, temos que $\mathcal{L}_2 : 2x - y = \dfrac{242}{116}$.

Os vértices imaginários B da hipérbole estão sobre a reta não-focal ℓ' a distância b do centro.

Assim, $B = C + t(1,2)$ e $d(B,C) = |t|\sqrt{5} = b = \dfrac{35\sqrt{29}}{58}$.

Logo, $t = \pm\dfrac{7\sqrt{29\times 5}}{58} = \pm\dfrac{7\sqrt{145}}{58}$, e

$$B_1 = \left(\frac{118}{116}, \frac{57}{116}\right) + \frac{7\sqrt{145}}{58}(1,2) \qquad \text{e} \qquad B_2 = \left(\frac{118}{116}, \frac{57}{116}\right) - \frac{7\sqrt{145}}{58}(1,2).$$

As assíntotas $r^{\pm}$ são as duas retas que passam pelo centro e têm inclinação $\pm\dfrac{b}{a}$, onde $\dfrac{b}{a} = \dfrac{35\sqrt{29}}{58} \times \dfrac{116}{105} = \dfrac{2\times 5\times 7\times\sqrt{29}}{3\times 5\times 7} = \dfrac{2}{3}\sqrt{29}$, em relação à reta focal $\ell : y = -\dfrac{x}{2} + 1$.

Então,

$$r_{\pm} : y - \frac{57}{116} = \text{tg}(\theta \pm \varphi)\left(x - \frac{118}{116}\right),$$

onde $\text{tg}\,\theta = -\dfrac{1}{2}$, e $\text{tg}\,\varphi = \dfrac{b}{a} = \dfrac{2}{3}\sqrt{29}$. Logo,

$$r_{+} : y - \frac{57}{116} = \frac{25 - 3\sqrt{29}}{8}\left(x - \frac{118}{116}\right)$$
$$r_{-} : y - \frac{57}{116} = \frac{25 + 3\sqrt{29}}{8}\left(x - \frac{118}{116}\right),$$

pois

$$\text{tg}(\theta+\varphi) = \frac{\text{tg}\,\theta + \text{tg}\,\varphi}{1 - \text{tg}\,\theta\;\text{tg}\,\varphi} = \frac{-1/2 + 2\sqrt{29}/3}{1+\sqrt{29}/3} = \frac{-3+4\sqrt{29}}{6+2\sqrt{29}} = \frac{25-3\sqrt{29}}{8},$$

e

$$\text{tg}(\theta-\varphi) = \frac{\text{tg}\,\theta - \text{tg}\,\varphi}{1 + \text{tg}\,\theta\;\text{tg}\,\varphi} = \frac{-1/2 - 2\sqrt{29}/3}{1-\sqrt{29}/3} = -\frac{3+4\sqrt{29}}{6-2\sqrt{29}} = \frac{25+3\sqrt{29}}{8}.$$

Na figura abaixo mostramos um esboço da hipérbole $\mathcal{C}$. □

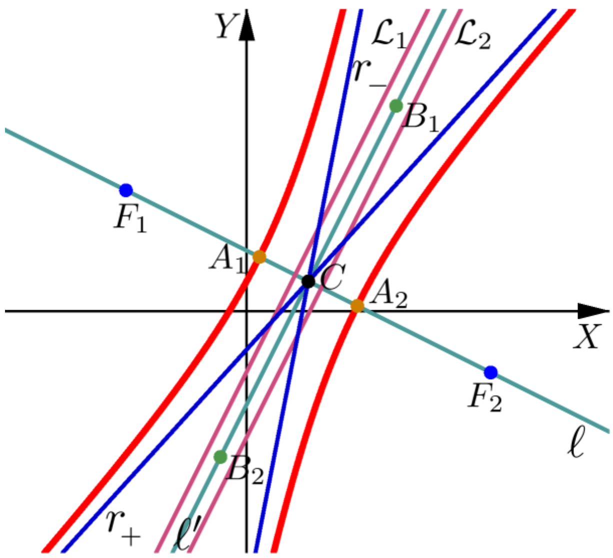


Fig. 16: Hipérbole $\mathcal{H} : 91x^2 - 100xy + 16y^2 - 136x + 86y - 47 = 0$.