Aula 23

1. Exemplos diversos

Exemplo 1

Determine a equação da hipérbole equilátera, $\mathcal{H}$, que passa pelo ponto $Q = (-1, -5)$ e tem os eixos coordenados como assíntotas.

Solução.

Como as assíntotas da hipérbole são os eixos coordenados e a reta focal é uma das bissetrizes das assíntotas, temos que $\ell : x = -y$ ou $\ell : x = y$.

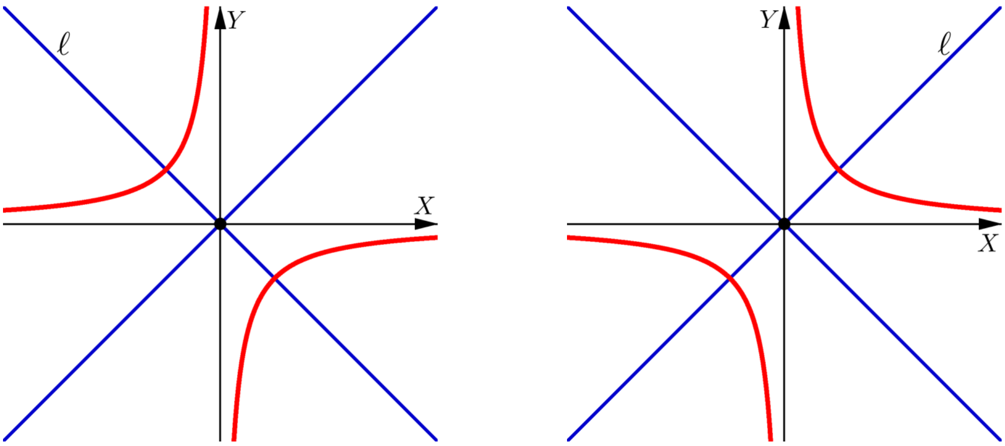

Fig. 1: Caso $\ell : x = -y$. Fig. 2: Caso $\ell : x = y$.

Se a reta focal ℓ fosse a reta $x = -y$, a hipérbole estaria inteiramente contida no 2^o e 4^o quadrantes, o que é um absurdo, pois o ponto $Q = (-1, -5)$, pertencente à hipérbole $\mathcal{H}$, está no 3^o quadrante.

Logo, $\ell : x = y$.

Além disso, o centro C da hipérbole, ponto de intersecção das assíntotas, é a origem. Então, seus focos são da forma $F_1 = (-m, -m)$ e $F_2 = (m, m)$, para algum $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

Como $c = d(F_1, C) = d(F_2, C)$, $c^2 = a^2 + b^2$ e $a = b$, já que a hipérbole é equilátera, temos que:

$$a^2 + a^2 = c^2 = m^2 + m^2 , \qquad \text{ou seja,} \qquad a = m.$$

Assim, um ponto $P = (x, y)$ pertence à hipérbole $\mathcal{H}$ se, e só se,

$$
\begin{aligned}
& \left| \sqrt{(x+m)^2+(y+m)^2} - \sqrt{(x-m)^2+(y-m)^2} \right| = 2m \\
\iff\ & \sqrt{(x+m)^2+(y+m)^2} = \pm 2m + \sqrt{(x-m)^2+(y-m)^2} \\
\iff\ & (x+m)^2+(y+m)^2 = 4m^2 + (x-m)^2+(y-m)^2 \pm 4m\sqrt{(x-m)^2+(y-m)^2} \\
\iff\ & x^2+2mx+m^2+y^2+2my+m^2 = 4m^2+x^2-2mx+m^2+y^2-2my+m^2 \\
& \pm 4m\sqrt{(x-m)^2+(y-m)^2} \\
\iff\ & 2mx+2my = 4m^2-2mx-2my \pm 4m\sqrt{(x-m)^2+(y-m)^2} \\
\iff\ & 4mx+4my = 4m^2 \pm 4m\sqrt{(x-m)^2+(y-m)^2} \\
\iff\ & x+y = m \pm \sqrt{(x-m)^2+(y-m)^2} \\
\iff\ & x+y-m = \pm\sqrt{(x-m)^2+(y-m)^2} \\
\iff\ & (x+y-m)^2 = (x-m)^2+(y-m)^2 \\
\iff\ & x^2+y^2+2xy+m^2-2mx-2my = x^2-2mx+m^2+y^2-2my+m^2 \\
\iff\ & 2xy = m^2 \\
\iff\ & xy = \frac{m^2}{2}.
\end{aligned}
$$

Como $Q = (-1,-5) \in \mathcal{H}$, temos que $\frac{m^2}{2} = (-1)(-5)$, isto é, $m^2 = 10$. Logo, $xy = 5$ é a equação da hipérbole $\mathcal{H}$. □

Exemplo 2

Seja $\mathcal{C}$ uma cônica centrada no ponto $C = (1,2)$, de excentricidade $e = \frac{1}{2}$, reta focal paralela ao eixo$-OX$ e $d(F,L) = 3$, onde $\mathcal{L}$ é a diretriz correspondente ao foco F de $\mathcal{C}$.

Classifique a cônica e determine seus vértices, seus focos, suas diretrizes e sua equação.

Solução.

A cônica $\mathcal{C}$ é uma elipse, pois $e = \frac{1}{2} < 1$. Então,

$$3 = d(F,\mathcal{L}) = d(C,\mathcal{L}) - d(C,F) = \frac{a}{e} - c = \frac{a}{e} - ae \iff 3 = 2a - \frac{a}{2} = \frac{3a}{2} \iff a = 2.$$

Sendo $a = 2$, temos que $c = ae = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ e $b = \sqrt{a^2-c^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.

Além disso, a reta $\ell : y = 2$, paralela ao eixo$-OX$, é a reta focal da cônica $\mathcal{C}$. Logo,

$$\mathcal{C} : \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{3} = 1$$

é a equação canônica da elipse.

Nessa elipse:

- $A_1 = (-1,2)$ e $A_2 = (3,2)$ são os vértices sobre a reta focal.

• $B_1 = (1, 2-\sqrt{3})$ e $B_2 = (1, 2+\sqrt{3})$ são os vértices sobre a reta não-focal.

• $F_1 = (0, 2)$ e $F_2 = (2, 2)$ são os focos.

• $\mathcal{L}_1 : x = 1 - \dfrac{a}{e} = -3$ e $\mathcal{L}_2 : x = 1 + \dfrac{a}{e} = 5$ são as diretrizes correspondentes aos focos F_1 e F_2, respectivamente. $\square$

Exemplo 3

Seja $\mathcal{C}$ uma cônica centrada no ponto $(1,2)$, de excentricidade $e = 2$, reta focal paralela ao eixo$-OY$ e $d(F,\mathcal{L}) = 3$, onde $\mathcal{L}$ é a diretriz correspondente ao foco F de $\mathcal{C}$.

Classifique a cônica e determine seus vértices, seus focos, suas diretrizes e sua equação.

Solução.

A cônica $\mathcal{C}$ é uma hipérbole, pois $e = 2 > 1$. Então,

$$3 = d(F,\mathcal{L}) = d(F,C) - d(C,\mathcal{L}) = c - \frac{a}{e} = ae - \frac{a}{e} \iff 3 = 2a - \frac{a}{2} = \frac{3a}{2} \iff a = 2.$$

Logo, $c = ae = 4$ e $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Como a reta focal $\ell : x = 1$ é paralela ao eixo$-OY$, temos que:

$$\mathcal{C} : \frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{12} = 1\,,$$

é a equação da hipérbole, com:

• vértices: $A_1 = (1,0)$ e $A_2 = (1,4)$.

• vértices imaginários: $B_1 = (1-2\sqrt{3}, 2)$ e $B_2 = (1+2\sqrt{3}, 2)$.

• focos: $F_1 = (1,-2)$ e $F_2 = (1,6)$.

• diretrizes: $\mathcal{L}_1 : y = 2 - \dfrac{a}{e} = 1$ e $\mathcal{L}_2 : y = 2 + \dfrac{a}{e} = 3$, correspondentes aos focos F_1 e F_2, respectivamente.

• assíntotas: $x - 1 = \pm\sqrt{3}\,(y-2)$. $\square$

Exemplo 4

Classifique, em função do parâmetro $k \in \mathbb{R}$, a família de curvas

$$4x^2 + ky^2 + 8kx + 20k + 24 = 0\,,$$

indicando, nos casos não-degenerados, se a reta focal é paralela ao eixo$-OX$ ou ao eixo$-OY$.

Solução.

Completando o quadrado na equação, temos que:

$$
\begin{aligned}
& 4x^2 + ky^2 + 8kx + 20k + 24 = 0 \\
\iff\; & 4(x^2 + 2kx) + ky^2 = -20k - 24 \\
\iff\; & 4(x^2 + 2kx + k^2) + ky^2 = -20k - 24 + 4k^2 \\
\iff\; & 4(x+k)^2 + ky^2 = 4(k^2 - 5k - 6) \\
\iff\; & 4(x+k)^2 + ky^2 = 4(k+1)(k-6)\,.
\end{aligned}
$$

Estudo do sinal dos coeficientes k e $(k+1)(k-6)$ da equação:

	$-\infty < k < -1$	$k = -1$	$-1 < k < 0$	$k = 0$	$0 < k < 6$	$k = 6$	$6 < k < +\infty$
k	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(k+1)(k-6)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

Então, para:

• $k \in (-\infty, -1)$, a equação representa uma hipérbole de centro $(-k, 0)$ e reta focal $=$ eixo$-OX$.

• $k = -1$, a equação $4(x-1)^2 - y^2 = 0$ representa o par de retas concorrentes $y = \pm 2(x-1)$ que passam pelo ponto $(1, 0)$.

• $k \in (-1, 0)$, a equação representa uma hipérbole de centro $(-k, 0)$ e reta focal $\ell : x = -k$ paralela ao eixo$-OY$.

• $k = 0$, a equação $4x^2 = -24$ representa o conjunto vazio.

• $k \in (0, 6)$, a equação representa o conjunto vazio, pois $4(x+k)^2 + ky^2 \geq 0$ e $4(k+1)(k-6) < 0$ nesse intervalo.

• $k = 6$, a equação $4(x+6)^2 + 6y^2 = 0$ representa o ponto $(-6, 0)$.

• $k \in (6, +\infty)$, a equação, que pode ser escrita na forma:

$$
\frac{(x+k)^2}{\dfrac{4(k+1)(k-6)}{4}} + \frac{y^2}{\dfrac{4(k+1)(k-6)}{k}} = 1\,,
$$

representa uma elipse de centro $(-k, 0)$ e reta focal $\ell =$ eixo$-OX$, pois $\dfrac{4(k+1)(k-6)}{4} > \dfrac{4(k+1)(k-6)}{k}$ nesse intervalo. $\square$

Exemplo 5

Sejam OXY *um sistema de eixos ortogonais e* $O\overline{X}\,\overline{Y}$ *o sistema de eixos ortogonais obtido por uma rotação positiva de um ângulo* θ *dos eixos* OX *e* OY*, onde* $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ *e* $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{3}{5}$.

Uma parábola $\mathcal{P}$ *nas coordenadas* $\overline{x}$ *e* $\overline{y}$ *tem foco no ponto* $F = \left(\dfrac{12}{5}, \dfrac{16}{5}\right)$ *e vértice no ponto* $V = \left(\dfrac{12}{5}, -\dfrac{9}{5}\right)$.

(a) *Determine a equação da parábola nas coordenadas* $\overline{x}$ *e* $\overline{y}$*, e nas coordenadas* x *e* y.

(b) *Determine o foco, o vértice, a reta focal e a diretriz da parábola nas coordenadas* x *e* y.

(c) *Faça um esboço da curva no sistema de eixos* OXY*, indicando seus elementos.*

Solução.

(a) Como $p = d(F, V) = \dfrac{25}{5} = 5$ e, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a reta focal $\ell : \overline{x} = \dfrac{12}{5}$ é paralela ao eixo$-O\overline{Y}$ e o foco F encontra-se acima do vértice V, temos que

$$\mathcal{P} : \left(\overline{x} - \frac{12}{5}\right)^2 = 20\left(\overline{y} + \frac{9}{5}\right)$$

é a equação da parábola, cuja diretriz é a reta $\mathcal{L} : \overline{y} = -\dfrac{9}{5} - p = -\dfrac{9}{5} - 5 = -\dfrac{34}{5}$.

Usando as relações de mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \cos\theta\, x + \operatorname{sen}\theta\, y = \frac{1}{5}(4x + 3y) \\ \overline{y} &= -\operatorname{sen}\theta\, x + \cos\theta\, y = \frac{1}{5}(-3x + 4y)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

obtemos que a equação da parábola, nas coordenadas x e y, é dada por:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{5}(4x + 3y) - \frac{12}{5}\right)^2 = 20\left(\frac{1}{5}(-3x + 4y) + \frac{9}{5}\right) \\ \iff\quad & (4x + 3y - 12)^2 = \frac{20 \times 25}{5}(-3x + 4y + 9) \\ \iff\quad & (4x + 3y)^2 - 24(4x + 3y) + 144 = 100(-3x + 4y + 9) \\ \iff\quad & 16x^2 + 24xy + 9y^2 - 96x - 72y + 144 = -300x + 400y + 900 \\ \iff\quad & \boxed{\mathcal{P} : 16x^2 + 24xy + 9y^2 + 204x - 472y - 756 = 0} \end{aligned}$$

(b) Pelas relações de mudança de coordenadas (1), temos que, $\ell : \dfrac{1}{5}(4x + 3y) = \dfrac{12}{5}$, isto é, $\ell : 4x + 3y = 12$ é a equação da reta focal, e $\mathcal{L} : \dfrac{1}{5}(-3x + 4y) = -\dfrac{34}{5}$, isto é, $\mathcal{L} : -3x + 4y = -34$ é a equação da diretriz nas coordenadas x e y.

E, pelas relações de mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta\, \overline{x} - \operatorname{sen}\theta\, \overline{y} = \frac{1}{5}(4\overline{x} - 3\overline{y}) \\ y &= \operatorname{sen}\theta\, \overline{x} + \cos\theta\, \overline{y} = \frac{1}{5}(3\overline{x} + 4\overline{y})\,, \end{aligned}$$

obtemos que

$$F = \left(\frac{1}{5}\left(\frac{48}{5} - \frac{48}{5}\right), \frac{1}{5}\left(\frac{36}{5} + \frac{64}{5}\right)\right) = (0, 4)$$

é o foco e

$$V = \left(\frac{1}{5}\left(\frac{48}{5} + \frac{27}{5}\right), \frac{1}{5}\left(\frac{36}{5} - \frac{36}{5}\right)\right) = (3, 0)$$

é o vértice da parábola nas coordenadas x e y.

(c) Na figura 3 mostramos o esboço da parábola $\mathcal{P}$. □

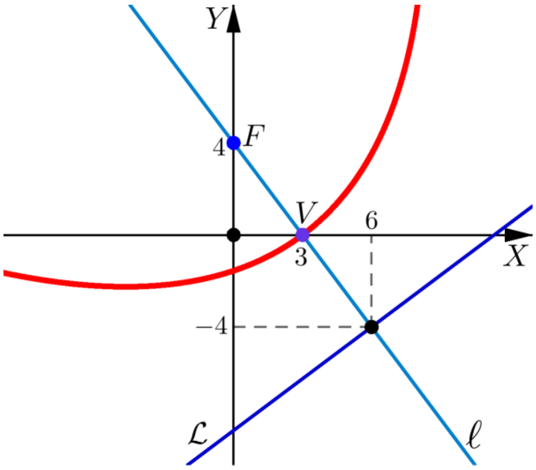

Fig. 3: Parábola $\mathcal{P} : 16x^2 + 24xy + 9y^2 + 204x - 472y - 756 = 0$.

Exemplo 6

Esboçe, detalhadamente, a região do plano dada pelo sistema de inequações:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 \\ 16x^2 + y^2 - 8y \geq 0 \\ -4x^2 + y^2 - 4y \leq 0 \\ |x| \leq 2\,. \end{cases}$$

Solução.

A região $\mathcal{R}$ é a intersecção das seguintes quatro regiões do plano:

$$\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \geq 4\}$$

$$\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \,|\, 16x^2 + y^2 - 8y \geq 0\}$$

$$\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \,|\, -4x^2 + y^2 - 4y \leq 0\}$$

$$\mathcal{R}_4 = \{(x, y) \,|\, |x| \leq 2\}\,.$$

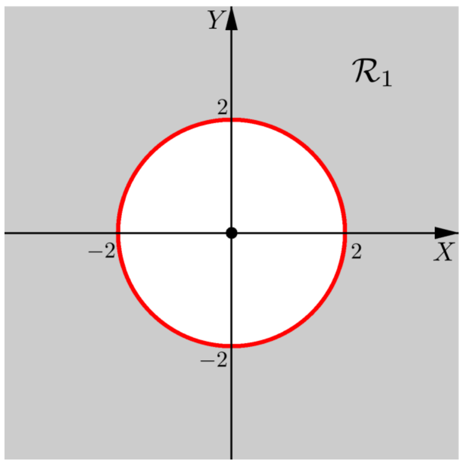

Fig. 4: Circunferência $\mathcal{C}_1$ e região $\mathcal{R}_1$.

• Descrição da região $\mathcal{R}_1$.

A região $\mathcal{R}_1$ consiste dos pontos exteriores à circunferência $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 = 4$ de centro na origem e raio 2.

• Descrição da região $\mathcal{R}_2$.

Para descrever a região $\mathcal{R}_2$ vamos, primeiro, determinar a cônica $\mathcal{C}_2 : 16x^2 + y^2 - 8y = 0$.

Completando o quadrado na equação da curva $\mathcal{C}_2$ obtemos:

$$\begin{aligned} 16x^2+y^2-8y=0 &\iff 16x^2+(y^2-8y+16)=16 \\ &\iff 16x^2+(y-4)^2=16 \\ &\iff \mathcal{C}_2 : x^2+\frac{(y-4)^2}{16}=1\,. \end{aligned}$$

Então, $\mathcal{C}_2$ é a elipse de centro $(0,4)$; reta focal $\ell=$ eixo$-OY$; reta não-focal: $\ell' : y=4$; $a^2=16$, $b^2=1$, ou seja, $a=4$ e $b=1$; vértices sobre a reta focal $A_1=(0,0)$ e $A_2=(0,8)$; vértices sobre a reta não-focal $B_1=(-1,4)$ e $B_2=(1,4)$.

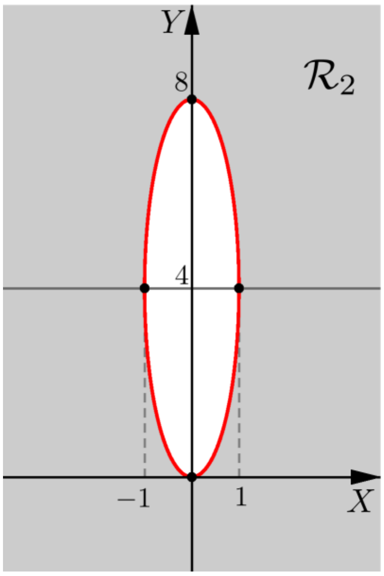

Fig. 5: Elipse $\mathcal{C}_2$ e região $\mathcal{R}_2$.

Portanto,

$$\mathcal{R}_2 : 16x^2+y^2-8y\geq 0 \iff \mathcal{R}_2 : x^2+\frac{(y-4)^2}{16}\geq 1$$

consiste dos pontos do plano exteriores ou sobre a elipse $\mathcal{C}_2$.

- Descrição da região $\mathcal{R}_3$.

Para descrever a região $\mathcal{R}_3$ vamos identificar a cônica

$$\mathcal{C}_3 : -4x^2+y^2-4y=0.$$

Completando o quadrado na equação de $\mathcal{C}_3$, temos:

$$\begin{aligned} -4x^2+y^2-4y=0 &\iff -4x^2+(y^2-4y+4)=4 \\ &\iff -4x^2+(y-2)^2=4 \\ &\iff \mathcal{C}_3 : -x^2+\frac{(y-2)^2}{4}=1\,, \end{aligned}$$

que é a equação da hipérbole de centro: $(0,2)$, reta focal: $\ell=$ eixo$-OY$; reta não-focal: $\ell' : y=2$, paralela ao eixo$-OX$; $a^2=4$ e $b^2=1$, ou seja, $a=2$ e $b=1$; vértices: $A_1=(0,0)$ e $A_2=(0,4)$ e vértices imaginários: $B_1=(-1,2)$ e $B_2=(1,2)$.

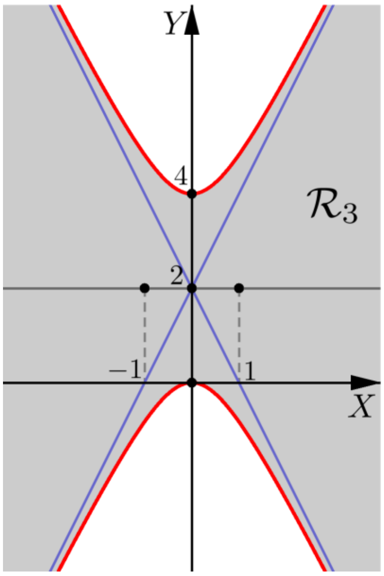

Fig. 6: Hipérbole $\mathcal{C}_3$ e região R_3.

A hipérbole divide o plano em três regiões, duas delas limitadas pelos ramos da hipérbole e a outra situada entre eles. Como as coordenadas do centro $(0,2)$ satisfazem $-4x^2+y^2-4y\leq 0$, concluímos que a região $\mathcal{R}_3$ consiste dos pontos entre os ramos da hipérbole ou sobre eles, isto é, $\mathcal{R}_3$ é a região que contém o centro e inclui os ramos da hipérbole.

- Descrição da região $\mathcal{R}_4$.

Temos que $|x|\leq 2 \iff -2\leq x\leq 2$. Portanto, a região $\mathcal{R}_4$ é o conjunto:

$$\{(x,y)\,|\,-2\leq x\leq 2,\ y\in\mathbb{R}\},$$

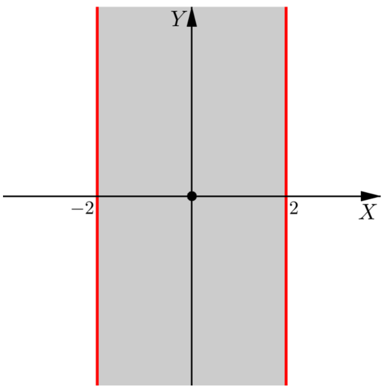

Fig. 7: Retas r_1 e r_2 e região R_4.

que consiste dos pontos da faixa vertical limitada pelas retas $r_1 : x=2$ e $r_2 : x=-2$.

• Descrição da região $\mathcal{R}$.

Finalmente, a região $\mathcal{R}$ consiste dos pontos exteriores à circunferência $\mathcal{C}_1$, exteriores à elipse $\mathcal{C}_2$, que estão entre os ramos da hipérbole $\mathcal{C}_3$ e na faixa $\mathcal{R}_4$, podendo, também, pertencer a uma das curvas do bordo C_1, C_2, C_3 ou a uma das retas r_1 ou r_2, como vemos nas figuras 8 e 9. □

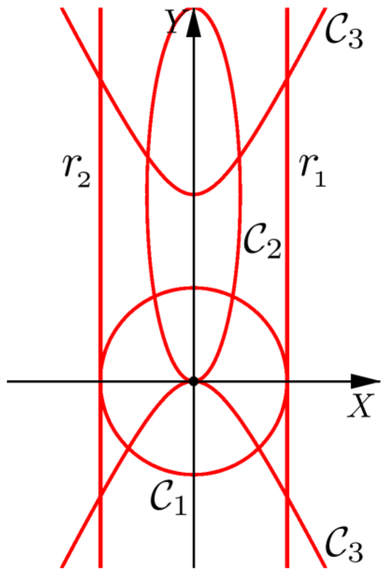

Fig. 8: Curvas que limitam a região $\mathcal{R}$.

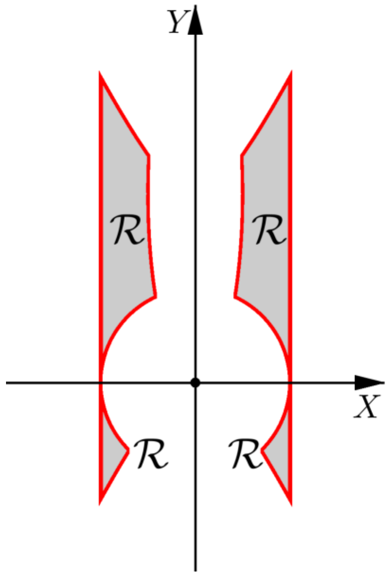

Fig. 9: Região $\mathcal{R}$.

Exemplo 7

Classifique, em função do parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$, a família de curvas

$$x^2 + (\lambda - 2)y^2 + 2\lambda x + 2(\lambda - 2)y + 3\lambda - 3 = 0\,,$$

indicando, nos casos não-degenerados, se a reta focal é paralela ao eixo$-OX$ ou ao eixo$-OY$.

Solução.

Completando os quadrados na equação da família, temos que:

$$\begin{aligned} & (x^2 + 2\lambda x) + (\lambda - 2)(y^2 + 2y) = 3 - 3\lambda \\ \iff\ & (x^2 + 2\lambda x + \lambda^2) + (\lambda - 2)(y^2 + 2y + 1) = 3 - 3\lambda + \lambda^2 + \lambda - 2 \\ \iff\ & (x + \lambda)^2 + (\lambda - 2)(y + 1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \\ \iff\ & (x + \lambda)^2 + (\lambda - 2)(y + 1)^2 = (\lambda - 1)^2\,. \qquad (\star) \end{aligned}$$

Para fazermos a classificação da família de curvas, precisamos estudar o sinal dos coeficientes $(\lambda - 2)$ e $(\lambda - 1)^2$ da equação $(\star)$:

	$-\infty < \lambda < 1$	$\lambda = 1$	$1 < \lambda < 2$	$\lambda = 2$	$2 < \lambda < +\infty$
$\lambda - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(\lambda - 1)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$

Então, para:

• $\lambda \in (-\infty, 1)$, a equação representa uma hipérbole de centro $(-\lambda, -1)$ e reta focal $\ell : y = -1$ paralela ao eixo$-OX$.

• $\lambda = 1$, a equação $(x+1)^2) - (y+1)^2 = 0$ representa o par de retas concorrentes $y+1 = \pm(x+1)$ que se cortam no ponto $(-1, -1)$.

• $\lambda \in (1, 2)$, a equação representa uma hipérbole de centro $(-\lambda, -1)$ e reta focal $\ell : y = -1$ paralela ao eixo$-OX$.

• $\lambda = 2$, a equação $(x+2)^2 = 1$ representa o par de retas $x + 2 = \pm 1$, ou seja, $x = -3$ e $x = -1$ paralelas ao eixo$-OY$.

• $\lambda \in (2, +\infty)$, a equação, que se escreve na forma

$$\frac{(x+\lambda)^2}{(\lambda-1)^2} + \frac{(y+1)^2}{\dfrac{(\lambda-1)^2}{\lambda-2}} = 1\,,$$

representa:

◦ uma circunferência de centro $(-3, -1)$ e raio 2, se $\lambda = 3$, pois, nesse caso, $(\lambda - 1)^2 = \dfrac{(\lambda-1)^2}{\lambda-2} = 4$.

◦ uma elipse de centro $(-\lambda, -1)$ e reta focal $\ell : x = -\lambda$, paralela ao eixo$-OY$, se $\lambda \in (2, 3)$, pois, nesse intervalo, $(\lambda - 1)^2 < \dfrac{(\lambda-1)^2}{\lambda-2}$.

◦ uma elipse de centro $(-\lambda, -1)$ e reta focal $\ell : y = -1$ paralela ao eixo$-OX$, se $\lambda \in (3, +\infty)$, pois, nesse intervalo, $(\lambda - 1)^2 > \dfrac{(\lambda-1)^2}{\lambda-2}$. □

Exemplo 8

Considere os pontos $F = (2, 1)$ e $Q = (4, 0)$.

(a) *Determine as equações das parábolas com reta focal ℓ perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v} = (1, -2)$ e foco F, que contêm o ponto Q.*

(b) *Determine os vértices das parábolas obtidas acima.*

(c) *Faça um esboço das parábolas obtidas no mesmo sistema de eixos ortogonais OXY, indicando todos os seus elementos.*

Solução.

(a) Como a diretriz $\mathcal{L}$ é perpendicular à reta focal ℓ e $\ell \perp \overrightarrow{v} = (1, -2)$, temos que $\mathcal{L} \perp (2, 1)$. Então, $\mathcal{L} : 2x + y = m$, para algum $m \in \mathbb{R}$.

Além disso, como $Q = (4, 0)$ pertence à parábola, temos que $d(Q, F) = d(Q, \mathcal{L})$. Isto é,

$$\sqrt{(4-2)^2+(0-1)^2} = \frac{|2\times 4+0\times 1-m|}{\sqrt{5}} \iff \sqrt{5} = \frac{|8-m|}{\sqrt{5}}$$
$$\iff |m-8| = 5$$
$$\iff m = 8\pm 5\,.$$

Logo, $\mathcal{L} : 2x+y = 8\pm 5$.

Caso 1. Parábola $\mathcal{P}_1$ de foco $F=(2,1)$ e diretriz $\mathcal{L}_1 : 2x+y=13$.

Nesse caso, um ponto $P=(x,y)\in\mathcal{P}_1$ se, e só se, $d(P,F)=d(P,\mathcal{L}_1)$, ou seja,

$$d(P,F)^2 = d(P,\mathcal{L}_1)^2 \iff (x-2)^2+(y-1)^2 = \frac{(2x+y-13)^2}{5}$$
$$\iff 5(x^2+y^2-4x-2y+5) = 4x^2+4xy+y^2-52x-26y+169$$
$$\iff \boxed{\mathcal{P}_1 : x^2-4xy+4y^2+32x+16y-144=0}$$

Caso 2. Parábola $\mathcal{P}_2$ de foco $F=(2,1)$ e diretriz $\mathcal{L}_2 : 2x+y=3$.

Assim, um ponto $P=(x,y)\in\mathcal{P}_2$ se, e só se, $d(P,F)=d(P,\mathcal{L}_2)$, ou seja,

$$d(P,F)^2 = d(P,\mathcal{L}_2)^2 \iff (x-2)^2+(y-1)^2 = \frac{(2x+y-3)^2}{5}$$
$$\iff 5(x^2+y^2-4x-2y+5) = 4x^2+4xy+y^2-12x-6y+9$$
$$\iff \boxed{\mathcal{P}_2 : x^2-4xy+4y^2-8x-4y+16=0}$$

(b) Consideremos as duas parábolas obtidas no item anterior.

• O vértice V_1 da parábola $\mathcal{P}_1$ é o ponto médio do segmento A_1F, onde $A_1=(x,y)$ é o ponto de intersecção da reta focal $\ell : x-2y=0$ com a diretriz $\mathcal{L}_1 : 2x+y=13$. Então, as coordenadas x e y do ponto A_1 satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ 2x+y=13\,. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $x=\frac{26}{5}$ e $y=\frac{13}{5}$, isto é, $A_1=\left(\frac{26}{5},\frac{13}{5}\right)$. Logo,

$$V_1 = \frac{A_1+F}{2} = \frac{\left(\frac{26}{5},\frac{13}{5}\right)+(2,1)}{2} = \left(\frac{36}{10},\frac{18}{10}\right) = \left(\frac{18}{5},\frac{9}{5}\right)\,.$$

• O vértice V_2 da parábola $\mathcal{P}_2$ é o ponto médio do segmento A_2F, onde $A_2=(x,y)$ é o ponto de intersecção da reta focal $\ell : x-2y=0$ com a diretriz $\mathcal{L}_2 : 2x+y=3$. Logo, as coordenadas x e y do ponto A_2 satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ 2x+y=3\,. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $x = \dfrac{6}{5}$ e $y = \dfrac{3}{5}$, isto é, $A_2 = \left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$. Logo,

$$V_2 = \frac{A_2 + F}{2} = \frac{\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right) + (2,1)}{2} = \left(\frac{16}{10}, \frac{8}{10}\right) = \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right) .$$

(c) Na figura, abaixo, mostramos o esboço das parábolas $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, no mesmo sistema de eixos ortogonais OXY. □

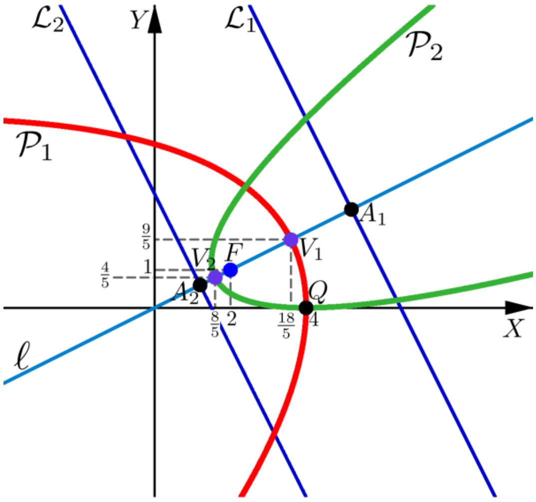

Fig. 10: Parábolas $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$.

Exemplo 9

Sejam OXY um sistema de eixos ortogonais e $O\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema de eixos ortogonais obtido por uma rotação positiva de 45^o dos eixos OX e OY em torno da origem.

Uma hipérbole nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ tem centro na origem, um de seus vértices no ponto $(\sqrt{2}, 0)$ e a reta $\overline{y} = 2\overline{x}$ como uma de suas assíntotas.

(a) *Determine a equação da hipérbole nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, e nas coordenadas x e y.*

(b) *Determine o centro, os vértices, os vértices imaginários e as assíntotas da hipérbole nas coordenadas x e y.*

(c) *Faça um esboço da curva no sistema de eixos OXY, indicando todos os elementos encontrados no item* **(b)**.

Solução.

(a) Nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a reta focal ℓ é o eixo$-O\overline{X}$, pois o centro $C = (0,0)$ e o vértice $V = (\sqrt{2}, 0)$ pertencem a ℓ. Além disso, $a = d(C, V) = \sqrt{2}$ e $\dfrac{b}{a} = 2$, pois $\overline{y} = 2\overline{x}$ é uma assíntota da hipérbole.

Então, $b = 2a = 2\sqrt{2}$ e

$$\mathcal{H} : \frac{\overline{x}^2}{2} - \frac{\overline{y}^2}{8} = 1,$$

é a equação da hipérbole nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$.

Usando as relações de mudança de coordenadas

$$\begin{cases} \overline{x} = \cos 45^o\, x + \operatorname{sen} 45^o\, y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ \overline{y} = -\operatorname{sen} 45^o\, x + \cos 45^o\, y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x+y), \end{cases} \tag{1}$$

obtemos a equação da hipérbole nas coordenadas x e y:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \frac{2}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{8} \times \frac{2}{4}(-x+y)^2 = 1 \\ \Longleftrightarrow\ & 4(x+y)^2 - (-x+y)^2 = 16 \\ \Longleftrightarrow\ & 4(x^2+2xy+y^2) - (x^2-2xy+y^2) = 16 \\ \Longleftrightarrow\ & 3x^2+10xy+3y^2 = 16 \\ \Longleftrightarrow\ & \boxed{\mathcal{H} : 3x^2+10xy+3y^2-16=0} \end{aligned}$$

(b) Nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a hipérbole tem:

- centro: $C = (0,0)$;
- vértices: $A_1 = (-\sqrt{2}, 0)$ e $A_2 = (\sqrt{2}, 0)$;
- vértices imaginários: $B_1 = (0, -2\sqrt{2})$ e $B_2 = (0, 2\sqrt{2})$;
- reta focal: $\ell : \overline{y} = 0$;
- reta não-focal: $\ell' : \overline{x} = 0$;
- assíntotas: $\overline{y} = \pm 2\overline{x}$;

Por (1), obtemos que $\ell : -x+y=0$ é a reta focal; $\ell' : x+y=0$ é a reta não-focal e $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x+y) = \pm 2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$, isto é, $r_- : y = -3x$ e $r_+ : y = -\dfrac{1}{3}x$ são as assíntotas da hipérbole nas coordenadas x e y.

E, pelas relações de mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned} x &= \cos 45^o\, \overline{x} - \operatorname{sen} 45^o\, \overline{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} - \overline{y}) \\ y &= \operatorname{sen} 45^o\, \overline{x} + \cos 45^o\, \overline{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} + \overline{y}), \end{aligned}$$

obtemos que $C = (0,0)$ é o centro, $A_1 = (-1,-1)$ e $A_2 = (1,1)$ são os vértices; $B_1 = (2,-2)$ e $B_2 = (-2,2)$ são os vértices imaginários da hipérbole nas coordenadas x e y.

(c) Na figura ao lado mostramos o esboço da hipérbole $\mathcal{H}$.

□

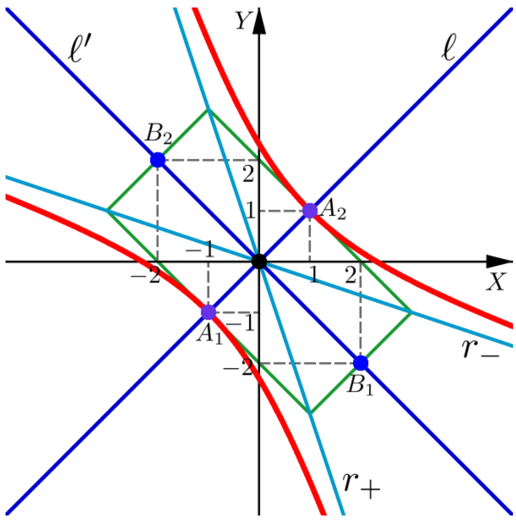

Fig. 11: Hipérbole $\mathcal{H} : 3x^2+10xy+3y^2-16=0$.

Exemplo 10

Sejam $V_1 = (7, 1)$ *e* $V_2 = (2, 5)$ *os vértices de uma elipse com reta focal paralela a um dos eixos coordenados.*

(a) *Determine o centro, a reta focal, a reta não-focal, os vértices e os focos da elipse* $\mathcal{E}$ *cujo vértice* V_1 *pertence à reta focal.*

(b) *Determine, agora, o centro, a reta focal, a reta não-focal, os vértices e os focos da elipse* $\overline{\mathcal{E}}$ *cujo vértice* V_2 *pertence à reta focal.*

(c) *Faça um esboço das duas elipses encontradas acima num mesmo sistema de eixos ortogonais, indicando todos os seus elementos.*

Solução.

Consideremos o retângulo de lados paralelos aos eixos coordenados e vértices nos pontos $V_1 = (7, 1)$ e $V_2 = (2, 5)$.

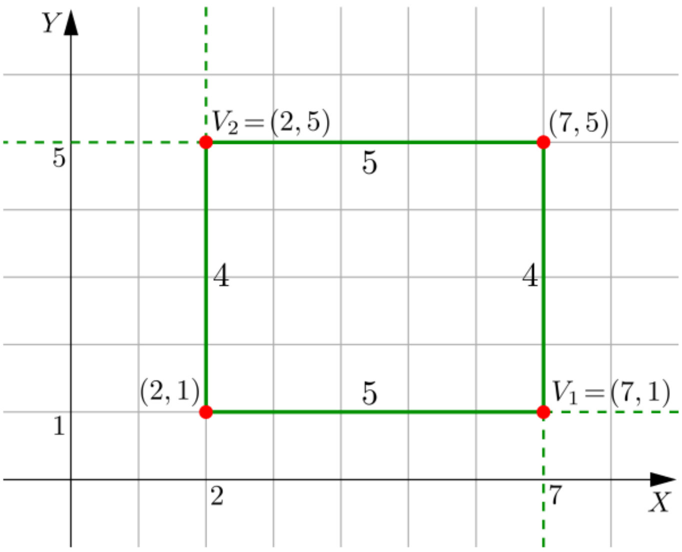

Fig. 12: Retângulo de vértices V_1 e V_2.

Como $a > b$ numa elipse, temos que $a = 5$ e $b = 4$ nas elipses de vértices V_1 e V_2 e reta focal paralela a um dos eixos coordenados.

(a) Se o vértice $V_1 = (7, 1)$ pertence à reta focal da elipse, temos que $\ell : y = 1$ é a reta focal, $\ell' : x = 2$ é a reta não-focal, $C = (2, 1)$ é o centro, $A_1 = (-3, 1)$ e $A_2 = V_1 = (7, 1)$ são os vértices sobre a reta focal, $B_1 = (2, -3)$ e $B_2 = V_2 = (2, 5)$ são os vértices sobre a reta não-focal, $F_1 = (-1, 1)$ e $F_2 = (5, 1)$ são os focos, pois $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$, e

$$\mathcal{E} : \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

é a equação da elipse $\mathcal{E}$.

(b) Se o vértice $V_2 = (2, 5)$ pertence à reta focal da elipse $\overline{\mathcal{E}}$, temos que $\overline{\ell} : y = 5$ é a reta focal, $\overline{\ell}' : x = 7$ é a reta não-focal, $\overline{C} = (7, 5)$ é o centro, $\overline{A}_1 = V_2 = (2, 5)$ e $\overline{A}_2 = (12, 5)$ são os vértices sobre a reta focal, $\overline{B}_1 = (7, 9)$ e $B_2 = V_1 = (7, 1)$ são os vértices sobre a reta não-focal, $\overline{F}_1 = (4, 5)$

e $\overline{F}_2 = (10, 5)$ são os focos, e

$$\overline{\mathcal{E}} : \frac{(x-7)^2}{25} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$$

é a equação da elipse $\overline{\mathcal{E}}$.

(c) Na figura abaixo mostramos as elipses $\mathcal{E}$ e $\overline{\mathcal{E}}$ no mesmo sistema de eixos ortogonais. □

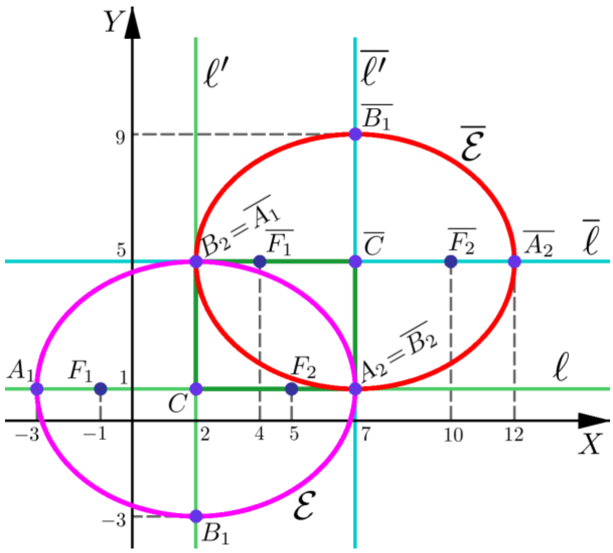

Fig. 13: Elipses $\mathcal{E}$ e $\overline{\mathcal{E}}$.

Exemplo 11

Considere os pontos $A = (4, 1)$ e $B = (3, 2)$.

(a) *Determine as equações e os principais elementos das duas hipérboles que possuem B como vértice imaginário, A como vértice e reta focal paralela a um dos eixos coordenados.*

(b) *Faça um esboço das duas hipérboles num mesmo sistema de eixos ortogonais, indicando todos os seus elementos (menos os focos e as diretrizes).*

Solução.

Caso 1. Reta focal ℓ paralela ao eixo$-OX$.

Como $A = (4, 1) \in \ell$ e $B = (3, 2) \in \ell'$, onde ℓ' é a reta não-focal, temos que $\ell : y = 1$ e $\ell' : x = 3$. Então, o centro C da hipérbole, ponto de intersecção da reta focal com a reta não-focal, tem coordenadas $x = 3$ e $y = 1$, isto é, $C = (3, 1)$.

Além disso, temos $a = d(C, A) = 1$, $b = d(C, B) = 1$ e $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$.

Logo,

$$\mathcal{H} : (x-3)^2 - (y-1)^2 = 1$$

é a equação da hipérbole.

Nessa hipérbole, $F_1 = (3 - \sqrt{2}, 1)$ e $F_2 = (3 + \sqrt{2}, 1)$ são os focos; $A_1 = (2, 1)$ e $A_2 = A = (4, 1)$ são os vértices; $B_1 = (3, 0)$ e $B_2 = B = (3, 2)$ são os vértices imaginários; $y - 1 = \pm(x - 3)$ são as assíntotas; $\mathcal{L}_1 : x = 3 - \frac{a}{e} = 3 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ é a diretriz correspondente ao foco F_1 e $\mathcal{L}_2 : x = 3 + \frac{a}{e} = 3 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ é a diretriz correspondente ao foco F_2 da hipérbole $\mathcal{H}$.

Caso 2. Reta focal $\overline{\ell}$ paralela ao eixo$-OY$.

Nesse caso, $\overline{\ell} : x = 4$ é a reta focal e $\overline{\ell'} : y = 2$ é a reta não-focal da hipérbole $\overline{\mathcal{H}}$ que tem reta focal paralela ao eixo$-OY$, vértice $A = (4, 1)$ e vértice imaginário $B = (3, 2)$. Então, $\overline{C} = (4, 2)$ é o centro, $\overline{a} = d(\overline{C}, A) = 1$, $\overline{b} = d(\overline{C}, B) = 1$ e $\overline{c} = \sqrt{\overline{a}^2 + \overline{b}^2} = \sqrt{2}$, e

$$\overline{\mathcal{H}} : (y - 2)^2 - (x - 4)^2 = 1$$

é a equação da hipérbole $\overline{\mathcal{H}}$.

Além disso, $\overline{F}_1 = (4, 2 - \sqrt{2})$ e $\overline{F}_2 = (4, 2 + \sqrt{2})$ são os focos; $\overline{A}_1 = A = (4, 1)$ e $\overline{A}_2 = (4, 3)$ são os vértices; $\overline{B}_1 = B = (3, 2)$ e $\overline{B}_2 = (5, 2)$ são os vértices imaginários; $x - 4 = \pm(y - 2)$ são as assíntotas; $\overline{\mathcal{L}}_1 : y = 2 - \frac{\overline{a}}{\overline{e}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ é a diretriz correspondente ao foco $\overline{F}_1$ e $\overline{\mathcal{L}}_2 : y = 2 + \frac{\overline{a}}{\overline{e}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ é a diretriz correspondente ao foco $\overline{F}_2$ da hipérbole $\overline{\mathcal{H}}$.

(b) Na figura abaixo mostramos as hipérboles $\mathcal{H}$ e $\overline{\mathcal{H}}$ num mesmo sistema de eixos ortogonais.

□

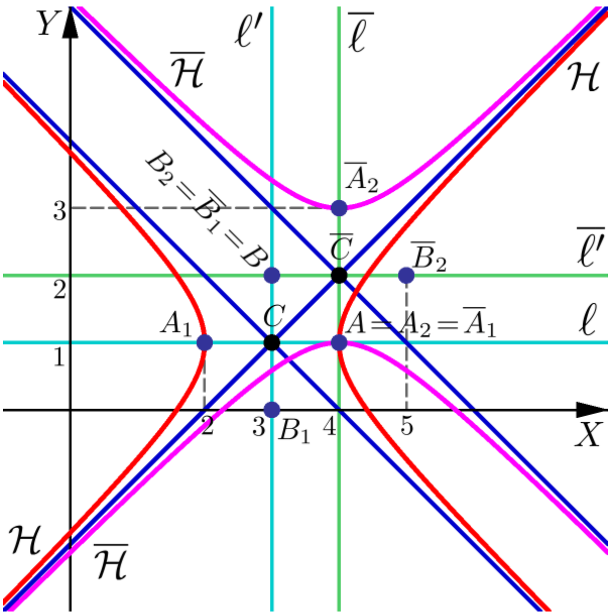

Fig. 14: Hipérboles $\mathcal{H}$ e $\overline{\mathcal{H}}$.

Exemplo 12

Considere as curvas

$$\mathcal{C}_1 : x^2 - 20x + y + 100 = 0 ; \qquad \mathcal{C}_2 : x^2 - y^2 - 6x = 0 \quad e \quad \mathcal{C}_3 : x^2 + 16y^2 - 6x - 7 = 0 .$$

(a) *Classifique as curvas e determine todos os seus elementos.*

(b) *Faça um esboço detalhado da região do plano dada pelo sistema de inequações*

$$\mathcal{R}: \begin{cases} x^2 - 20x + y + 100 \geq 0 \\ x^2 - y^2 - 6x \geq 0 \\ x^2 + 16y^2 - 6x - 7 \geq 0 \\ x \leq 10 \\ y \geq -4\,. \end{cases}$$

Observação: Ache as intersecções de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ com a reta $y = -4$.

Solução.

(a) • Curva $\mathcal{C}_1 : x^2 - 20x + y + 100 = 0$.

Completando o quadrado, a equação de $\mathcal{C}_1$ na forma canônica é dada por:

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}_1 : x^2 - 20x = -y - 100 \\ &\mathcal{C}_1 : x^2 - 20x + 100 = -y - 100 + 100 \\ &\mathcal{C}_1 : (x - 10)^2 = -y \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{C}_1$ é a parábola com reta focal $x = 10$, paralela ao eixo$-OY$, vértice $V = (10, 0)$, $4p = 1$, ou seja, $p = \dfrac{1}{4}$, e foco $F = \left(10, -\dfrac{1}{4}\right)$.

• Curva $\mathcal{C}_2 : x^2 - 6x - y^2 = 0$.

A equação da curva $\mathcal{C}_2$ se escreve, completando os quadrados, como:

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}_2 : x^2 - 6x - y^2 = 0 \\ &\mathcal{C}_2 : (x^2 - 6x + 9) - y^2 = 9 \\ &\mathcal{C}_2 : (x - 3)^2 - y^2 = 9 \\ &\mathcal{C}_2 : \frac{(x-3)^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1\,. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{C}_2$ é a hipérbole com reta focal $\ell : y = 0$; reta não-focal $\ell' : x = 3$; centro $C = (3, 0)$; $a = b = 3$; $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3\sqrt{2}$; vértices $A_1 = (0, 0)$ e $A_2 = (6, 0)$; vértices imaginários $B_1 = (3, -3)$ e $B_2 = (3, 3)$; assíntotas $r_\pm : y = \pm(x-3)$ e focos $F_1 = (3-3\sqrt{2}, 0)$ e $F_2 = (3+3\sqrt{2}, 0)$.

• Curva $\mathcal{C}_3 : x^2 - 6x + 16y^2 - 7 = 0$.

Completando o quadrado na equação, obtemos:

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}_3 : x^2 - 6x + 16y^2 - 7 = 0 \\ &\mathcal{C}_3 : (x^2 - 6x + 9) + 16y^2 = 7 + 9 \\ &\mathcal{C}_3 : (x - 3)^2 + 16y^2 = 16 \\ &\mathcal{C}_3 : \frac{(x-3)^2}{16} + y^2 = 1\,. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{C}_3$ é a equação da elipse com reta focal $\ell : y = 0$; reta não-focal $\ell' : x = 3$; centro $C = (3, 0)$; $a = 4$ e $b = 1$; $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{15}$; vértices sobre a reta focal $A_1 = (-1, 0)$ e $A_2 = (7, 0)$; vértices sobre a reta não-focal $B_1 = (3, -1)$ e $B_2 = (3, 1)$; focos $F_1 = (3 - \sqrt{15}, 0)$ e $F_2 = (3 + \sqrt{15}, 0)$.

(b) A região $\mathcal{R}$ é a intersecção das regiões:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}_1 : x^2 - 20x + y + 100 \geq 0 \\
&\mathcal{R}_2 : x^2 - y^2 - 6x \geq 0 \\
&\mathcal{R}_3 : x^2 + 16y^2 - 6x - 7 \geq 0 \\
&\mathcal{R}_4 : x \leq 10 \\
&\mathcal{R}_5 : y \geq -4 \,.
\end{aligned}$$

• **Região $\mathcal{R}_1 : x^2 - 20x + y + 100 \geq 0$.**

A parábola $\mathcal{C}_1 : x^2 - 20x + y + 100 = 0$ divide o plano em duas regiões disjuntas, uma das quais contém o foco $F = \left(10, -\frac{1}{4}\right)$.

Substituindo as coordenadas do foco na expressão $x^2 - 20x + y + 100$, obtemos:

$$10^2 - 20 \times 10 - \frac{1}{4} + 100 = 100 - 200 - \frac{1}{4} + 100 = -\frac{1}{4} < 0\,.$$

Portanto, $\mathcal{R}_1$ é a união da região determinada pela parábola, que não contém o foco F, com os pontos da parábola, onde a igualdade na inequação que define $\mathcal{R}_1$ é satisfeita.

Na figura abaixo, mostramos a região $\mathcal{R}_1$.

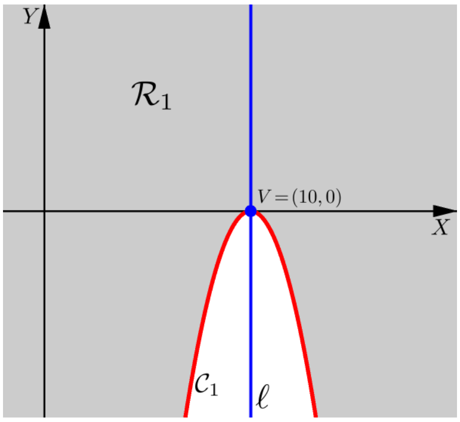

Fig. 15: Região $\mathcal{R}_1$.

• **Região $\mathcal{R}_2 : x^2 - y^2 - 6x \geq 0$.**

A hipérbole $\mathcal{C}_2 : x^2 - y^2 - 6x = 0$ divide o plano em três regiões disjuntas: uma das quais contém o centro $C = (3, 0)$ e as outras contêm os focos. A expressão $x^2 - y^2 - 6x$ tem sinal constante em cada uma dessas regiões, sendo iguais os sinais nas regiões que contêm os focos.

Substituindo as coordenadas do centro na expressão $x^2 - y^2 - 6x$, obtemos:

$$3^2 - 0^2 - 6 \times 3 = 9 - 0 - 18 = -9 < 0\,.$$

Portanto, $\mathcal{R}_2$ consiste da união das regiões determinadas pela hipérbole $\mathcal{C}_2$ que contêm os focos e inclui os ramos da curva $\mathcal{C}_2$, onde a igualdade $x^2 - y^2 - 6x = 0$ é verificada.

Na figura abaixo, mostramos a região $\mathcal{R}_2$.

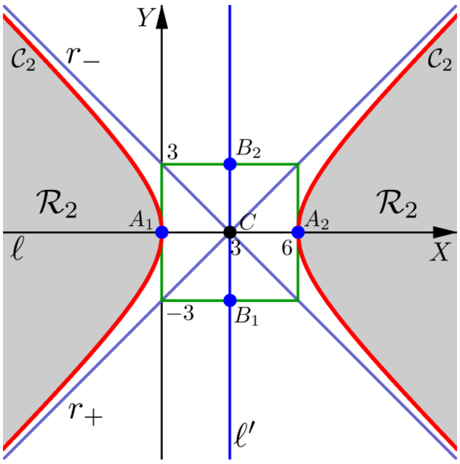

Fig. 16: Região $\mathcal{R}_2$.

• **Região $\mathcal{R}_3 : x^2 + 16y^2 - 6x - 7 \geq 0$.**

A elipse $\mathcal{C}_3 : x^2 + 16y^2 - 6x - 7 = 0$ divide o plano em duas regiões, uma das quais (denominada interior) contém o centro $C = (3, 0)$. O sinal da expressão $x^2 + 16y^2 - 6x - 7$ no centro C é:

$$3^2 + 16 \times 0^2 - 6 \times 3 - 7 = 9 + 0 - 18 - 7 = -16 < 0\,.$$

Portanto, a região $\mathcal{R}_3$ é a região exterior à elipse $\mathcal{C}_3$ mais a própria curva, onde a igualdade $x^2 + 16y^2 - 6x - 7 = 0$ é satisfeita.

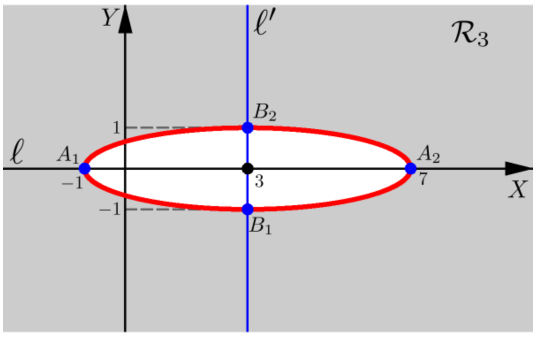

Fig. 17: Região $\mathcal{R}_3$.

• **Regiões $\mathcal{R}_4 : x \leq 10$ e $\mathcal{R}_5 : y \geq -4$.**

A região $\mathcal{R}_4$ consiste dos pontos do plano à esquerda da reta $x = 10$, incluindo os pontos da reta, e a região $\mathcal{R}_5$ consiste dos pontos do plano acima da reta horizontal $y = -4$, incluindo os pontos da reta.

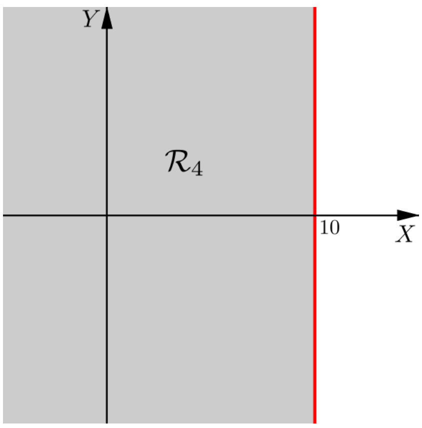

Fig. 18: Região $\mathcal{R}_4$.

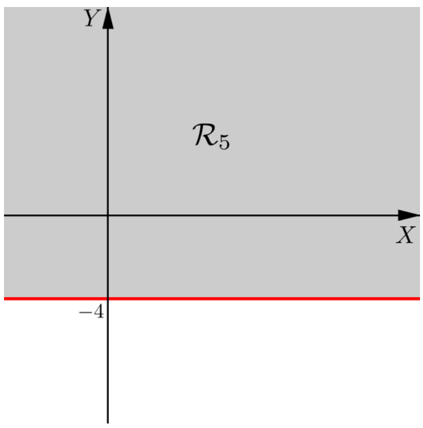

Fig. 19: Região $\mathcal{R}_5$.

• **Região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3 \cap \mathcal{R}_4 \cap \mathcal{R}_5$.**

Para esboçarmos corretamente a região $\mathcal{R}$, devemos determinar as:

◦ **Intersecções da parábola $\mathcal{C}_1$ com $x = 10$ e $y = -4$.**

A parábola $\mathcal{C}_1$ intersecta a reta vertical $x = 10$ exatamente no vértice $(10, 0)$. Para achar a intersecção de $\mathcal{C}_1$ com a reta horizontal $y = -4$, substituímos y por -4 na equação $\mathcal{C}_1 : y = -(x-10)^2$:

$$-4 = -(x-10)^2 \Longrightarrow (x-10)^2 = 4 \Longrightarrow x - 10 = \pm 2 \Longrightarrow x = 10 \pm 2\,.$$

Temos então, que

$$\mathcal{C}_1 \cap \{y = -4\} = \{(8, -4), (12, -4)\}.$$

◦ **Intersecções da hipérbole $\mathcal{C}_2$ com $x = 10$ e $y = -4$.**

Para achar a intersecção de $\mathcal{C}_2$ com a reta horizontal $y = -4$, substituímos y por -4 na equação $\mathcal{C}_2 : (x-3)^2 - y^2 = 9$:

$$(x-3)^2 - (-4)^2 = 9 \Longrightarrow (x-3)^2 - 16 = 9 \Longrightarrow (x-3)^2 = 16 + 9 = 25 \Longrightarrow x - 3 = \pm 5 \Longrightarrow x = 3 \pm 5\,.$$

Logo

$$\mathcal{C}_2 \cap \{y = -4\} = \{(-2, -4), (8, -4)\}.$$

Em particular, observe que:

$$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \{y = -4\} = \{(8, -4)\}.$$

Para achar a intersecção de $\mathcal{C}_2$ com a reta vertical $x = 10$, substituímos x por 10 na equação $\mathcal{C}_2 : (x-3)^2 - y^2 = 9$:

$$(10-3)^2 - y^2 = 9 \Longrightarrow 7^2 - y^2 = 9 \Longrightarrow y^2 = 49 - 9 = 40 \Longrightarrow y = \pm 2\sqrt{10}$$

Logo,

$$\mathcal{C}_2 \cap \{x = 10\} = \{(10, -2\sqrt{10}), (10, 2\sqrt{10})\}.$$

Nas figuras abaixo mostramos todas as curvas envolvidas e a região $\mathcal{R}$. $\square$

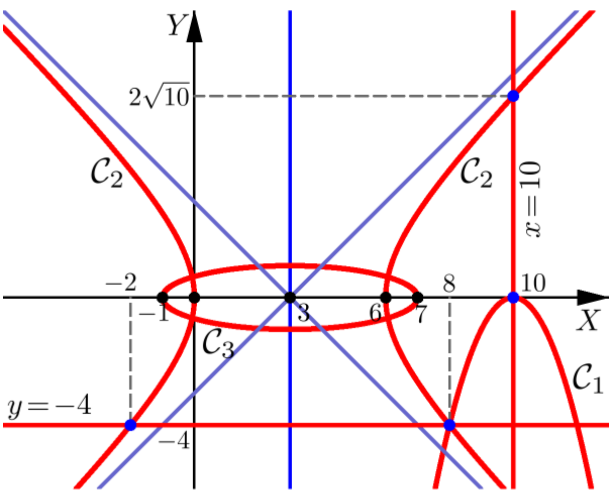

Fig. 20: Curvas $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$.

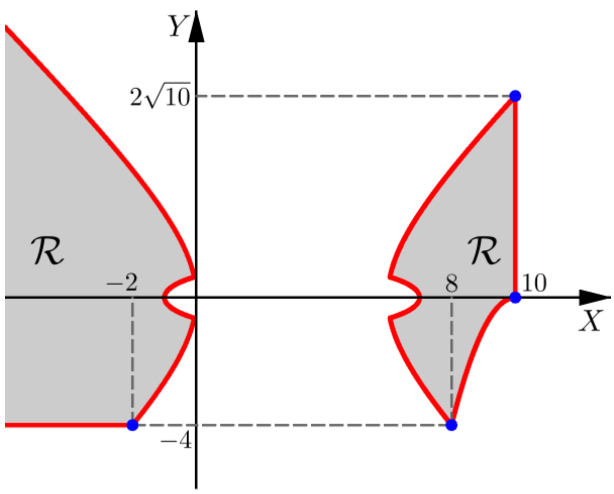

Fig. 21: Região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3 \cap \mathcal{R}_4 \cap \mathcal{R}_5$.

Exemplo 13

Classifique, em função do parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$, a família de curvas

$$(\lambda-1)x^2+(\lambda-2)y^2-2\lambda(\lambda-1)x+\lambda^3-2\lambda^2-2\lambda+3=0\,,$$

indicando, nos casos não-degenerados, se a reta focal é paralela ao eixo$-OX$ ou ao eixo$-OY$.

Solução.

Completando o quadrado, temos que:

$$\begin{aligned}
&(\lambda-1)x^2+(\lambda-2)y^2-2\lambda(\lambda-1)x+\lambda^3-2\lambda^2-2\lambda+3=0\\
\iff\ &(\lambda-1)(x^2-2\lambda x)+(\lambda-2)y^2=-\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-3\\
\iff\ &(\lambda-1)(x^2-2\lambda x+\lambda^2)+(\lambda-2)y^2=-\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-3+\lambda^2(\lambda-1)\\
\iff\ &(\lambda-1)(x-\lambda)^2+(\lambda-2)y^2=-\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-3+\lambda^3-\lambda^2\\
\iff\ &(\lambda-1)(x-\lambda)^2+(\lambda-2)y^2=\lambda^2+2\lambda-3\\
\iff\ &(\lambda-1)(x-\lambda)^2+(\lambda-2)y^2=(\lambda-1)(\lambda+3),.
\end{aligned}$$

Para fazermos a classificação, precisamos estudar o sinal dos coeficientes $\lambda-1$, $\lambda-2$ e $(\lambda-1)(\lambda+3)$ da equação:

	$-\infty<\lambda<-3$	$\lambda=-3$	$-3<\lambda<1$	$\lambda=1$	$1<\lambda<2$	$\lambda=2$	$2<\lambda<+\infty$
$\lambda-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\lambda-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(\lambda-1)(\lambda+3)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$

Então, para:

• $\lambda \in (-\infty,-3)$:

A equação representa o conjunto vazio, pois $(\lambda-1)(x-\lambda)^2 \le 0$, $(\lambda-2)y^2 \le 0$ e $(\lambda+3)(\lambda-1)>0$.

• $\lambda=-3$:

A equação $-4(x+3)^2-5y^2=0$ representa o conjunto unitário que consiste do ponto $(-3,0)$.

• $\lambda \in (-3,1)$:

A equação, que se escreve na forma

$$\frac{(x-\lambda)^2}{\dfrac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-1}}+\frac{y^2}{\dfrac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-2}}=1\,,$$

representa uma elipse com centro $(\lambda,0)$ e reta focal igual ao eixo$-OX$, pois

$$\frac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-1}=\frac{(1-\lambda)(\lambda+3)}{1-\lambda}>\frac{(1-\lambda)(\lambda+3)}{2-\lambda}=\frac{(\lambda+3)(\lambda-1)}{\lambda-2}>0\,,$$

já que $0<1-\lambda<2-\lambda$ e $\lambda+3>0$ para λ nesse intervalo.

• $\lambda=1$:

A equação $-y^2=0$, ou seja, $y=0$, representa o eixo$-OX$.

• $\lambda \in (1, 2)$:

A equação representa uma hipérbole de centro $(\lambda, 0)$ e reta focal igual ao eixo$-OX$, pois

$$\frac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-1} > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-2} < 0\,,$$

para λ nesse intervalo.

• $\lambda = 2$:

A equação $(x-2)^2 = 5$, ou seja, $x = 2 \pm \sqrt{5}$, representa um par de retas paralelas ao eixo$-OY$.

• $\lambda \in (2, +\infty)$:

A equação, que se escreve na forma

$$\frac{(x-\lambda)^2}{\frac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-1}} + \frac{y^2}{\frac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-2}} = 1\,,$$

representa uma elipse de centro $(\lambda, 0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OY$, pois $\lambda - 1 > \lambda - 2 > 0$ e $(\lambda-1)(\lambda+3) > 0$ para λ nesse intervalo. $\square$

Exemplo 14

Seja $\mathcal{P}$ uma parábola com reta focal paralela ao eixo$-OX$ e foco $F = (0, 3)$, que intersecta o eixo$-OX$ no ponto $(4, 0)$ e o eixo$-OY$ no ponto $(0, 2)$.

(a) *Determine o vértice, a diretriz e a equação da parábola $\mathcal{P}$.*

(b) *Faça um esboço de $\mathcal{P}$, indicando seus elementos.*

Solução.

(a) Como a reta focal ℓ da parábola é paralela ao eixo$-OX$ e o foco $F = (0, 3) \in \ell$, temos que $\ell : y = 3$, $V = (x_0, 3)$ é o vértice, para algum $x_0 \in \mathbb{R}$, já que $V \in \ell$, e

$$(y-3)^2 = \pm 4p(x - x_0)$$

é a forma da equação de $\mathcal{P}$.

Além disso, como $\mathcal{P} \cap \text{eixo} - OX = \{(4, 0)\}$ e $\mathcal{P} \cap \text{eixo} - OY = \{(0, 2)\}$, temos:

$$(0-3)^2 = \pm 4p(4 - x_0) \qquad \text{e} \qquad (2-3)^2 = \pm 4p(0 - x_0)\,,$$

isto é,

$$9 = \pm 4p(4 - x_0) \qquad \text{e} \qquad 1 = \pm 4p(-x_0)\,.$$

Logo, $9 = \pm 16p \pm 4p(-x_0) = \pm 16p + 1$, ou seja, $8 = \pm 16p$.

Sendo $p > 0$, concluímos que $8 = 16p$, isto é, $p = \frac{1}{2}$, e $1 = 4p(-x_0) = -2x_0$, ou seja, $x_0 = -\frac{1}{2}$.

Obtemos, assim, o vértice $V = \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ da parábola e sua equação:

$$\mathcal{P} : (y-3)^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)\,.$$

A diretriz de $\mathcal{P}$ é $\mathcal{L} : x = -\frac{1}{2} - p = -1$, pois $\mathcal{L}$ é perpendicular a ℓ, o foco F está à direita de V e $d(V, \mathcal{L}) = p = \frac{1}{2}$.

(b) Na figura abaixo, mostramos o gráfico de $\mathcal{P}$ junto com seus elementos. □

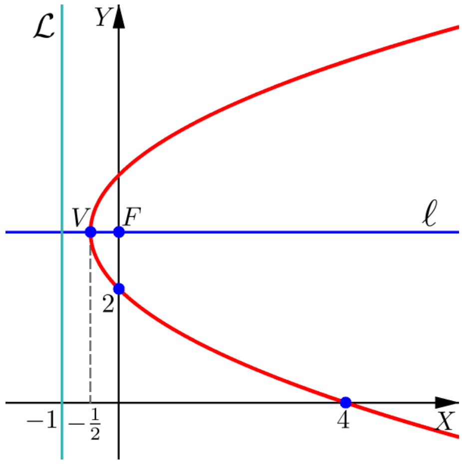

Fig. 22: Parábola $\mathcal{P} : (y-3)^2 = 2\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

Exemplo 15

Esboçe, detalhadamente, a região do plano dada pela inequação:

$$\mathcal{R} : (|x| - 4)(4x^2 + 9y^2 - 40x - 54y + 145) < 0.$$

Solução.

Completando o quadrado na equação

$$4x^2 + 9y^2 - 40x - 54y + 145 = 0,$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
& 4(x^2 - 10x) + 9(y^2 - 6y) = -145 \\
\iff\ & 4(x^2 - 10x + 25) + 9(y^2 - 6y + 9) = -145 + 100 + 81 \\
\iff\ & 4(x-5)^2 + 9(y-3)^2 = 36 \\
\iff\ & \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1\,,
\end{aligned}$$

que é a equação de uma elipse de centro $C = (5, 3)$, reta focal $\ell : y = 3$ (paralela ao eixo$-OX$), $a = 3$, $b = 2$, vértices sobre a reta focal $A_1 = (2, 3)$ e $A_2 = (8, 3)$, e vértices sobre a reta não-focal $B_1 = (5, 1)$ e $B_2 = (5, 5)$.

Então, a inequação, que define a região $\mathcal{R}$, pode ser escrita na forma:

$$\mathcal{R} : (|x| - 4)\left(\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} - 1\right) < 0.$$

Assim, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, onde:

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} |x| - 4 < 0 \\ \dfrac{(x-5)^2}{9} + \dfrac{(y-3)^2}{4} - 1 > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_2 : \begin{cases} |x| - 4 > 0 \\ \dfrac{(x-5)^2}{9} + \dfrac{(y-3)^2}{4} - 1 < 0. \end{cases}$$

A região $\mathcal{R}_1$,

$$\mathcal{R}_1 = \{\,(x,y)\,|\,x \in (-4,4)\,\} \cap \left\{\,(x,y)\,|\,\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} > 1\,\right\},$$

consiste dos pontos exteriores à elipse contidos na faixa limitada pelas retas verticais $x = -4$ e $x = 4$, excluindo os pontos da elipse e das retas.

A região $\mathcal{R}_2$,

$$\mathcal{R}_2 = \{\,(x,y)\,|\,x \in (-\infty,-4) \cup (4,+\infty)\,\} \cap \left\{\,(x,y)\,|\,\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} < 1\,\right\},$$

consiste dos pontos exteriores à faixa limitada pelas retas $x = -4$ e $x = 4$ que estão na região interior à elipse, excluindo os pontos das retas e da elipse.

Nas figuras abaixo mostramos as regiões $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$:

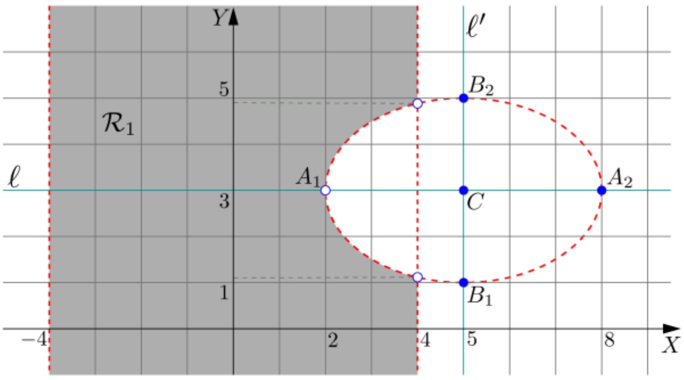

Fig. 23: Região $\mathcal{R}_1$.

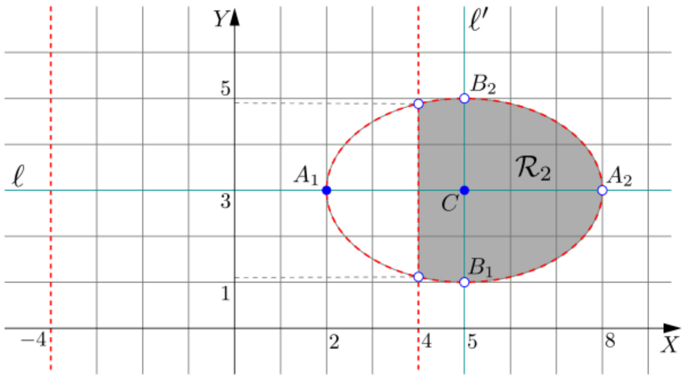

Fig. 24: Região $\mathcal{R}_2$.

Na figura abaixo mostramos a região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$. $\square$

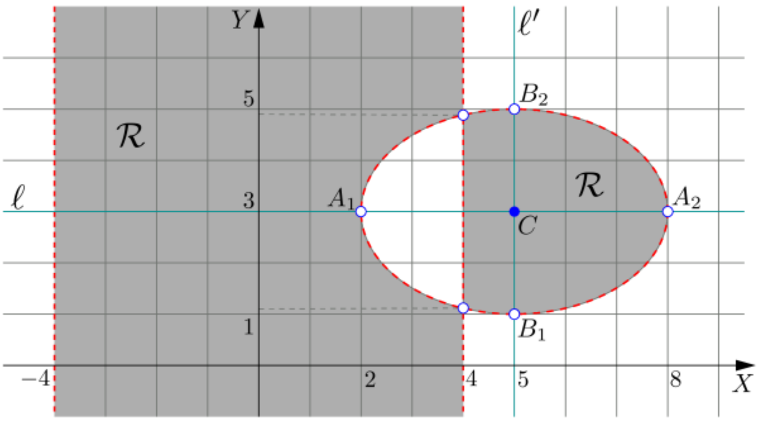

Fig. 25: Região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$.

Exemplo 16

Determine a equação da elipse $\mathcal{E}$, da qual se conhecem um foco $F = (1,3)$ e uma diretriz $\mathcal{L} : x + 2y = 10$, sabendo que seu centro encontra-se no eixo$-OY$.

Solução.
Como a reta focal ℓ da elipse é perpendicular à diretriz $\mathcal{L} : x + 2y = 10$ e $F = (1, 3) \in \ell$, temos que $\ell : 2x - y = -1$.

Além disso, como o centro $C = (0, y_0) \in \ell$, temos que $-y_0 = -1$, ou seja, $C = (0, 1)$.

Temos, também, que a reta $\mathcal{L} : x + 2y = 10$ é a diretriz correspondente ao foco $F = (1, 3)$, pois

$$d(F, \mathcal{L}) = \frac{|1 + 6 - 10|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} < d(C, \mathcal{L}) = \frac{|0 + 2 - 10|}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

Como $c = d(F, C) = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$ e $\dfrac{a}{e} = \dfrac{a^2}{c} = d(C, \mathcal{L}) = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$, obtemos que $a^2 = 8$, isto é, $a = 2\sqrt{2}$ e $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$.

Logo, um ponto $P = (x, y)$ pertence à elipse $\mathcal{E}$ se, e somente se, $d(P, F) = e\, d(P, \mathcal{L})$, ou seja,

$$\begin{aligned}
d(P, F)^2 = e^2\, d(P, \mathcal{L})^2 &\iff (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = \frac{5}{8} \frac{|x + 2y - 10|^2}{5} \\
&\iff x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6x + 9 = \frac{1}{8}(x + 2y - 10)^2 \\
&\iff 8x^2 - 16x + 8y^2 - 48x + 80 = x^2 + 4xy + 4y^2 - 20x - 40y + 100 \\
&\iff \boxed{\mathcal{E} : 7x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 8x - 20 = 0}
\end{aligned}$$

é a equação da elipse $\mathcal{E}$. $\square$

Exemplo 17

Verifique que a equação do segundo grau

$$-7x^2 + 8xy - y^2 + \sqrt{5}(-x + y) = 0 \qquad (\star)$$

representa um par de retas concorrentes e ache suas equações.

Solução.
A equação tem coeficientes:

$$A = -7\,, \qquad B = 8\,, \qquad C = -1\,, \qquad D = -\sqrt{5}\,, \qquad E = \sqrt{5}\,, \qquad \text{e} \qquad F = 0\,.$$

Como $A \neq C$, devemos girar o eixo$-OX$ e o eixo$-OY$ de um ângulo θ, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, no sentido positivo, onde $\operatorname{tg} 2\theta = \dfrac{B}{A - C} = \dfrac{8}{-7 - (-1)} = -\dfrac{8}{6} = -\dfrac{4}{3}$, e escrever a equação nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ do novo sistema de eixos ortogonais $O\,\overline{X}\,\overline{Y}$, obtido após a rotação positiva de θ do sistema de eixos ortogonais OXY.

Sendo $\operatorname{tg} 2\theta = -\dfrac{4}{3} < 0$, temos que $\cos 2\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{16}{9}}} = -\dfrac{3}{5}$. Logo,

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

Efetuando a mudança de coordenadas dada pelas relações:

$$\begin{cases} x = \cos\theta\,\overline{x} - \text{sen}\,\theta\,\overline{y} \\ y = \text{sen}\,\theta\,\overline{x} + \cos\theta\,\overline{y} \end{cases}, \qquad \text{ou seja,} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\overline{x} - 2\,\overline{y}) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2\overline{x} + \overline{y}), \end{cases}$$

na equação $(\star)$, obtemos a equação nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$:

$$\overline{A}\,\overline{x}^2 + \overline{C}\,\overline{y}^2 + \overline{D}\,\overline{x} + \overline{E}\,\overline{y} + \overline{F} = 0\,,$$

onde $\overline{F} = F = 0$,

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 18 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} \overline{D} \\ \overline{E} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Assim, a equação nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ é

$$\overline{x}^2 - 9\overline{y}^2 + \overline{x} + 3\overline{y} = 0\,.$$

Completando os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned} (\overline{x}^2 + \overline{x}) - 9(\overline{y}^2 - \tfrac{1}{3}\overline{y}) = 0 \iff & (\overline{x}^2 + \overline{x} + \tfrac{1}{4}) - 9(\overline{y}^2 - \tfrac{1}{3}\overline{y} + \tfrac{1}{36}) = \tfrac{1}{4} - 9 \times \tfrac{1}{36} \\ \iff & (\overline{x} + \tfrac{1}{2})^2 - 9(\overline{y} - \tfrac{1}{6})^2 = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} = 0 \\ \iff & (\overline{x} + \tfrac{1}{2})^2 = 9(\overline{y} - \tfrac{1}{6})^2 \\ \iff & \overline{x} + \tfrac{1}{2} = \pm 3(\overline{y} - \tfrac{1}{6})\,. \end{aligned}$$

Logo, a equação $(\star)$ representa o par de retas concorrentes:

$$\overline{x} + \frac{1}{2} = 3(\overline{y} - \frac{1}{6}) \qquad \text{e} \qquad \overline{x} + \frac{1}{2} = -3(\overline{y} - \frac{1}{6})\,,$$

ou seja, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$:

$$\overline{x} - 3\overline{y} = -1 \qquad \text{e} \qquad \overline{x} + 3\overline{y} = 0\,.$$

Para achar as equações das retas nas coordenadas x e y, usamos as relações de mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} \overline{x} = \cos\theta\,x + \text{sen}\,\theta\,y \\ \overline{y} = -\,\text{sen}\,\theta\,x + \cos\theta\,y \end{cases}, \qquad \text{ou seja,} \qquad \begin{cases} \overline{x} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x + 2\,y) \\ \overline{y} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y)\,. \end{cases}$$

Substituindo $\overline{x}$ e $\overline{y}$ nas equações das retas, obtemos:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) - 3 \times \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y) = -1 \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) + 3 \times \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y) = 0\,,$$

ou seja,

$$7x - y = -\sqrt{5} \qquad \text{e} \qquad -x + y = 0\,.$$

□