Capítulo 3

Retas e círculos, posições relativas e distância de um ponto a uma reta

Nesta aula vamos caracterizar de forma algébrica a posição relativa de duas retas no plano e de uma reta e de um círculo no plano. Vamos também calcular a distância de um ponto a uma reta.

1. Posição relativa de duas retas no plano

Sabemos que duas retas r e r' no plano podem estar em três posições relativas (uma em relação à outra):

(a) coincidentes: $r = r'$;

(a) paralelas: $r \cap r' = \emptyset$;

(c) concorrentes: $r \cap r' = \{P\}$.

Ainda no terceiro caso, as retas podem ou não ser perpendiculares.

A partir das equações cartesianas de r e r', determinaremos quando ocorre cada uma dessas situações.

Teorema 1

Sejam r e r' retas no plano dadas por:

$$r : ax + by = c \qquad \text{e} \qquad r' : a'x + b'y = c' .$$

Então r e r' são paralelas ou coincidentes se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tal que

$$\lambda a = a' \qquad \text{e} \qquad \lambda b = b' .$$

Prova.

Parte 1. Suponhamos primeiramente que r e r' são paralelas ou coincidentes e verifiquemos a existência do número $\lambda \neq 0$ que satisfaz as condições do enunciado.

Temos duas situações a considerar:

(i) r e r' são ambas verticais ou horizontais;

(ii) r e r' não são verticais nem horizontais, intersectando, assim, ambos os eixos coordenados.

Na situação **(i)**, quando as retas são verticais ($b = b' = 0$), basta tomar $\lambda = \dfrac{a'}{a}$, e quando as retas são horizontais ($a = a' = 0$), basta tomar $\lambda = \dfrac{b'}{b}$.

Na situação **(ii)**, os números a, a', b e b' são todos diferentes de zero e as retas se escrevem:

$$r : y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}, \qquad \text{e} \qquad r' : y = -\frac{a'}{b'}x + \frac{c'}{b'} .$$

Como as retas são paralelas (ou coincidentes), elas têm a mesma inclinação: $-\dfrac{a}{b} = -\dfrac{a'}{b'}$. Logo $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b}$, que é o número λ procurado (verifique!).

Parte 2. Suponhamos agora que $\lambda a = a'$ e $\lambda b = b'$, onde $\lambda \neq 0$, e verifiquemos que as retas devem ser paralelas ou coincidentes.

Como $\lambda \neq 0$, das condições acima, temos $b = 0 \Longleftrightarrow b' = 0$. Ou seja, r é vertical ($b = 0$) se, e somente se, r' é vertical ($b' = 0$), e, portanto, r e r' são paralelas ou coincidentes.

Suponhamos, agora, que $b \neq 0$ e $b' \neq 0$.

Sendo assim, a equação de r' é:

$$r' : (\lambda a)\, x + (\lambda b)\, y = c'\,,$$

ou seja,

$$r' : y = -\frac{\lambda a}{\lambda b}\, x + \frac{c'}{\lambda b} = -\frac{a}{b}\, x + \frac{c'}{\lambda b}\,,$$

enquanto a equação de r pode ser escrita na forma:

$$r : y = -\frac{a}{b}\, x + \frac{c}{b}\,.$$

Como r e r' têm inclinação $-\frac{a}{b}$, essas retas são paralelas ou coincidentes. ■

Corolário 1

As retas $r : ax + by = c$ *e* $r' : a'x + b'y = c'$ *são* **coincidentes** *se, e somente se, existe* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, *tal que*

$$\lambda a = a'\,, \quad \lambda b = b' \qquad \text{e} \qquad \lambda c = c'\,.$$

Prova.

Pelo teorema acima, se as retas são coincidentes, então existe $\lambda \neq 0$ tal que $a' = \lambda a$ e $b' = \lambda b$.

Seja (x_0, y_0) um ponto da reta r. Como $r = r'$, as coordenadas $x = x_0$ e $y = y_0$ satisfazem também a equação de r'. Logo,

$$c' = a'x_0 + b'y_0 = \lambda a x_0 + \lambda b y_0 = \lambda c\,,$$

isto é $c' = \lambda c$.

Reciprocamente, se existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tal que $\lambda a = a'$, $\lambda b = b'$ e $\lambda c = c'$, então é claro que as equações de r e r' representam a mesma reta, isto é, $r = r'$. ■

Corolário 2

As retas $r : ax + by = c$ *e* $r' : a'x + b'y = c'$ *são* **paralelas** *se, e somente se, existe* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, *tal que*

$$\lambda a = a'\,, \quad \lambda b = b' \qquad \text{e} \qquad \lambda c \neq c'\,.$$

Prova.

Se as retas r e r' são paralelas, pelo teorema anterior, existe $\lambda \neq 0$, tal que, $a' = \lambda a$ e $b' = \lambda b$. Como $r \cap r' = \emptyset$, temos que, se $(x_0, y_0) \in r$, então $(x_0, y_0) \notin r'$.

Isto é,

$$c' \neq a'x_0 + b'y_0 = \lambda a x_0 + \lambda b y_0 = \lambda c\,,$$

ou seja, $c' \neq \lambda c$.

A recíproca é evidente (justifique!). ■

Exemplo 1

Verifique se as retas

$$r_1 : 2x + y = 1, \quad r_2 : 6x + 3y = 2 \quad e \quad r_3 : 4x + 2y = 2\,,$$

são paralelas ou coincidentes.

Solução.

Multiplicando a equação de r_1 por 3, obtemos $r_1 : 6x + 3y = 3$ e, como $3 \neq 2$, temos $r_1 \parallel r_2$.

Multiplicando a equação de r_1 por 2, obtemos a equação de r_3. Logo $r_1 = r_3$.

Além disso, $r_2 \parallel r_3$. □

Vejamos agora como caracterizar a perpendicularidade entre duas retas dadas na forma cartesiana.

Teorema 2

As retas $r : ax + by = c$ e $r' : a'x + b'y = c'$ são **perpendiculares** *se, e somente se,*

$$aa' + bb' = 0.$$

Prova.

(a) Vamos primeiro provar que, **se** r é perpendicular a r', **então** $aa' + bb' = 0$.

Se r é vertical ($b = 0$), então r' é horizontal ($a' = 0$) e, portanto, $aa' + bb' = 0$.

Analogamente, se r é horizontal ($a = 0$), então r' é vertical ($b' = 0$) e, portanto, $aa' + bb' = 0$.

Suponhamos, agora, que r e r' são retas perpendiculares que cortam ambos os eixos coordenados (isto é, não ocorrem as duas possibilidades anteriores). Então os números a, a', b e b' são todos diferentes de zero, e as retas se expressam na forma,

$$r : y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \qquad \text{e} \qquad r' : y = -\frac{a'}{b'}x + \frac{c'}{a'}.$$

Como r e r' são perpendiculares, temos

$$-\frac{a}{b} = -\frac{1}{-\frac{a'}{b'}}.$$

Ou seja, $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{b'}{a'}$ e, portanto, $aa' + bb' = 0$.

Com isso provamos que: $r \perp r' \Longrightarrow aa' + bb' = 0$.

(b) Reciprocamente, suponhamos que $aa' + bb' = 0$ e provemos que r e r' são perpendiculares.

Se $a = 0$, ou seja, r é horizontal, então $bb' = 0$. Como a e b não podem ser simultaneamente iguais a zero, devemos ter $b \neq 0$ e, portanto $b' = 0$, isto é, r' é vertical. Logo $r \perp r'$.

Analogamente, se $b = 0$, isto é, r é vertical, podemos verificar que, necessariamente, $a' = 0$, ou seja, r' é horizontal. Portanto $r \perp r'$.

Suponhamos, agora, que $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Então $a' \neq 0$, $b' \neq 0$ e as equações reduzidas de r e r' são, respectivamente,

$$r : y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \qquad \text{e} \qquad r' : y = -\frac{a'}{b'}x + \frac{c'}{b'}.$$

Como $aa' + bb' = 0$, temos:

$$aa' = -bb' \Longleftrightarrow \frac{a}{b} = -\frac{b'}{a'} \Longleftrightarrow -\frac{a}{b} = -\frac{1}{-\frac{a'}{b'}},$$

mostrando assim que as retas r e r' são perpendiculares. Isto termina a prova do teorema. ■

Exemplo 2

Determine a equação da reta s que passa pelo ponto $(1,2)$ e é perpendicular à reta $r : x + 3y = 1$.

Solução.

Seja $s : ax + by = c$ uma reta perpendicular a r. Pelo teorema anterior, $a + 3b = 0$.

Fixando $b = -1$, obtemos $a = -3b = -3(-1) = 3$.

Portanto, a equação de s deve ser da forma $s : 3x - y = c$.

Se a reta s passa pelo ponto $(1,2)$, então as coordenadas $x = 1$ e $y = 2$ devem satisfazer a equação de s, isto é, $3 \times 1 - 2 = c$. Logo $c = 1$ e a equação procurada da reta s é $3x - y = 1$. □

2. Posição relativa de uma reta e um círculo no plano

Em Geometria Plana, aprendemos que um círculo C e uma reta r no plano podem estar em três posições relativas (uma em relação à outra):

(a) $r \cap C$ consiste de dois pontos: a reta r é dita **secante** ao círculo C.

(b) $r \cap C$ consiste de exatamente um ponto: a reta r é dita **tangente** ao círculo C. Neste caso, o ponto de interseção é chamado **ponto de tangência** de r com C.

(c) $r \cap C = \emptyset$: a reta r é dita **exterior** ao círculo C.

No seguinte teorema estabelecemos uma propriedade importante da tangência a um círculo.

Teorema 3

Se *a reta r é tangente no ponto P (ponto de tangência) ao círculo C de centro A e raio $\alpha > 0$,* **então** *a reta que passa por A e P é perpendicular à reta r.*

Prova.
Seja OXY o sistema de eixos ortogonais que tem origem no ponto A e eixo$-OX$ positivo contendo o ponto P. A escolha desse sistema de eixos ortogonais visa facilitar a demonstração do teorema.

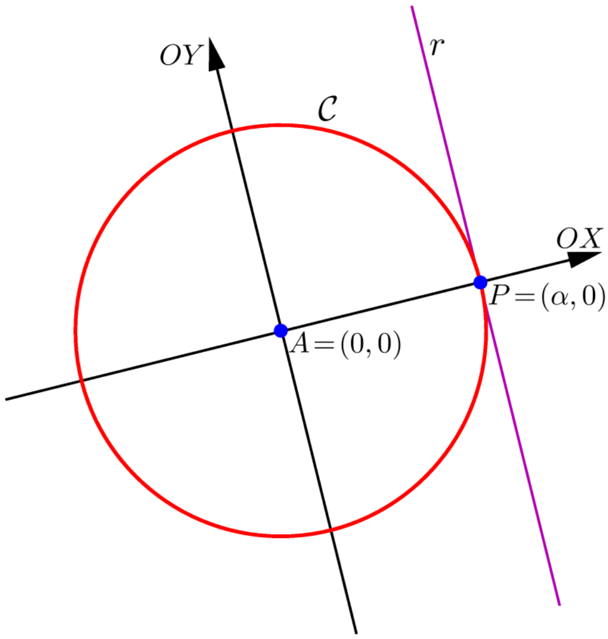

Fig. 1: Escolha do sistema de coordenadas.

Neste sistema de coordenadas, $A = (0,0)$ e $P = (\alpha, 0)$.

Para demonstrar o teorema, basta mostrar que a equação da reta r no sistema de coordenadas escolhido é

$$r : x = \alpha.$$

Suponhamos, *raciocinando por absurdo*, que r não é vertical. Isto é, $r : y = ax + b$.

Como $P = (\alpha, 0) \in r$, devemos ter $0 = a\,\alpha + b$. Logo $b = -a\,\alpha$ e a equação de r é

$$r : y = ax - a\alpha\,, \qquad \text{ou melhor,} \qquad r : y = a(x - \alpha)\,.$$

Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} y = a(x - \alpha) \\ x^2 + y^2 = \alpha^2\,, \end{cases} \tag{1}$$

onde $x^2 + y^2 = \alpha^2$ é a equação do círculo C no sistema de coordenadas escolhido.

Um ponto é comum à reta r e ao círculo C se, e somente se, suas coordenadas satisfazem as duas equações do sistema (1).

Substituindo y da primeira equação na segunda, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 + a^2(x-\alpha)^2 = \alpha^2 &\iff x^2 - \alpha^2 + a^2(x-\alpha)^2 = 0 \\ &\iff (x-\alpha)(x+\alpha) + a^2(x-\alpha)^2 = 0 \\ &\iff (x-\alpha)\left[x + \alpha + a^2(x-\alpha)\right] = 0\,. \end{aligned}$$

Então

$$x = \alpha \qquad \text{ou} \qquad x + \alpha + a^2(x-\alpha) = 0\,,$$

isto é,

$$x = \alpha \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{\alpha(a^2-1)}{1+a^2}\,.$$

Logo, o sistema (1) tem duas soluções:

$$\begin{aligned} P &= (\alpha, 0)\,, \quad \text{correspondente a } x = \alpha \\ P' &= \left(\frac{\alpha(a^2-1)}{1+a^2}, -\frac{2a\alpha}{1+a^2}\right), \quad \text{correspondente a } x = \frac{\alpha(a^2-1)}{1+a^2} \text{ (verifique!).} \end{aligned}$$

Mas isso é absurdo, pois a reta r e o círculo C são tangentes e $P' \neq P$.

Assim, a hipótese de que r é uma reta não-vertical é falsa. Isto conclue a prova do teorema. ■

Exemplo 3

Sabendo-se que o círculo C está centrado em $Q = (1,3)$ e que o ponto $P = (1,-1) \in C$, dê a equação da reta r tangente a C que passa por P.

Encontre, também, a outra reta tangente a C e paralela a r.

Solução.

A equação do círculo C é

$$C : (x-1)^2 + (y-3)^2 = \alpha^2\,,$$

onde $\alpha > 0$ é o raio.

Como $P = (1,-1) \in C$, temos

$$(1-1)^2 + (-1-3)^2 = \alpha^2\,, \quad \text{ou seja} \quad \alpha^2 = (-4)^2 = 16.$$

Portanto, C tem raio $\alpha = 4$ e sua equação é

$$C : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 16\,.$$

Pelo teorema anterior, a reta r que é tangente a $\mathcal{C}$ no ponto P é perpendicular à reta s que contém os pontos Q e P.

A reta s é vertical, pois os pontos Q e P têm abscissas iguais, e sua equação é $s : x = 1$.

Consequentemente, a reta r deve ser horizontal.

Como $P = (1, -1) \in r$, todos os pontos de r devem ter ordenada igual a -1. Isto é, $r : y = -1$ é a equação procurada da reta r.

Seja r' a outra reta tangente a $\mathcal{C}$ paralela à reta r.

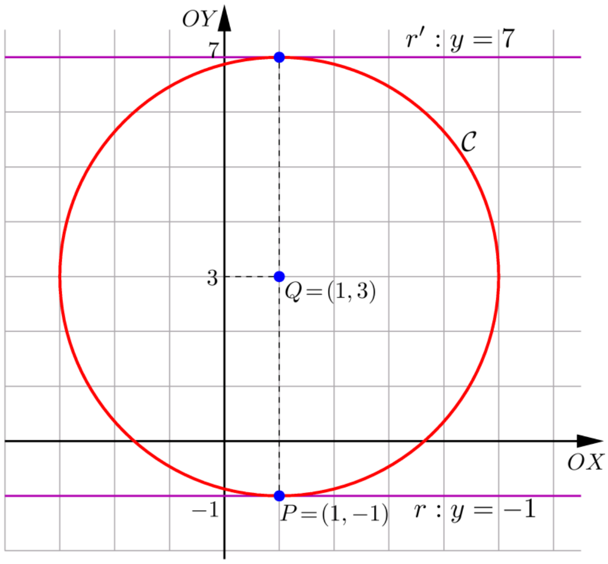

Fig. 2: Círculo $\mathcal{C}$ e tangentes horizontais.

Como $r' : y = a$, para algum $a \in \mathbb{R}$, e $r \cap \mathcal{C}$ consiste de apenas um ponto, a equação

$$(x-1)^2 + (a-3)^2 = 16\,,$$

deve ter apenas uma solução para x. Mas isso ocorre somente quando $16 - (a-3)^2 = 0$, isto é, $a - 3 = \pm 4$, ou seja, $a = 3 + 4 = 7$ ou $a = 3 - 4 = -1$. A segunda possibilidade coresponde à reta $r : y = -1$ e a primeira à reta $r' : y = 7$ procurada. $\square$

3. Distância de um ponto a uma reta

Dados um ponto P e uma reta r no plano, já sabemos calcular a distância de P a cada ponto $P' \in r$.

Definição 1

Definimos a **distância**, $d(P, r)$, **do ponto** P **à reta** r *por*

$$\boxed{d(P, r) = \min\{d(P, P') \mid P' \in r\}}$$

Dizemos que um ponto $P^\star \in r$ **realiza a distância** *de P à reta r, se*

$$d(P,P^\star) \leq d(P,P')\,, \quad \text{para todo } P' \in r.$$

Usando o *teorema de Pitágoras* é fácil verificar que o ponto $P^\star$ que realiza a distância do ponto P à reta r é o *pé da perpendicular a r que passa pelo ponto P*.

Assim,

$$\begin{aligned} d(P,r) &= \min\{d(P,P') \mid P' \in r\} \\ &= d(P,P^\star)\,. \end{aligned}$$

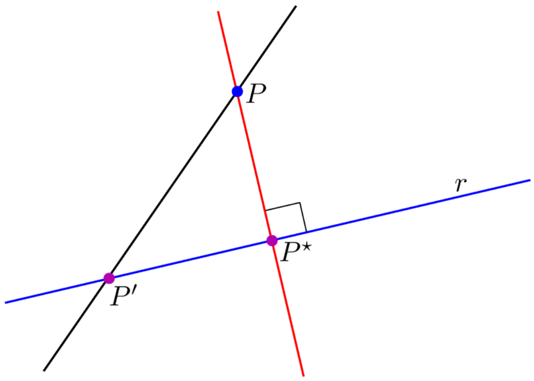

Fig. 3: $P^\star$ realiza a distância de P à reta r.

Existe outra maneira de ver a distância de um ponto P a uma reta r:

- Se $P \in r$, a distância de P a r é igual a zero.
- Se $P \notin r$, consideremos os círculos C_α de centro no ponto P e raio $\alpha > 0$.

Se α é muito pequeno, então $C_\alpha \cap r = \emptyset$, e se α é muito grande, então $C_\alpha \cap r$ consiste de exatamente dois pontos.

Portanto, existe um único valor $\alpha^\star > 0$ tal que $C_{\alpha^\star}$ é tangente a reta r num ponto $P^\star$. Isto é, $C_{\alpha^\star} \cap r = \{P^\star\}$.

O teorema anterior garante que a reta que passa por P e $P^\star$ é perpendicular a r.

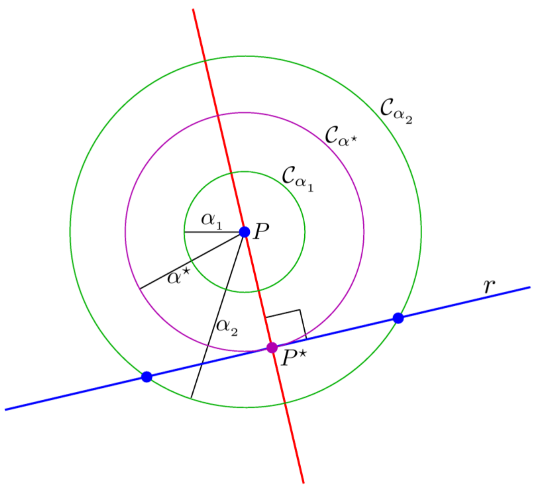

Fig. 4: $\alpha_1 < \alpha^\star = d(P,r) < \alpha_2$.

Logo $\alpha^\star$ é a distância de P a r, ou seja:

$$\boxed{\alpha^\star = d(P,r)}\,.$$

No seguinte teorema, estabelecemos uma fórmula para o cálculo da distância de um ponto P a uma reta r no plano.

Teorema 4

Sejam $r : ax + by = c$ uma reta e $P = (x_0, y_0)$ um ponto no plano. Então a distância de P a r é dada por

$$\boxed{d(P, r) = \frac{|\, ax_0 + by_0 - c \,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Prova.

Se $P \in r$, então as coordenadas de P satisfazem a equação de r, ou seja, $ax_0 + by_0 = c$, e, portanto,

$$\frac{|\, ax_0 + by_0 - c \,|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{0}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0 = d(P, r),$$

e o teorema está provado neste caso.

Suponhamos agora que $P \notin r$, e consideremos, para todo $\alpha > 0$, o sistema de equações

$$\begin{cases} ax + by = c\,, \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \alpha^2\,, \quad \alpha > 0, \end{cases} \tag{2}$$

onde a primeira equação é da reta r e a segunda equação é do círculo C_α de centro no ponto P e raio $\alpha > 0$.

Vamos determinar α para o qual a solução do sistema é única. Isto é, para o qual o círculo C_α de raio α é tangente à reta r.

- Se $b \neq 0$, então a primeira equação de (2) nos dá

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}\,.$$

Em particular, a reta r não é vertical. Substituindo essa expressão de y na segunda equação do sistema (2), obtemos:

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + \left(-\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} - y_0\right)^2 &= \alpha^2 \\ \iff (x - x_0)^2 + \left(-\frac{1}{b}\,[a\,x - c + y_0 b]\right)^2 &= \alpha^2 \\ \iff (x - x_0)^2 + \left(-\frac{1}{b}\right)^2 [a\,x - c + y_0 b]^2 &= \alpha^2 \\ \iff (x - x_0)^2 + \frac{1}{b^2}\,(a\,x - c + y_0 b)^2 &= \alpha^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iff b^2(x-x_0)^2 + \left(a\,x - c + y_0 b\right)^2 &= \alpha^2 b^2 \\
\iff b^2(x-x_0)^2 + \left(a\,x - ax_0 + ax_0 + by_0 - c\right)^2 &= \alpha^2 b^2 \\
\iff b^2(x-x_0)^2 + \left(a\,(x-x_0) + [ax_0 + by_0 - c]\right)^2 &= \alpha^2 b^2
\end{aligned}$$

Fazendo $x' = x - x_0$ e $Q_0 = ax_0 + by_0 - c$, temos:

$$\begin{aligned}
b^2(x')^2 + \left(a\,(x') + Q_0\right)^2 &= \alpha^2 b^2 \\
\iff b^2(x')^2 + a^2\,(x')^2 + 2ax'Q_0 + Q_0^2 &= \alpha^2 b^2 \\
\iff (a^2+b^2)\;(x')^2 + 2aQ_0x' + \left(Q_0^2 - \alpha^2 b^2\right) &= 0\,.
\end{aligned}$$

Esta última equação (de grau dois) terá uma única solução para x' (e, portanto, uma única solução para x) se, e somente se, o seu discriminante é igual a zero:

$$\Delta = (2aQ_0)^2 - 4\,(a^2+b^2)\left(Q_0^2 - \alpha^2 b^2\right) = 0.$$

Ou seja

$$\begin{aligned}
4a^2Q_0^2 - 4a^2Q_0^2 + 4a^2b^2\alpha^2 - 4b^2Q_0^2 + 4\alpha^2b^4 &= 0 \\
4a^2b^2\alpha^2 - 4b^2Q_0^2 + 4\alpha^2b^4 &= 0 \\
4b^2\left(a^2\alpha^2 - Q_0^2 + \alpha^2b^2\right) &= 0 \\
a^2\alpha^2 - Q_0^2 + \alpha^2b^2 &= 0, \quad \text{pois } b \neq 0 \\
\alpha^2\,(a^2+b^2) - Q_0^2 &= 0 \\
\alpha^2\,(a^2+b^2) &= Q_0^2 \\
\alpha^2 &= \frac{Q_0^2}{a^2+b^2},
\end{aligned}$$

Lembrando que $Q_0 = ax_0 + by_0 - c$ e extraindo a raiz quadrada, obtemos:

$$\alpha = \frac{|\,ax_0 + by_0 - c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}\,,$$

Na situação em que a reta r é vertical ($b = 0$), $r : x = c$, temos $Q_0 = x_0 - c$, e o sistema (2) fica

$$\begin{cases} x = c\,, \\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \alpha^2\,. \end{cases} \tag{3}$$

Substituindo a primeira equação na segunda, obtemos

$$(c - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \alpha^2 .$$

Essa equação terá uma única solução para y se, e somente se,

$$\alpha^2 = (c - x_0)^2 .$$

Logo,

$$\alpha = |x_0 - c| = |Q_0| = \frac{|1x_0 + 0y_0 - c|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} ,$$

concluindo a demonstração do teorema. ■

Observação 1

Na demonstração do teorema anterior observamos que o sistema (2):

- *não tem solução se* $\Delta < 0$, *ou seja,* $\alpha < \dfrac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;
- *tem duas soluções se* $\Delta > 0$, *ou seja,* $\alpha > \dfrac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, .

Fica provado, portanto, o seguinte teorema:

Teorema 5

Sejam r uma reta e C um círculo de centro A e raio $\alpha > 0$. Então,

(a) $C \cap r = \emptyset$ *se, e somente se* $d(A, r) > \alpha$.

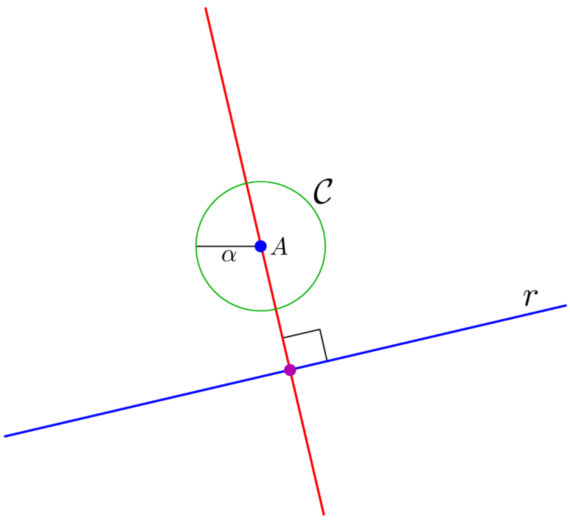

Fig. 5: $d(A, r) > \alpha$.

(b) *$\mathcal{C} \cap r$ consiste de um único ponto se, e somente se, $d(A, r) = \alpha$.*

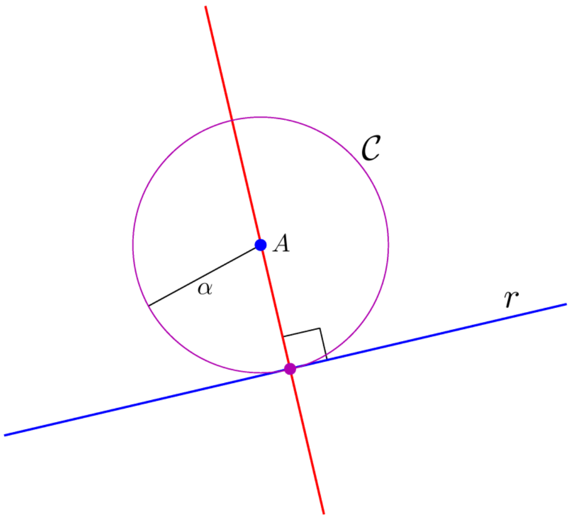

Fig. 6: $d(A, r) = \alpha$.

(c) *$\mathcal{C} \cap r$ consiste de exatamente dois pontos se, e somente se, $d(A, r) < \alpha$.*

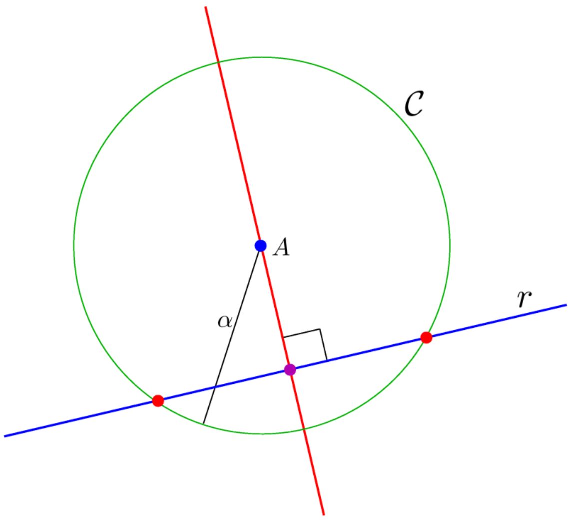

Fig. 7: $d(A, r) < \alpha$.

Exemplo 4

Calcule a distância do ponto $P = (1, -1)$ à reta $r : x + 2y = 1$.

Solução.

Vamos resolver o problema de três maneiras:

(1) Usando a fórmula obtida no teorema 4: sendo $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, $a = 1$, $b = 2$ e $c = 1$, temos

$$d(P, r) = \frac{|1 \times 1 + 2 \times (-1) - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|1 - 2 - 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

(2) Determinando $\alpha \geq 0$ de modo que o sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = \alpha^2, \end{cases}$$

tenha uma única solução.

Substituindo $x = 1 - 2y$ na segunda equação, obtemos:

$$(1 - 2y - 1)^2 + (y + 1)^2 = \alpha^2.$$

Então $4y^2 + y^2 + 2y + 1 = \alpha^2$, isto é,

$$5y^2 + 2y + (1 - \alpha^2) = 0.$$

Essa equação possui uma única solução se, e somente se, o seu discriminante é igual a zero:

$$\begin{aligned} \Delta = 2^2 - 4 \times 5 \times (1 - \alpha^2) &= 0 \\ 4 - 20(1 - \alpha^2) &= 0 \\ 1 - 5(1 - \alpha^2) &= 0 \\ 1 - 5 + 5\alpha^2 &= 0 \\ \alpha^2 &= \frac{4}{5} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$d(P, r) = \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

(3) Seja r' a reta que passa pelo ponto $P = (1, -1)$ e é perpendicular à reta $r : x + 2y = 1$.

Como r tem inclinação $m = \dfrac{-1}{2}$, a reta r' tem inclinação

$$n = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-1/2} = 2.$$

Logo a equação de r' deve ser $r' : y = 2x + d$.

Sendo $P = (1, -1) \in r'$, temos $-1 = 2 \times 1 + d \Longrightarrow d = -1 - 2 = -3$.

Assim, $r' : y = 2x - 3$. Note, também, que a equação de r se escreve: $r : y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Seja $r \cap r' = \{P^\star\}$.

Se $P^\star = (x, y)$, então $2x - 3 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, ou seja, $\left(2 + \frac{1}{2}\right)x = \frac{1}{2} + 3$.

Portanto, $x = \frac{2}{5} \times \frac{7}{2} = \frac{7}{5}$ e $y = 2 \times \frac{7}{5} - 3 = -\frac{1}{5}$.

Logo $P^\star = \left(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ e

$$\begin{aligned} d(P, r) &= d(P, P^\star) = \sqrt{\left(\frac{7}{5} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{5} + 1\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4 + 16}{5^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \end{aligned}$$

concluindo, assim, o cálculo desejado. □