Capítulo 4

Distância entre duas retas. Regiões no plano

Nesta aula, veremos primeiro como podemos determinar a distância entre duas retas paralelas no plano.

Para isso, lembramos que, na aula anterior, calculamos a distância de um ponto P de coordenadas (x_0, y_0) a uma reta $r : ax + by = c$ e obtivemos a seguinte fórmula:

$$d(P, r) = \frac{|\, ax_0 + by_0 - c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Para entender melhor a argumentação feita na aula anterior, iniciaremos esta aula apresentando outros exemplos.

Exemplo 1

Considere o sistema não linear

$$\begin{cases} y = 2x + 1\,, \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = r\,, \end{cases} \qquad \textit{onde } r \in \mathbb{R}.$$

Faça uma análise do número de soluções desse sistema em função do parâmetro r.

Solução.

Sejam a reta de equação $s : y = 2x + 1$ e o ponto $C = (2, 1)$.

Temos que $(x-2)^2+(y-1)^2 \geq 0$.

Logo a equação $(x-2)^2+(y-1)^2 = r$ não terá solução quando $r < 0$.

Por outro lado, como C não pertence à reta s (porque?), podemos concluir que o sistema não tem solução, também, para $r = 0$.

Finalmente, no caso $r > 0$ a equação $(x-2)^2+(y-1)^2 = r$ representa o círculo de centro no ponto $C = (2,1)$ e raio $\sqrt{r}$.

Pelo teorema 5 da aula anterior, basta calcular $d(C,s)$ para completar a análise do número de soluções do sistema.

Como a equação cartesiana de s é $2x - y = -1$, com $a = 2$, $b = -1$ e $c = -1$, temos:

$$d(C,s) = \frac{|2\times 2 - 1\times 1 + 1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}\,.$$

Concluímos que o sistema dado tem uma única solução quando $r = \dfrac{16}{5}$, tem duas soluções quando $r > \dfrac{16}{5}$ e não tem solução quando $r < \dfrac{16}{5}$. □

Exemplo 2

Determinar as retas que passam pelo ponto $(2,7)$ *e são tangentes ao círculo* C *de centro* $A = (3,0)$ *e raio* 3.

Solução.

Seja r uma reta tangente ao círculo $C : (x-3)^2 + y^2 = 9$ que passa pelo ponto $P = (2,7)$.

• Se r fosse vertical, $x = 2$ seria sua equação, pois a abscissa de P é 2. Como $r \cap C$ possui dois pontos, r não pode ser tangente a C. De fato, $(x,y) \in r \cap C$ se, e somente se, $x = 2$ e $(2-3)^2 + y^2 = 9$, isto é, $x = 2$ e $y = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$.

• Pelo visto acima, r não pode ser vertical, e, portanto, $r : y = ax + b$, isto é, $r : ax - y = -b$.

Como $P = (2,7) \in r$, temos $7 = 2a + b$, isto é, $b = 7 - 2a$ e, portanto, $r : ax - y = 2a - 7$.

Além disso, devemos ter $d(A, r) = 3$ para que r seja tangente a C, ou seja,

$$\frac{|a \times 3 + (-1) \times 0 - (2a - 7)|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 3\,.$$

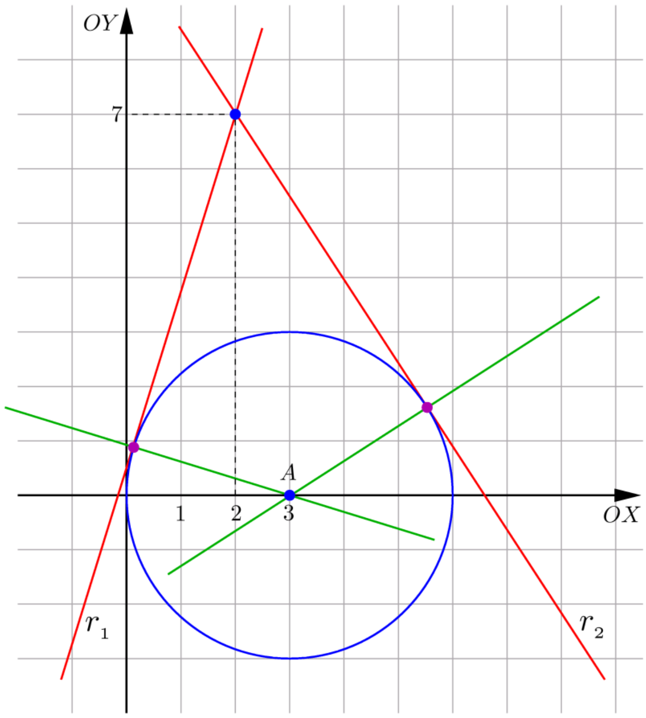

Fig. 1: Tangentes a C passando por $P = (2, 7)$.

Essa identidade é satisfeita se, e somente se:

$$|a + 7| = 3\sqrt{a^2 + 1} \iff (a + 7)^2 = 9(a^2 + 1)$$

$$\iff \quad a^2 + 14a + 49 = 9a^2 + 9 \iff 8a^2 - 14a - 40 = 0$$

$$\iff \quad 4a^2 - 7a - 20 = 0 \iff a = \frac{1}{8}\,(7 \pm \sqrt{49 + 320}) = \frac{1}{8}\left(7 \pm 3\sqrt{41}\right)$$

Logo,

$$r_1 : y = \frac{1}{8}\left(7 + 3\sqrt{41}\right)\,x + \left(7 - \frac{2}{8}\left(7 + 3\sqrt{41}\right)\right),$$

e

$$r_2 : y = \frac{1}{8}\left(7 - 3\sqrt{41}\right)\,x + \left(7 - \frac{2}{8}\left(7 - 3\sqrt{41}\right)\right),$$

ou seja,

$$r_1 : y = \left(\frac{7+3\sqrt{41}}{8}\right)x + \left(\frac{21-3\sqrt{41}}{4}\right),$$

e

$$r_2 : y = \left(\frac{7-3\sqrt{41}}{8}\right)x + \left(\frac{21+3\sqrt{41}}{4}\right),$$

são as duas retas tangentes ao círculo C que passam pelo ponto $P = (2,7)$. $\square$

1. Distância entre duas retas no plano

Definimos a **distância** entre duas retas r e r' como sendo a menor distância entre um ponto de r e um ponto de r'. Isto é,

$$\boxed{d(r,r') = \min\{d(P,P') \mid P \in r \text{ e } P' \in r'\}}$$

Então $d(r,r') = 0$ se r e r' são coincidentes ou concorrentes.

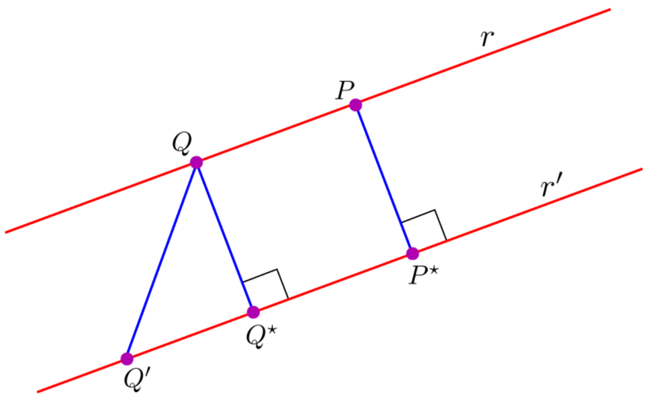

Fig. 2: Distância entre duas retas paralelas.

Sejam r e r' retas paralelas.

Sabemos que, dado $P \in r$, existe um único ponto $P^\star \in r'$, pé da perpendicular a r' traçada por P, tal que

$$d(P,P') \geq d(P,P^\star), \quad \text{para todo } P' \in r'.$$

Como $r \parallel r'$, temos $d(Q,Q^\star) = d(P,P^\star)$, quaisquer que sejam $P, Q \in r$, já que $QPP^\star Q^\star$ é um retângulo.

Então $d(Q,Q') \geq d(Q,Q^\star) = d(P,P^\star) = d(P,r')$, quaisquer que sejam $Q \in r$ e $Q' \in r'$.

Logo,

$$d(r, r') = d(P, r'), \quad \text{qualquer que seja} \quad P \in r.$$

Como conseqüencia do teorema 4, temos o seguinte corolário.

Corolário 1

Sejam $r : ax + by = c$ e $r' : ax + by = c'$ retas paralelas ($c \neq c'$) ou coincidentes ($c = c'$). Então,

$$\boxed{d(r, r') = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Prova.

Seja $P = (x_0, y_0)$ um ponto da reta r. Então

$$d(r, r') = d(P, r') = \frac{|ax_0 + by_0 - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Como $ax_0 + by_0 = c$, obtemos $d(r, r') = \dfrac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. ■

Exemplo 3

Determine as equações das retas paralelas à reta $r : 2x + y = 1$ que distam 3 unidades de r.

Solução.

Seja $s : 2x + y = c$ uma reta paralela à reta r. Temos,

$$d(r, s) = 3 \iff \frac{|c - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 3 \iff |c - 1| = 3\sqrt{5}.$$

Logo $c = 1 + 3\sqrt{5}$ ou $c = 1 - 3\sqrt{5}$, ou seja, as retas

$$s_1 : 2x + y = 1 + 3\sqrt{5} \quad \text{e} \quad s_2 : 2x + y = 1 - 3\sqrt{5},$$

são as retas paralelas a r que distam 3 unidades da reta r.

Vejamos outra solução do mesmo problema sem usar a fórmula da distância entre duas retas paralelas.

Seja $t : y = \frac{1}{2}x$ a reta perpendicular à reta r que passa pela origem.

Logo $r \cap t = \{P\}$, onde $P = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ (verifique!).

Sejam $(2y, y)$ os pontos pertencentes à reta t que distam 3 de r, ou seja,

$$d\left((2y,y), \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)\right) = 3\,.$$

Então,

$$4\left(y - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{5}\right)^2 = 9\,.$$

Portanto,

$$\left(y - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{9}{5}$$

ou seja,

$$y = \pm\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5}.$$

Como $t : x = 2y$, os pontos ao longo de t que estão a distância 3 de P são:

$$P_1 = \left(\frac{6}{\sqrt{5}} + \frac{2}{5}, \frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5}\right)$$

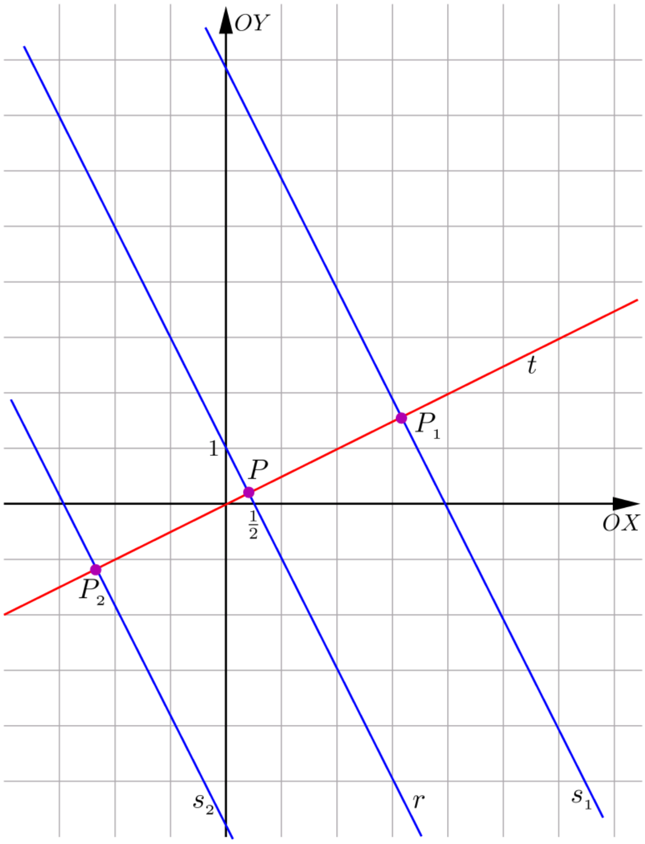

Fig. 3: Retas a distância 3 de r.

e

$$P_2 = \left(-\frac{6}{\sqrt{5}} + \frac{2}{5}, -\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5}\right).$$

Consideremos agora as retas s_1 e s_2 paralelas à reta r que passam por P_1 e P_2, respectivamente.

Como $d(s_1, r) = d(P_1, P) = 3$ e $d(s_2, r) = d(P_2, P) = 3$, s_1 e s_2 são as retas paralelas a r que distam 3 unidades de r, e suas equações são:

$$s_1 : 2x + y = 2\left(\frac{6\sqrt{5}+2}{5}\right) + \frac{3\sqrt{5}+1}{5} = \frac{15\sqrt{5}+5}{5} = 3\sqrt{5}+1$$

e

$$s_1 : 2x + y = 2\left(\frac{-6\sqrt{5}+2}{5}\right) + \frac{-3\sqrt{5}+1}{5} = \frac{-15\sqrt{5}+5}{5} = -3\sqrt{5}+1. \quad \square$$

2. Esboço de regiões no plano

Consideremos a reta $r : ax+by = c$ e a reta s que passa pelos pontos $(0,0)$ e (a,b). Então $s : bx - ay = 0$, pois $(0,0)$ e (a,b) satisfazem a equação de s.

Afirmativa 1: As retas r e s são perpendiculares.

De fato, $a \cdot b + b \cdot (-a) = 0$. Logo, pelo teorema 2 da aula 3, temos $r \perp s$ (figura 4).

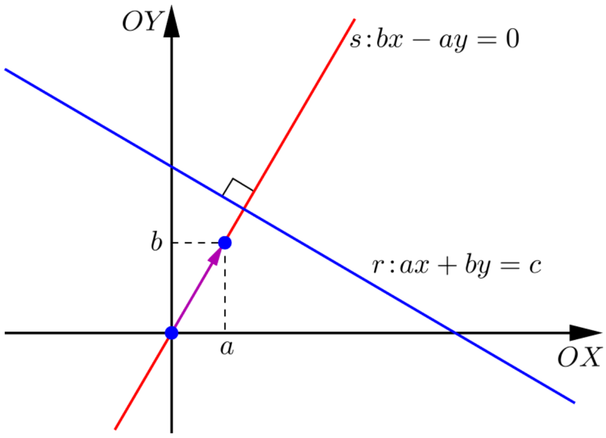

Fig. 4: Retas r e s perpendiculares.

Afirmativa 2: Por cada ponto (x_0, y_0) do plano passa uma única reta r' paralela à reta r (veja a figura 5).

Para verificar essa afirmativa, basta tomar $r' : ax + by = c$, onde $c = ax_0 + by_0$.

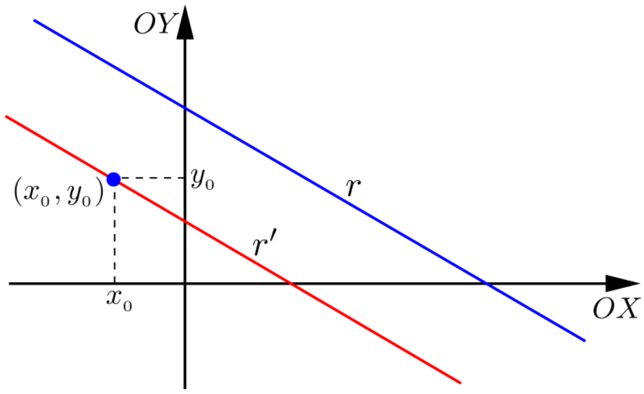

Fig. 5: Retas r e r' paralelas.

Afirmativa 3: O plano π é união de retas paralelas a uma reta dada. Isto é,

$$\pi = \bigcup_{c\in\mathbb{R}} \{ (x,y) \mid ax+by=c \} \,.$$

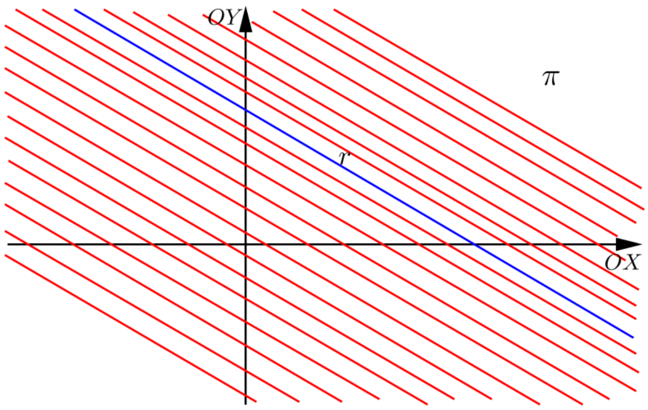

Fig. 6: Plano π visto como união de retas paralelas.

Afirmativa 4: Consideremos as retas paralelas $r_1 : ax+by=c_1$ e $r_2 : ax+by=c_2$, e os pontos P_1 e P_2, tais que $\{P_1\} = r_1 \cap s$ e $\{P_2\} = r_2 \cap s$, onde $s : bx - ay = 0$.

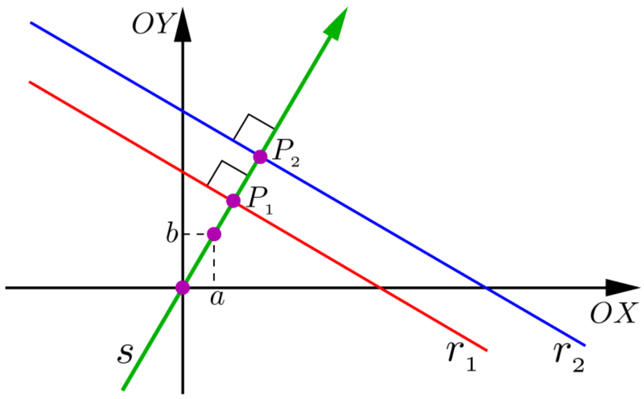

Fig. 7: Retas paralelas r_1 e r_2 com perpendicular s passando pela origem.

O sentido de percurso de P_1 para P_2 na reta s coincide com o sentido de percurso de $(0,0)$ para (a,b) em s **se, e só se,** $c_1 < c_2$.

De fato, basta analisar a situação nos quatro casos seguintes:

Caso 1. $b = 0$. **Caso 2.** $a = 0$.

Caso 3. $a > 0$ **e** $b \neq 0$. **Caso 4.** $a < 0$ **e** $b \neq 0$.

Caso 1. $b = 0$**.** Neste caso, temos: $r_1 : x = \dfrac{c_1}{a}$, $r_2 : x = \dfrac{c_2}{a}$, e $s : y = 0$.

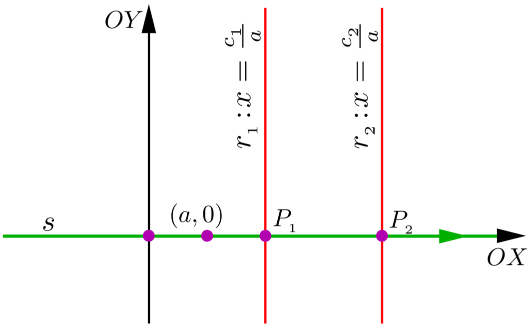

Fig. 8: Caso $b = 0$ e $a > 0$.

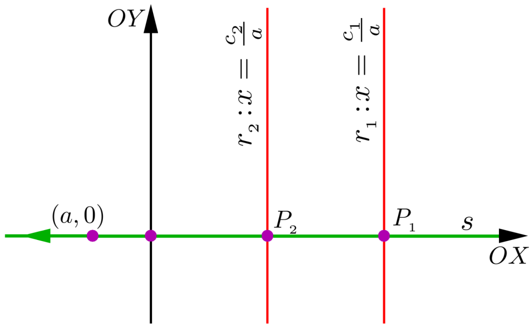

Fig. 9: Caso $b = 0$ e $a < 0$.

Se $a > 0$, então $\dfrac{c_1}{a} < \dfrac{c_2}{a} \iff c_1 < c_2$.

Se $a < 0$, então $\dfrac{c_2}{a} < \dfrac{c_1}{a} \iff c_1 < c_2$.

Caso 2. $a = 0$**.** Neste caso, temos: $r_1 : y = \dfrac{c_1}{b}$, $r_2 : y = \dfrac{c_2}{b}$, e $s : x = 0$.

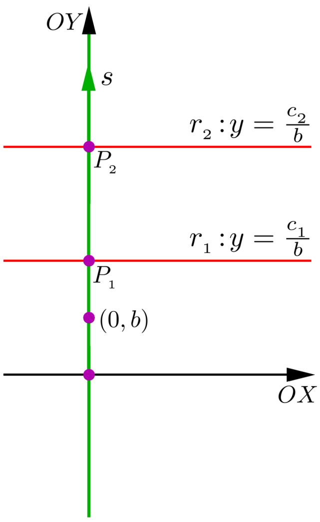

Fig. 10: Caso $a = 0$ e $b > 0$.

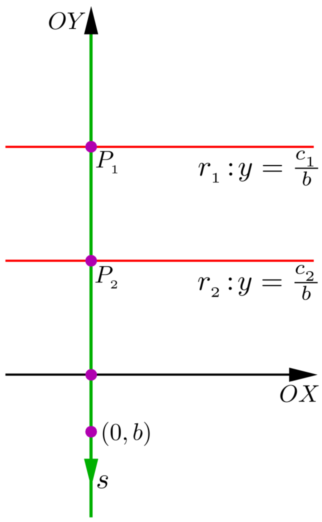

Fig. 11: Caso $a = 0$ e $b < 0$.

Se $b > 0$, então $\dfrac{c_1}{b} < \dfrac{c_2}{b} \iff c_1 < c_2$.

Se $b < 0$, então $\dfrac{c_2}{b} < \dfrac{c_1}{b} \iff c_1 < c_2$.

Caso 3. $a > 0$ **e** $b \neq 0$**.** Se $P_1 = (x_1, y_1)$, temos

$$P_1 \in s \iff y_1 = \frac{b}{a}x_1 \quad \text{e} \quad P_1 \in r_1 \iff ax_1 + by_1 = c_1.$$

Logo,

$$ax_1 + \frac{b^2}{a}x_1 = c_1 \iff \boxed{x_1 = \frac{ac_1}{a^2 + b^2}}$$

Analogamente, se $P_2 = (x_2, y_2) \in s \cap r_2$, então

$$\boxed{x_2 = \frac{ac_2}{a^2 + b^2}}$$

Subcaso $a > 0$ e $b > 0$. Pelas formas das abscissas x_1 e x_2, temos

$$x_1 < x_2 \iff \frac{ac_1}{a^2 + b^2} < \frac{ac_2}{a^2 + b^2} \iff c_1 < c_2.$$

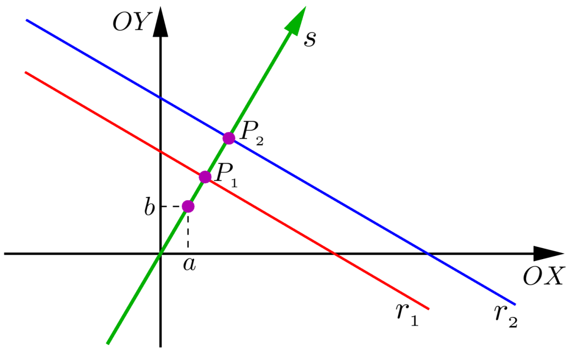

Fig. 12: $a > 0$ e $b > 0$. O sentido de percurso em s é de x crescente.

Subcaso $a > 0$ e $b < 0$. Fazendo uma análise como no subcaso anterior, vemos que

$$x_1 < x_2 \iff c_1 < c_2.$$

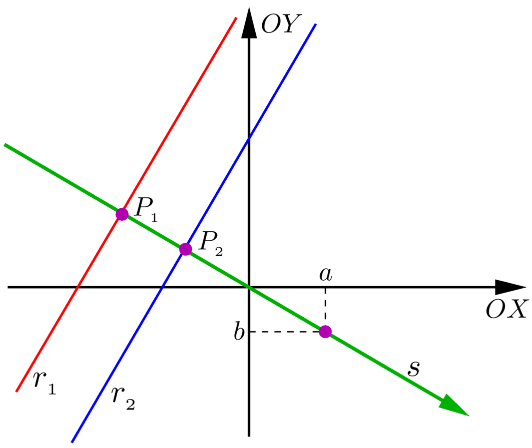

Fig. 13: $a > 0$ e $b < 0$. O sentido de percurso em s é de x crescente.

Caso 4. $a < 0$ e $b \neq 0$.

As abscissas x_1 de P_1 e x_2 de P_2 satisfazem as mesmas relações que no caso anterior.

Subcaso $a < 0$ e $b > 0$. Como $a < 0$, temos,

$$x_2 = \frac{ac_2}{a^2+b^2} < x_1 = \frac{ac_1}{a^2+b^2} \iff c_1 < c_2 .$$

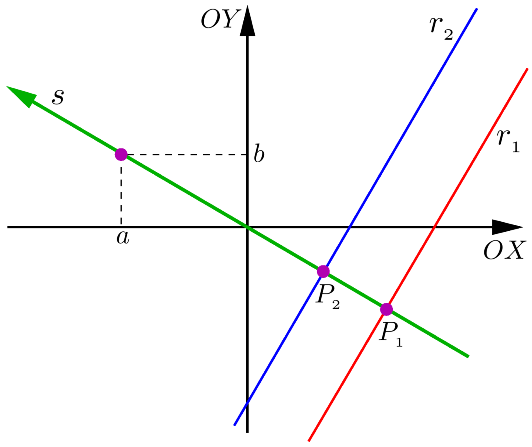

Fig. 14: $a < 0$ e $b > 0$. O sentido de percurso em s é de x decrescente.

Subcaso $a < 0$ e $b < 0$. A análise é feita da mesma forma que do subcaso anterior.

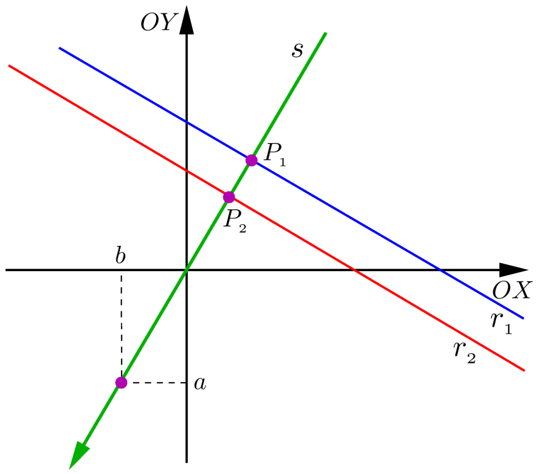

Fig. 15: $a < 0$ e $b < 0$. O sentido de percurso em s é de x decrescente.

Exemplo 4

Faça um esboço detalhado da região $\mathcal{R}$ do plano cujos pontos tem coordenadas satisfazendo simultaneamente as desigualdades do sistema abaixo:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} y \le 2x \\ x + y \ge 1 . \end{cases}$$

Solução.

A região $\mathcal{R}$ procurada é a interseção das regiões $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ dadas por:

$$\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \mid 2x - y \geq 0\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{R}_2 = \{(x, y) \mid x + y \geq 1\}.$$

(a) Determinando a região $\mathcal{R}_1$

Considere a reta

$$r_1 : 2x - y = 0.$$

O ponto $(a, b) = (2, -1)$ pertence à reta s_1 perpendicular a r_1 que passa pela origem e o número $c = 2x - y$ aumenta conforme se avança ao longo da reta s_1 seguindo o sentido da origem para o ponto

$$(a, b) = (2, -1).$$

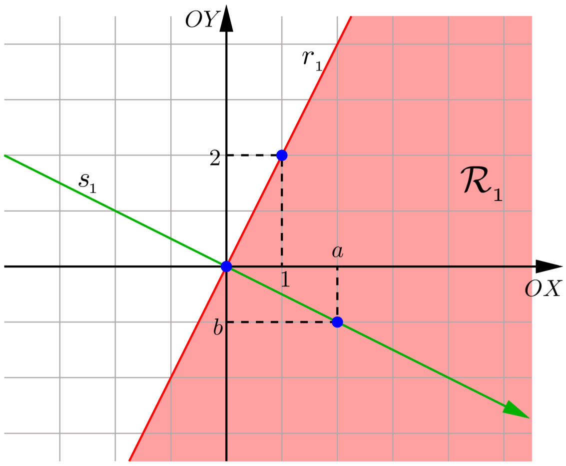

Fig. 16: Região $\mathcal{R}_1$. $a = 2 > 0$ e $b = -1 < 0$. O sentido de percurso em s_1 é de x crescente.

Portanto, a região $\mathcal{R}_1$ é o semi-plano determinado por r_1 que fica abaixo de r_1, como vemos na figura ao lado, incluindo a própria reta r_1.

(b) Determinando a região $\mathcal{R}_2$

Para determinar a região $\mathcal{R}_2$, consideremos agora a reta $r_2 : x + y = 1$.

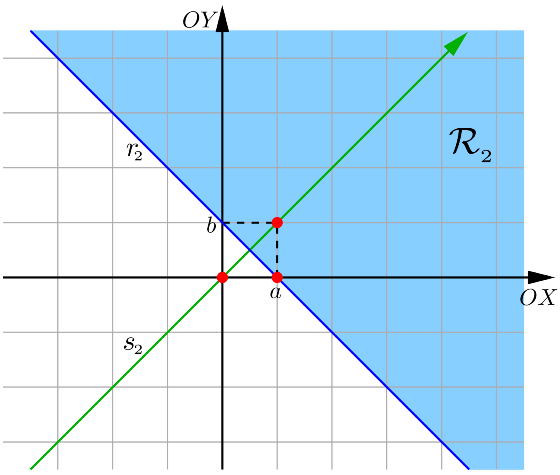

Fig. 17: Região $\mathcal{R}_2$. $a = 1 > 0$ e $b = 1 > 0$. O sentido de percurso em s_2 é de x crescente.

Neste caso, $a = 1 > 0$ e $b = 1 > 0$. O ponto $(a, b) = (1, 1)$ pertence à reta s_2 perpendicular a r que passa pela origem e, como no item anterior, o número $c = x + y$ aumenta conforme se avança ao longo da reta s_2 seguindo o sentido da origem para o ponto (a, b).

Assim, as coordenadas de um ponto pertencente a uma reta $x + y = c$ satisfazem a desigualdade $x + y \geq 1$ se, e somente se, a reta está contida na região sombreada indicada na figura ao lado.

Ou seja, a região $\mathcal{R}_2$ é o semi-plano determinado por r_2 que fica acima de r_2, incluindo a reta r_2.

(c) Determinando a região $\mathcal{R}$

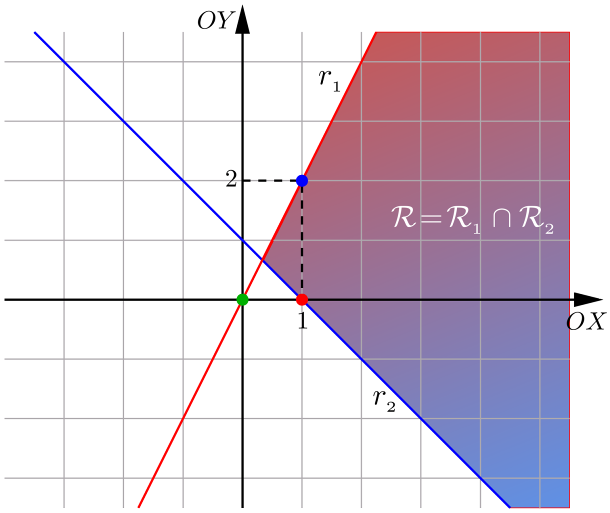

Fig. 18: Região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ procurada.

Finalmente, a região $\mathcal{R}$ procurada é a interseção das regiões $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, formada pelos pontos do plano que pertencem ao semi-plano abaixo da reta r_1 e ao semi-plano acima da reta r_2, simultaneamente. Esboçamos a região $\mathcal{R}$ na figura acima. □

Exemplo 5

Determinar e esboçar a região $\mathcal{R}$ do plano dada pelo seguinte sistema de desigualdades:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} |y| \leq x - 1 \\ x - y > 2\,. \end{cases}$$

Solução.

A região $\mathcal{R}$ é a interseção de duas regiões $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$.

A primeira região, $\mathcal{R}_1$, consiste dos pontos do plano cujas coordenadas satisfazem a primeira desigualdade:

$$\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \,|\, |y| \leq x - 1\}\,.$$

A segunda região $\mathcal{R}_2$ consiste dos pontos do plano cujas coordenadas satisfazem a segunda desigualdade:

$$\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \mid x - y > 2\}\,.$$

(a) Determinação da região $\mathcal{R}_1$

Começamos lembrando que $|y| = \begin{cases} y\,, & \text{se } y \geq 0 \\ -y\,, & \text{se } y < 0\,. \end{cases}$

Portanto, a desigualdade $|y| \leq x - 1$ equivale a duas desigualdades condicionadas:

• Na condição $y \geq 0$, temos $|y| = y$.

Logo a desigualdade $|y| \leq x - 1$ equivale a $y \leq x - 1$, ou seja, $x - y \geq 1$.

Designamos por S_1 o conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas satisfazem, simultaneamente, as desigualdades $y \geq 0$ e $x - y \geq 1$:

$$S_1 = \{(x, y) \mid y \geq 0 \quad \text{e} \quad x - y \geq 1\}\,, \quad \text{ou seja,} \quad S_1 : \begin{cases} x - y \geq 1 \\ y \geq 0\,. \end{cases}$$

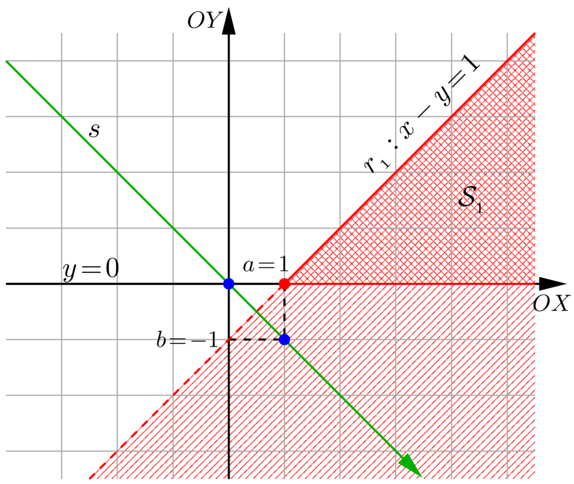

Fig. 19: Região S_1 determinada pelas desigualdades $x - y \geq 1$ e $y \geq 0$.

• Na condição $y < 0$, temos $|y| = -y$.

Logo a desigualdade $|y| \leq x - 1$ equivale a $-y \leq x - 1$, ou seja, $x + y \geq 1$.

Designamos por S_2 o conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas satisfazem, simultaneamente, as desigualdades $y < 0$ e $x + y \geq 1$.

$$S_2 = \{(x, y) \mid y < 0 \quad \text{e} \quad x + y \geq 1\}\,, \quad \text{ou seja,} \quad S_2 : \begin{cases} x + y \geq 1 \\ y < 0\,. \end{cases}$$

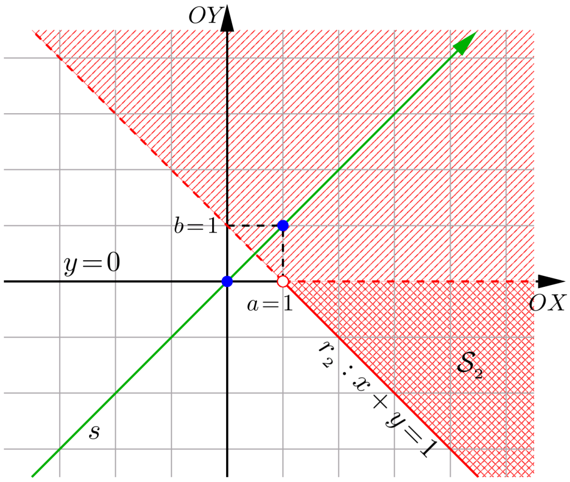

Fig. 20: Região S_2 determinada pelas desigualdades $x + y \geq 1$ e $y < 0$.

Finalmente, a região $\mathcal{R}_1$ consiste dos pontos que pertencem à região S_1 ou à região S_2.

Ou seja,

$$\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \mid |y| \leq x - 1\} = S_1 \cup S_2 \,.$$

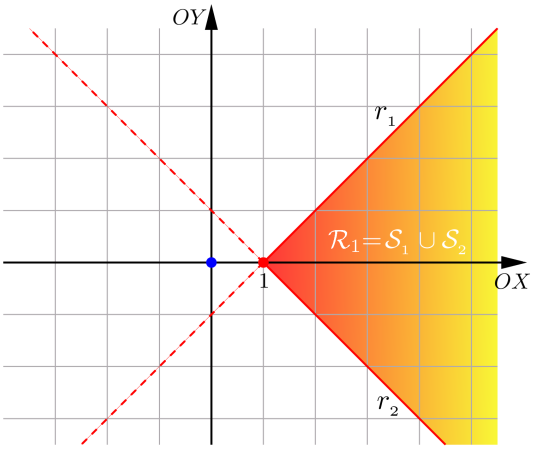

Fig. 21: Região $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) | |y| \leq x - 1\}$.

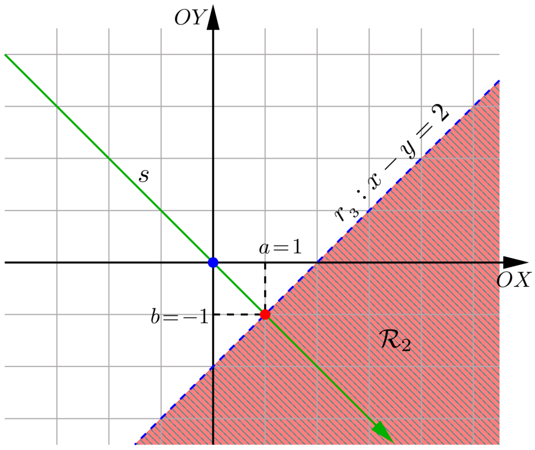

Fig. 22: Região $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \mid x - y > 2\}$.

(b) Determinação da região $\mathcal{R}_2$

Como a região $\mathcal{R}_2$ consiste dos pontos cujas coordenadas (x, y) satisfazem $x - y > 2$, temos que, um ponto de coordenadas (x, y) pertence à região $\mathcal{R}_2$ se, e somente se, pertence a uma reta de equação $x - y = c$ com $c > 2$.

Portanto, a região $\mathcal{R}_2$ procurada consiste dos pontos do semi-plano que fica abaixo da reta r_3, excluindo os pontos da própria reta, como vemos na figura 22 acima.

(c) Determinação da região $\mathcal{R}$

Finalmente, um ponto pertence à região $\mathcal{R}$ se, e somente se, pertence às regiões $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ simultaneamente. Isto é, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$. Esboçamos a região na seguinte figura. □

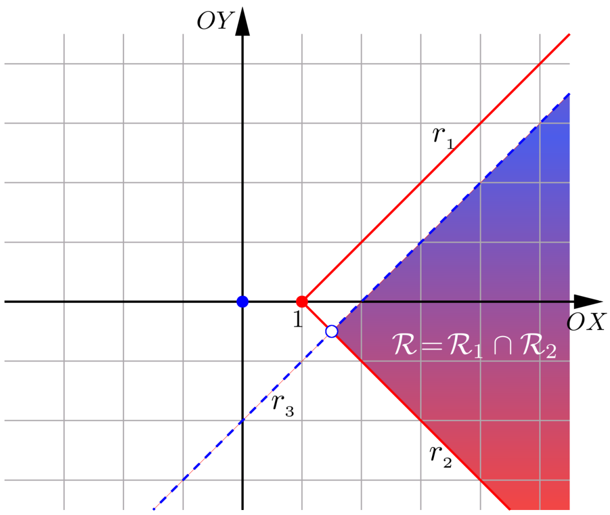

Fig. 23: Região $\mathcal{R}$ determinada pelas desigualdades $|y| \leq x - 1$ e $x - y = 2$.

Exemplo 6

Determine e esboce a região $\mathcal{R}$ do plano dada pelo seguinte sistema de inequações:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x - y \leq -1 \\ x + y \geq 0. \end{cases}$$

Solução.

A região $\mathcal{R}$ consiste dos pontos do plano cujas coordenadas satisfazem as três inequações do sistema dado.

Logo, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}, \\ \mathcal{R}_2 &= \{(x, y) \,|\, x - y \leq -1\}, \\ \mathcal{R}_3 &= \{(x, y) \,|\, x + y \geq 0\}. \end{aligned}$$

(a) Determinação da região $\mathcal{R}_1$

Os pontos do plano cujas coordenadas satisfazem a equação $x^2+y^2=c$ formam o círculo de centro na origem e raio $\sqrt{c}$, para $c>0$. Se $c=0$, $P=(0,0)$ é o único ponto que satisfaz a equação $x^2+y^2=0$.

Assim, um ponto pertence à região $\mathcal{R}_1$ se, e somente se, o ponto é a origem ou pertence a um círculo de raio $\sqrt{c}\leq 1$. Portanto, $\mathcal{R}_1$ é o disco de centro na origem e raio 1 (figura 24).

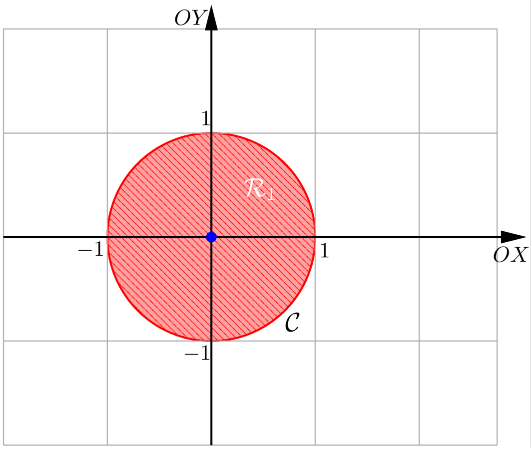

Fig. 24: $\mathcal{R}_1$ é o círculo de centro na origem e raio 1.

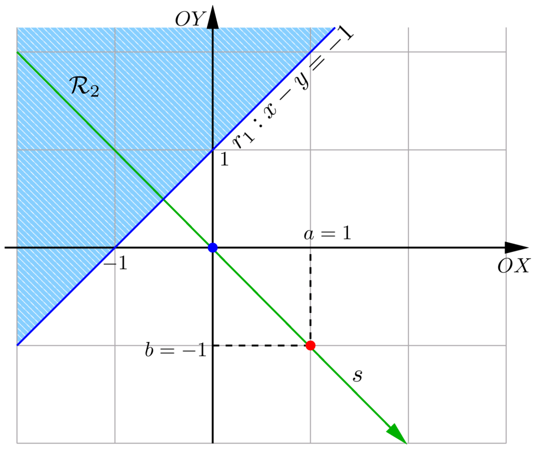

Fig. 25: $\mathcal{R}_2$ é o semi-plano em cima da reta r_1.

Determinação da região $\mathcal{R}_2$.

Seja $r_1: x-y=-1$. Como $(a,b)=(1,-1)$, $\mathcal{R}_2$ é o semi-plano acima da reta r_1, incluindo a própria reta (figura 25).

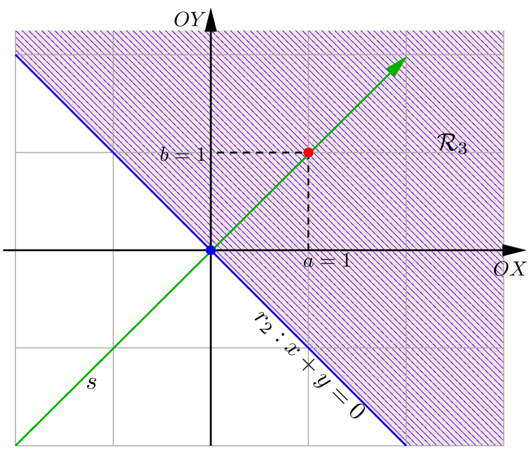

Fig. 26: $\mathcal{R}_3$ é o semi-plano em cima da reta r_2.

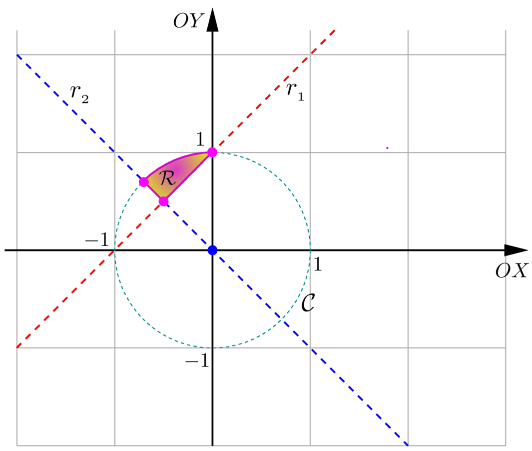

Fig. 27: Região $\mathcal{R}=\mathcal{R}_1\cap\mathcal{R}_2\mathcal{R}_3$.

Determinação da região $\mathcal{R}_3$.

Raciocinando de maneira similar aos casos já tratados, vemos que a região $\mathcal{R}_3$ é o semi-plano acima da reta $r_2 : x + y = 0$, incluindo a reta r_2, pois $(a, b) = (1, 1)$ (veja a figura 26).

Esboço da região $\mathcal{R}$.

Para esboçar a região $\mathcal{R}$ são considerados apenas os pontos do plano que pertencem simultaneamente às três regiões anteriores (figura 27). □

Exemplo 7

Determine e faça um esboço da região $\mathcal{R}$ do plano dada pelo seguinte sistema de inequações:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \geq 4 \\ x + y \geq 1 \\ x + y \leq 1 + 2\sqrt{2} . \end{cases}$$

Solução.

A região $\mathcal{R}$ procurada é a interseção das três regiões abaixo:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \{(x,y) \mid (x-1)^2 + y^2 \geq 4\} , \\ \mathcal{R}_2 &= \{(x,y) \mid x + y \geq 1\} , \\ \mathcal{R}_3 &= \{(x,y) \mid x + y \leq 1 + 2\sqrt{2}\} . \end{aligned}$$

Determinação da região $\mathcal{R}_1$

Para determinarmos a região $\mathcal{R}_1$, consideremos o círculo C dado por

$$C : (x-1)^2 + y^2 = 4 .$$

Observamos que

$$C_c : (x-1)^2 + y^2 = c^2, \ c > 0$$

é a equação do círculo de centro no ponto $(1, 0)$ e raio c. Assim, se $c < 2$, os pontos do círculo C_c estão contidos na região limitada pelo círculo C, e se $c > 2$, os pontos do círculo C_c são exteriores ao círculo C.

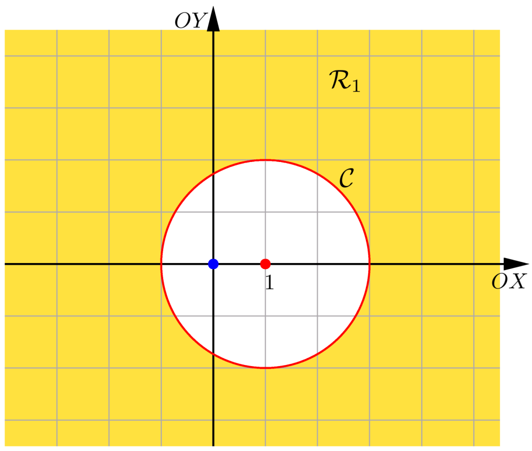

Fig. 28: Região $\mathcal{R}_1 = \{(x,y) \mid (x-1)^2 + y^2 \geq 4\}$.

Portanto, a região $\mathcal{R}_1$ consiste dos pontos (x, y) que são exteriores a C ou pertencem ao próprio círculo.

Determinação das regiões $\mathcal{R}_2$ e $\mathcal{R}_3$

Observe que as retas $r_1 : x + y = 1$ e $r_2 : x + y = 1 + 2\sqrt{2}$ são paralelas.

Como $(a, b) = (1, 1)$, o valor c aumenta na equação $x + y = c$ quando nos movimentamos ao longo da reta s, perpendicular a r_1, no sentido da origem para o ponto (a, b). Portanto, a reta r_2, com valor $c = 1 + 2\sqrt{2}$ maior, fica acima da reta r_1, com valor $c = 1$, e as regiões $\mathcal{R}_2$ e $\mathcal{R}_3$ são as esboçadas nas figuras abaixo.

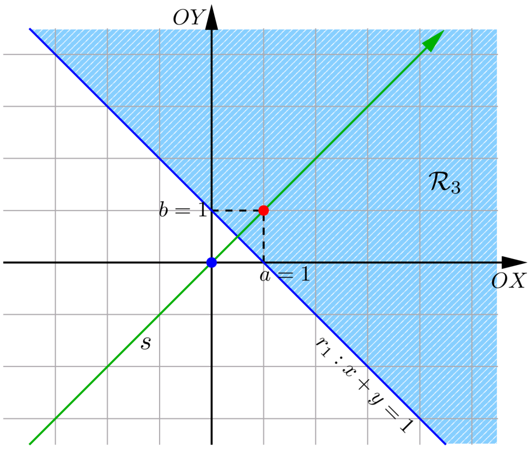

Fig. 29: Região $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \mid x + y \geq 1\}$.

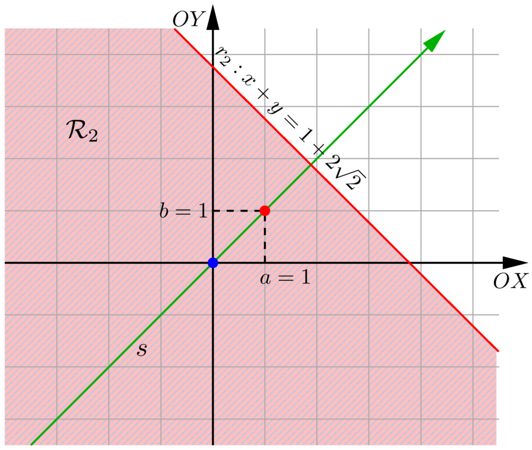

Fig. 30: Região $\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \mid x + y \leq 1 + 2\sqrt{2}\}$.

Determinação da região $\mathcal{R}$

Finalmente, a região $\mathcal{R}$ procurada é a interseção das três regiões obtidas anteriormente e cujo esboço apresentamos na figura abaixo. Observe que a reta r_2 é tangente ao círculo C, pois

$$d((1,0), r_2) = \frac{|1 + 0 - 1 - 2\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}} = 2$$

é igual ao raio de C e a reta r_1 é secante a C, pois

$$d((1,0), r_1) = \frac{|1 + 0 - 1|}{\sqrt{2}} = 0 < 2. \quad \square$$

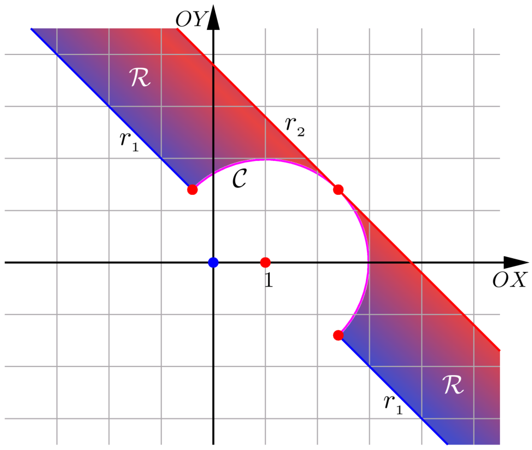

Fig. 31: Região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3$.