Capítulo 5

Vetores no plano

1. Paralelogramos

Lembremos que um **paralelogramo** é um quadrilátero (figura geométrica com quatro lados) cujos lados opostos são paralelos.

Usando congruência de triângulos, podemos verificar que as afirmativas seguintes são equivalentes:

- O quadrilátero $ABDC$ é um paralelogramo;
- Os lados opostos de $ABDC$ são congruentes;
- Os ângulos opostos de $ABDC$ são congruentes;
- Dois lados opostos de $ABDC$ são congruentes e paralelos;
- As diagonais de $ABDC$ se intersectam num ponto que é o ponto médio de ambas.

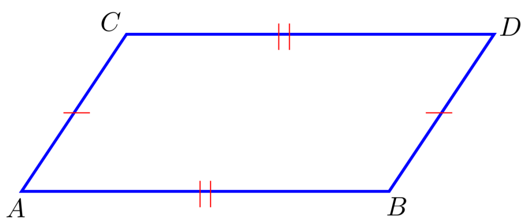

Fig. 1: Paralelogramo $ABDC$.

Por exemplo, vamos demonstrar a seguinte equivalência:

Proposição 1

No quadrilátero $ABDC$, os lados opostos AC e BD são congruentes e paralelos se, e somente se, as diagonais de $ABDC$ se intersectam num ponto que é o ponto médio de ambas.

Prova.

(a) Suponhamos que os lados opostos AC e BD no quadrilátero $ABDC$ são congruentes e paralelos, e seja M o ponto de intersecção das diagonais AD e BC. Pela hipótese, temos,

- $|AC| = |BD|$, isto é, os comprimentos dos lados AC e BD são iguais;
- $AC \parallel BD$;

Logo,

- $\widehat{ACB} = \widehat{DBC}$, por serem ângulos alternos internos;
- $\widehat{CAD} = \widehat{BDA}$, por serem ângulos alternos internos.

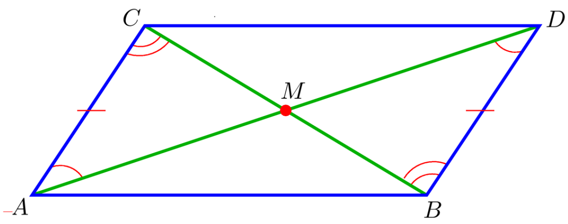

Fig. 2: $ABDC$ de lados opostos congruentes e paralelos.

Pelo critério ALA (ângulo-lado-ângulo), concluímos que os triângulos $\triangle AMC$ e $\triangle DMB$ são congruentes.

Em particular, $|AM| = |DM|$ e $|BM| = |CM|$. Portanto, M é o ponto médio das diagonais AD e BC.

(b) Suponhamos agora que as diagonais AD e BC do quadrilátero $ABDC$ se intersectam no ponto M que é o ponto médio de ambas. Devemos demonstrar que os lados opostos AC e BD no quadrilátero $ABDC$ são paralelos e congruentes.

Temos:

- $|AM| = |DM|$
- $|BM| = |CM|$
- $\widehat{AMC} = \widehat{DMB}$, pois são ângulos opostos pelo vértice.

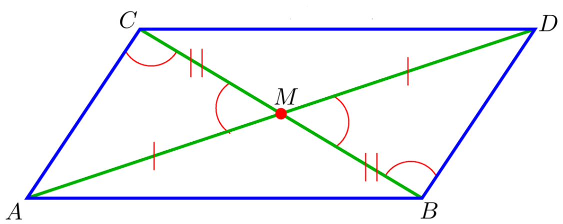

Fig. 3: $ABDC$ com $|AM| = |DM|$ e $|BM| = |MC|$.

Pelo critério LAL (lado-ângulo-lado), os triângulos $\triangle AMC$ e $\triangle DMB$ são congruentes.

Em particular, $|AC| = |DB|$ e $\widehat{ACB} = \widehat{CBD}$, ou seja, os lados AC e DB são congruentes e paralelos. ■

Você pode (e deve) demonstrar as outras equivalências da mesma forma.

2. Segmentos orientados e vetores

Seja AB um **segmento orientado** com origem A e extremidade B. Isto é, no segmento AB estabelecemos um *sentido de percurso* (orientação) de A para B.

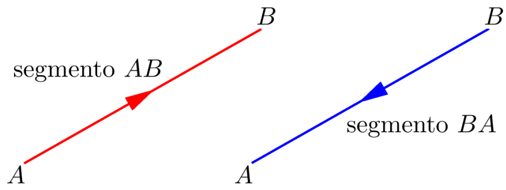

Fig. 4: Os segmentos AB e BA têm sentidos opostos.

Dizemos que o segmento orientado BA tem sentido de percurso (ou orientação) **oposto ou contrário** ao do segmento AB. Classificamos os segmentos orientados da seguinte maneira:

Definição 1

Dizemos que os segmentos AB e CD são **equipolentes**, *e escrevemos* $AB \equiv CD$, *quando satisfazem as três propriedades abaixo:*

- *AB e CD têm o mesmo comprimento: $|AB| = |CD|$.*
- *AB e CD são paralelos ou colineares.*
- *AB e CD têm o mesmo sentido.*

Esclarecimento da definição de equipolência

• Se AB e CD são segmentos colineares, então eles têm o mesmo sentido quando induzem o mesmo sentido de percurso na reta que os contêm.

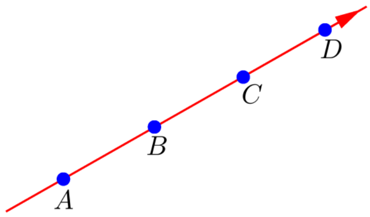

Fig. 5: Segmentos colineares AB e CD.

• Se AB e CD são segmentos paralelos de igual comprimento, então AB e CD têm o mesmo sentido quando $ABDC$ é um paralelogramo.

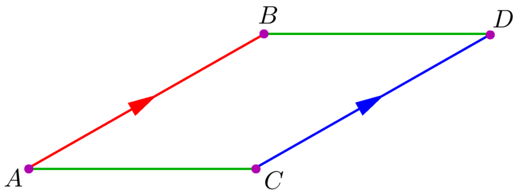

Fig. 6: $ABDC$ é um paralelogramo, pois $AB \equiv CD$.

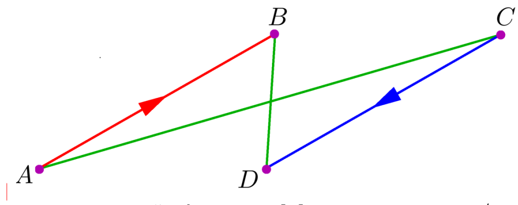

Fig. 7: $ABDC$ **não** é um paralelogramo, pois $AB \not\equiv CD$.

Proposição 2

$$\boxed{AB \equiv CD \iff \textit{ponto médio de } AD = \textit{ponto médio de } BC}$$

Prova.

Com efeito, se $AB \parallel CD$ já sabemos que a equivalência é verdadeira, pois $ABDC$ é um paralelogramo.

Vejamos que isto também é verdadeiro quando AB e CD são segmentos colineares.

Consideremos a reta r que contém A, B, C e D com uma origem O e uma orientação escolhidas, de modo que B esteja à direita de A (figura 8).

Sejam a, b, c e d as respectivas coordenadas dos pontos A, B, C e D na reta r.

(a) Como AB e CD têm o mesmo sentido, temos que $a < b$ e $c < d$, e, como esses segmentos têm o mesmo comprimento, temos $b - a = d - c$. Logo,

$$\begin{aligned} b - a = d - c \quad &\iff \quad a + d = b + c \iff \frac{a+d}{2} = \frac{b+c}{2} \\ &\iff \quad \text{ponto médio de } AD = \text{ponto médio de } BC. \end{aligned}$$

(b) Reciprocamente, suponhamos que o ponto médio de AD é igual ao ponto médio de BC. Isto é, $\frac{a+d}{2} = \frac{b+c}{2}$. Então,

$$a + d = b + c \iff b - a = d - c\,.$$

Como $b - a$ e $d - c$ têm o mesmo sinal e o mesmo módulo, AB e CD têm o mesmo sentido e o mesmo comprimento, além de serem colineares (por hipótese). Assim, $AB \equiv CD$. ■

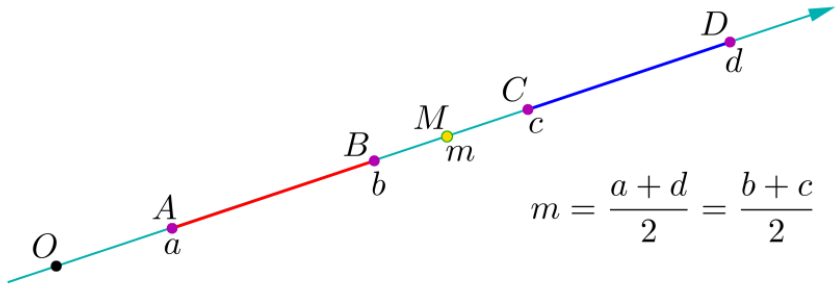

Fig. 8: $AB \equiv CD$ com A, B, C e D colineares.

Proposição 3

Dados pontos A, B e C quaisquer no plano, existe um único ponto D no plano tal que $AB \equiv CD$.

Prova.

Como os pontos A, B e C podem ou não ser colineares, temos dois casos a considerar.

(a) A, B e C são colineares.

Neste caso, o círculo de centro no ponto C e raio $|AB|$ intersecta a reta que contêm os pontos A, B e C em exatamente dois pontos, mas apenas um deles, que designamos D, é tal que AB e CD têm o mesmo sentido (veja a figura 9).

(b) A, B e C **não** são colineares.

Seja r a reta que passa pelo ponto C e é paralela à reta que contém os pontos A e B.

O círculo de centro C e raio $|AB|$ intersecta a reta r em exatamente dois pontos, mas só um, que designamos D, é tal que $ABDC$ é um paralelogramo. Ou seja, $AB \equiv CD$. ■

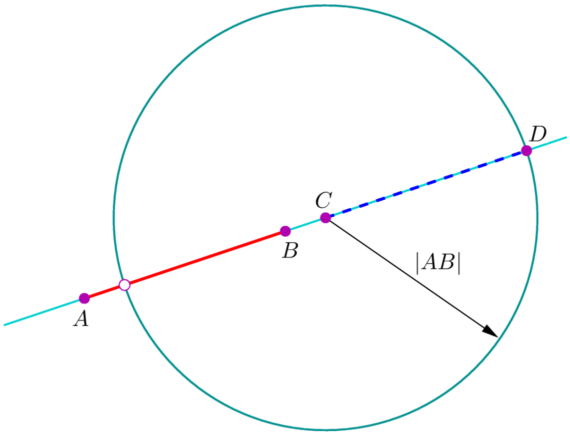

Fig. 9: $AB \equiv CD$ com A, B e C colineares.

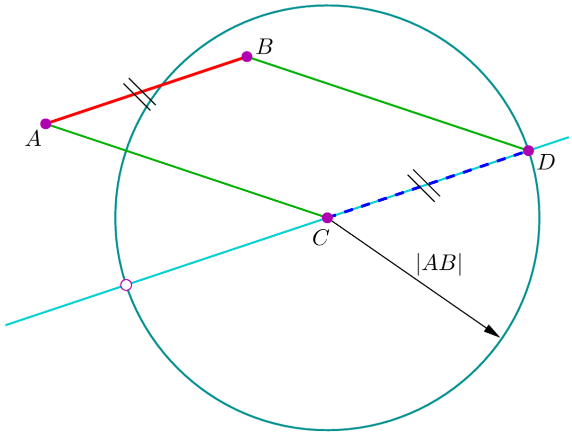

Fig. 10: $AB \equiv CD$ com A, B e C não-colineares.

3. Vetores

Definição 2

Quando os segmentos de reta orientados AB e CD são equipolentes, dizemos que eles representam o mesmo **vetor** $\overrightarrow{v}$ *e escrevemos* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$.

Isto é, o vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ *é o conjunto que consiste de todos os segmentos orientados equipolentes ao segmento AB. Tais segmentos são chamados* **representantes** *do vetor* $\overrightarrow{v}$.

Observação 1

(a) *Da definição de vetor, temos:* $AB \equiv CD \iff \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

(b) *Por convenção, o* **vetor nulo** *é o vetor* $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA}$, *qualquer que seja o ponto A no plano.*

(c) *Dado um vetor* $\overrightarrow{v}$ *e um ponto qualquer C, existe um único ponto D tal que* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$. *Isto é, qualquer ponto do plano é origem de um único segmento orientado representante do vetor* $\overrightarrow{v}$.

Na prática, manipulamos com vetores usando a sua expressão em relação a um sistema de eixos ortogonais dado.

Consideremos um sistema de eixos ortogonais OXY no plano, e sejam

$$A = (a_1, a_2) \qquad\qquad C = (c_1, c_2)$$
$$B = (b_1, b_2) \qquad\qquad D = (d_1, d_2)$$

pontos do plano. A seguinte proposição caracteriza a equipolência em termos de coordenadas.

Proposição 4

$$\boxed{AB \equiv CD \iff b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \quad \text{e} \quad b_2 - a_2 = d_2 - c_2}$$

Prova.
Pela Proposição 2,

$$\begin{aligned}
AB \equiv CD &\iff \text{ponto médio de } AD = \text{ ponto médio de } BC \\
&\iff \left(\frac{a_1 + d_1}{2}, \frac{a_2 + d_2}{2}\right) = \left(\frac{b_1 + c_1}{2}, \frac{b_2 + c_2}{2}\right) \\
&\iff (a_1 + d_1, a_2 + d_2) = (b_1 + c_1, b_2 + c_2) \\
&\iff a_1 + d_1 = b_1 + c_1 \quad \text{e} \quad a_2 + d_2 = b_2 + c_2 \\
&\iff b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \quad \text{e} \quad b_2 - a_2 = d_2 - c_2,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Definição 3

Dadas $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, os números $b_1 - a_1$ e $b_2 - a_2$ são chamados as **coordenadas do vetor** $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ *e escrevemos* $\overrightarrow{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

Note que, se $AB \equiv CD$, então, pela Proposição 4,

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2) = \overrightarrow{CD}.$$

Exemplo 1

Sejam $A = (1, 2)$, $B = (3, 1)$ e $C = (4, 0)$. Determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e as coordenadas do ponto D tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$.

Solução.
Temos

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (3-1, 1-2) = (2, -1)\,.$$

Além disso, se $D = (d_1, d_2)$, temos,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} &\iff AB \equiv CD \\
&\iff (2, -1) = (d_1 - 4, d_2 - 0) \\
&\iff 2 = d_1 - 4 \quad \text{e} \quad -1 = d_2 - 0 \\
&\iff d_1 = 2 + 4 = 6 \quad \text{e} \quad d_2 = -1 + 0 = -1\,.
\end{aligned}$$

Portanto, $D = (6, -1)$. □

Observação 2

Usando a Proposição 4, é fácil verificar que:

- $AB \equiv CD \iff AC \equiv BD$.

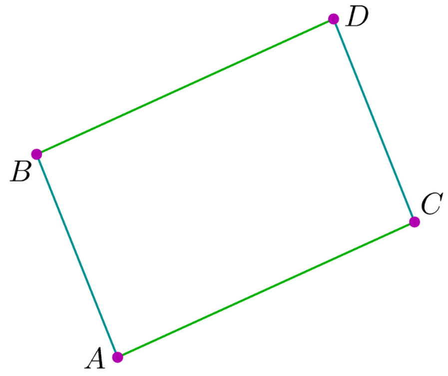

Fig. 11: $AB \equiv CD \iff AC \equiv BD$

- $AB \equiv CD$ *e* $CD \equiv EF \implies AB \equiv EF$.

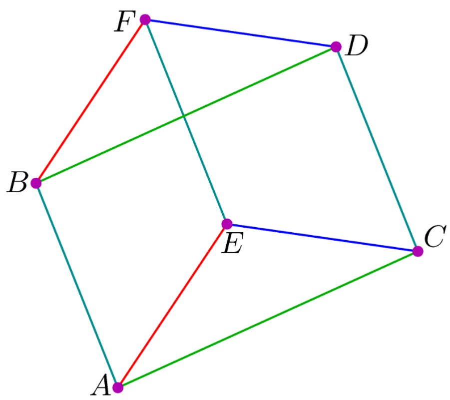

Fig. 12: $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF \implies AB \equiv EF$

Em virtude do item (c) da Observação 1, temos:

Proposição 5

Sejam OXY um sistema de eixos ortogonais e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ um vetor.

Então existe um único ponto P tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$. Além disso, as coordenadas do ponto P coincidem com as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$.

Prova.
De fato, se $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $P = (p_1, p_2)$, temos $\overrightarrow{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ e, portanto,

$$\begin{aligned} AB \equiv OP &\iff (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (p_1 - 0, p_2 - 0) \\ &\iff P = (p_1, p_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \end{aligned}$$

como queríamos verificar. ■

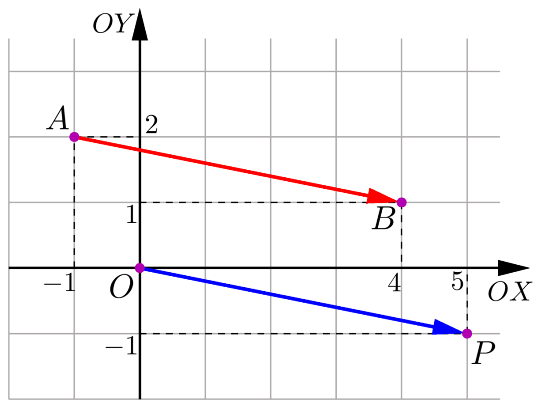

Fig. 13: $AB \equiv OP$

Exemplo 2

Sejam $A = (-1, 2)$ e $B = (4, 1)$. Determine o ponto P tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$.

Solução.
Pela proposição anterior, temos

$$P = (4 - (-1), 1 - 2) = (4 + 1, -1) = (5, -1).$$

Veja a figura 13. □

4. Operações com vetores

Adição de vetores

Vamos definir a operação de adição de vetores que a cada par de vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ faz corresponder um novo vetor designado $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ e chamado a **soma** dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

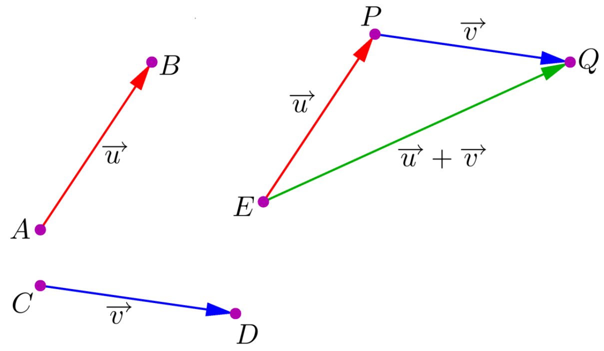

Fig. 14: Adição de vetores.

Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$ vetores dados e seja E um ponto no plano.

Tomamos pontos P e Q tais que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{EP}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$.

Definimos o **vetor soma** de $\overrightarrow{u}$ com $\overrightarrow{v}$ como sendo o único vetor que tem o segmento EQ como representante (veja a figura 12). Isto é,

$$\boxed{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{EQ}}$$

Quando se faz uma definição que depende, aparentemente, da escolha de um representante, devemos mostrar que a classe do novo objeto definido independe do representante escolhido.

A adição de vetores é uma operação bem definida.

Com efeito, seja E' outro ponto do plano, e sejam P' e Q' pontos tais que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{E'P'}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{P'Q'}$.

Segundo a definição anterior, deveríamos ter também

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{E'Q'}.$$

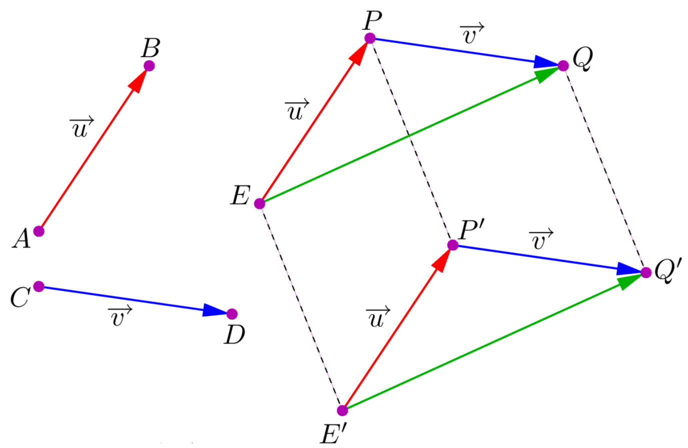

Fig. 15: O segmento EQ é equipolente ao segmento $E'Q'$?

Verifiquemos, então, que os segmentos EQ e $E'Q'$ são equipolentes.

Pela Observação 2 (acompanhe a argumentação na figura 15), temos:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{EP} = \overrightarrow{E'P'} \implies EP \equiv E'P' \implies EE' \equiv PP'\,,$$
$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'} \implies PQ \equiv P'Q' \implies PP' \equiv QQ'\,.$$

Logo,

$$EE' \equiv QQ' \implies EQ \equiv E'Q' \implies \overrightarrow{EQ} = \overrightarrow{E'Q'}\,,$$

e, portanto, o vetor $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ está bem definido.

Observação 3

Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$ vetores no plano. Quando os segmentos AB e CD não são colineares ou paralelos, podemos determinar também o vetor soma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ da seguinte maneira:

Seja E um ponto do plano e sejam P e R tais que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{EP}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ER}$. Então o vetor soma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ é o vetor $\overrightarrow{EQ}$, onde EQ é a diagonal do paralelogramo $EPQR$.

De fato,

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{EP}\,, \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{ER} = \overrightarrow{PQ} \implies \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{EQ}\,.$$

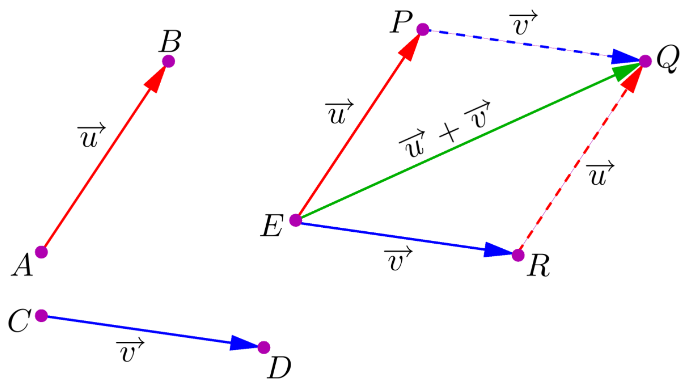

Fig. 16: Adição de vetores como a diagonal de um paralelogramo.

Adição de vetores em coordenadas

Se $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ e $\overrightarrow{v} = (\alpha', \beta')$ são dois vetores dados por suas coordenadas em termos de um sistema ortogonal OXY, então

$$\boxed{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (\alpha + \alpha', \beta + \beta')}$$

De fato, pela Proposição 5, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$ *e* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ}$, *onde* $P = (\alpha, \beta)$ *e* $Q = (\alpha', \beta')$.

Seja $Q' = (a, b)$ *o ponto tal que* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ'}$. *Então, pela Proposição 4,*

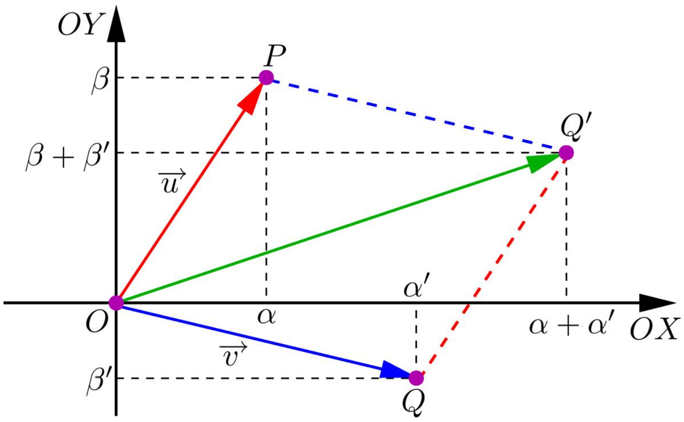

Fig. 17: Adição de vetores em coordenadas.

$$\begin{aligned} & (\alpha' - 0, \beta' - 0) = (a - \alpha, b - \beta) \\ \Longrightarrow \quad & Q' = (a, b) = (\alpha + \alpha', \beta + \beta') \\ \Longrightarrow \quad & \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ'} \\ & \qquad\quad = \overrightarrow{OQ'} = (\alpha + \alpha', \beta + \beta'). \end{aligned}$$

Multiplicação de um número real por um vetor

Definição 4

Sejam $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ *um vetor e* $\lambda \in \mathbb{R}$. *O* **produto de λ por $\overrightarrow{v}$** *é o vetor*

$$\boxed{\lambda\overrightarrow{v} = \lambda\,\overrightarrow{AB}}$$

representado pelo segmento orientado AB', colinear com AB, tal que:

- $d(A, B') = |\lambda| d(A, B)$;
- *o sentido de AB' é igual ao sentido de AB se $\lambda > 0$, e é oposto, se $\lambda < 0$.*
- $B' = A$, *se* $\lambda = 0$.

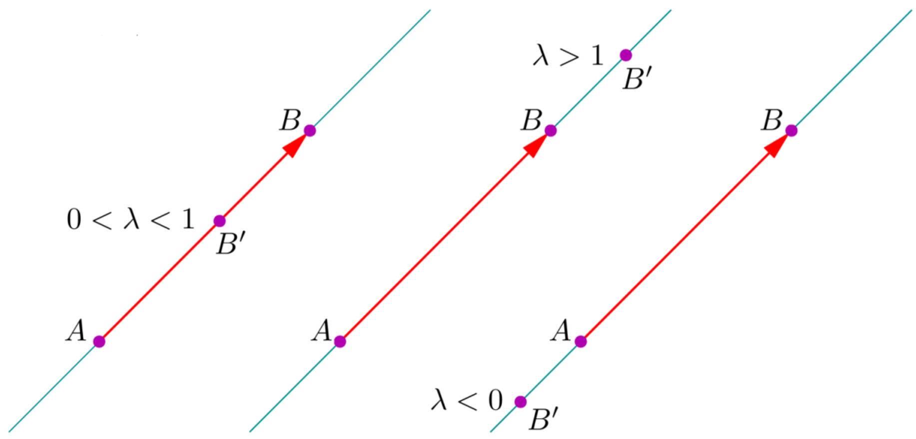

Fig. 18: Multiplicação de um vetor por um número real.

Observação 4

Note que,

- $\lambda\overrightarrow{0} = \lambda\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$;
- $0\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

Não confunda: o número 0 *(zero) com o vetor nulo* $\overrightarrow{0}$.

Expressão em coordenadas da multiplicação de um vetor por um número real

Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta)$ um vetor. Então,

$$\boxed{\lambda\overrightarrow{v} = \lambda\,(\alpha, \beta) = (\lambda\alpha, \lambda\beta)}$$

Ou seja, se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$, então $P = (\alpha, \beta)$ e $\lambda\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'}$, onde $P' = (\lambda\alpha, \lambda\beta)$.

De fato, temos:

• O, P e P' são colineares, pois pertencem à reta

$$r : \beta x - \alpha y = 0.$$

• $d(O, P') = |\lambda|\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = |\lambda| d(O, P)$.

• P e P' estão ambos à direita ou à esquerda de O (origem) sobre a reta orientada r se $\lambda > 0$, e estão em lados opostos se $\lambda < 0$.

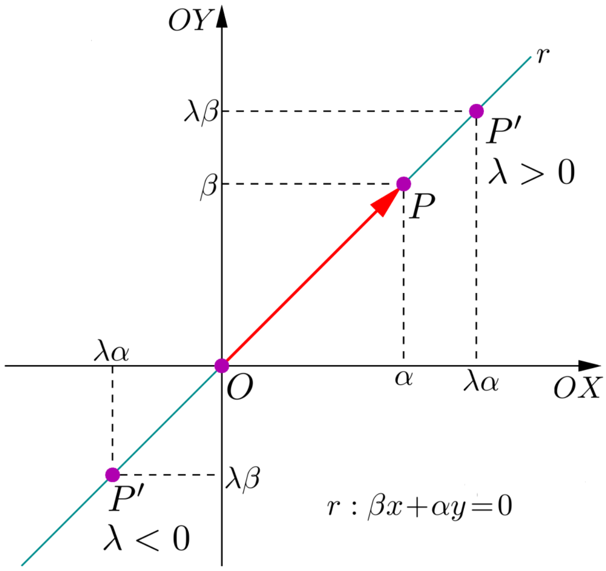

Fig. 19: Coordenadas do produto $\lambda(\alpha, \beta)$.

Exemplo 3

Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (1, -1)$ *e* $\overrightarrow{v} = (3, 1)$*, determine*

$$\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\,, \qquad \overrightarrow{b} = \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}\,, \qquad \overrightarrow{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\,.$$

Solução.

Temos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} &= 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} & \overrightarrow{b} &= \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v} \\
&= 2(1,-1) + (3,1) & &= (1,-1) + 2(3,1) \\
&= (2(1), 2(-1)) + (3,1) & &= (1,-1) + (2(3), 2(1)) \\
&= (2,-2) + (3,1) & &= (1,-1) + (6,2) \\
&= (2+3, -2+1) & &= (1+6, -1+2) \\
&= (5,-1)\,. & &= (7,1)\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{c} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} \\
&= \frac{1}{2}(7,1) - (5,-1) \\
&= \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) - (5,-1) \\
&= \left(\frac{7}{2} - 5, \frac{1}{2} - (-1)\right) \\
&= \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right). \quad \square
\end{aligned}$$

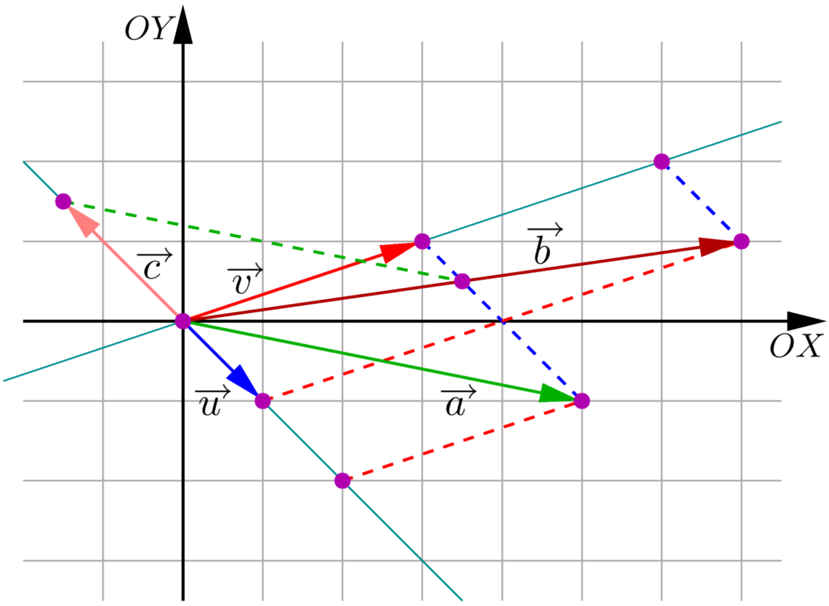

Fig. 20: Exemplo 2.