Capítulo 6

1. Propriedades das operações com vetores

Propriedades da adição de vetores

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores no plano. Valem as seguintes propriedades.

• **Comutatividade:** $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.

• **Associatividade:** $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$.

• **Existência de elemento neutro aditivo:** o vetor zero $\overrightarrow{0}$ é tal que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$.

• **Existência de inversos aditivos:** para cada vetor $\overrightarrow{u}$ existe um único vetor, que designamos $-\overrightarrow{u}$, tal que $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$.

De fato, se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$, então $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Se D é o outro vértice do paralelogramo $ABCD$, então $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$. Logo $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$.

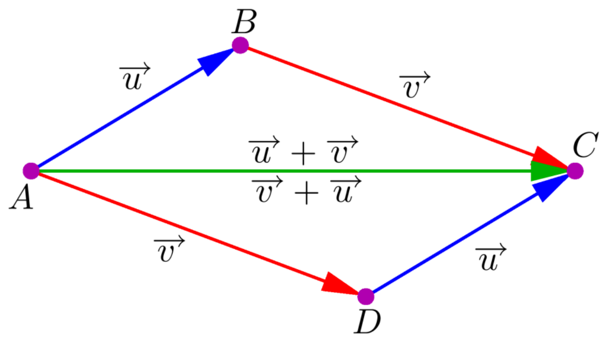

Fig. 1: Comutatividade da adição de vetores.

Portanto (figura 1),

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.$$

A associatividade da adição de vetores se verifica de maneira análoga (figura 2).

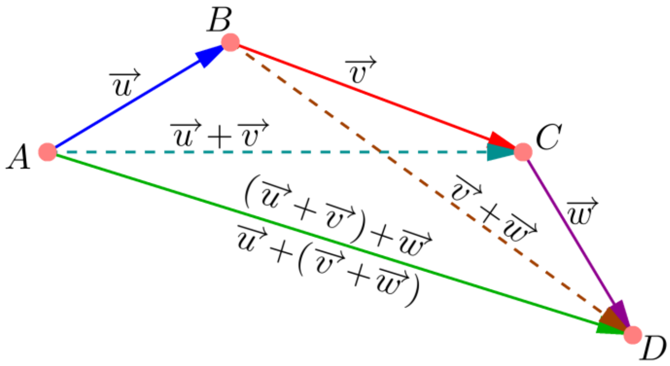

Fig. 2: Associatividade da adição de vetores.

Quanto às outras duas propriedades, observe que:

- se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, sendo $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$, temos:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}\,, \quad \text{e} \quad \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}\,.$$

- o **simétrico** ou **inverso aditivo** do vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ é o vetor $-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$, pois

$$\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}\,, \quad \text{e} \quad -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{0}\,.$$

Observação 1

O vetor simétrico $-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$ do vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ é o vetor $(-1)\overrightarrow{u}$, pois se $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ é o vetor $\overrightarrow{u}$ dado em coordenadas então

$$\overrightarrow{BA} = (-\alpha, -\beta) = (-1)(\alpha, \beta) = (-1)\overrightarrow{AB}\,.$$

Definição 1

O vetor $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$, escrito $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, é chamado a diferença entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Sejam A, B e C pontos do plano tais que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. Então,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v}) &= \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}\,. \end{aligned}$$

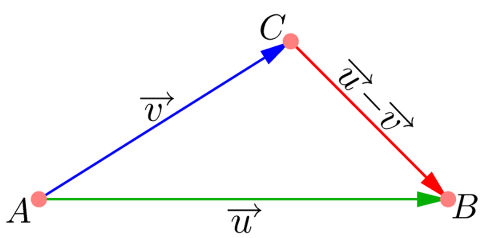

Fig. 3: Diferença entre vetores

Propriedades da multiplicação de números reais por vetores

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores no plano e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades.

- **Existência de elemento neutro multiplicativo:**

$$1 \in \mathbb{R} \text{ satisfaz } 1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}.$$

- **Propriedades distributivas:**

$$\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v} \quad \text{e} \quad (\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}.$$

As propriedades distributivas são verificadas usando coordenadas e a propriedade distributiva que já conhecemos nos números reais.

De fato, se $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (a', b')$, então, dados $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned}
\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) &= \lambda\,[(a,b) + (a',b')] = \lambda(a + a', b + b') \\
&= (\lambda(a + a'), \lambda(b + b')) = (\lambda a + \lambda a', \lambda b + \lambda b') \\
&= (\lambda a, \lambda b) + (\lambda a', \lambda b') = \lambda(a,b) + \lambda(a',b') = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}.
\end{aligned}$$

A outra propriedade distributiva se verifica da mesma forma (faça-o!).

Exemplo 1

Mostre que os pontos médios dos lados de um quadrilátero são os vértices de um paralelogramo.

Solução.

Seja $ABDC$ um quadrilátero qualquer e sejam X, Y, W e Z os pontos médios dos lados AC, CD, DB e BA, respectivamente. Devemos mostrar que $XYWZ$ é um paralelogramo (figura 3).

Temos:

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CY} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} + \frac{\overrightarrow{CD}}{2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD},$$

$$\overrightarrow{ZW} = \overrightarrow{ZB} + \overrightarrow{BW} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \frac{\overrightarrow{BD}}{2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

Logo $\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{ZW}$. Então $XY \equiv ZW$, e portanto, $XYZW$ é um paralelogramo. □

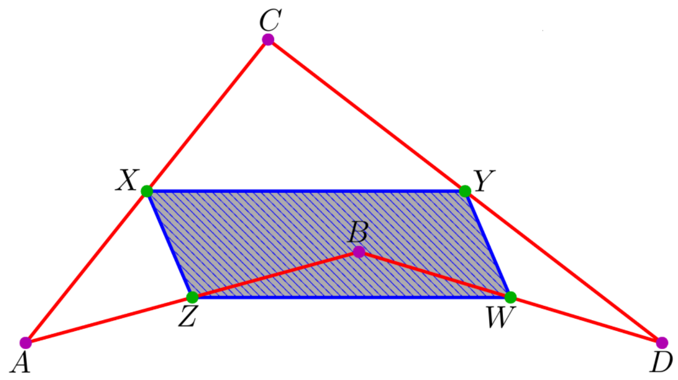

Fig. 4: Pontos médios dos lados de um quadrilátero determinando um paralelogramo.

2. Combinações lineares de vetores

Definição 2

(a) *Dizemos que um vetor* $\overrightarrow{v}$ *é* **múltiplo** *do vetor* $\overrightarrow{u}$ *se existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$.

(b) *Dizemos que um vetor* $\overrightarrow{v}$ *é* **combinação linear** *dos vetores* $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$ *quando existem números reais* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *tais que* $\overrightarrow{v} = \lambda_1\overrightarrow{v}_1 + \lambda_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{v}_n$.

Em relação a essa definição, observe que:

- O vetor nulo, $\overrightarrow{0}$, é múltiplo de qualquer vetor $\overrightarrow{u}$.

  De fato, $\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{u}$.

- Nenhum vetor não-nulo pode ser múltiplo do vetor nulo.

  De fato, se $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda\overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$, pois $\lambda\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Se $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ é múltiplo de $\overrightarrow{u}$, então $\overrightarrow{u}$ é também múltiplo de $\overrightarrow{v}$.

  Com efeito, seja $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$. Como $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, temos $\lambda \neq 0$ e $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$.

Logo $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{\lambda}\overrightarrow{v}$.

• Note que dizer que $\overrightarrow{v}$ é combinação linear dos vetores $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$ significa que $\overrightarrow{v}$ é soma de múltiplos dos vetores $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$.

A seguinte proposição fornece uma maneira para determinar quando dois vetores são, ou não, múltiplo um do outro.

Proposição 1

Um dos vetores $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (a', b')$ é múltiplo do outro se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' = 0\,.$$

Prova.

$(\Longrightarrow)$ Suponha que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (a', b')$, temos:

$$(a', b') = \lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b) \Longrightarrow a' = \lambda a$$

e

$$b' = \lambda b \Longrightarrow ab' - ba' = a\lambda b - b\lambda a = 0.$$

$(\Longleftarrow)$ Suponhamos agora que $ab' - ba' = 0$.

Caso $a = 0$: Se $a = 0$, então $ba' = 0$, ou seja, $b = 0$ ou $a' = 0$.

Logo:

$$\begin{cases} \bullet \quad b = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u} = (0,0) = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{u} = 0\overrightarrow{v}\,. \\[2ex] \bullet \quad a' = 0 \text{ e } b \neq 0 \Longrightarrow (0, b') = \dfrac{b'}{b}(0, b) \Longrightarrow \overrightarrow{v} = \dfrac{b'}{b}\overrightarrow{u}\,. \end{cases}$$

Caso $a \neq 0$: Se $a \neq 0$, temos que $ab' - ba' = 0 \Longrightarrow b' = b\dfrac{a'}{a}$.

Logo:

$$\frac{a'}{a}\overrightarrow{u} = \frac{a'}{a}(a, b) = \left(\frac{a'}{a}a, \frac{a'}{a}b\right) = (a', b') = \overrightarrow{v}\,.$$

Portanto, em qualquer caso, um dos vetores é múltiplo do outro. ■

Exemplo 2

Determine se os vetores $\overrightarrow{u} = (1,2)$ e $\overrightarrow{v} = (3,6)$ *são múltiplo um do outro.*

Solução.

Temos $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$. Portanto, um vetor é múltiplo do outro.

Note que $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{u}$. □

Proposição 2

Se nenhum dos vetores $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *é múltiplo um do outro, então qualquer outro vetor* $\overrightarrow{w}$ *do plano se escreve de modo único como combinação linear de* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$*. Isto é, existem* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*, determinados de forma única por* $\overrightarrow{w}$*, tais que* $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$*.*

Prova.

De fato, se $\overrightarrow{u} = (a,b)$, $\overrightarrow{v} = (a',b')$ e $\overrightarrow{w} = (a'',b'')$, temos que $ab' - ba' \neq 0$.

Vamos determinar $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ de modo que $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$.

Em coordenadas, essa condição equivale a

$$\begin{aligned} (a'',b'') &= \lambda(a,b) + \mu(a',b') \\ &= (\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b'). \end{aligned}$$

Ou seja, os números λ e μ devem ser soluções do sistema:

$$\begin{cases} \lambda a + \mu a' = a'' \\ \lambda b + \mu b' = b''. \end{cases}$$

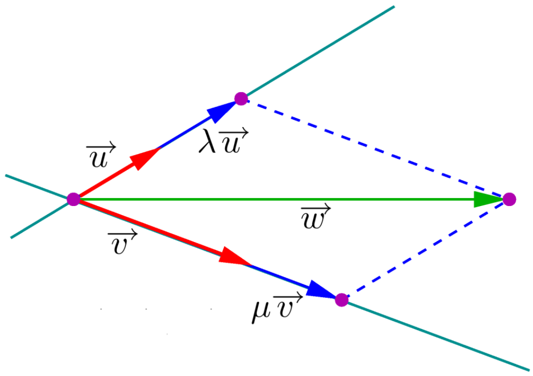

Fig. 5: Vetor $\overrightarrow{w}$ é combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Aplicando a regra de Cramer, temos:

$$\lambda = \frac{a''b' - b''a'}{ab' - ba'} \qquad \text{e} \qquad \mu = \frac{ab'' - ba''}{ab' - ba'}.$$

Os números λ e μ são determinados de forma única. ■

Observação 2

O plano é bidimensional (de dimensão 2).

Isso significa que basta conhecer **dois** *vetores* $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$*, que não sejam múltiplo um do outro, para conhecer todos os outros vetores do plano. De fato, pela proposição anterior, qualquer outro vetor se expressa de forma única como combinação linear desses dois vetores.*

Exemplo 3

Verifique que qualquer vetor do plano se escreve como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{u} = (2, -1)$ *e* $\overrightarrow{v} = (-3, 2)$*, e escreva o vetor* $\overrightarrow{w} = (1, 1)$ *como combinação linear de* $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$*.*

Solução.

• Como

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0,$$

os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são múltiplo um do outro.

Pela proposição anterior, qualquer outro vetor se escreve de maneira única como soma de múltiplos dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

• Dado o vetor $\overrightarrow{w} = (1, 1)$, devemos achar $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}.$$

Escrevendo essa equação em coordenadas, vemos que:

$$(1, 1) = \lambda(2, -1) + \mu(-3, 2) = (2\lambda - 3\mu, -\lambda + 2\mu),$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2\lambda - 3\mu = 1 \\ -\lambda + 2\mu = 1\,. \end{cases}$$

Os números λ e μ que resolvem esse sistema são:

$$\lambda = \frac{1 \times 2 - 1 \times (-3)}{1} = 2 + 3 = 5 \quad \text{e} \quad \mu = \frac{2 \times 1 - (-1) \times 1}{1} = 2 + 1 = 3.$$

Portanto, $\overrightarrow{w} = 5\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$. □

3. Equação paramétrica da reta

Vamos agora descrever algebricamente uma reta no plano usando a linguagem vetorial.

Reta r que passa pelos pontos A e B.

Seja r a reta que passa pelos pontos distintos A e B e seja P um ponto do plano. O ponto P pertence à reta r se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é múltiplo do vetor $\overrightarrow{AB}$. Isto é, $P \in r$ se, e somente se, existe um número $t \in \mathbb{R}$ tal que

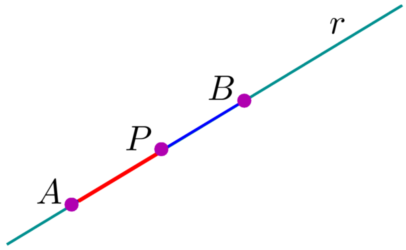

Fig. 6: Ponto P pertencente a r.

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}}$$

Note que o número t é determinado de forma única pelo ponto P e é chamado o **parâmetro** de P em r.

Assim, para atingir o ponto P na reta r, devemos ir até o ponto A e deslocarmos ao longo da reta por $t\overrightarrow{AB}$. Escrevemos, então, a equação que determina o ponto P "pela variação do parâmetro t" como:

$$\boxed{r : P = A + t\overrightarrow{AB}\ , \quad t \in \mathbb{R}}$$

Essa equação é chamada a **equação paramétrica** da reta r.

Usando as coordenadas dos pontos $A = (a, b)$, $B = (a', b')$ e $P = (x, y)$ num sistema de coordenadas dado, temos:

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in r \quad &\iff \quad (x, y) = (a, b) + t(a' - a, b' - b)\,, \text{ para algum } t \in \mathbb{R} \\ &\iff \quad \begin{cases} x = a + t(a' - a) \\ y = b + t(b' - b) \end{cases}, \quad \text{para algum } t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Dizemos que as equações

$$\boxed{r : \begin{cases} x = a + t(a' - a) \\ y = b + t(b' - b) \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}}$$

são as **equações paramétricas** da reta r.

Exemplo 4

Determinar a equação paramétrica da reta que passa pelos pontos $A = (2,3)$ e $B = (1,2)$.

Solução.

Como $\overrightarrow{AB} = (1-2, 2-3) = (-1,-1)$:

$$\begin{aligned} P = (x,y) \in r &\iff (x,y) = (2,3) + t(-1,-1), \quad t \in \mathbb{R} \\ &\iff (x,y) = (2-t, 3-t),\ t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Portanto, as equações paramétricas de r são: $r : \begin{cases} x = 2-t \\ y = 3-t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$. □

Definição 3

Dizemos que uma reta r é **paralela** *a um vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ quando, para quaisquer dois pontos $A, B \in r$, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é múltiplo do vetor $\overrightarrow{v}$. Nesse caso, escrevemos $\overrightarrow{v} \parallel r$.*

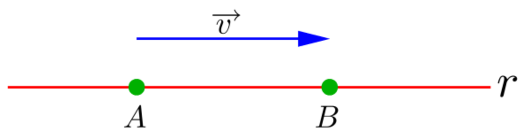

Fig. 7: Vetor direção da reta r.

Um vetor $\overrightarrow{v}$ paralelo à reta r é chamado **vetor direção** de r.

Observação 3

Note que se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$ é um vetor direção da reta r, então r coincide ou é paralela à reta que passa por P e Q.

Fig. 8: $P \in r$.

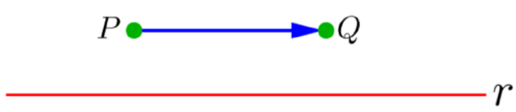

Fig. 9: $P \notin r$.

Reta r que passa pelo ponto A e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} \neq 0$.

Se r é a reta que passa pelo ponto A e tem direção $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, temos:

$$
\begin{aligned}
P \in r &\iff \overrightarrow{AP} \text{ é múltiplo de } \overrightarrow{v} \\
&\iff \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{v}\,, \text{ para algum } t \in \mathbb{R} \\
&\iff P = A + t\overrightarrow{v}\,, \text{ para algum } t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Portanto, a equação paramétrica de r é:

$$\boxed{r : P = A + t\overrightarrow{v}\,; \quad t \in \mathbb{R}}$$

Escrevendo essa equação em coordenadas, temos que se $A = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta)$, então:

$$
\begin{aligned}
P = (x, y) \in r &\iff (x, y) = (a, b) + t(\alpha, \beta)\,,\ t \in \mathbb{R} \\
&\iff \begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Assim, as equações paramétricas de r, neste caso, são:

$$\boxed{r : \begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}}$$

Exemplo 5

Determinar a equação paramétrica da reta r que passa por $A = (1, 4)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (5, 2)$.

Solução.

Temos que

$P = (x, y) \in r \iff (x, y) = (1, 4) + t(5, 2) = (1 + 5t, 4 + 2t), \quad t \in \mathbb{R}.$

Portanto,

$$r : \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 4 + 2t \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}\,,$$

são as equações paramétricas da reta r. $\square$

4. Produto interno de dois vetores

Vamos agora definir um novo tipo de multiplicação. Os fatores desta nova operação são vetores e o produto é um número real.

Começamos com a seguinte definição:

Definição 4

A **norma** *ou* **comprimento** *do vetor* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ *é o número real não-negativo:*

$$\boxed{\|\overrightarrow{v}\| = d(A,B)}$$

Observe que a norma de um vetor é um número bem definido, isto é, depende apenas do vetor e não do segmento orientado escolhido para representá-lo.

De fato, se

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longrightarrow AB \equiv CD \Longrightarrow d(A,B) = d(C,D).$$

Ou seja, a norma de um vetor $\overrightarrow{v}$ pode ser calculada usando qualquer segmento que o represente.

Consideremos agora um sistema de eixos ortogonais OXY.

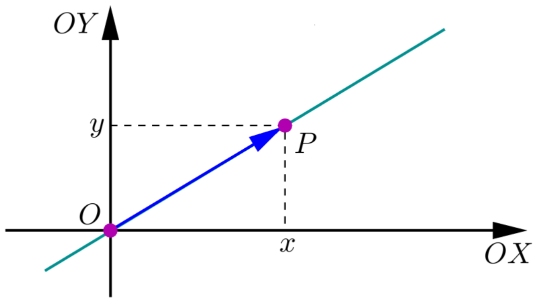

Fig. 10: Representante na origem de um vetor para o cálculo da norma.

Seja $\overrightarrow{v} = (x,y) = \overrightarrow{OP}$, isto é, $P = (x,y)$. Então,

$$\boxed{\|\overrightarrow{v}\| = d(O,P) = \sqrt{x^2+y^2}}$$

Quando $\|\overrightarrow{v}\| = 1$, dizemos que o vetor $\overrightarrow{v}$ é um **vetor unitário**.

Observação 4

Se $\overrightarrow{v} = (x,y)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *então* $\|\lambda\overrightarrow{v}\| = |\lambda|\,\|\overrightarrow{v}\|$.

De fato, como $\lambda\overrightarrow{v} = (\lambda x, \lambda y)$*, então:*

$$\begin{aligned} \|\lambda \overrightarrow{v}\| &= \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} = \sqrt{\lambda^2(x^2+y^2)} \\ &= \sqrt{\lambda^2}\sqrt{x^2+y^2} = |\lambda|\sqrt{x^2+y^2} = |\lambda|\,\|\overrightarrow{v}\|. \end{aligned}$$

Observação 5

Se $\overrightarrow{v}$ é um vetor não-nulo, então $\dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$ é um vetor unitário que tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\overrightarrow{v}$.

Com efeito, pela observação acima,

$$\left\|\frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}\right\| = \left|\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\right|\,\|\overrightarrow{v}\| = \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\,\|\overrightarrow{v}\| = 1.$$

Além disso, como

$$\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{v}\|\,\frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$$

e $\|\overrightarrow{v}\| > 0$, temos que $\overrightarrow{v}$ e $\dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido.

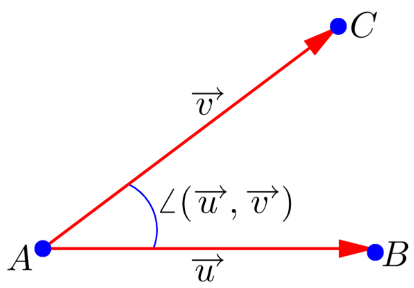

Fig. 11: Ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$

Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ vetores no plano.

O **ângulo** entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, designado $\angle(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, é o menor ângulo formado pelos segmentos AB e AC (figura 10).

Definição 5

*O **produto interno** dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ do plano é o número real, que designamos por $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$, definido da seguinte maneira:*

$$\boxed{\begin{array}{ll} \langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle = 0\,, & \textit{se}\quad \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \quad \textit{ou} \quad \overrightarrow{v} = 0 \\ \langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos\theta\,, & \textit{se}\quad \overrightarrow{u} \neq 0\,, \overrightarrow{v} \neq 0 \quad \textit{e} \quad \theta = \angle(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \end{array}}$$

• Observe que o produto interno entre dois vetores **essencialmente mede o ângulo entre os vetores**. Para ver isto, considere os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Então os vetores

$$\overrightarrow{U} = \frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|}\overrightarrow{u} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{V} = \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}$$

são unitários e múltiplos dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, respectivamente.

Além disso, $\overrightarrow{U}$ e $\overrightarrow{V}$ têm o mesmo sentido que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, respectivamente.

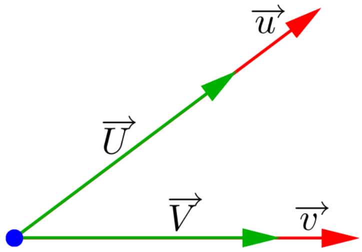

Fig. 12: $\langle \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V} \rangle = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Logo $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \angle(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$, e, portanto,

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V} \rangle &= \|\overrightarrow{U}\| \, \|\overrightarrow{V}\| \cos \angle(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}) \\ &= \cos \angle(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}) = \cos \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \,. \end{aligned}$$

Para darmos uma caracterização do produto interno de dois vetores em termos de suas coordenadas, vamos usar a **lei dos cossenos**:

Proposição 3

Seja $\triangle ABC$ um triângulo.

Designamos por a, b e c os comprimentos dos lados opostos aos vértices A, B e C respectivamente, e por θ a medida do ângulo $\widehat{BAC}$.

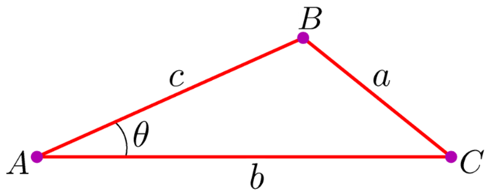

Fig. 13: Triângulo $\triangle ABC$.

Então vale a seguinte relação, conhecida como **lei dos cossenos***:*

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta}$$

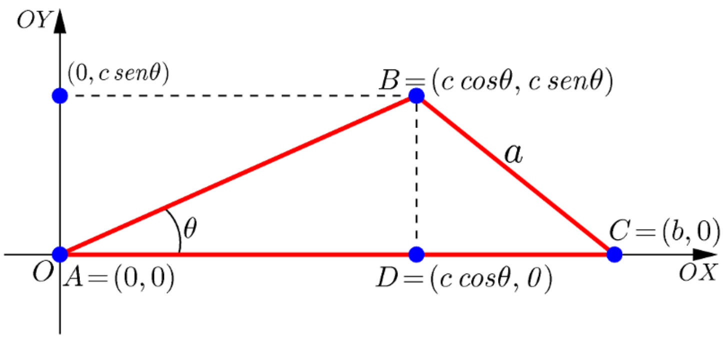

Fig. 14: Escolha apropriada do sistema de coordenadas.

Prova.

Escolhemos um sistema de coordenadas OXY no plano de forma que $O = A$ e B esteja no semi-eixo OX positivo (figura 14).

Nessas coordenadas: $A = (0,0)$, $B = (c\cos\theta, c\,\mathrm{sen}\,\theta)$ e $C = (b,0)$.

Seja $D = (c\cos\theta, 0)$ o pé da perpendicular ao eixo$-OX$ que passa por B.

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $\triangle BDC$, temos:

$$\begin{aligned} a^2 &= |DC|^2 + |BD|^2 \\ &= (b - c\cos\theta)^2 + (c\,\mathrm{sen}\,\theta - 0)^2 \\ &= b^2 - 2bc\cos\theta + c^2\cos^2\theta + c^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta \\ &= b^2 + c^2(\cos^2\theta + sen^2\theta) - 2bc\cos\theta \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta\,, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Proposição 4

Sejam $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ *e* $\overrightarrow{v} = (\alpha', \beta')$ *dois vetores no plano. Então,*

$$\boxed{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta'}$$

Prova.

De fato, se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ}$, então $P = (\alpha, \beta)$, $Q = (\alpha', \beta')$ e

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} = (\alpha' - \alpha, \beta' - \beta). \end{aligned}$$

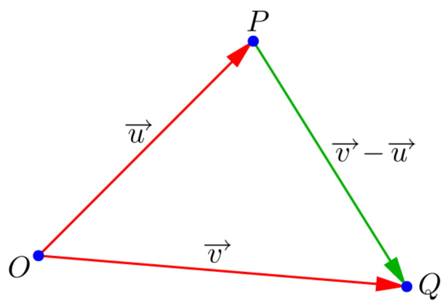

Fig. 15: Diferença $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$.

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo $\triangle OPQ$, temos:

$$\|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos\theta\,,$$

onde $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Dessa identidade, obtemos:

$$\begin{aligned}
& 2\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos\theta \\
= \;& \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\|^2 \\
= \;& (\alpha^2 + \beta^2) + ((\alpha')^2 + (\beta')^2) - ((\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2) \\
= \;& \alpha^2 + \beta^2 + (\alpha')^2 + (\beta')^2 - ((\alpha')^2 - 2\alpha'\alpha + \alpha^2 + (\beta')^2 - 2\beta'\beta + \beta^2) \\
= \;& \alpha^2 + \beta^2 + (\alpha')^2 + (\beta')^2 - (\alpha')^2 + 2\alpha'\alpha - \alpha^2 - (\beta')^2 + 2\beta'\beta - \beta^2 \\
= \;& 2\alpha'\alpha + 2\beta'\beta = 2(\alpha\alpha' + \beta\beta')\,.
\end{aligned}$$

Portanto, $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos\theta = \alpha\alpha' + \beta\beta'$, como queríamos demonstrar. ■

Tendo a expressão do produto interno em coordenadas, fica fácil provar as seguintes propriedades.

Proposição 5

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores do plano e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

(1) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = \|\overrightarrow{u}\|^2 \geq 0$

(2) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

(3) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle$

(4) $\langle \lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$

(5) $\langle \overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$

(6) $\langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle$

(7) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle$

Definição 6

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores do plano. Dizemos que $\overrightarrow{u}$ é **perpendicular** *a $\overrightarrow{v}$ se $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 90^o$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Se $\overrightarrow{u}$ é perpendicular a $\overrightarrow{v}$ escrevemos $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$. Note que $\overrightarrow{u}$ é perpendicular a $\overrightarrow{v}$ se, e somente se, $\overrightarrow{v}$ é perpendicular a $\overrightarrow{u}$.*

Temos, então, a seguinte caracterização da perpendicularidade entre dois vetores por meio do produto interno.

Proposição 6

Dois vetores são perpendiculares se, e somente se, o seu produto interno é igual a zero. Isto é,

$$\boxed{\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0}$$

Prova.
Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores do plano. Se algum desses vetores é o vetor nulo, então $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ e $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$, por definição.

Suponhamos, então, que $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ e $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, e seja $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Então,

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos\theta = 0 \iff \cos\theta = 0 \iff \theta = 90^o ,$$

como queríamos demonstrar. ■

Proposição 7

Seja $\overrightarrow{u} = (a, b)$ um vetor não-nulo. Então o vetor $\overrightarrow{v}$ é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{u}$ se, e só se, $\overrightarrow{v} = \lambda(-b, a)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prova.
De fato, se $\overrightarrow{v} = \lambda(-b, a)$, então

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = a(-\lambda b) + b(\lambda a) = 0 \implies \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} .$$

Reciprocamente, se $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$ e $\overrightarrow{v} = (c, d)$, então $ac + bd = 0$, isto é, $\begin{vmatrix} c & d \\ -b & a \end{vmatrix} = 0$.

Logo, pela Proposição 1, (c, d) é múltiplo de $(-b, a)$, ou seja, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{v} = (c, d) = \lambda(-b, a)$. ■

Equação da reta r que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0)$ e é normal ao vetor $\overrightarrow{u} = (a, b) \neq \overrightarrow{0}$.

Vamos caracterizar algebricamente (usando o produto interno) a equação de uma reta **normal** (isto é, perpendicular) a uma direção dada.

Definição 7

Um vetor $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ é **normal** *ou* **perpendicular** *a uma reta r se $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{AB}$, quaisquer que sejam os pontos $A, B \in r$.*

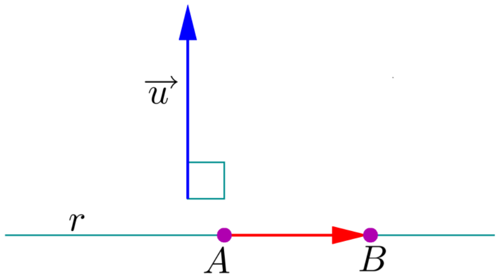

Fig. 16: Vetor normal à reta r.

Seja r a reta que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0)$ e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{u} = (a, b) \neq \overrightarrow{0}$. Então,

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in r \quad &\iff \quad \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{u} \\ &\iff \quad \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{u} \rangle = 0 \\ &\iff \quad \langle (x - x_0, y - y_0), (a, b) \rangle = 0 \\ &\iff \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \\ &\iff \quad ax + by = ax_0 + by_0 \\ &\iff \quad ax + by = c, \quad \text{onde} \quad c = ax_0 + by_0 \end{aligned}$$

Por causa disso, a equação cartesiana da reta r:

$$\boxed{r : ax + by = c}$$

é também chamada **equação normal** da reta r.

Observação 6

Na equação normal da reta r obtida acima, você deve observar que os coeficientes a e b de x e y, respectivamente, são as coordenadas do vetor normal $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e que o valor de c é determinado quando se conhece um ponto de r; no caso, o ponto $A = (x_0, y_0)$.

Exemplo 6

Determinar a equação cartesiana da reta r que passa pelo ponto $A = (2, 3)$ e é normal ao vetor $\overrightarrow{u} = (1, 2)$.

Solução.
Como $\overrightarrow{u} \perp r$, devemos ter
$$r : x + 2y = c.$$
O valor de c é calculado sabendo que $A = (2,3) \in r$:
$$c = 2 \times 1 + 3 \times 2 = 2 + 6 = 8.$$
Portanto, a equação procurada é $r : x + 2y = 8$. $\square$

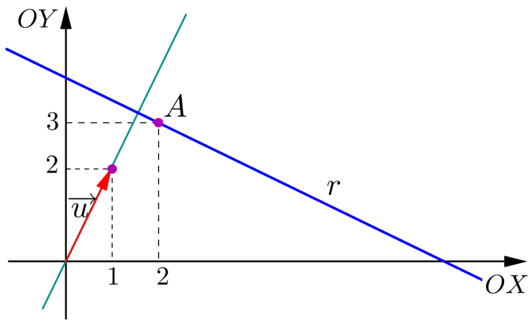

Fig. 17: Exemplo 6.

Exemplo 7

Determinar a equação cartesiana da reta r que passa pelo ponto $B = (2,3)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (1,2)$.

Solução.
Conhecer um ponto de r e um vetor paralelo à reta equivale a dar as equações paramétricas
$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$
Como $\overrightarrow{v} = (1,2) \parallel r$, temos
$$\overrightarrow{u} = (2,-1) \perp r.$$
Portanto, $r : 2x - y = c$.

Para determinar c, usamos o fato de que $B = (2,3) \in r$, isto é, $c = 2 \times 2 - 3 = 1$.

Logo $r : 2x - y = 1$. $\square$

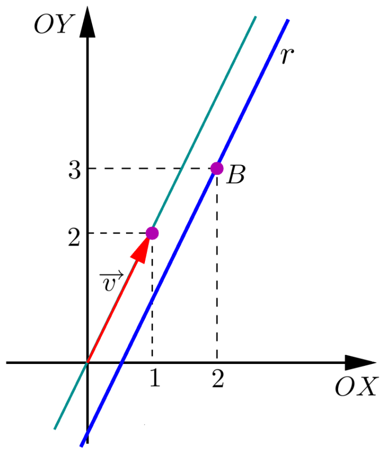

Fig. 18: Exemplo 7.

Exemplo 8

Determine a equação cartesiana da reta $r : \begin{cases} x = 2 - s \\ y = 1 + 3s \end{cases} ; \; s \in \mathbb{R}.$

Solução.
Das equações paramétricas obtemos o vetor $\overrightarrow{v} = (-1,3)$ paralelo à reta r e um ponto $A = (2,1)$ pertencente a ela.

O vetor $\overrightarrow{u} = (3,1)$ é perpendicular a $\overrightarrow{v}$ e, portanto, normal a r.

Logo a equação cartesiana de r é:

$$3x + y = c.$$

Para calcular c, usamos que $A = (2,1) \in r$, isto é, $c = 3 \times 2 + 1 = 7$.

Portanto, a equação cartesiana de r é

$$3x + y = 7. \square$$

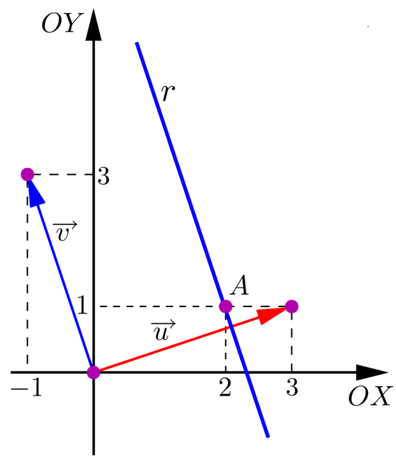

Fig. 19: Exemplo 8.

Exemplo 9

Determine as equações paramétricas da reta $r : 4x + 3y = 12$.

Solução.

Para achar as equações paramétricas de r precisamos determinar um vetor paralelo a r e um ponto de r.

Da equação cartesiana, temos:

$$\overrightarrow{u} = (4,3) \perp r \Longrightarrow \overrightarrow{v} = (3,-4) \parallel r\,.$$

Para determinar um ponto de r, fazemos $x = 0$ na equação cartesiana de r e calculamos o valor correspondente de y:

$$\begin{aligned} x = 0 \quad &\Longrightarrow \quad 4 \times 0 + 3y = 12 \\ &\Longrightarrow \quad 3y = 12 \Longrightarrow y = 4\,. \end{aligned}$$

Portanto, o ponto $A = (0,4)$ pertence à reta r.

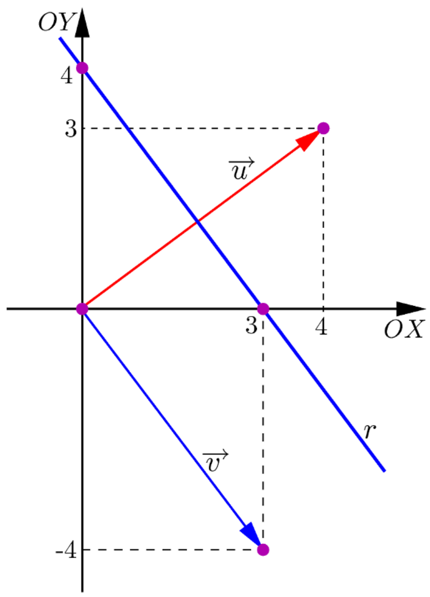

Fig. 20: Exemplo 9.

Assim, as equações paramétricas de r são:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 4 - 4t \end{cases} ; \; t \in \mathbb{R}. \; \square$$