Capítulo 7

Na aula anterior definimos o produto interno entre dois vetores e vimos como determinar a equação de uma reta no plano de diversas formas. Nesta aula, vamos determinar as bissetrizes de duas retas, a projeção ortogonal de um vetor sobre uma reta e usaremos as noções vetoriais para determinar a área de triângulos e paralelogramos.

1. Bissetrizes de duas retas concorrentes

Sejam r e r' duas retas concorrentes no plano. Dizemos que uma reta s é **bissetriz** de r e r' quando os ângulos entre r e s e entre r' e s são iguais.

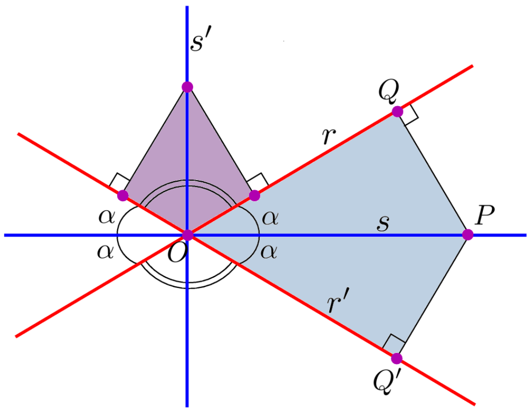

Fig. 1: Bissetrizes s e s' das retas r e r'.

Proposição 1

Se s e s' são as bissetrizes das retas concorrentes r e r', então

$$\boxed{s \cup s' = \{P \mid d(P, r) = d(P, r')\}}$$

Prova.
$(\Longrightarrow)$ Suponhamos que s é uma bissetriz das retas r e r' que se cortam no ponto O.

Seja $P \in s$ um ponto arbitrário. A reta perpendicular a r que passa por P intersecta r no ponto Q e a reta perpendicular a r' que passa por P intersecta r' no ponto Q', como na figura 1.

Consideremos os triângulos retângulos $\triangle PQO$ e $\triangle PQ'O$.

Sendo s bissetriz de r e r', os ângulos $\widehat{POQ}$ e $\widehat{POQ'}$ têm a mesma medida e, como os ângulos $\widehat{PQO}$ e $\widehat{PQ'O}$ são retos, concluímos que os ângulos $\widehat{OPQ}$ e $\widehat{OPQ'}$ têm a mesma medida.

Portanto, os triângulos $\triangle PQO$ e $\triangle PQ'O$ são congruentes, pois têm o lado OP em comum.

Em particular, as medidas $d(P,r) = |PQ|$ e $d(P,r') = |PQ'|$ são iguais. Como $P \in s$ foi escolhido arbitrariamente, concluímos que os pontos de s são eqüidistantes de r e r'.

($\Longleftarrow$) Reciprocamente, vejamos que se P é um ponto eqüidistante de r e r', então a reta s que passa pelos pontos O e P é uma bissetriz de r e r'.

Usando ainda a figura 1, a nossa hipótese equivale a $|PQ| = |PQ'|$.

Como os triângulos $\triangle PQO$ e $\triangle PQ'O$ têm o lado OP em comum, obtemos, pelo Teorema de Pitágoras, que os lados OQ e OQ' têm a mesma medida e, portanto, os triângulos retângulos $\triangle OPQ$ e $\triangle OPQ'$ são congruentes.

Logo os ângulos $\widehat{QOP}$ e $\widehat{Q'OP}$ têm a mesma medida e, assim, a reta s é bissetriz de r e r'. ■

Pela proposição anterior, as bissetrizes s e s' de duas retas concorrentes

$$r : ax + by = c \qquad \text{e} \qquad r' : a'x + b'y = c'$$

são caracterizadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P = (x,y) \in s \cup s' &\iff d(P,r) = d(P,r') \\ &\iff \frac{|ax+by-c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a'x+b'y-c'|}{\sqrt{(a')^2+(b')^2}}. \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\boxed{P = (x, y) \in s \cup s' \iff \frac{ax + by - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm\frac{a'x + b'y - c'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}}\,.}$$

Tomando nessa identidade o sinal positivo, obtemos a equação de uma das bissetrizes e, tomando o sinal negativo, obtemos a equação da outra bissetriz.

Exemplo 1

Determinar as bissetrizes das retas $r : 2x + y = 1$ *e* $r' : 3x + 2y = 2$.

Solução.
Sejam s e s' as bissetrizes de r e r'.

Então:

$$\begin{aligned}
P = (x, y) \in s \cup s' \quad &\iff \frac{2x + y - 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \pm\frac{3x + 2y - 2}{\sqrt{3^2 + 2^2}}\\
&\iff \frac{2x + y - 1}{\sqrt{5}} = \pm\frac{3x + 2y - 2}{\sqrt{13}}\\
&\iff 2x + y - 1 = \pm\sqrt{\frac{5}{13}}\,(3x + 2y - 2)\,.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases}
s : 2x + y - 1 = \sqrt{\dfrac{5}{13}}\,(3x + 2y - 2)\\[2ex]
s' : 2x + y - 1 = -\sqrt{\dfrac{5}{13}}\,(3x + 2y - 2)\,,
\end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases}
s : \left(2 - 3\sqrt{\dfrac{5}{13}}\right)x + \left(1 - 2\sqrt{\dfrac{5}{13}}\right)y = 1 - 2\sqrt{\dfrac{5}{13}}\\[2ex]
s' : \left(2 + 3\sqrt{\dfrac{5}{13}}\right)x + \left(1 + 2\sqrt{\dfrac{5}{13}}\right)y = 1 + 2\sqrt{\dfrac{5}{13}}
\end{cases}$$

são as equações das bissetrizes procuradas. □

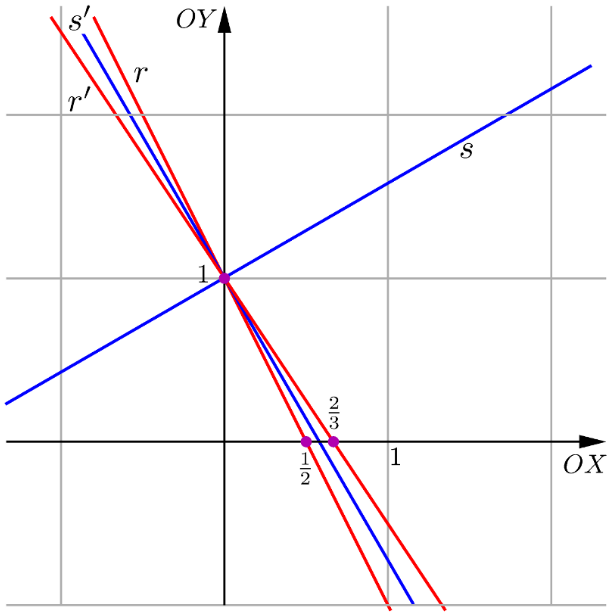

Fig. 2: Exemplo 1.

Bissetriz de um ângulo

Sejam O, P e Q pontos não-colineares do plano.

Vejamos como usar a linguagem vetorial para determinar a bissetriz do ângulo $\widehat{POQ}$.

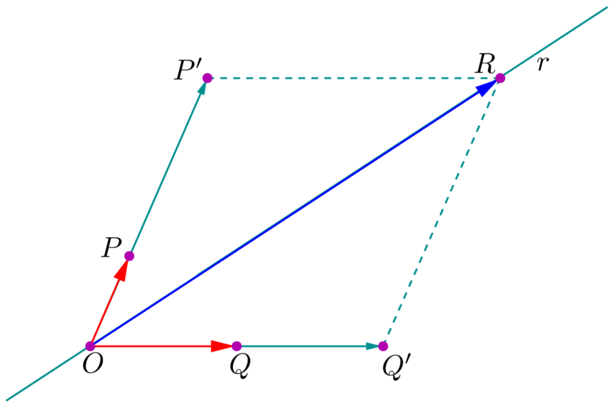

Fig. 3: Bissectando o ângulo $\widehat{POQ}$.

Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ}$.

Começamos observando que os vetores $\|\overrightarrow{u}\| \cdot \overrightarrow{v}$ e $\|\overrightarrow{v}\| \cdot \overrightarrow{u}$ são múltiplos positivos de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u}$, respectivamente, que têm a mesma norma:

$$\left\| \|\overrightarrow{u}\| \cdot \overrightarrow{v} \right\| = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{u}\| = \left\| \|\overrightarrow{v}\| \cdot \overrightarrow{u} \right\|.$$

Sejam P', Q' e R pontos do plano tais que:

$$\|\overrightarrow{v}\|\,\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP'}\,, \quad \|\overrightarrow{u}\|\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ'} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OR}\,.$$

Como os segmentos OP' e OQ' são congruentes, o paralelogramo $OP'RQ'$ é um losango. Assim, o segmento OR, que é uma diagonal do losango $OP'RQ'$, bissecta o ângulo $\widehat{P'OQ'} = \widehat{POQ}$.

Logo $\overrightarrow{OR}$ é um vetor paralelo à reta r que bissecta o ângulo $\widehat{POQ}$.

Exemplo 2

Determine a reta r que bissecta o ângulo $\widehat{POQ}$, onde $P = (1,1)$, $O = (1,-1)$ e $Q = (2,1)$.

Solução.

Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP} = (0,2)$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ} = (1,2)$.

Temos $\|\overrightarrow{u}\| = 2$ e $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{5}$. Pelo visto acima, o vetor

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w'} &= \|\overrightarrow{v}\|\,\overrightarrow{u} + \|\overrightarrow{u}\|\,\overrightarrow{v} = \sqrt{5}(0,2) + 2(1,2)\\ &= \left(2, 2\left(2+\sqrt{5}\right)\right) = 2\left(1, 2+\sqrt{5}\right)\end{aligned}$$

é paralelo à reta r. Portanto, o vetor $\overrightarrow{w} = \left(2+\sqrt{5}, -1\right)$ é um vetor normal a r e a equação de r é da forma $\left(2+\sqrt{5}\right)x - y = c$.

Como $O = (1,-1) \in r$, temos:

$$\begin{aligned} c &= \left(2+\sqrt{5}\right)\times 1 - (-1)\\ &= 3+\sqrt{5}\,,\end{aligned}$$

e, portanto,

$$r : \left(2+\sqrt{5}\right)x - y = 3+\sqrt{5}\,,$$

ou

$$r : y = \left(2+\sqrt{5}\right)x - \left(3+\sqrt{5}\right)\,,$$

é a equação da bissetriz procurada. □

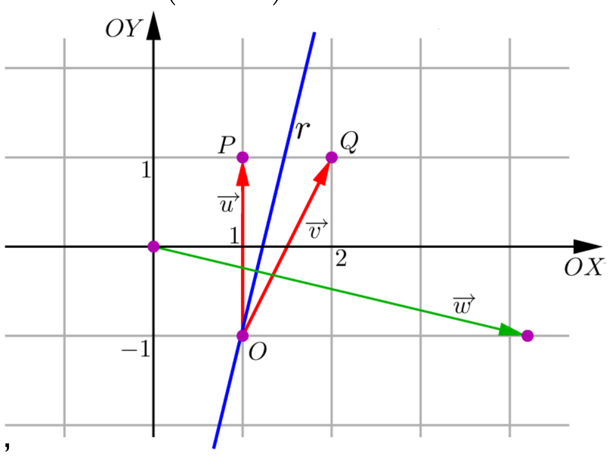

Fig. 4: Reta r bissectando o ângulo $\widehat{POQ}$.

2. Projeção ortogonal de um vetor sobre uma reta

Definição 1

A **projeção ortogonal** *do vetor* $\overrightarrow{w}$ *sobre a reta* r *é o vetor* $\overrightarrow{w'} = \text{Proj}_r(\overrightarrow{w})$ *paralelo a* r *tal que* $\overrightarrow{w} - \overrightarrow{w'}$ *é perpendicular a* r.

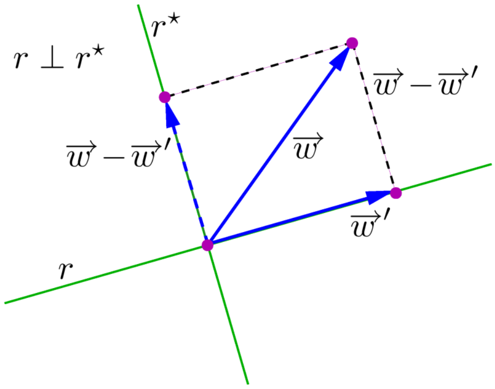

Fig. 5: Projeção ortogonal de um vetor sobre a reta r.

Seja $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ um vetor paralelo à reta r. Então $\overrightarrow{w'}$ é múltiplo de $\overrightarrow{u}$, isto é, $\overrightarrow{w'} = \lambda\overrightarrow{u}$, para algum número $\lambda \in \mathbb{R}$. Além disso, como $\overrightarrow{w} - \overrightarrow{w'} \perp \overrightarrow{u}$:

$$\begin{aligned}
& \langle \overrightarrow{w} - \overrightarrow{w'}, \overrightarrow{u} \rangle = 0 \iff \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle - \langle \overrightarrow{w'}, \overrightarrow{u} \rangle = 0 \\
\iff & \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle = \langle \overrightarrow{w'}, \overrightarrow{u} \rangle \iff \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle = \langle \lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle \\
\iff & \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle \iff \lambda = \frac{\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle}{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle} \\
\iff & \lambda = \frac{\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\|^2}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\boxed{\text{Proj}_r(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w}' = \frac{\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\,\overrightarrow{u}}$

Observação 1

Note que a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{w}$ *sobre a reta* r *depende apenas da direção da reta. Como a direção da reta é dada por qualquer vetor*

$\overrightarrow{u}$ paralelo a ela, definimos a projeção ortogonal de $\overrightarrow{w}$ sobre $\overrightarrow{u}$, como sendo a projeção de $\overrightarrow{w}$ sobre qualquer reta r paralela a $\overrightarrow{u}$, ou seja,

$$\boxed{\text{Proj}_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{w}) = \text{Proj}_r(\overrightarrow{w}) = \frac{\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u}}$$

Exemplo 3

Sejam $A = (1,1)$, $B = (2,3)$, $C = (-4,1)$ e $D = (-2,1)$ pontos do plano.

Determine a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{CD}$ sobre a reta r que passa pelos pontos A e B.

Solução.

Sejam os vetores $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{CD} = (2,0)$ e $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (1,2)$.

Então, como $\|\overrightarrow{u}\|^2 = 1^2 + 2^2 = 5$:

$$\begin{aligned}
\text{Proj}_r(\overrightarrow{w}) &= \frac{\langle \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB} \rangle}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}\overrightarrow{AB} = \frac{\langle (2,0), (1,2) \rangle}{5}(1,2) \\
&= \frac{2 \times 1 + 0 \times 2}{5}(1,2) = \frac{2}{5}(1,2) = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right).
\end{aligned}$$

□

Exemplo 4

Determinar os valores $m \in \mathbb{R}$ de modo que a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{w} = (m+1, m-1)$ sobre o vetor $\overrightarrow{u} = (m, 1-m)$ seja um vetor unitário.

Solução.

Temos

$$\left\|\text{Proj}_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{w})\right\| = \left\|\frac{\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u}\right\| = \frac{\left|\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle\right|}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\|\overrightarrow{u}\| = \frac{\left|\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle\right|}{\|\overrightarrow{u}\|},$$

onde,

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle &= \langle (m+1, m-1), (m, 1-m) \rangle \\
&= (m+1)m + (m-1)(1-m) \\
&= m^2 + m - (m-1)^2 \\
&= m^2 + m - m^2 + 2m - 1 = 3m - 1,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{u}\| &= \|(m, 1-m)\| = \sqrt{m^2 + (1-m)^2} \\ &= \sqrt{2m^2 - 2m + 1}. \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \frac{\left|\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle\right|}{\|\overrightarrow{u}\|} = 1 &\iff \frac{|3m-1|}{\sqrt{2m^2-2m+1}} = 1 \\ &\iff \frac{(3m-1)^2}{2m^2-2m+1} = 1 \\ &\iff 9m^2 - 6m + 1 = 2m^2 - 2m + 1 \\ &\iff 7m^2 - 4m = 0 \\ &\iff m(7m-4) = 0 \\ &\iff m = 0 \text{ ou } m = \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

são os valores procurados. □

3. Área de paralelogramos e triângulos

Seja $ABDC$ um paralelogramo. Consideremos os vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB}$.

Sabemos que a área $\mathcal{A}$ do paralelogramo $ABDC$ se obtém multiplicando a medida da base $\|\overrightarrow{u}\|$ pela altura $\left\|\overrightarrow{w} - \text{Proj}_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{w})\right\|$.

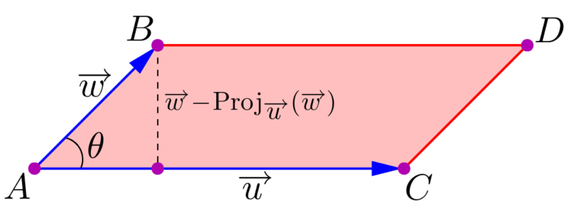

Fig. 6: Cálculo da área do paralelogramo $ABDC$.

Sendo $\text{Proj}_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{w}) = \dfrac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u}$, calculemos $\left\|\overrightarrow{w} - \text{Proj}_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{w})\right\|^2$:

$$\begin{aligned}
&\left\|\overrightarrow{w} - \text{Proj}_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{w})\right\|^2 \\
&= \langle \overrightarrow{w} - \text{Proj}_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{w}), \overrightarrow{w} - \text{Proj}_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{w})\rangle \\
&= \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}\rangle - 2\langle \overrightarrow{w}, \text{Proj}_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{w})\rangle + \langle \text{Proj}_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{w}), \text{Proj}_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{w})\rangle \\
&= \|\overrightarrow{w}\|^2 - 2\langle \overrightarrow{w}, \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\rangle}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u}\rangle + \langle \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\rangle}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u}, \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\rangle}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u}\rangle \\
&= \|\overrightarrow{w}\|^2 - 2\frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\rangle}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}\rangle + \left(\frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\rangle}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\right)^2 \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}\rangle \\
&= \|\overrightarrow{w}\|^2 - 2\frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\rangle^2}{\|\overrightarrow{u}\|^2} + \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\rangle^2}{\|\overrightarrow{u}\|^4}\|\overrightarrow{u}\|^2 \\
&= \|\overrightarrow{w}\|^2 - 2\frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\rangle^2}{\|\overrightarrow{u}\|^2} + \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\rangle^2}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \\
&= \|\overrightarrow{w}\|^2 - \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\rangle^2}{\|\overrightarrow{u}\|^2}
\end{aligned}$$

Assim, o quadrado da área do paralelogramo $ABDC$ é dado por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2 \left\|\overrightarrow{w} - \text{Proj}_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{w})\right\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \left(\|\overrightarrow{w}\|^2 - \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\rangle^2}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\right) \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{w}\|^2 - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\rangle^2,
\end{aligned}$$

e a área $\mathcal{A}$, por:

$$\boxed{\mathcal{A} = \sqrt{\|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{w}\|^2 - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\rangle^2}}$$

Atividade

Considere a figura 6, onde $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$.

Tomando $\|\overrightarrow{u}\|$ como medida da base do paralelogramo $ABDC$ e $\|\overrightarrow{w}\| \operatorname{sen}\theta$ como altura, use a identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

e a definição do produto interno, $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\rangle = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{w}\|\cos\theta$, temos para obter a fórmula de $\mathcal{A}$ obtida acima.

Solução.

Como $\mathcal{A} = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{w}\| \operatorname{sen}\theta$, temos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}^2 &= \left(\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{w}\| \operatorname{sen}\theta \right)^2 \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{w}\|^2 \operatorname{sen}^2\theta \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{w}\|^2 (1-\cos^2\theta) \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{w}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{w}\|^2 \cos^2\theta \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{w}\|^2 - \left(\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{w}\| \cos\theta \right)^2 \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{w}\|^2 - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle^2 .
\end{aligned}
$$

de onde se segue a fórmula de $\mathcal{A}$. □

Observe, também, que:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{w}\|^2 - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle^2 = \begin{vmatrix} \|\overrightarrow{u}\|^2 & \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle \\ \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle & \|\overrightarrow{w}\|^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle & \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle \\ \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle & \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w} \rangle \end{vmatrix} .
\end{aligned}
$$

Consideremos agora os vetores $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ e $\overrightarrow{w} = (\alpha', \beta')$ e determinemos a expressão da área em termos dessas coordenadas.

Sendo $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $\|\overrightarrow{w}\|^2 = (\alpha')^2 + (\beta')^2$ e $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta'$, temos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}^2 &= (\alpha^2+\beta^2)((\alpha')^2+(\beta')^2) - (\alpha\alpha'+\beta\beta')^2 \\
&= \alpha^2(\alpha')^2 + \alpha^2(\beta')^2 + \beta^2(\alpha')^2 + \beta^2(\beta')^2 - \alpha^2(\alpha')^2 - 2\alpha\alpha'\beta\beta' - \beta^2(\beta')^2 \\
&= \alpha^2(\beta')^2 + \beta^2(\alpha')^2 - 2\alpha\alpha'\beta\beta' \\
&= (\alpha\beta')^2 - 2(\alpha\beta')(\beta\alpha') + (\beta\alpha')^2 \\
&= (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2 = \left[\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix} \right]^2
\end{aligned}
$$

Portanto, a área $\mathcal{A}$ do paralelogramo de lados adjacentes $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ e $\overrightarrow{w} = (\alpha', \beta')$ é o módulo do determinante da matriz cujas filas são as coordenadas de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$, respectivamente:

$$\boxed{\mathcal{A} = \left|\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix}\right|}$$

Você pode verificar que $\mathcal{A}$ é também o módulo do determinante da matriz cujas colunas são as coordenadas de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$:

$$\boxed{\mathcal{A} = \left|\det\begin{pmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{pmatrix}\right|}$$

Exemplo 5

Determine a área do paralelogramo $ABDC$, onde $A = (1,2)$, $B = (3,1)$, $C = (4,1)$ e $D = (-2,3)$.

Solução.

Como $\overrightarrow{AB} = (2,-1)$ e $\overrightarrow{AC} = (3,-1)$, a área $\mathcal{A}$ do paralelogramo $ABDC$ é:

$$\mathcal{A} = \left|\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right| = |-2+3| = 1\,. \qquad \square$$

Área de um triângulo

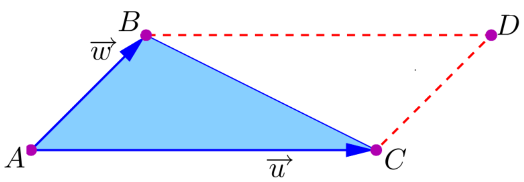

Fig. 7: Triângulo $\triangle ABC$.

Consideremos agora o triângulo $\triangle ABC$ de vértices A, B e C e seja $\mathcal{T}$ a sua área.

Observamos que, para calcular a área de um paralelogramo, foi necessário o conhecimento de dois lados adjacentes (não-paralelos). Assim, considerando o paralelogramo $ABDC$, de lados adjacentes AB e AC e área $\mathcal{A}$, temos:

$$\boxed{\mathcal{T} = \frac{1}{2}\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{pmatrix}\right|}$$

onde $\begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{pmatrix}$ representa a matriz cujas filas são as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Exemplo 6

Determine a área $\mathcal{T}$ do triângulo de vértices $A = (4,2)$, $B = (6,1)$ e $C = (3,2)$.

Solução.

Temos que $\overrightarrow{AB} = (2,-1)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1,0)$. Logo,

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-1| = \frac{1}{2},$$

é a área procurada. □

Exemplo 7

Sejam $A = (1,2)$, $B = (3, n+2)$ e $C = (n-1,1)$. Determine os valores de n de modo que o triângulo $\triangle ABC$ tenha área $\mathcal{T}$ igual a $\frac{1}{2}$.

Solução.

Temos que $\overrightarrow{AB} = (2,n)$ e $\overrightarrow{AC} = (n-2,-1)$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 2 & n \\ n-2 & -1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\,|-2-n(n-2)| \\ &= \frac{1}{2}\,|-2-n^2+2n| = \frac{1}{2}\,|n^2-2n+2| \end{aligned}.$$

Assim, $\mathcal{T} = \frac{1}{2} \iff |n^2-2n+2| = 1 \iff n^2-2n+2 = \pm 1$.

• Tomando o sinal positivo, obtemos a equação

$$n^2-2n+2 = 1 \iff n^2-2n+1 = 0 \iff (n-1)^2 = 0.$$

Logo $n = 1$ é uma solução.

• Considerando o sinal negativo, obtemos a equação $n^2-2n+3 = 0$ que, por ter discriminante $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(3) < 0$, não possui raízes reais.

Portanto, $n = 1$ é a única solução ao problema proposto. $\square$

4. Exemplos de revisão

Exemplo 8

Dado o ponto $A = (0, 3)$ e as retas $r : x + y = -1$ e $s : x - 2y = -5$, encontre:

(a) *As coordenadas dos pontos $C \in s$ cuja distância a r é $\sqrt{2}$.*

(b) *Ache as coordenadas do ponto A' simétrico de A em relação à reta r.*

Solução.

(a) Da equação da reta s, vemos que um ponto C pertence à reta s se, e só se, $C = (2y - 5, y)$ para algum $y \in \mathbb{R}$.

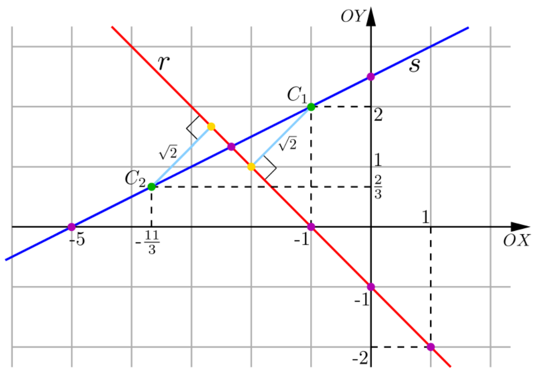

Fig. 8: Retas r e s e pontos C_1 e C_2.

Então,

$$d(C, r) = \sqrt{2} \iff \frac{|(2y - 5) + y + 1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \iff$$

$$|3y - 4| = 2 \iff \left\{\begin{array}{l} 3y - 4 = 2 \\ \text{ou} \\ 3y - 4 = -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y = 2 \\ \text{ou} \\ y = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Para $y_1 = 2$, calculamos $x_1 = 2y_1 - 5 = 2(2) - 5 = -1$, e obtemos o ponto $C_1 = (-1, 2) \in s$.

Para $y_2 = \dfrac{2}{3}$, $x_2 = 2y_2 - 5 = 2 \cdot \dfrac{2}{3} - 5 = \dfrac{4}{3} - 5 = -\dfrac{11}{3}$, e obtemos

$C_2 = \left(-\dfrac{11}{3}, \dfrac{2}{3}\right) \in s$.

(b) Seja ℓ a reta perpendicular a r que passa por A. O ponto A' **simétrico** de A em relação a r é o ponto da reta ℓ, distinto de A, tal que $d(A', r) = d(A, r)$.

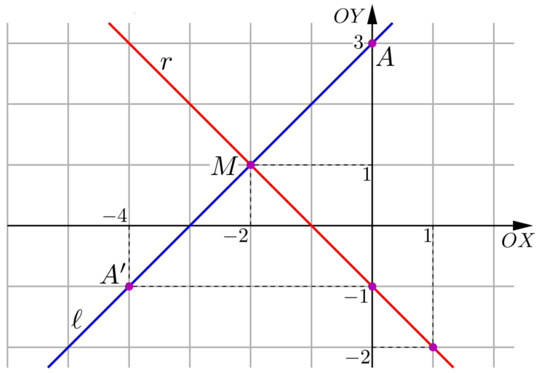

Fig. 9: Ponto A' simétrico de A em relação a r.

Como $r \perp (1, 1)$, a reta ℓ é paralela ao vetor $(1, 1)$.

Logo $\ell \perp (-1, 1)$ e a equação de ℓ é da forma $\ell : -x + y = c$, onde c se determina sabendo que o ponto $A = (0, 3)$ pertence à reta ℓ:

$$-0 + 3 = c \Longrightarrow c = 3 \Longrightarrow \ell : -x + y = 3.$$

Seja M o ponto de interseção das retas ℓ e r. Então M é o ponto médio do segmento AA'. Para determinar M resolvemos o sistema formado pelas equações de ℓ e r:

$$\ell \cap r : \begin{cases} -x + y = 3 \\ x + y = -1 \end{cases}.$$

Somando as equações, obtemos $2y = 2$, ou seja, $y = 1$ e, substituindo esse valor na segunda equação, obtemos $x = -2$. Portanto, $M = (-2, 1)$.

Sendo $M = \dfrac{1}{2}(A + A')$, concluímos que

$$A' = 2M - A = 2(-2, 1) - (0, 3) = (-4, 2) - (0, 3) = (-4, -1). \square$$

Exemplo 9

Seja C o círculo de centro no ponto de interseção das retas

$$r_1 : x + 2y = 1 \qquad e \qquad r_2 : \begin{cases} x = t + 3 \\ y = -t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R},$$

que é tangente à reta $r : x + 2y = 2$.

Determine a equação de C e o ponto de tangência da reta r com C.

Solução.

Seja P o ponto da interseção de r_1 com r_2. Então $P = (t+3, -t+1) \in r_2$, para algum $t \in \mathbb{R}$, e, como $P \in r_1$, temos que:

$$(t+3) + 2(-t+1) = 1 \Longrightarrow -t+5 = 1 \Longrightarrow t = 4 \Longrightarrow P = (7, -3),$$

é o centro de C.

Como r é tangente a C, o raio de C é $R = d(P, r) = \dfrac{|7 + 2(-3) - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Portanto, a equação de C é

$$C : (x-7)^2 + (y+3)^2 = \frac{1}{5}.$$

O ponto de tangência de r com C é o ponto de interseção de r com a reta ℓ que passa pelo centro P e é perpendicular a r.

Como $r \perp (1,2)$, temos que $\ell \parallel (1,2)$ e, portanto, $\ell \perp (-2,1)$.

Assim, $\ell : -2x + y = c$, onde o valor de c é determinado sabendo que $P = (7, -3) \in \ell$, ou seja,

$$c = -2(7) - 3 = -14 - 3 = -17$$
$$\Longrightarrow \ell : -2x + y = -17.$$

O ponto Q de tangência é o ponto da interseção $\ell \cap r$. Para determiná-lo, devemos resolver o sistema que consiste das equações de ℓ e de r:

$$\ell \cap r : \begin{cases} -2x + y = -17 \\ x + 2y = 2. \end{cases}$$

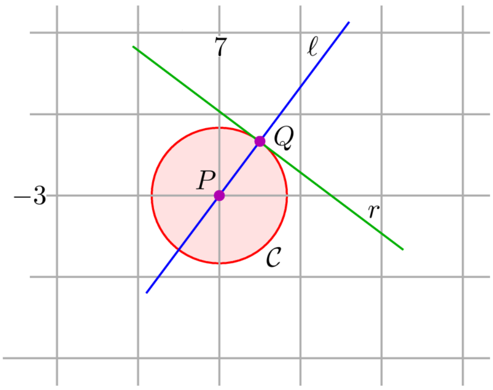

Fig. 10: Ponto Q de tangência de r com C.

Multiplicando a segunda equação por 2 e somando à primeira, obtemos $5y = -13$, ou seja, $y = -\dfrac{13}{5}$. Substituindo esse valor na segunda equação, temos: $x = 2 - 2\left(-\dfrac{13}{5}\right) = 2 + \dfrac{26}{5} = \dfrac{36}{5}$.

Portanto, o ponto Q de tangência entre r e C é $Q = \left(\dfrac{36}{5}, -\dfrac{13}{5}\right)$. □

Exemplo 10

Faça um esboço detalhado da região $\mathcal{R}$ do plano dada pelo sistema de *inequações:*

$$\mathcal{R}: \begin{cases} x \leq y + 1 \\ x \geq -y \\ x^2 + y^2 > \frac{1}{2} \,. \end{cases}$$

Solução.
A região $\mathcal{R}$ é a interseção das regiões:

$$\mathcal{R}_1 : x \leq y + 1\,, \qquad \mathcal{R}_2 : x \geq -y \qquad \text{e} \qquad \mathcal{R}_3 : x^2 + y^2 > \tfrac{1}{2}\,.$$

Determinando a região $\mathcal{R}_1$

A região $\mathcal{R}_1$ consiste dos pontos (x, y) tais que $x \leq y + 1$, ou seja, $x - y \leq 1$.

Consideremos a reta $r_1 : x - y = 1$ e seu vetor normal $(a, b) = (1, -1)$, que aponta na direção onde o parâmetro c na equação $x - y = c$ cresce. Assim, a região $\mathcal{R}_1$ é o semi-plano da figura 11.

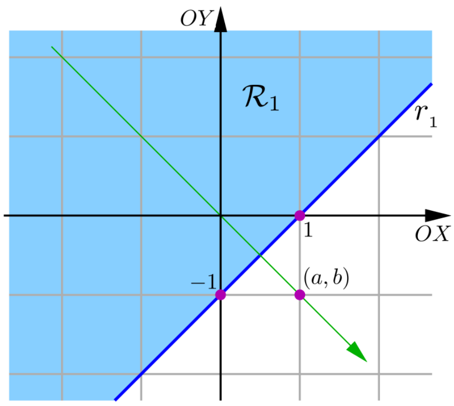

Fig. 11: Região $\mathcal{R}_1$.

Determinando a região $\mathcal{R}_2$

A região $\mathcal{R}_2$ é formada pelos pontos (x, y) tais que $x \geq -y$, ou seja, $x + y \geq 0$.

Considerando agora a reta $r_2 : x + y = 0$, seu vetor normal $(a, b) = (1, 1)$ aponta na direção onde o parâmetro c na equação $x + y = c$ aumenta. A região $\mathcal{R}_2$ é o semi-plano indicado na figura 12.

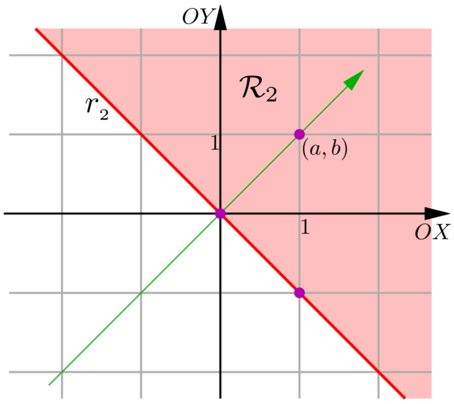

Fig. 12: Região $\mathcal{R}_2$.

Determinando a região $\mathcal{R}_3$

A equação $C : x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ representa o círculo de centro na origem e raio $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Para um ponto (x, y) estar na região $\mathcal{R}_3$, o quadrado da sua distância à origem deve ser maior que $\dfrac{1}{2}$, ou seja, deve estar na região exterior ao círculo C, que mostramos na figura 12.

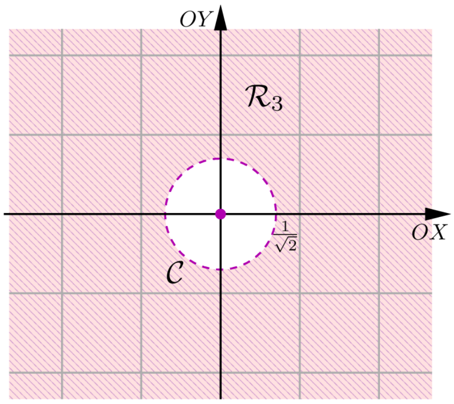

Fig. 13: Região $\mathcal{R}_3$.

Para esboçarmos corretamente a região $\mathcal{R}$ devemos determinar a interseção de r_1 com r_2:

$$r_1 \cap r_2 : \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \implies 2x = 1 \implies x = \frac{1}{2} \implies y = -\frac{1}{2}.$$

Assim, as retas se intersectam no ponto de coordenadas $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, que pertence à circunferência C, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Além disso, observe que a reta r_1 é tangente à circunferência C, pois

$$d((0,0), r_1) = \frac{|0-0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = R\,.$$

Na figura 13, mostramos a região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3$ □

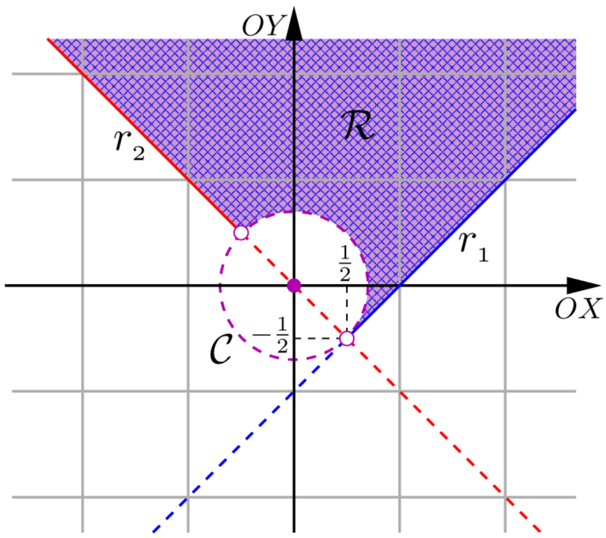

Fig. 14: Região $\mathcal{R}$, exemplo 10.

Exemplo 11

Determine os pontos C e B de modo que a projeção ortogonal do segmento AB sobre a reta $r : x + 3y = 6$ seja o segmento CD, onde $A = (1,1)$, $D = (3,1)$ e AB é um segmento contido numa reta paralela ao vetor $(2,1)$.

Solução.

Primeiramente determinemos a reta ℓ que contém os pontos A e B.

Como $\overrightarrow{AB}$ é paralelo ao vetor $(2,1)$, temos $\overrightarrow{AB} \perp (-1,2)$ e, portanto, $\ell : -x + 2y = c$. Determinamos c sabendo que $A \in \ell$: $c = -1 + 2(1) = 1$.

Logo $\ell : -x + 2y = 1$.

Seja agora r_1 a reta perpendicular a r que passa por $D = (3,1)$.

Como $r \perp (1,3)$, temos $r_1 \parallel (1,3)$. Logo $r_1 \perp (-3,1)$ e, portanto, a equação de r_1 tem a forma: $r_1 : -3x + y = c$. Como $D = (3,1) \in r_1$, $c = -3(3) + 1 = -8$.

Assim, $r_1 : -3x + y = -8$.

Para determinarmos o ponto B ($r_1 \cap \ell = \{B\}$), devemos resolver o sistema formado pelas equações de r_1 e ℓ:

$$\begin{cases} -3x + y = -8 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -3x + y = -8 \\ 3x - 6y = -3 \end{cases} \Longrightarrow -5y = -11$$

$$\Longrightarrow \quad y = \frac{11}{5} \Longrightarrow x = 2y - 1 = \frac{22}{5} - 1 = \frac{17}{5}.$$

Logo $B = \left(\frac{17}{5}, \frac{11}{5}\right)$.

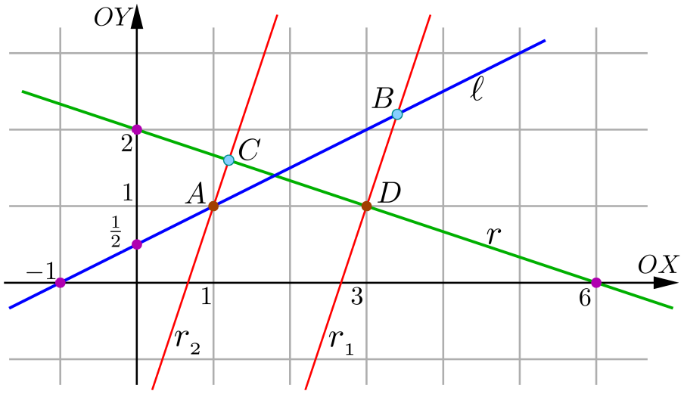

Fig. 15: Projeção CD do segmento AB sobre a reta r.

O ponto C procurado, além de pertencer à reta r, deve pertencer à reta r_2 perpendicular a r que passa por A.

Sendo $r_1 \parallel r_2$, a equação de r_2 deve ser da forma $r_2 : -3x + y = c$ onde c é calculado sabendo que $A = (1,1) \in r_2$: $c = -3(1) + 1 = -2$.

Portanto, $r_2 : -3x + y = -2$.

Temos, então, $\{C\} = r_2 \cap r$:

$$\begin{cases} -3x + y = -2 \\ x + 3y = 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -3x + y = -2 \\ 3x + 9y = 18 \end{cases} \Longrightarrow 10y = 16$$

$$\Longrightarrow \quad y = \frac{8}{5} \Longrightarrow x = 6 - 3y = 6 - \frac{24}{5} = \frac{6}{5}.$$

Assim, $C = \left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$ é o outro ponto procurado. □

Exemplo 12

Seja $\mathcal{P}$ o paralelogramo $ABDC$ cujas diagonais estão sobre as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = t+1 \\ y = -t+1 \end{cases} ; \ t \in \mathbb{R} \qquad e \qquad r_2 : \begin{cases} x = -2s+1 \\ y = s+2 \end{cases} ; \ s \in \mathbb{R}$$

Sabendo que $A = (1,1)$ e que $AB \subset r$, onde r é uma reta paralela ao vetor $(2,1)$, determine os vértices B, C e D de $\mathcal{P}$.

Solução.

Sabemos que num paralelogramo as diagonais cortam-se num ponto M, que é ponto médio de ambas. Em nosso caso, $\{M\} = r_1 \cap r_2$:

$$r_1 \cap r_2 : \begin{cases} t+1 = -2s+1 \\ -t+1 = s+2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t+2s = 0 \\ -t-s = 1 \end{cases} \Longrightarrow s = 1.$$

Logo $M = (-2 \times 1 + 1, 1 + 2) = (-1, 3)$ é o ponto médio das diagonais AD e BC. Em particular,

$$M = \frac{A+D}{2} \Longrightarrow 2M = A + D$$
$$\Longrightarrow D = 2M - A = (-2,6) - (1,1) = (-3,5).$$

Como A e D pertencem à reta r_1 ($t = 0$ e $t = -4$, respectivamente), os pontos B e C pertencem à reta r_2.

Além disso, $\{B\} = r \cap r_2$. Determinemos a reta r.

Sabemos que r passa por A e é paralela ao vetor $(2,1)$. Logo $r \perp (-1,2)$ e, portanto, $r : -x + 2y = c$.

Como $A = (1,1) \in r$, obtemos: $c = -1 + 2(1) = 1$.

Assim, $r : -x + 2y = 1$.

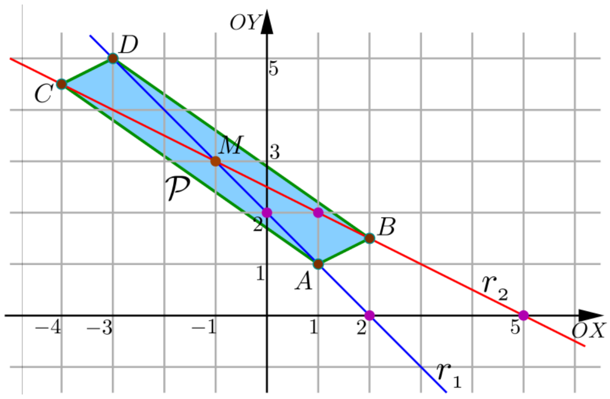

Fig. 16: Paralelogramo $\mathcal{P} = ABDC$, exemplo 12.

Determinemos agora o vértice B.

Como $B \in r \cap r_2$, $B = (-2s+1, s+2)$, para algum s, e

$$-(-2s+1) + 2(s+2) = 1 \Longrightarrow 2s - 1 + 2s + 4 = 1 \Longrightarrow 4s = -2 \Longrightarrow s = -\frac{1}{2},$$

Logo $B = \left(-2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1, -\frac{1}{2} + 2\right) = \left(2, \frac{3}{2}\right)$.

Finalmente, para determinar C, usamos de novo o ponto médio:

$$M = \frac{B+C}{2} \Longrightarrow C = 2M - B = (-2,6) - \left(2, \frac{3}{2}\right) = \left(-4, \frac{9}{2}\right) ,$$

concluíndo assim a determinação dos vértices de $\mathcal{P}$ (Veja a figura 15). $\square$