Capítulo 8

Nesta aula iremos continuar com os exemplos de revisão.

1. Exemplos de revisão

Exemplo 1

Ache a equação do círculo $\mathcal{C}$ circunscrito ao triângulo de vértices $A = (7,3)$, $B = (1,9)$ e $C = (5,7)$.

Solução.

O centro D do círculo $\mathcal{C}$ circunscrito ao triângulo $\triangle ABC$ é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados desse triângulo. Além disso, como $A, B, C \in \mathcal{C}$, o raio R de $\mathcal{C}$ é

$$R = d(A,D) = d(B,D) = d(C,D).$$

Para determinar o ponto D, basta achar e intersectar duas mediatrizes.

Já vimos que a mediatriz do segmento AB, ou seja, o conjunto

$$m_{AB} = \{P \mid d(P,A) = d(P,B)\}$$

é a reta perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB}$ que passa pelo ponto médio M_{AB} do segmento AB.

Como $M_{AB} = \frac{1}{2}((7,3)+(1,9)) = \frac{1}{2}(8,12) = (4,6)$ e $r \perp \overrightarrow{AB} = (-6,6) \Longleftrightarrow r \perp (-1,1)$, a reta m_{AB} tem equação:

$$m_{AB} : -x + y = c.$$

Sendo $M_{AB} = (4,6) \in m_{AB}$, $c = -4+6 = 2$. Portanto,

$$m_{AB} : -x + y = 2.$$

Determinemos a mediatriz m_{BC} do segmento BC, isto é, a reta perpendicular ao vetor $\overrightarrow{BC}$ que passa pelo ponto médio $M_{BC} = \frac{1}{2}((1,9)+(5,7)) = \frac{1}{2}(6,16) = (3,8)$.

Como $m_{BC} \perp \overrightarrow{BC} = (4,-2) \iff m \perp (2,-1)$, a equação da mediatriz m_{BC} é da forma

$$m_{BC} : 2x - y = c,$$

onde c é calculado sabendo que $M_{BC} \in m_{BC}$, ou seja, $c = 2(3) - 8 = -2$. Logo,

$$m_{BC} : 2x - y = -2\,.$$

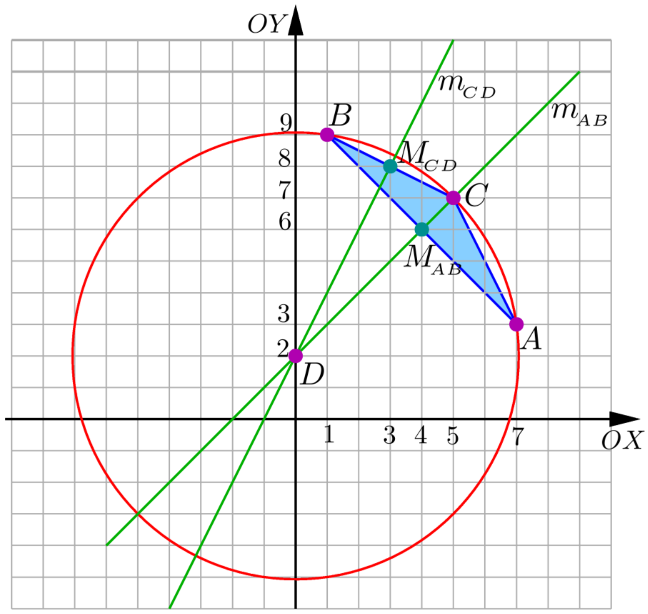

Fig. 1: Exemplo 1.

Para determinar D, devemos resolver o sistema formado pelas equações de m_{AB} e m_{BC}:

$$\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x - y = -2 \end{cases} \iff (-x+2x) + (y-y) = 2-2 \iff x = 0.$$

Logo $y = 2 + x = 2$ e, portanto, $D = (0,2)$ é o centro de C.

Além disso, $R = d(D, A) = \sqrt{(0-7)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$, é o raio de C.

Finalmente,

$$C : (x-0)^2 + (y-2)^2 = \left(\sqrt{50}\right)^2 ,$$

ou seja,

$$C : x^2 + (y-2)^2 = 50 ,$$

é a equação de C procurada $\square$

Exemplo 2

Considere as retas $r_1 : 4x - y = 0\,,\quad r_2 : 4x - y = 1\,,\quad$ *e* $\quad r_3 : \begin{cases} x = 2t \\ y = -t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$

(a) *Determine o conjunto dos pontos equidistantes de* r_1 *e* r_2.

(b) *Determine o círculo* C *com centro em* r_3 *e tangente às retas* r_1 *e* r_2.

Solução.

(a) Temos que: $P = (x, y)$ eqüidista de r_1 e $r_2 \iff d(P, r_1) = d(P, r_2)$

$$\iff \quad d(P, r_1) = \frac{|4x - y|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \frac{|4x - y - 1|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = d(P, r_2)$$

$$\iff \quad |4x - y| = |4x - y - 1| \iff 4x - y = \pm(4x - y - 1)$$

$$\iff \quad \begin{cases} 4x - y = 4x - y - 1 \\ \text{ou} \\ 4x - y = -4x + y + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = -1 \\ \text{ou} \\ 8x - 2y = 1 \end{cases}$$

Sendo a primeira dessas alternativas impossível, a segunda deve acontecer. Isto é,

$$\begin{aligned} & P = (x, y) \text{ eqüidista de } r_1 \text{ e } r_2 \\ \iff \quad & 8x - 2y = 1 \iff 4x - y = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto dos pontos eqüidistantes das retas paralelas r_1 e r_2 é a reta, paralela a ambas, que tem por equação:

$$s : 4x - y = \frac{1}{2}\,.$$

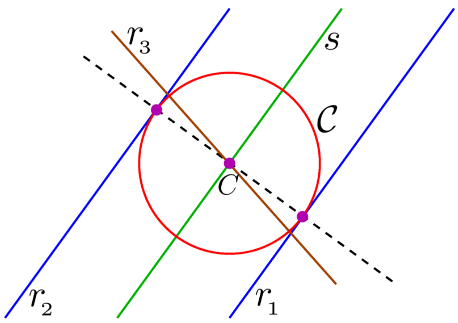

Fig. 2: Esquema do exemplo 2.

(b) Seja C o centro do círculo $\mathcal{C}$.

Como $\mathcal{C}$ deve ser tangente a r_1 e a r_2, o centro C deve ser eqüidistante de r_1 e r_2. Então, pelo resultado do item (a), $C \in s$.

Além disso, por hipótese, $C \in r_3$. Portanto, $\{C\} = s \cap r_3$.

Como $C \in r_3$, devemos ter $C = (2t, -t)$, para algum $t \in \mathbb{R}$, e como $C \in s$, as coordenadas $x = 2t$ e $y = -t$ de C, devem satisfazer a equação de s:

$$C = (2t, -t) \in s \iff 4(2t) - (-t) = \frac{1}{2} \iff 9t = \frac{1}{2} \iff t = \frac{1}{18}.$$

Logo $C = \left(\frac{2}{18}, -\frac{1}{18}\right) = \left(\frac{1}{9}, -\frac{1}{18}\right)$.

Para determinar o círculo $\mathcal{C}$ devemos calcular, também, o seu raio R.

Sendo r_1 e r_2 retas tangentes a $\mathcal{C}$, temos que $R = d(C, r_1) = d(C, r_2)$. Assim,

$$R = d(C, r_1) = \frac{\left|4\frac{1}{9} - (-\frac{1}{18})\right|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{9}{18}}{\sqrt{17}} = \frac{1}{2\sqrt{17}}.$$

Portanto, a equação de $\mathcal{C}$ é:

$$\mathcal{C} : \left(x - \frac{1}{9}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{18}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{17}}\right)^2 = \frac{1}{68}. \quad \square$$

Exemplo 3

Seja $\triangle ABC$ um triângulo de área 4 tal que $AB \subset r_1$ e $AC \subset r_2$, onde $r_1 : y = 3x + 1$ e r_2 é a reta paralela ao vetor $\overrightarrow{u} = (3, 1)$ que passa pelo ponto $M = (3, 2)$.

Ache a equação cartesiana da reta r_3 paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (1, -1)$ que contém o lado BC, e determine os vértices A, B e C.

Solução.

Como $AB \subset r_1$ e $AB \subset r_2$, temos $\{A\} = r_1 \cap r_2$.

Para determinar o vértice A devemos obter a equação da reta r_2. Pelas informações dadas, vemos que as equações paramétricas de r_2 são :

$$r_2 : \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2 + t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Assim, $A = (3 + 3t, 2 + t)$, para algum $t \in \mathbb{R}$.

Sendo $A \in r_1$, temos:

$$2 + t = 3(3 + 3t) + 1 \iff 2 + t = 10 + 9t \iff 8t = -8 \iff t = -1\,,$$

e, portanto, $A = (3 + 3(-1), 2 + (-1)) = (0, 1)$.

Em relação aos outros dois vértices, temos:

$$\begin{array}{lcll} B \in r_1 & \Longrightarrow & B = (x, 3x + 1)\,, & \text{para algum } x \in \mathbb{R} \\ C \in r_2 & \Longrightarrow & C = (3t + 3, t + 2)\,, & \text{para algum } t \in \mathbb{R}\,. \end{array}$$

Como

$$\overrightarrow{AB} = (x - 0, (3x + 1) - 1) = (x, 3x)$$

e

$$\overrightarrow{AC} = ((3t + 3) - 0, (t + 2) - 1) = (3t + 3, t + 1)\,,$$

temos que:

$$\begin{aligned} \text{Área}\,(\triangle ABC) &= \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x & 3x \\ 3t+3 & t+1\end{pmatrix}\right| \\ &= \frac{1}{2}\,|xt + x - 9xt - 9x| = \frac{1}{2}\,|-8xt - 8x| \\ &= \frac{8}{2}\,|x(t+1)| = 4 \end{aligned}$$

ou seja,

$$|x(t + 1)| = 1\,. \qquad (\star)$$

Além disso, como $\overrightarrow{BC} \parallel r_3$ e $r_3 \parallel \overrightarrow{v} = (1, -1)$, temos $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{v}$, onde

$$\overrightarrow{BC} = ((3t + 3) - x, (t + 2) - (3x + 1)) = (3t - x + 3, t - 3x + 1).$$

Assim, $\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{v}\end{pmatrix} = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix}\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{v}\end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 3t - x + 3 & t - 3x + 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix} \\ &= -3t + x - 3 - t + 3x - 1 = -4t + 4x - 4 = 0 \\ \iff & -t + x - 1 = 0 \iff x = t + 1\,. \end{aligned}$$

Substituindo na identidade $(\star)$, obtemos $|x^2| = 1 \iff x^2 = 1$. Logo $x = 1$ ou $x = -1$.

Se $x = 1$, temos $t = x - 1 = 1 - 1 = 0$ e, portanto,

$$B = (1, 3(1) + 1) = (1, 4) \text{ e } C = (3(0) + 3, 0 + 2) = (3, 2)\,.$$

Se $x = -1$, temos $t = x - 1 = -1 - 1 = -2$. Logo, $B = (-1, 3(-1) + 1) = (-1, -3 + 1) = (-1, -2)$ e $C = (3(-2) + 3, -2 + 2) = (-3, 0)\,.$

Obtemos, assim, dois triângulos que resolvem o problema:

- O triângulo $\triangle ABC$, com $A = (0, 1)\,,\ B = (1, 4)$ e $C = (3, 2)\,.$
- O triângulo $\triangle ABC$, com $A = (0, 1)\,,\ B = (-1, -2)$ e $C = (-3, 0)\,.$

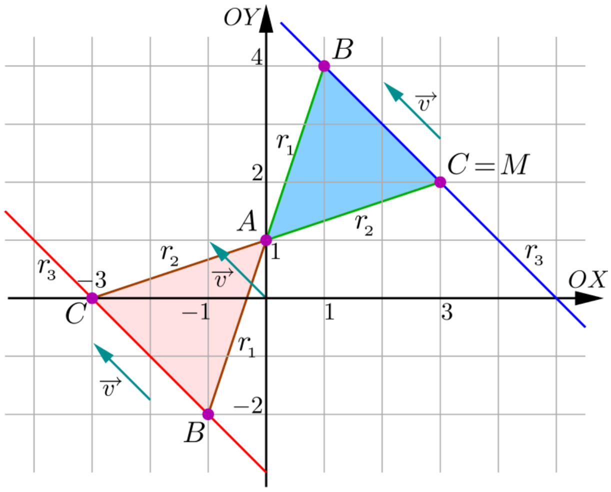

Fig. 3: Exemplo 3.

Determinemos, em cada caso, a reta r_3 que contém os vértices B e C.

Em ambos os casos, $r_3 \parallel \overrightarrow{v} = (-1, 1)$, ou seja, $r_3 \perp (1, 1)$. Logo $r_3 : x + y = c$, onde o valor c pode ser determinado sabendo, por exemplo, que o ponto B, calculado em cada um dos dois casos, pertence a r_3.

No primeiro caso: $c = 1 + 4 = 5 \Longrightarrow r_3 : x + y = 5$.

No segundo caso: $c = -1 - 2 = -3 \Longrightarrow r_3 : x + y = -3$. $\square$

Exemplo 4

(a) *Mostre que as retas $r_1 : x - y = 2$ e $r_2 : x + y = 2$ são tangentes ao círculo $C : x^2 + y^2 = 2$, e determine os pontos de tangência.*

(b) *Usando o item* **(a)**, *faça um esboço detalhado da região $\mathcal{R}$ do plano dado pelo seguinte sistema de inequações:*

$$\mathcal{R} : \begin{cases} x^2 + y^2 < 4 \\ x^2 + y^2 \geq 2 \\ x + |y| \geq 2 \\ x \geq 1\,. \end{cases}$$

Solução.

(a) Sabemos que uma reta r é tangente a um círculo C quando a distância do centro de C a r é igual ao raio de C.

Temos que $C : x^2 + y^2 = 2$ é o círculo de centro na origem $C = (0,0)$ e raio $R = \sqrt{2}$. Para mostrar que as retas r_1 e r_2 são tangentes a C devemos verificar que $d(C, r_1) = d(C, r_2) = \sqrt{2}$.

Com efeito,

$$d(C,r_1) = \frac{|0-0-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = R \quad \Longrightarrow \quad r_1 \text{ é tangente a } C\,.$$
$$d(C,r_2) = \frac{|0+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = R \quad \Longrightarrow \quad r_2 \text{ é tangente a } C\,.$$

Lembre que o ponto de tangência de uma reta r com um círculo C de centro C é a interseção da reta r com a sua perpendicular que passa pelo centro C.

Assim, para determinar os pontos de tangência de r_1 e r_2, respectivamente, com C, devemos achar as retas s_1 e s_2, tais que,

$$s_1 \perp r_1\,, \quad \text{e} \quad C \in s_1\,; \qquad s_2 \perp r_2 \quad \text{e} \quad C \in s_2\,.$$

Os pontos de tangência procurados serão os pontos das interseções $s_1 \cap r_1$ e $s_2 \cap r_2$.

Determinando s_1 e o ponto de tangência $r_1 \cap C$:

Como $r_1 \perp (1,-1)$, temos que $s_1 \parallel (1,-1)$ e, portanto, $s_1 \perp (1,1)$.

A equação de s_1 é da forma $x + y = c$, onde $c = 0 + 0 = 0$, pois $C = (0,0) \in s_1$.

Portanto, $s_1 : x + y = 0$.

Para achar o ponto P_1 tal que $\{P_1\} = r_1 \cap C = r_1 \cap s_1$, devemos resolver o sistema formado pelas equações de r_1 e s_1:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad (x+x) + (-y+y) = 2 + 0 \Longrightarrow 2x = 2$$
$$\Longrightarrow \quad x = 1 \Longrightarrow y = -x = -1\,.$$

Portanto, $P_1 = (1,-1)$.

Determinando s_2 e o ponto de tangência $r_2 \cap C$:

Como $r_2 \perp (1,1)$, temos $s_2 \parallel (1,1)$ e, portanto, $s_2 \perp (1,-1)$.

Assim, a equação de s_2 é $x - y = c$, onde $c = 0 + 0 = 0$, pois $C = (0,0) \in s_2$. Ou seja, $s_2 : x - y = 0$.

Para achar o ponto P_2 tal que $\{P_2\} = r_2 \cap C = r_2 \cap s_2$, resolvemos o sistema formado pelas equações de r_2 e s_2:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} &\Longrightarrow \quad (x + x) + (y - y) = 2 + 0 \Longrightarrow 2x = 2 \\ &\Longrightarrow \quad x = 1 \Longrightarrow y = x = 1 \,. \end{aligned}$$

Portanto, $P_2 = (1,1)$.

(b) Observe que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3 \cap \mathcal{R}_4$, onde:

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}_1 : x^2 + y^2 < 4\,, \\ &\mathcal{R}_2 : x^2 + y^2 \geq 2\,, \\ &\mathcal{R}_3 : x + |y| \geq 2\,, \\ &\mathcal{R}_4 : x \geq 1. \end{aligned}$$

Determinando $\mathcal{R}_1$.

Note que $C_1 : x^2 + y^2 = 4$, é o círculo de centro na origem e raio 2. Os pontos que satisfazem a primeira inequação são os pontos interiores a esse círculo.

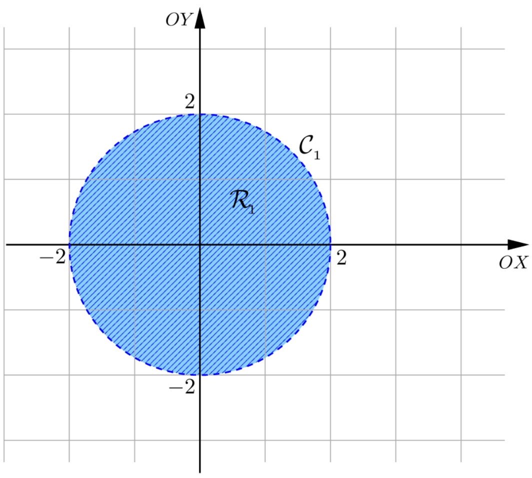

Fig. 4: Região $\mathcal{R}_1$.

Determinando $\mathcal{R}_2$.

Note que $C_2 : x^2 + y^2 = 2$, é o círculo de centro na origem e raio $\sqrt{2}$. Os pontos que satisfazem a segunda inequação são os pontos exteriores a esse círculo, incluindo o próprio círculo.

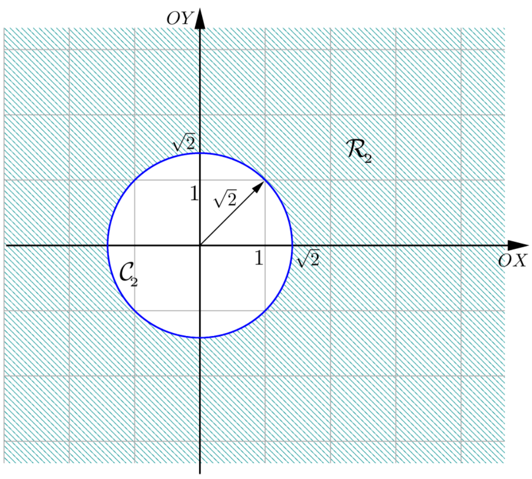

Fig. 5: Região $\mathcal{R}_2$.

Determinando $\mathcal{R}_3$.

Como $\mathcal{R}_3 : |y| \geq 2 - x$ e $|y| = \begin{cases} y\,, & \text{se } y \geq 0 \\ -y\,, & \text{se } y \leq 0 \end{cases}$, temos que $\mathcal{R}_3$ é a união de duas regiões S_1 e S_2:

• a região S_1 que é a interseção do semi-plano $(y \geq 0)$ com o semi-plano acima da reta $x + y = 2$:

$$S_1 = \{P = (x, y) \mid y \geq 0 \text{ e } x + y \geq 2\}.$$

• a região S_2 que é a interseção do semi-plano $(y \leq 0)$ com o semi-plano abaixo da reta $x - y = 2$:

$$S_2 = \{P = (x, y) \mid y \leq 0 \text{ e } x - y \geq 2\}\,.$$

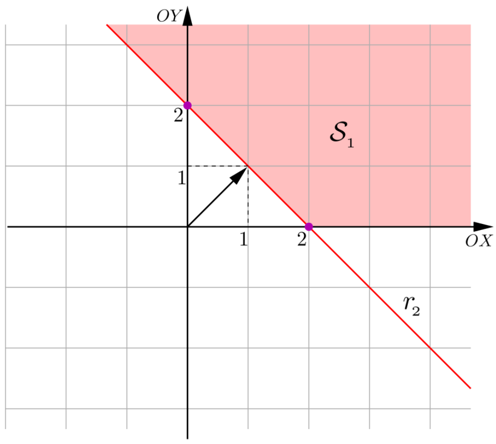

Fig. 6: Região S_1.

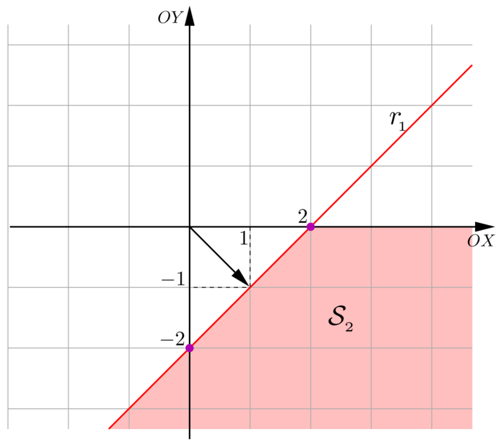

Fig. 7: Região S_2.

A região $\mathcal{R}_3$ é a união das regiões S_1 e S_2, como mostra a figura abaixo.

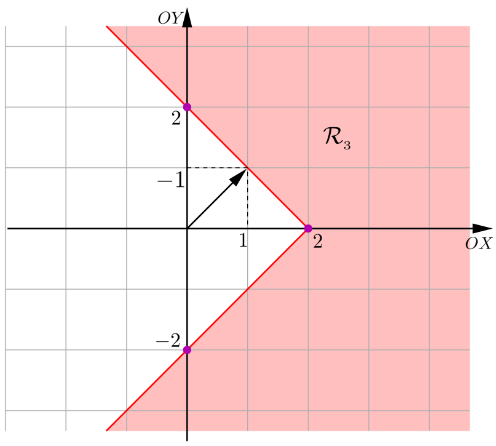

Fig. 8: Região $\mathcal{R}_3$.

Determinando $\mathcal{R}_4$.

A região $\mathcal{R}_4$ consiste dos pontos $P = (x, y)$, com $x \geq 1$, isto é, dos pontos à direita da reta vertical $x = 1$.

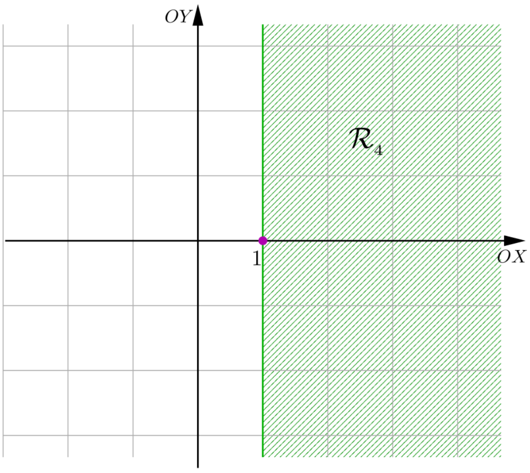

Fig. 9: Região $\mathcal{R}_4$.

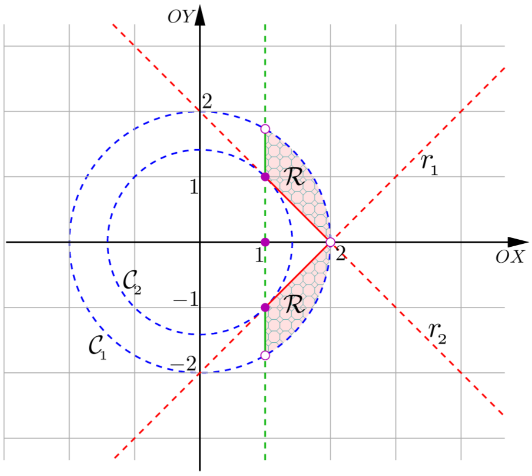

Fig. 10: Região $\mathcal{R}$.

Determinando $\mathcal{R}$.

Finalmente, a região $\mathcal{R}$ procurada é a interseção das quatro regiões anteriores. □

Exemplo 5

Seja $ABDC$ um paralelogramo tal que $A \in r_1$, $B \in r_2$, $C = (2,3)$, $\overrightarrow{CD}$ é múltiplo do vetor $(1,4)$ e $\overrightarrow{AC} \perp r_3$, onde

$$r_1 : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t + 3 \end{cases} ; \, t \in \mathbb{R}, \quad r_2 : \begin{cases} x = -5s + 3 \\ y = 4s - 1 \end{cases} ; \, s \in \mathbb{R}, \quad r_3 : 2x - 3y = 6.$$

Determine os vértices A, B e D, e calcule a área do paralelogramo.

Solução.

Sendo $\overrightarrow{AC} \perp r_3$ e $r_3 \perp (2,-3)$, temos $\overrightarrow{AC} \parallel (2,-3)$, ou seja,

$$\det \begin{pmatrix} \overrightarrow{AC} \\ (2,-3) \end{pmatrix} = 0.$$

Como $A \in r_1$, temos, para algum $t \in \mathbb{R}$, $A = (t+1, -2t+3)$ e

$$\overrightarrow{AC} = (2 - (t+1), 3 - (-2t+3)) = (1-t, 2t).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{AC}\\(2,-3)\end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix}1-t & 2t\\ 2 & -3\end{pmatrix} = -3(1-t)-2(2t)\\ &= -3+3t-4t = -3-t = 0 \Longrightarrow t=-3\,.\end{aligned}$$

Portanto,

$$A=(t+1,-2t+3)=(-3+1,-2(-3)+3)=(-2,6+3)=(-2,9).$$

Como $ABDC$ é um paralelogramo, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, e sendo $\overrightarrow{CD}$ múltiplo de $(1,4)$,

$$\overrightarrow{CD} = k(1,4)=(k,4k), \qquad (\star)$$

para algum $k \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, $B \in r_2 \Longrightarrow B = (-5s+3, 4s-1)$, para algum $s \in \mathbb{R}$.

Logo $\overrightarrow{AB} = (-5s+3-(-2), 4s-1-9) = (-5s+5, 4s-10)$.

Sabendo que dois vetores são iguais se, e somente se, as suas correspondentes coordenadas são iguais, temos:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow \begin{cases} -5s+5=k\\ 4s-10=4k\,. \end{cases}$$

Substituindo k da primeira equação na segunda, obtemos

$$4s-10=-20s+20 \Longrightarrow 24s=30 \Longrightarrow s=\frac{30}{24}=\frac{5}{4} \Longrightarrow k=-5\times\frac{5}{4}+5=-\frac{5}{4}.$$

Se $D=(x,y)$, temos, por $(\star)$, que

$$\overrightarrow{CD} = (x-2, y-3) = \left(-\frac{5}{4}, 4\left(-\frac{5}{4}\right)\right) = \left(-\frac{5}{4}, -5\right).$$

Assim, $D=(x,y)=\left(-\frac{5}{4}+2, -5+3\right)=\left(\frac{3}{4},-2\right)$.

Também, se $B=(x',y')$, temos $\overrightarrow{AB} = (x'-(-2), y'-9) = \left(-\frac{5}{4},-5\right)$.

Logo $x'=-2-\frac{5}{4}=-\frac{13}{4}$ e $y'=9-5=4$. Isto é, $B=\left(-\frac{13}{4},4\right)$.

Calculemos, agora, a área do paralelogramo $ABDC$.

Como $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{5}{4}, -5\right)$ e $\overrightarrow{AC} = (2-(-2), 3-9) = (4,-6)$, temos:

$$\begin{aligned}\text{Área}\,(ABDC) &= \left|\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}\end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}-\frac{5}{4} & -5\\ 4 & -6\end{pmatrix}\right|\\ &= \left|\frac{30}{4}+20\right| = \frac{110}{4} = \frac{55}{2}\,. \;\square\end{aligned}$$

Exemplo 6

Considere os pontos $E = (1,6)$, $F = (2,3)$ e as retas r_1 e r_2 dadas por:

$$r_1 : \begin{cases} x = 2t-1\\ y = 5t+1\end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R} \qquad e \qquad r_2 : 3x - y = 3\,.$$

Determine os pontos A, B, G e D, tais que DE seja a projeção ortogonal do segmento AB sobre a reta r_1 e FG seja a projeção ortogonal do segmento AB sobre a reta r_2, sabendo-se que $\overrightarrow{AB} = (1,2)$.

Solução.

Sendo DE a projeção ortogonal de AB sobre r_1, o ponto B deve ser projetado no ponto E e sendo FG a projeção ortogonal de AB sobre r_2, o ponto A deve ser projetado no ponto F.

Seja s_1 a reta perpendicular a r_1 que passa por E. Então $B \in s_1$.

Determinemos as equações paramétricas de s_1.

Como $r_1 \parallel (2,5)$, então $s_1 \perp (2,5)$.

Logo $s_1 \parallel (5,-2)$ e, sendo $E = (1,6) \in s_1$, temos:

$$s_1 : \begin{cases} x = 5t+1\\ y = -2t+6\end{cases} ; \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Em particular, $B \in s_1 \Longrightarrow B = (5t+1, -2t+6)$, para algum $t \in \mathbb{R}$.

Analogamente, seja s_2 a reta que passa por F e é perpendicular a r_2. Então $A \in s_2$.

Determinemos as equações paramétricas de s_2.

Sendo $s_2 \perp r_2$ e $r_2 \perp (3,-1)$, temos $s_2 \parallel (3,-1)$.

Logo, como $F = (2,3) \in s_0$, temos:

$$s_2 : \begin{cases} x = 3s + 2 \\ y = -s + 3 \end{cases} ; \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Como $A \in s_2$, devemos ter $A = (3s + 2, -s + 3)$, para algum $s \in \mathbb{R}$.

Por hipótese, $\overrightarrow{AB} = (1,2)$. Logo:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= ((5t+1) - (3s+2), (-2t+6) - (-s+3)) \\ &= (5t - 3s - 1, -2t + s + 3) = (1,2). \end{aligned}$$

Essa identidade nos permite calcular os valores dos parâmetros t e s:

$$\begin{cases} 5t - 3s - 1 = 1 \\ -2t + s + 3 = 2\,, \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} 5t - 3s = 2 \\ -2t + s = -1\,. \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por 3 e somando com a primeira, obtemos $-t = -1 \equiv t = 1$. Substituindo na segunda equação, concluímos que $s = 2(1) - 1 = 1$.

Portanto,

$A = (3(1) + 2, -1 + 3) = (5,2)$ e $B = (5(1) + 1, -2(1) + 6) = (6,4)\,.$

Para achar o ponto $D \in r_1$ tal que DE é a projeção ortogonal de AB sobre r_1, precisamos determinar a reta s_3 perpendicular a r_1 que passa por A. O ponto D é a interseção de s_3 com r_1.

Como $s_3 \perp r_1$ e $r_1 \parallel (2,5)$, a equação de s_3 é da forma: $s_3 : 2x + 5y = c$. Como $A = (5,2) \in s_3$, devemos ter $c = 2(5) + 5(2) = 20$. Portanto,

$$s_3 : 2x + 5y = 20\,.$$

Intersectar r_1 com s_3 significa achar o ponto $(2t - 1, 5t + 1) \in r_1$ que pertence a s_3, ou seja, achar o valor de t para o qual as coordenadas desse ponto satisfazem a equação de s_3:

$$\begin{aligned} 2(2t-1) + 5(5t+1) = 20 &\implies 4t - 2 + 25t + 5 = 20 \\ &\implies 29t = 17 \implies t = \frac{17}{29}\,. \end{aligned}$$

Esse valor de t é o parâmetro do ponto D na reta

$$r_1 : D = \left(2\,\frac{17}{29} - 1, 5\,\frac{17}{29} + 1\right) = \left(\frac{5}{29}, \frac{114}{29}\right).$$

Finalmente, o ponto G é o ponto de interseção de r_2 com a sua perpendicular s_4 que passa por $B = (6,4)$.

Como $s_4 \perp r_2$ e $r_2 \perp (3,-1)$, temos $s_4 \parallel (3,-1)$. Logo,

$$s_4 : \begin{cases} x = 6 + 3s \\ y = 4 - s \end{cases} ; \quad s \in \mathbb{R},$$

pois $B = (6,4) \in s_4$.

Calculemos o valor do parâmetro s de modo que o ponto

$$G = (6 + 3s, 4 - s) \in s_4$$

satisfaça a equação de r_2:

$$\begin{aligned} 3(6 + 3s) - (4 - s) = 3 \quad &\Longrightarrow \quad 18 + 9s - 4 + s = 3 \\ &\Longrightarrow \quad 10s = -11 \Longrightarrow s = -\frac{11}{10}. \end{aligned}$$

Portanto, $G = \left(6 - 3\,\frac{11}{10}, 4 + \frac{11}{10}\right) = \left(\frac{27}{10}, \frac{51}{10}\right)$. □

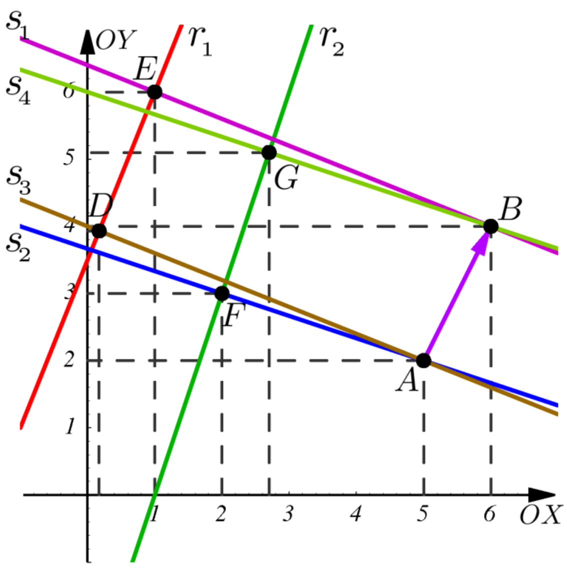

Fig. 11: $r_1 \perp s_1$, $r_1 \perp s_3$, $r_2 \perp s_2$ e $r_2 \perp s_4$.