Capítulo 9

1. Coordenadas no Espaço

Seja $\mathcal{E}$ o espaço da Geometria Euclidiana tri-dimensional.

Um **sistema de eixos ortogonais** $OXYZ$ em $\mathcal{E}$ consiste de três eixos ortogonais entre si OX, OY e OZ com a mesma origem O (figura 1).

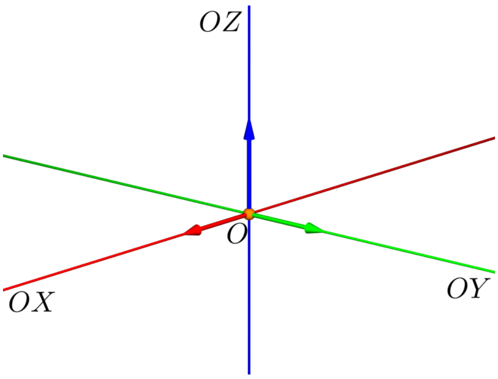

Fig. 1: Sistema de eixos ortogonais no espaço.

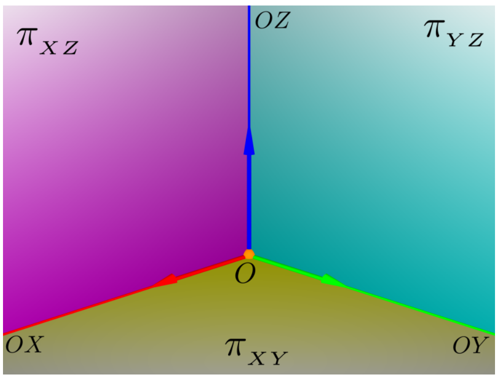

Fig. 2: Planos cartesianos no espaço.

Tendo estabelecido um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço $\mathcal{E}$, os **planos cartesianos** são (figura 2):

- π_{XY}: plano que contém os eixos OX e OY.
- π_{XZ}: plano que contém os eixos OX e OZ.
- π_{YZ}: plano que contém os eixos OY e OZ.

Um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço $\mathcal{E}$ permite estabelecer uma correspondência entre os pontos de $\mathcal{E}$ e os ternos ordenados de números reais (x, y, z), de modo que a cada ponto corresponde exatamente um terno ordenado de números reais e a cada terno ordenado de números reais corresponde exatamente um ponto de $\mathcal{E}$.

Assim, se P está em correspondência com o terno (x, y, z), dizemos que x, y e z são as **coordenadas de P em relação ao sistema de eixos ortogonais $OXYZ$**. Essas coordenadas são obtidas da seguinte forma:

- **coordenada x:** coordenada no eixo OX do ponto de intersecção desse eixo com o plano π' que passa pelo ponto P e é paralelo ao plano π_{YZ}.
- **coordenada y:** coordenada no eixo OY do ponto de intersecção desse eixo com o plano π'' que passa pelo ponto P e é paralelo ao plano π_{XZ}.
- **coordenada z:** coordenada no eixo OZ do ponto de intersecção desse eixo com o plano π''' que passa pelo ponto P e é paralelo ao plano π_{XY}.

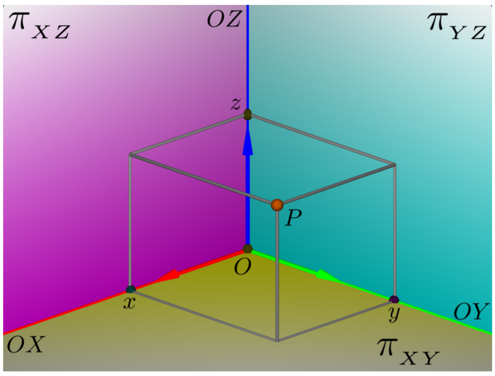

Fig. 3: Coordenadas do ponto P no espaço.

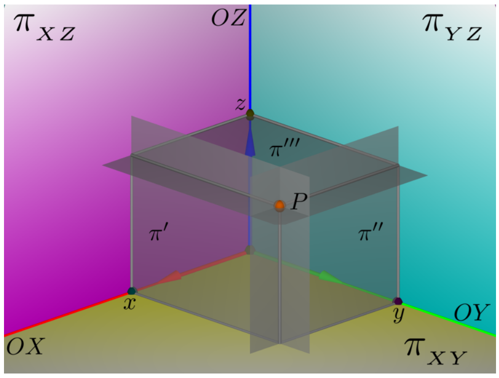

Fig. 4: Determinando as coordenadas do ponto P.

Uma vez escolhido um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço $\mathcal{E}$, todo ponto $P \in \mathcal{E}$ é identificado pelas suas coordenadas (x, y, z) em relação a esse sistema de eixos e escrevemos:

$$\boxed{P = (x, y, z)}$$

Com essa identificação, observamos que:

- a origem do sistema de eixos ortogonais é o ponto $O = (0, 0, 0)$.
- os eixos do sistema são os conjuntos:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{eixo}-OX &= \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ \text{eixo}-OY &= \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ \text{eixo}-OZ &= \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}}$$

• os planos cartesianos são os conjuntos:

$$\pi_{XY} = \{(x,y,0)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}, \quad \text{ou seja,} \quad \pi_{XY} : z = 0$$
$$\pi_{XZ} = \{(x,0,z)\,|\,x,z\in\mathbb{R}\}, \quad \text{ou seja,} \quad \pi_{XZ} : y = 0$$
$$\pi_{YZ} = \{(0,y,z)\,|\,y,z\in\mathbb{R}\}, \quad \text{ou seja,} \quad \pi_{YZ} : x = 0$$

Fixado um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, obtém-se um **sistema de coordenadas cartesianas** no espaço $\mathcal{E}$ que permite descrever todos os subconjuntos do espaço por meio de suas coordenadas. Por exemplo, vejamos como caracterizar outros planos por meio de equações que envolvem as coordenadas dos pontos neles contidos.

Definição 1

• *Um plano π é chamado* **horizontal** *quando coincide ou é paralelo ao plano π_{XY}.*

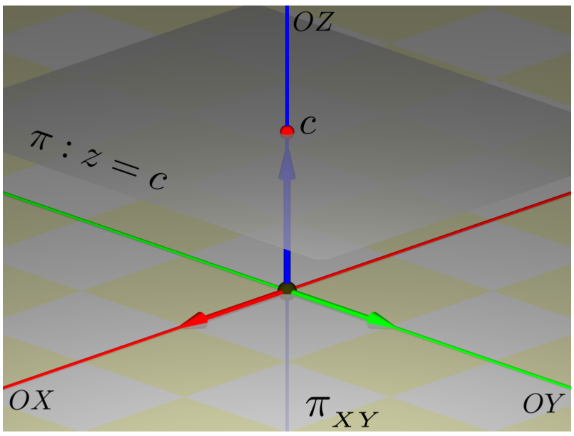

Fig. 5: Plano π horizontal, paralelo ao plano π_{XY}.

Se $c\in\mathbb{R}$ é a terceira coordenada do único ponto onde π intersecta o eixo$-OZ$, qualquer ponto $P\in\pi$ terá a sua terceira coordenada igual a c, ou seja,

$$\boxed{\pi = \{P\in\mathcal{E}\,|\,P=(x,y,c)\}}$$

Assim, descrevemos o plano π pela equação:

$$\boxed{\pi : z = c}$$

• *Analogamente, os planos paralelos aos planos π_{XZ} e π_{YZ} são dados,* *respectivamente, por equações da forma $y = b$ e $x = a$, com $b \neq 0$ e $a \neq 0$.*

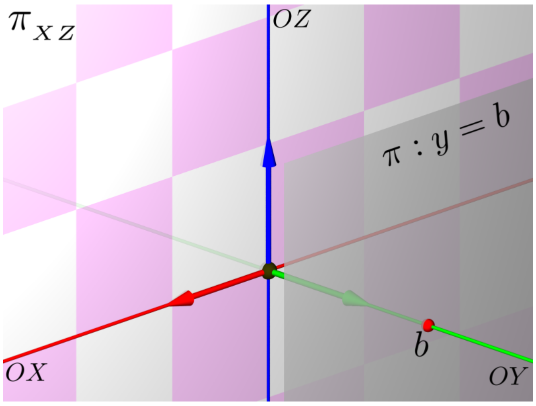

Fig. 6: Plano $\pi : y = b$, $b \neq 0$, paralelo ao plano π_{XZ}.

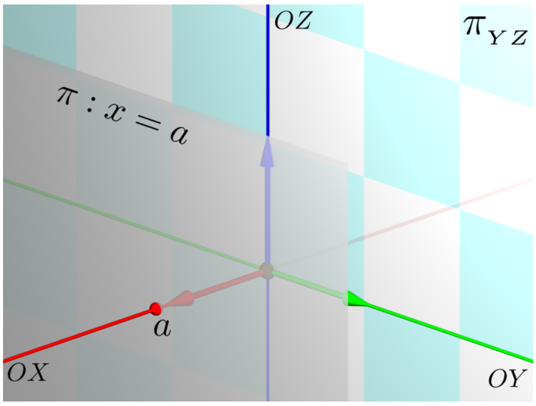

Fig. 7: Plano $\pi : x = a$, $a \neq 0$, paralelo ao plano π_{YZ}.

Observação 1

Uma reta r no espaço que é paralela a um dos eixos coordenados intersecta o plano complementar em apenas um ponto. As coordenadas desse ponto determinam as coordenadas de todos os pontos da reta r.

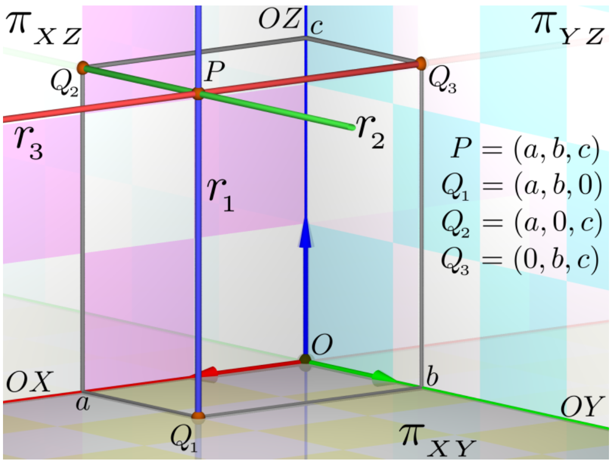

Fig. 8: Retas r_1, r_2 e r_3 paralelas aos eixos coordenados.

Por exemplo, sejam r_1 uma reta paralela ao eixo OZ e $r_1 \cap \pi_{XY} = \{Q_1\}$. Se $Q_1 = (a, b, 0)$, então qualquer outro ponto $Q = (x, y, z) \in r_1$ satisfaz: $x = a$, $y = b$ e $z \in \mathbb{R}$ (veja a figura 9).

Portanto, as equações da reta r_1 são $r_1 : \begin{cases} x = a \\ y = b. \end{cases}$

Definição 2

Um plano π é chamado **vertical** *quando contém ou é paralelo ao eixo$-OZ$. Isto é, π é um plano vertical se, e somente se,*

$$\text{eixo}-OZ \subset \pi \qquad \text{ou} \qquad \text{eixo}-OZ \cap \pi = \emptyset.$$

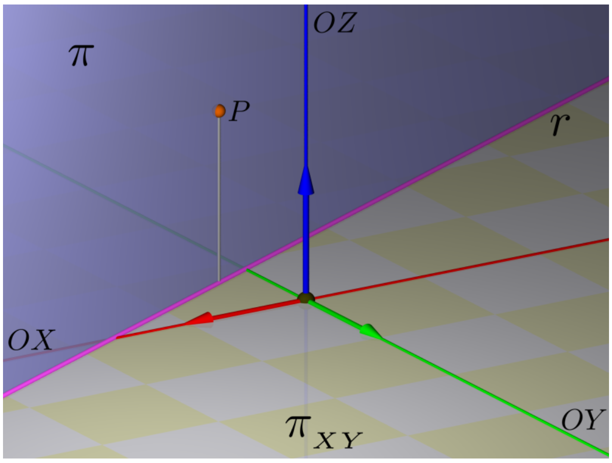

Fig. 9: Plano π paralelo ao plano π_{XY} e $r = \pi \cap \pi_{XY}$.

Por exemplo, os planos $\pi : x = a$, $a \in \mathbb{R}$, assim como os planos $\pi : y = b$, $b \in \mathbb{R}$, são planos verticais.

Um plano vertical π intersecta o plano π_{XY} ao longo de uma reta r. A reta r, vista exclusivamente no plano $\pi_{XY} : z = 0$, é dada por uma equação da forma $\alpha x + \beta y = d$.

Mas, no espaço, a reta $r = \pi \cap \pi_{XY}$ é dada por duas equações:

$$r : \begin{cases} \alpha x + \beta y = d \\ z = 0\,. \end{cases}$$

Ou seja, um ponto pertence à reta r se, e somente se, as suas coordenadas satisfazem, simultaneamente, as duas equações acima.

Por outro lado, como a direção do eixo-OZ é parelela ao plano π, π é formado pela união das retas paralelas ao eixo-OZ que passam por um ponto de r.

Portanto, pela Observação 1,

$$\begin{aligned} \pi &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,0) \in r \ \text{ e } \ z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha x + \beta y = d\}\,. \end{aligned}$$

Por causa disso, dizemos que a equação do plano π é dada por:

$$\boxed{\pi : \alpha\, x + \beta\, y = d}$$

Observação 2

Não confunda! *No espaço, uma equação da forma $\alpha x + \beta y = d$ representa um plano vertical, enquanto que, no plano de coordenadas XY, essa equação representa uma reta.*

Procedendo de forma análoga com os outros dois eixos, concluímos que as equações dos planos paralelos aos eixos coordenados são:

$$\boxed{\begin{array}{l} \pi \parallel \text{eixo} - OX \iff \pi : \beta y + \gamma z = d, \text{ onde } \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \text{ e } \beta^2 + \gamma^2 \neq 0; \\ \pi \parallel \text{eixo} - OY \iff \pi : \alpha x + \gamma z = d, \text{ onde } \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \text{ e } \alpha^2 + \gamma^2 \neq 0; \\ \pi \parallel \text{eixo} - OZ \iff \pi : \alpha x + \beta y = d, \text{ onde } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{ e } \alpha^2 + \beta^2 \neq 0. \end{array}}$$

2. Distância entre dois pontos do espaço

Sejam $P = (a, b, c)$ e $Q = (a', b', c')$ dois pontos no espaço $\mathcal{E}$. Começamos observando que, se P e Q estão sobre uma reta paralela a um dos eixos coordenados, então eles têm duas coordenadas iguais e a distância entre eles é o módulo da diferença das coordenadas diferentes.

Suponhamos que P e Q não estão numa reta paralela a um dos eixos coordenados.

Para o cálculo da **distância** de P a Q são considerados os pontos auxiliares (figura 10):

$$R = (a, b, c'),\ \ S = (a, b, 0),\ \ T = (a', b', 0)\ \text{ e }\ U = (a', b, 0).$$

Pela observação feita anteriormente,

$$d(S, U) = |a' - a| \ \text{ e } \ d(U, T) = |b' - b|.$$

Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $\triangle SUT$, obtemos:

$$d(S, T)^2 = d(S, U)^2 + d(U, T)^2 = |a' - a|^2 + |b' - b|^2 = (a' - a)^2 + (b' - b)^2.$$

Os segmentos ST e RQ são lados opostos de um retângulo. Logo,
$$d(R,Q)^2 = d(S,T)^2 = (a'-a)^2 + (b'-b)^2\,.$$

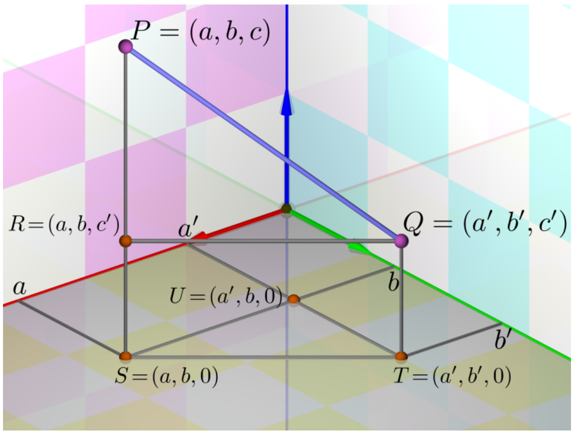

Fig. 10: Os triângulos $\triangle PRQ$ e $\triangle SUT$ são retângulos e o quadrilátero $RSTQ$ é um retângulo.

Além disso, $d(P,R) = |c'-c|$, pois os pontos P e R estão sobre uma reta paralela ao eixo OZ.

Portanto, como o triângulo $\triangle PRQ$ é retângulo,
$$d(P,Q)^2 = d(P,R)^2 + d(R,Q)^2 = |c'-c|^2 + (a'-a)^2 + (b'-b)^2\,.$$

Assim, a distância de P a Q é:

$$\boxed{d(P,Q) = \sqrt{(a'-a)^2 + (b'-b)^2 + (c'-c)^2}}$$

Definição 3

A esfera $\mathcal{S}$ de centro no ponto C e raio $r > 0$ *é o conjunto dos pontos $P \in \mathcal{E}$ cuja distância ao centro C é igual a r:*

$$\boxed{\mathcal{S} = \{P \in \mathcal{E} \mid d(P,C) = r\}}$$

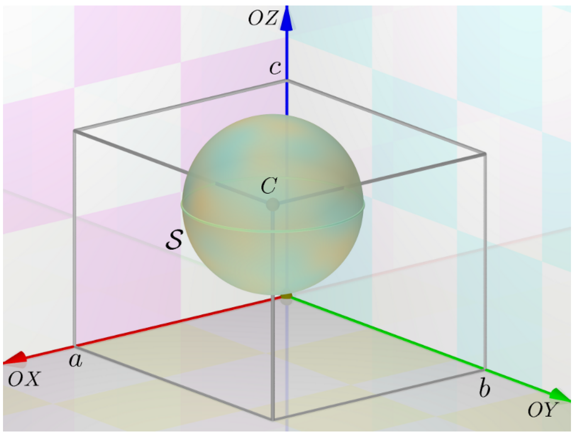

Fig. 11: Esfera de centro $C = (a,b,c)$ e raio r.

Sejam $C = (a,b,c)$ e $P = (x,y,z) \in \mathcal{S}$ as expressões do centro C de $\mathcal{S}$ e de um ponto genérico $P \in \mathcal{S}$ em relação ao sistema de eixos ortogonais $OXYZ$.

Então $P \in S \iff d(P,C) = r \iff \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r$.

Elevando ao quadrado ambos os lados dessa última identidade obtemos a equação da esfera S no sistema $OXYZ$:

$$\boxed{S : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2}$$

Exemplo 1

Mostre, completando os quadrados, que a equação de segundo grau

$$z^2 + x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6z = 1,$$

representa uma esfera S. Determine o centro e o raio de S.

Solução.
Completando os quadrados na equação, temos:

$$\begin{aligned}
& z^2 + x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6z = 1 \\
\iff\ & (x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) + (z^2 - 6z) = 1 \\
\iff\ & (x^2 - 2x+1) + (y^2 + 4y+4) + (z^2 - 6z+9) = 1+1+4+9 \\
\iff\ & (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 15.
\end{aligned}$$

Portanto, S é a esfera de centro $C = (1, -2, 3)$ e raio $r = \sqrt{15}$. □

Observação 3

A esfera

$$S : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

de centro no ponto $C = (a, b, c)$ e raio $r > 0$ divide o espaço $\mathcal{E}$ em duas partes que têm por bordo comum a esfera. Essas partes são:

- *o* **interior** *da esfera S:*

  $B(C, r) = \{P = (x, y, z) \in \mathcal{E} \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 < r^2\}$

- *o* **exterior** *da esfera S:*

  $\{P = (x, y, z) \in \mathcal{E} \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 > r^2\}$

O interior $B(C, r)$ é chamado também **bola aberta** *de centro C e raio $r > 0$.*

Exemplo 2

Ponto médio de um segmento no espaço. *Determinar as coordenadas do ponto médio do segmento que liga os pontos* $A = (a, b, c)$ *e* $B = (a', b', c')$.

Solução.
Na figura 12 mostramos um segmento AB genérico e o seu ponto médio $M = (m_a, m_b, m_c)$. Por hipótese, $d(A, M) = d(M, B)$, ou seja, $AM \simeq MB$.

Apelando para o critério ALA de congruência de triângulos, temos $\triangle ACM \simeq \triangle MDB$. Em particular, $CM \simeq DB$. Logo, $FG \simeq CM \simeq DB \simeq GH$.

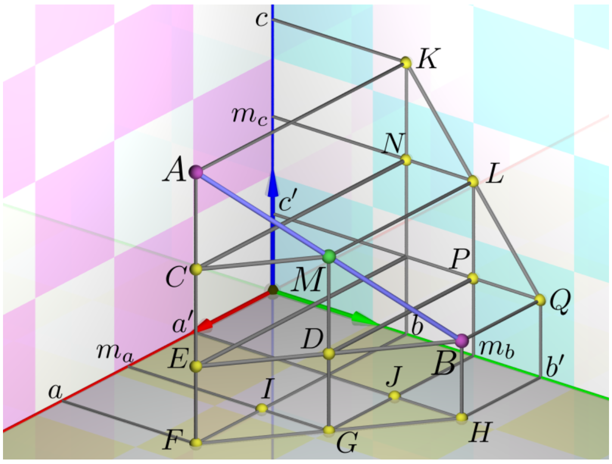

Fig. 12: Ponto médio de um segmento no espaço.

Aplicando de novo o critério ALA, vemos que os triângulos $\triangle FIG$ e $\triangle GJH$ são congruentes.

Em particular, $FI \simeq GJ$ e, portanto, $m_a = \dfrac{a + a'}{2}$.

Analogamente, $IG \simeq JH$; donde, $m_b = \dfrac{b + b'}{2}$.

Também da congruência $\triangle ACM \simeq \triangle MDB$ obtemos:

$$KN \simeq AC \simeq MD \simeq LP.$$

Logo $m_c = \dfrac{c + c'}{2}$, e o ponto médio M do segmento AB tem coordenadas:

$$\boxed{M = (m_a, m_b, m_c) = \left(\frac{a + a'}{2}, \frac{b + b'}{2}, \frac{c + c'}{2}\right)} \quad \square$$

Exemplo 3

Determinar o conjunto

$$\mathcal{M} = \{P \in \mathcal{E} \mid d(P, A) = d(P, B)\},$$

dos pontos que são equidistantes de dois pontos distintos A e B do espaço.

Solução.

Note que o ponto médio M do segmento AB pertence ao conjunto $\mathcal{M}$.

Consideremos, agora, um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço tal que M seja a origem ($M = O$) e o segmento AB esteja contido no eixo OX, com A à direita de B.

Com essa escolha, as coordenadas dos pontos A e B são da forma: $A = (r, 0, 0)$ e $B = (-r, 0, 0)$, para algum número real $r > 0$.

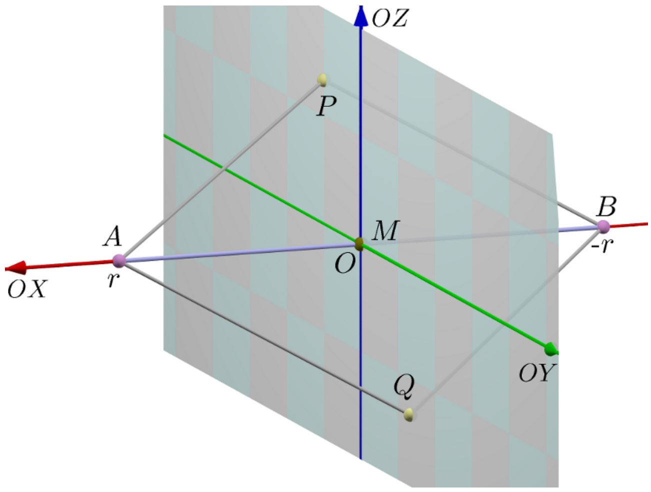

Fig. 13: Pontos equidistantes de dois pontos dados.

Assim:

$$\begin{aligned}
& P = (x, y, z) \in \mathcal{M} \\
\iff\ & d(A, P) = d(B, P) \iff d(A, P)^2 = d(B, P)^2 \\
\iff\ & (x - r)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = (x - (-r))^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 \\
\iff\ & x^2 - 2xr + r^2 = x^2 + 2xr + r^2 \iff -2xr = 2xr \iff 4xr = 0 \\
\iff\ & x = 0 \text{ (pois } r \neq 0) \iff P = (0, y, z) \in \pi_{YZ}\,.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{M} = \pi_{YZ}$. Portanto, o conjunto $\mathcal{M}$ é o plano perpendicular ao segmento AB que passa pelo ponto médio desse segmento. □

3. Vetores no espaço

Vamos agora abordar a noção de vetores no espaço. A definição é a mesma dada no plano, assim como as principais propriedades, salvo alguns acréscimos.

Para definir a relação de equipolência no espaço, começamos observando que duas retas são paralelas quando estão contidas no mesmo plano e não se intersectam.

De fato, há situações em que duas retas no espaço não se intersectam, mas não são paralelas. Pense, por exemplo, em duas ruas, sendo que uma delas é um viaduto que passa por cima da outra transversalmente!

Definição 4

Os segmentos orientados AB e CD no espaço são **equipolentes**, *e escrevemos $AB \equiv CD$, quando satisfazem as seguintes condições:*

- *AB e CD têm igual comprimento: $|AB| = d(A,B) = d(C,D) = |CD|$.*
- *AB e CD estão contidos em retas paralelas ou na mesma reta.*
- *AB e CD têm o mesmo sentido.*

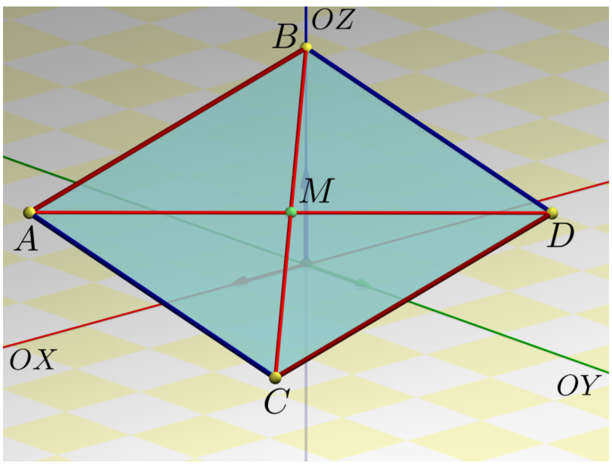

Fig. 14: Paralelogramo $ABDC$ no espaço, $AB \equiv CD$.

A terceira propriedade significa, no caso em que A, B, C e D não são colineares, que $ABDC$ é um paralelogramo contido no plano que contém os pontos A, B, C e D.

Da mesma forma como foi feito no plano, se demonstra que

$$\boxed{AB \equiv CD \iff \text{o ponto médio de } AD \text{ coincide com o ponto médio de } BC}$$

A relação de equipolência entre segmentos do espaço é uma **relação de equivalência**, isto é, satisfaz as seguintes propriedades:

1. Reflexividade: Todo segmento é equipolente a si próprio: $AB \equiv AB$.

2. Simetria: Se $AB \equiv CD$, então $CD \equiv AB$.

3. Transitividade: Se $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF$, então $AB \equiv EF$.

Estas propriedades são verificadas usando a Proposição 1 abaixo.

Por causa disso, podemos dividir o conjunto de todos os segmentos orientados do espaço em subconjuntos especiais, chamados **classes de equivalência pela relação de equipolência**, ou simplesmente, **classes de equipolência**. Cada classe de equipolência é denominada um **vetor** do espaço.

Usamos a mesma notação adotada para vetores no plano $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ para designar o conjunto de todos os segmentos orientados que são equipolentes ao segmento AB:

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \{CD \mid AB \equiv CD\}}$$

Note que,

$$\boxed{AB \equiv CD \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}}$$

Também, como no plano, o vetor representado por um segmento cuja origem é igual à extremidade é chamado **vetor nulo** ou **vetor zero**:

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \ldots.$$

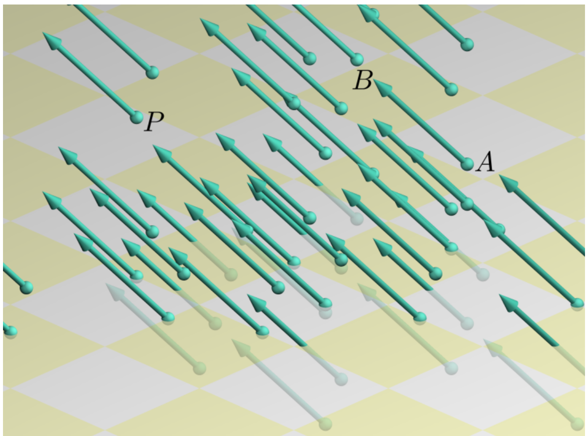

Fig. 15: Ponto P é origem de um representante de $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$.

Além disso, todo ponto P do espaço é a origem de um segmento orientado representante de um vetor dado $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ qualquer (figura 15).

Ou seja, dado um vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e um ponto $P \in \mathcal{E}$, existe um único ponto $Q \in \mathcal{E}$ tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$.

Para verificar essa propriedade, quando A, B e P não são colineares, basta considerar um plano que contém os pontos A, B e P. Nesse plano, o problema de determinar o ponto Q já foi resolvido quando foram estudados os vetores no plano.

Notação: Dado o ponto P no espaço e o vetor $\overrightarrow{v}$, designamos o único ponto do espaço tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$ como:

$$\boxed{Q = P + \overrightarrow{v}}$$

Proposição 1

Seja $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais e sejam $A = (a, b, c)$, $B = (a', b', c')$, $C = (x, y, z)$ e $D = (x', y', z')$ pontos do espaço.

Então os segmentos AB e CD são equipolentes se, e somente se,

$$a' - a = x' - x\,, \quad b' - b = y' - y \text{ e } c' - c = z' - z\,.$$

Prova.

Como $AB \equiv CD$ se, e somente se, o ponto médio M_{AD} coincide com o ponto médio M_{BC}, ou seja, se, e só se:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a+x'}{2}, \frac{b+y'}{2}, \frac{c+z'}{2}\right) = \left(\frac{a'+x}{2}, \frac{b'+y}{2}, \frac{c'+z}{2}\right)\\
\iff\ & \frac{a+x'}{2} = \frac{a'+x}{2}\,, \quad \frac{b+y'}{2} = \frac{b'+y}{2} \quad \text{e} \quad \frac{c+z'}{2} = \frac{c'+z}{2}\\
\iff\ & a + x' = a' + x\,, \quad b + y' = b' + y \quad \text{e} \quad c + z' = c' + z\\
\iff\ & a' - a = x' - x\,, \quad b' - b = y' - y \quad \text{e} \quad c' - c = z' - z\,,
\end{aligned}$$

generalizando, assim, o resultado já conhecido no plano. ■

Definição 5

*Sejam $A = (a, b, c)$ e $B = (a', b', c')$ pontos do espaço. Os números reais $a' - a$, $b' - b$ e $c' - c$ são as **coordenadas** do vetor $\overrightarrow{AB}$ no sistema de* *eixos $OXYZ$, ou seja, o vetor $\overrightarrow{AB}$, em coordenadas, é representado por:*

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (a' - a, b' - b, c' - c)}$$

Observação 4

• *Pela proposição anterior, as coordenadas de um vetor podem ser calculadas usando qualquer segmento representante do vetor.*

• *Em particular, dado um vetor $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$, o ponto $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ satisfaz*

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}.$$

O vetor $\overrightarrow{OP}$ é chamado o **representante na origem** *do vetor $\overrightarrow{v}$.*

Exemplo 4

Sejam $A = (1, 4, 0)$, $B = (-1, 1, -1)$ e $C = (3, 5, -10)$. Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, do ponto D tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$, e do ponto P tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$.

Solução.

Temos $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (-1-1, 1-4, -1-0) = (-2, -3, -1)$.

Seja $D = (x, y, z)$ o ponto procurado.

Temos que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff AB \equiv CD$. Portanto, pela proposição anterior:

$$-1 - 1 = x - 3, \quad 1 - 4 = y - 5 \quad -1 - 0 = z - (-10),$$

ou seja, $x = 1$, $y = 2$ e $z = -11$. Assim, $D = (1, 2, -11)$.

E pela observação acima, o ponto P tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$ é $(-2, -3, -1)$. $\square$