Aula 1

Equações paramétricas das cônicas

Ao estudarmos as retas no plano, vimos que a reta r que passa por dois pontos distintos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ é dada pelas seguintes equações paramétricas:

$$r : \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

Essas equações expressam os valores das coordenadas cartesianas x e y de um ponto qualquer da reta r em função de apenas uma variável, a variável t, denominada parâmetro. As retas não são as únicas curvas planas que podem ser representadas por equações paramétricas.

Definição 1

Seja $\mathcal{C}$ uma curva plana. Dizemos que uma aplicação $\gamma : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, é uma parametrização de $\mathcal{C}$ se a sua imagem $\gamma(D)$ coincide com $\mathcal{C}$, ou seja,

$$\mathcal{C} = \gamma(D) = \{(x(t), y(t)) \,|\, t \in D\},$$

onde D é um subconjunto de $\mathbb{R}$ (geralmente um intervalo ou uma reunião finita de intervalos).

A imagem $\gamma(D) \subset \mathbb{R}^2$ é também chamada o traço de γ.

Parametrização de um círculo

Seja $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = r^2$ o círculo de centro na origem e raio $r > 0$.

Seja t a medida, em radianos, do ângulo $\widehat{P_0OP}$ (tomada no sentido anti-horário), onde O é a origem do sistema cartesiano de coordenadas, $P_0 = (r, 0)$ é a interseção do círculo com o semi-eixo positivo OX e $P = (x, y)$ é um ponto pertencente a $\mathcal{C}$.

Considere o ponto $P' = (x, 0)$. Como o triângulo OPP' é retângulo em P', as expressões das coordenadas x e y, em função do parâmetro t, são:

$$\boxed{x = x(t) = r\cos t \quad \text{e} \quad y = y(t) = r\,\text{sen}\, t}$$

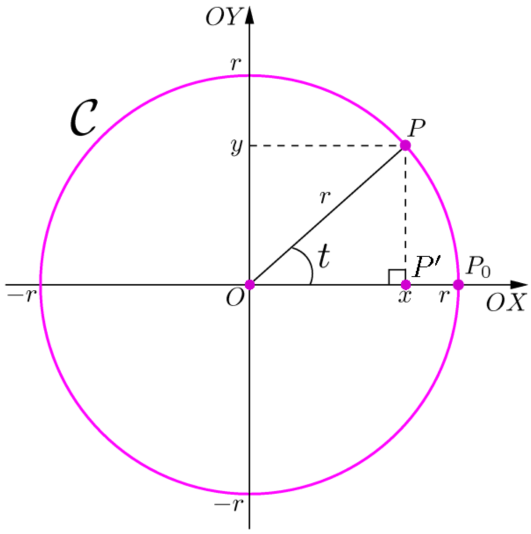

Fig. 1: Círculo $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = r^2$

Fazendo t percorrer os valores do intervalo $[0, 2\pi)$, obtemos todos os pontos do círculo.

Se quisermos, podemos considerar t percorrendo também todos os valores reais. Isto implica realizar um número infinito de voltas sobre o círculo. Portanto, uma possibilidade de equações paramétricas para o círculo $\mathcal{C}$ é:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\,\text{sen}\, t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Note que, para qualquer valor real $a \neq 0$, as equações

$x = r\cos(at)$ e $y = r\,\text{sen}(at)$, com $t \in \mathbb{R}$,

também são equações paramétricas para o círculo $\mathcal{C}$, pois:

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2(at) + r^2\,\text{sen}^2(at) = r^2\,.$$

Observe que as equações paramétricas

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\,\text{sen}\, t \end{cases} \quad ; \quad t \in [0, \pi]\,,$$

definem apenas o semi-círculo de $P_0 = (r, 0)$ a $P_1 = (-r, 0)$ percorrido no sentido positivo (anti-horário).

Seja, agora, o círculo

$$\mathcal{C} : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

de centro (x_0, y_0) e raio $r > 0$.

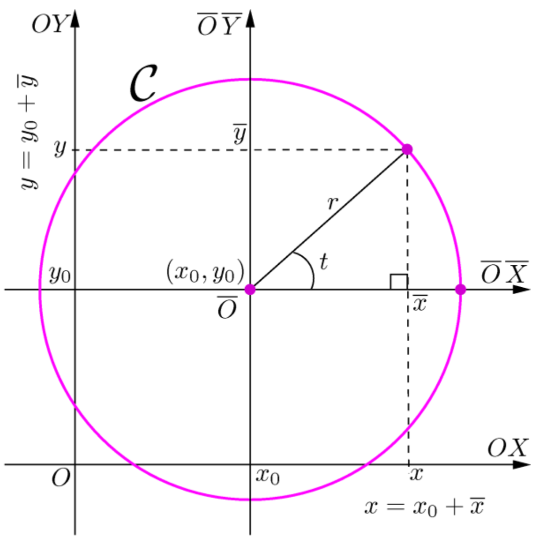

Fig. 2: Círculo $\mathcal{C} :: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Por uma translação do sistema de eixos OXY, obtemos um novo sistema de eixos $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, com $\overline{O} = (x_0, y_0)$.

Nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, onde

$$x = \overline{x} + x_0 \quad \text{e} \quad y = \overline{y} + y_0,$$

a equação cartesiana do círculo é dada por $\overline{x}^2 + \overline{y}^2 = r^2$, pois, no sistema de eixos $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, o círculo $\mathcal{C}$ tem raio r e está centrado na origem.

Sendo $\overline{x} = r\cos t$ e $\overline{y} = r\,\text{sen}\, t$, $t \in \mathbb{R}$, as equações paramétricas de $\mathcal{C}$ nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, temos que:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = x_0 + r\cos t \\ y = y_0 + r\,\text{sen}\, t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

são equações paramétricas do círculo $\mathcal{C}$ nas coordenadas x e y.

Exemplo 1

Parametrize o círculo $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x - 6y = 12$.

Solução.

Completando o quadrado:

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y = 12 \Longleftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 12 + 4 + 9 = 25\,,$$

obtemos que $\mathcal{C}$ é o círculo de centro $C = (2,3)$ e raio $r = 5$. Logo, pelo visto acima,

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = 2 + 5\cos t \\ y = 3 + 5\,\text{sen}\, t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

são equações paramétricas do círculo $\mathcal{C}$. $\square$

Parametrização de uma elipse

Seja $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ uma elipse de centro na origem.

Seja $\mathcal{C} : \alpha^2 + \beta^2 = 1$ o círculo de centro na origem e raio $r = 1$. Como $(x, y) \in \mathcal{E}$ se, e só se, $(\alpha, \beta) = \left(\dfrac{x}{a}, \dfrac{y}{b}\right) \in \mathcal{C}$, e $\mathcal{C} : \begin{cases} \alpha = \cos t \\ \beta = \text{sen}\, t \end{cases} \;\; ; \;\; t \in \mathbb{R}$, é uma parametrização de $\mathcal{C}$, temos que

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\text{sen}\, t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

é uma possível parametrização da elipse $\mathcal{E}$.

O significado geométrico do parâmetro $t \in \mathbb{R}$ pode ser visto do seguinte modo.

Sejam $\mathcal{C}_a : x^2 + y^2 = a^2$ o círculo de centro na origem e raio a e $\mathcal{C}_b : x^2 + y^2 = b^2$ o círculo de centro na origem e raio b.

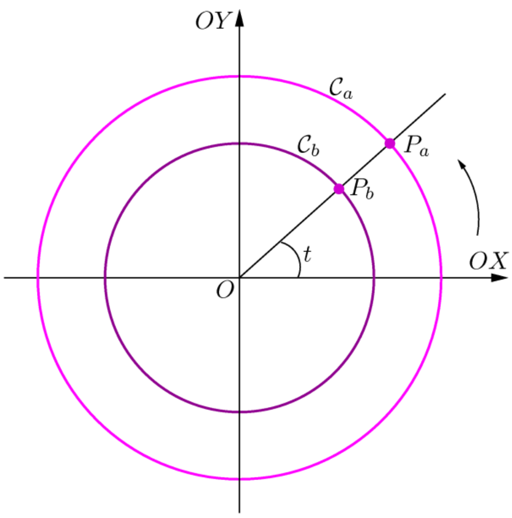

Fig. 3: Círculos $\mathcal{C}_a$ e $\mathcal{C}_b$, $a > b > 0$

Considere, para cada $t \in \mathbb{R}$, os pontos $P_a = (a\cos t, a\,\text{sen}\,t) \in \mathcal{C}_a$ e $P_b = (b\cos t, b\,\text{sen}\,t) \in \mathcal{C}_b$, tais que os vetores $\overrightarrow{OP_a}$ e $\overrightarrow{OP_b}$ fazem um ângulo t, medido em radianos, no sentido anti-horário, com o semi-eixo positivo OX.

A interseção da reta $r_a : x = a\cos t$, paralela ao eixo$-OY$ que passa pelo ponto P_a, com a reta $r_b : y = b\,\text{sen}\,t$, paralela ao eixo$-OX$ que passa pelo ponto P_b, nos dá o ponto $P = (a\cos t, b\,\text{sen}\,t)$ pertencente à elipse $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

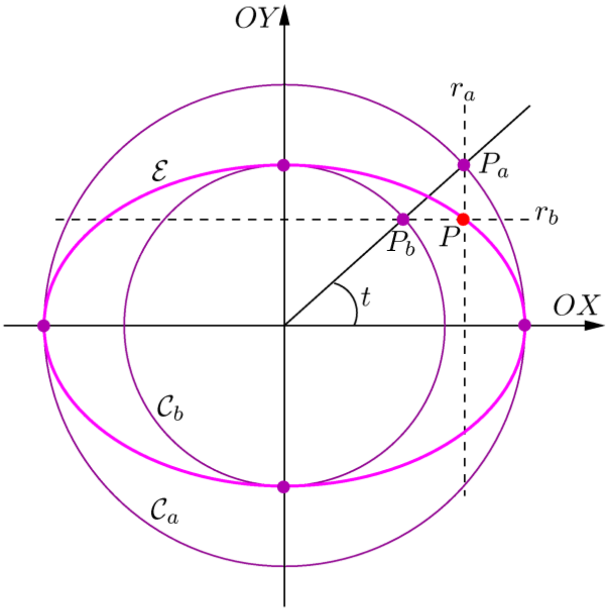

Fig. 4: Construção da elipse $\mathcal{E}$

Seja, agora, a elipse $\mathcal{E} : \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ de centro (x_0, y_0).

Por uma translação dos eixos coordenados, obtemos um sistema de eixos $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, onde $\overline{O} = (x_0, y_0)$ é o centro da elipse. Nas novas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a equação cartesiana da elipse fica na forma $\mathcal{E} : \dfrac{\overline{x}^2}{a^2} + \dfrac{\overline{y}^2}{b^2} = 1$ e, portanto,

$$\mathcal{E} : \begin{cases} \overline{x} = a\cos t \\ \overline{y} = b\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização da elipse nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$.

Como $x = \overline{x} + x_0$ e $y = \overline{y} + y_0$, obtemos que:

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + b\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização da elipse nas coordenadas x e y.

Exemplo 2

Parametrize a elipse $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y = -1$.

Solução.
Completando os quadrados:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 4y^2 - 16y = -1 &\iff (x-1)^2 + 4(y-2)^2 = -1 + 1 + 16 = 16 \\ &\iff \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1\,, \end{aligned}$$

obtemos que a elipse $\mathcal{E}$ tem centro no ponto $(1, 2)$, reta-focal $y = 2$ paralela ao eixo$-OX$, $a = 4$ e $b = 2$. Então,

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x = 1 + 4\cos t \\ y = 2 + 2\,\text{sen}\, t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização de $\mathcal{E}$. □

Parametrização de uma hipérbole

Consideremos a hipérbole $\mathcal{H} : x^2 - y^2 = 1$ equilátera ($a = b = 1$) de centro na origem cuja reta-focal é o eixo$-OX$.

Sejam $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ e $\text{senh}\, t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$, $t \in \mathbb{R}$, respectivamente, as funções *cosseno hiperbólico* e *seno hiperbólico*. Os pontos $(\cosh t, \text{senh}\, t)$ e $(-\cosh t, \text{senh}\, t)$ pertencem à hipérbole $\mathcal{H}$, pois,

$$(\cosh t)^2 - (\text{senh}\, t)^2 = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = 1 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

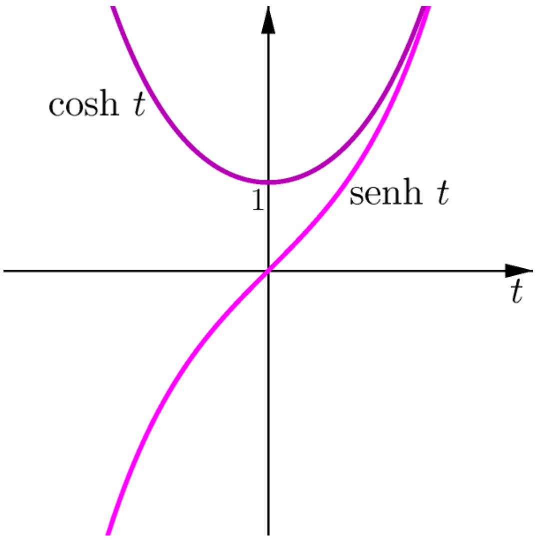

Fig. 5: Gráficos de $\cosh t$ e $\text{senh}\, t$

Além disso, variando $t \in \mathbb{R}$, vemos que $x = \pm\cosh t$ percorre todos os valores em $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, enquanto $y = \text{senh}\, t$ percorre todos os valores reais.

Portanto, $\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \text{senh}\, t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$, é uma parametrização para o ramo $\mathcal{H}_+$ de $\mathcal{H}$ que intesecta o semi-eixo positivo OX, e $\begin{cases} x = -\cosh t \\ y = \operatorname{senh} t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$, é uma parametrização para o ramo $\mathcal{H}_-$ de $\mathcal{H}$ que intesecta o semi-eixo negativo OX.

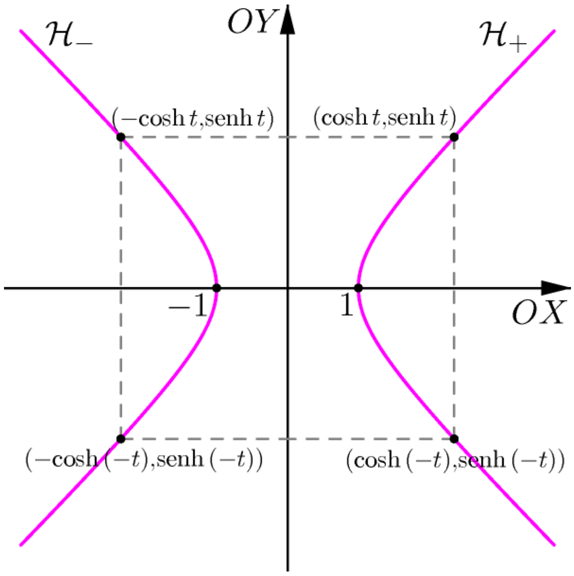

Fig. 6: Gráfico de $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \cup \mathcal{H}_-$

Seja, agora, a hipérbole $\mathcal{H} : \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ de centro (x_0, y_0) e reta-focal paralela ao eixo$-$OX.

Considere a hipérbole $\mathcal{H}_0 : \alpha^2 - \beta^2 = 1$.

Como $(x, y) \in \mathcal{H}$ se, e só se, $(\alpha, \beta) = \left(\dfrac{x-x_0}{a}, \dfrac{y-y_0}{b}\right) \in \mathcal{H}_0$ e $\mathcal{H}_0 : \begin{cases} \alpha = \pm\cosh t \\ \beta = \operatorname{senh} t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$, é uma parametrização de $\mathcal{H}_0$, temos que

$$\begin{cases} x = x_0 \pm a \cosh t \\ y = y_0 + b \operatorname{senh} t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R},$$

são equações paramétricas da hipérbole $\mathcal{H}$.

De modo análogo, podemos verificar que

$$\begin{cases} x = x_0 + b \operatorname{senh} t \\ y = y_0 \pm a \cosh t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R},$$

são equações paramétricas da hipérbole $\mathcal{H} : \dfrac{(y-y_0)^2}{a^2} - \dfrac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$ de centro (x_0, y_0) e reta-focal paralela ao eixo$-$OY.

Observação 1

Podemos obter outras equações paramétricas para a hipérbole $\mathcal{H} : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, utilizando as funções trigonométricas.

A seguir, assumimos $0 < b < a$ (faça as adaptações necessárias para o caso em que $0 < a < b$). Acompanhe o procedimento na Figura 7.

Sejam as retas $s_1 : x = b$ e $s_2 : x = a$. Consideremos um ponto $P = (x, y) \in \mathcal{H}$ no primeiro quadrante. Seja $P_1 = (x_1, y_1)$ o ponto de interseção de s_1 com a reta paralela ao eixo OX que passa por P.

Seja t a medida (em radianos) do ângulo do semi-eixo positivo OX para a semi-reta OP_1 no sentido anti-horário. Da Trigonometria, temos $P_1 = (x_1, y_1) = (b, b\,\text{tg}\,t)$.

Note que as segundas coordenadas de P e P_1 são iguais. Daí concluímos que $y = y_1 = b\,\text{tg}\,t$.

Ou seja, $P = (x, y) = (x, y_1) = (x, b\,\text{tg}\,t)$.

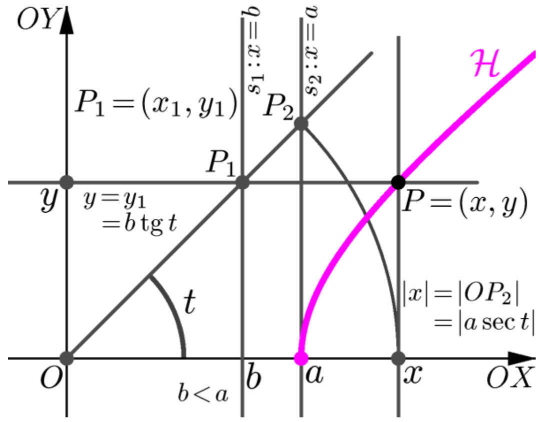

Fig. 7: Hipérbole $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Para obter a coordenada x do ponto P, seja P_2 o ponto de interseção da semi-reta OP_1 com a reta s_2. Então $|OP_2| = |a \sec t|$.

O círculo de centro na origem e raio $|OP_2|$ intersecta o semi-eixo positivo OX no ponto $P_0 = (x_0, 0)$, onde $x_0 = |OP_2| = |a \sec t|$.

Como t é um arco do primeiro quadrante, $a \sec t$ é um número positivo. Logo, $x_0 = a \sec t$.

Afirmamos que $x = x_0$, isto é,

$$P = (x, y) = (x, b\,\text{tg}\,t) = (x_0, b\,\text{tg}\,t) = (a \sec t, b\,\text{tg}\,t).$$

Para verificar a afirmativa, basta mostrar que o ponto de coordenadas $(a \sec t, b\,\text{tg}\,t)$ satisfaz a equação cartesiana da hipérbole $\mathcal{H}$:

$$\frac{(a \sec t)^2}{a^2} - \frac{(b\,\text{tg}\,t)^2}{b^2} = \sec^2 t - \text{tg}^2\,t = 1\,.$$

Finalmente, observe que, conforme t percorre todos os valores do intervalo $[0, \frac{\pi}{2})$, o ponto P percorre todos os pontos da hipérbole que estão no primeiro quadrante. Veja a Figura 7.

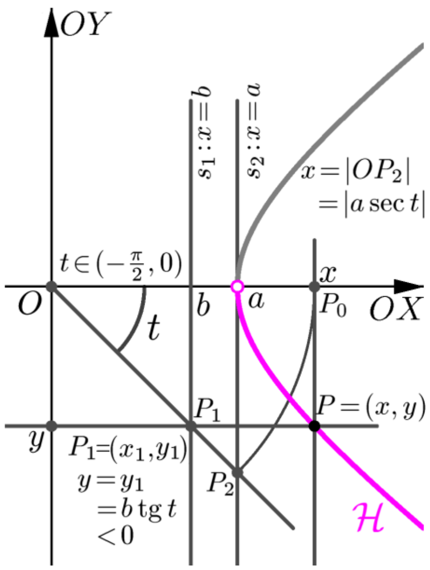

Fig. 8: Ramo de $\mathcal{H}$ no quarto quadrante.

Para obter os pontos do quarto quadrante, fazemos a mesma construção, variando t no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, 0]$. Neste caso, o ponto $P = (x, y)$ da hipérbole tem a sua segunda coordenada negativa coincidindo com $b\,\text{tg}\,t$, que é também um número negativo. Veja a Figura 8.

Para obter o ramo da hipérbole que intersecta o semi-eixo negativo OX, repetimos a construção, variando t no intervalo $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ sendo, agora, t o ângulo (em radianos) que o semi-eixo positivo OX faz com o vetor $\overrightarrow{OP_1'}$, no sentido horário, onde P_1' é o ponto de interseção da reta $s_1' : x = -b$ com a reta paralela ao eixo$-OX$ que passa por P.

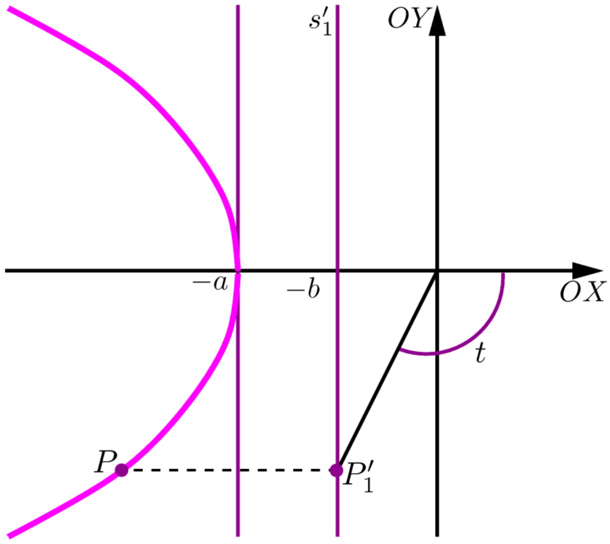

Fig. 9: Ramo de $\mathcal{H}$ no semi-plano $x < 0$.

Observe que:

$$a\sec t < 0\,, \quad \text{para } t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\,, \quad \text{e} \quad \begin{cases} b\,\text{tg}\,t \leq 0\,, \text{ para } \frac{\pi}{2} < t \leq \pi \\ b\,\text{tg}\,t > 0\,, \text{ para } \pi < t < \frac{3\pi}{2} \end{cases}.$$

Com essa análise, chegamos às seguintes equações paramétricas da hipérbole $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$\mathcal{H} : \begin{cases} x = a\sec t \\ y = b\,\text{tg}\,t \end{cases}, \quad t \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \cup (\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2})$$

Quando t varia no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, obtemos o ramo da hipérbole $\mathcal{H}$ que intersecta o semi-eixo positivo OX, e quando t varia no intervalo $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, obtemos o ramo de $\mathcal{H}$ que intersecta o semi-eixo negativo OX.

Observação 2

Podemos determinar equações paramétricas de cada ramo da hipérbole isoladamente, fazendo variar t num mesmo intervalo. De fato, já sabemos que as equações paramétricas:

$$\mathcal{H}_+ : \begin{cases} x = a\sec t \\ y = b\,\text{tg}\,t \end{cases}, \ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\,,$$

descrevem as coordenadas dos pontos do ramo $\mathcal{H}_+$ de $\mathcal{H}$ que intersecta o semi-eixo positivo

OX.

Também, como $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se, e somente se, $t+\pi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, e:

$$a\sec(t+\pi) = -a\sec t \quad \text{e} \quad b\,\mathrm{tg}(t+\pi) = b\,\mathrm{tg}\,t\,,$$

vemos que as coordenadas dos pontos do ramo $\mathcal{H}_-$ de $\mathcal{H}$, que intersecta o semi-eixo negativo OX, são dadas pelas equações paramétricas:

$$\mathcal{H}_- : \begin{cases} x = -a\sec t \\ y = b\,\mathrm{tg}\,t \end{cases}, \; t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Portanto, $\mathcal{H}$ é descrita completamente pelas equações paramétricas:

$$\mathcal{H}_+ : \begin{cases} x = a\sec t \\ y = b\,\mathrm{tg}\,t \end{cases}, \; t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \qquad \mathcal{H}_- : \begin{cases} x = -a\sec t \\ y = b\,\mathrm{tg}\,t \end{cases}, \; t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

De modo geral, podemos verificar que

$$\mathcal{H} : \begin{cases} x = \pm a\, \sec t + x_0 \\ y = b\, \mathrm{tg}\, t + y_0 \end{cases}, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

são equações paramétricas da hipérbole $\mathcal{H} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ de centro (x_0, y_0) e reta-focal paralela ao eixo$-OX$, e

$$\mathcal{H} : \begin{cases} x = b\, \mathrm{tg}\, t + x_0 \\ y = \pm a\, \sec t + y_0 \end{cases}, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

são equações paramétricas da hipérbole $\mathcal{H} : \frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$ de centro (x_0, y_0) e reta-focal paralela ao eixo$-OY$.

Exemplo 3

Parametrize a hipérbole $\mathcal{H} : x^2 - 4y^2 + 2x - 8y = 7$ *de duas maneiras diferentes.*

Solução.

Completando os quadrados, temos:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 4y^2 - 8y = 7 &\iff (x+1)^2 - 4(y+1)^2 = 7 + 1 - 4 = 4 \\ &\iff \frac{(x+1)^2}{4} - (y+1)^2 = 1\,. \end{aligned}$$

Logo $\mathcal{H}$ é uma hipérbole de centro $(-1, -1)$, reta-focal $y = -1$ paralela ao eixo$-OX$, $a = 2$ e $b = 1$.

Assim, pelo visto acima,

$$\mathcal{H}: \begin{cases} x = \pm 2\cosh t - 1 \\ y = \operatorname{senh} t - 1 \end{cases} \; ; \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \text{e} \qquad \mathcal{H}: \begin{cases} x = \pm 2\sec t - 1 \\ y = \operatorname{tg} t - 1 \end{cases} \; ; \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

são duas parametrizações possíveis para hipérbole $\mathcal{H}$. □

Exemplo 4

Parametrize a hipérbole $\mathcal{H}: -x^2 + 9y^2 + 18y - 2x - 1 = 0$ *de duas maneiras.*

Solução.
Completando o quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned} & 9(y^2 - 2y) - (x^2 + 2x) = 1 \\ \iff & 9(y+1)^2 - (x+1)^2 = 1 + 9 - 1 = 9 \\ \iff & (y+1)^2 - \frac{(x+1)^2}{9} = 1\,. \end{aligned}$$

Logo $\mathcal{H}$ é a hipérbole de centro $(-1, -1)$, reta-focal $x = -1$ paralela ao eixo$-OY$, $a = 1$ e $b = 3$.

Então,

$$\mathcal{H}: \begin{cases} x = 3\operatorname{senh} t - 1 \\ y = \pm\cosh t - 1 \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{H}: \begin{cases} x = 3\operatorname{tg} t - 1 \\ y = \pm\sec t - 1 \end{cases} , \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

são duas parametrizações distintas da hipérbole. □

Parametrização de uma parábola

As equações cartesianas canônicas das parábolas se caracterizam por apresentar uma das variáveis no primeiro grau. Isso permite expressar essa variável como *dependente da variável do segundo grau*.

Assim, por exemplo, na parábola $\mathcal{P}$ de equação cartesiana

$$(x-a)^2 = k(y-b) \iff y = \frac{1}{k}(x-a)^2 + b,$$

de vértice (a, b) e reta-focal paralela ao eixo$-OY$, escolhendo a variável independente t como sendo $x - a$, a variável dependente y se expressa como $y = \frac{1}{k}t^2 + b$.

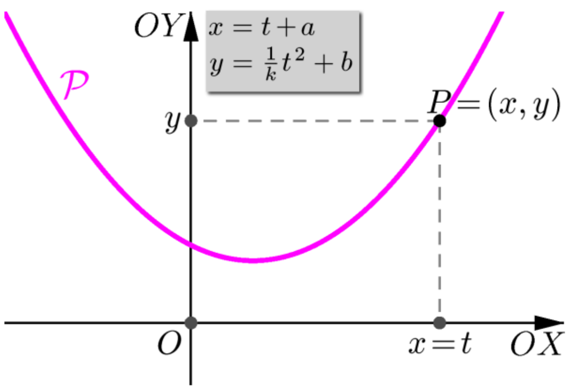

Fig. 10: $\mathcal{P}: (x-a)^2 = k(y-b)$.

Portanto, $\mathcal{P}$ tem por equações paramétricas:

$$\boxed{\mathcal{P}: \begin{cases} x = t + a \\ y = \frac{1}{k}t^2 + b \end{cases} , \; t \in \mathbb{R}}$$

Exemplo 5

Parametrize a parábola $\mathcal{P} : y^2 - 2x + 4y = 0$.

Solução.

Completando o quadrado:

$$y^2 + 4y - 2x = 0 \iff (y+2)^2 = 2x + 4 = 2(x+2)\,,$$

vemos que $\mathcal{P}$ é uma parábola de vértice $V = (-2, -2)$ e reta-focal $y = -2$ paralela ao eixo$-OX$.

Então, como $x = \dfrac{(y+2)^2}{2} - 2$, temos que:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2} - 2 \\ y = t - 2 \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

são equações paramétricas da parábola $\mathcal{P}$. $\square$

Observação 3

O procedimento utilizado para obter equações paramétricas das parábolas se aplica para obter equações paramétricas de partes de elipses e hipérboles.

Exemplo 6

Considere a elipse:

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Colocando em evidência a variável y, obtemos:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Longrightarrow y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2}) \Longrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} \Longrightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

Note que a expressão que aparece no radicando, no lado direito da última igualdade, está definida somente para os valores de x tais que $a^2 - x^2 \geq 0$, ou seja, $-a \leq x \leq a$.

Para cada escolha de sinal na expressão de y, descrevemos uma parte da elipse $\mathcal{E}$. Fazendo $x = t$, obtemos as equações paramétricas:

$$\mathcal{E}_+ : \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - t^2} \end{cases} , \; t \in (-a, a]\,, \quad \mathcal{E}_- : \begin{cases} x = t \\ y = -\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \end{cases} , \; t \in [-a, a)\,,$$

onde $\mathcal{E}_+$ é a semi-elipse contida no semiplano superior incluindo o vértice $V_1 = (a, 0)$ e excluindo o vértice $V_2 = (-a, 0)$. Analogamente, $\mathcal{E}_-$ é a semi-elipse contida no semiplano inferior, incluindo o vértice $V_2 = (-a, 0)$ e excluindo o vértice $V_1 = (a, 0)$. Veja as Figuras 11, 12 e 13.

Nos exemplos abaixo veremos como parametrizar cônicas que não estão na forma canônica.

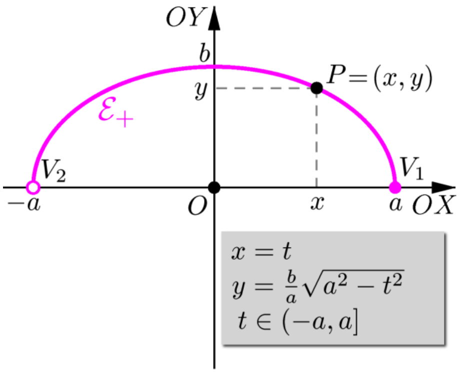

Fig. 11: Semi-elipse $\mathcal{E}_+$.

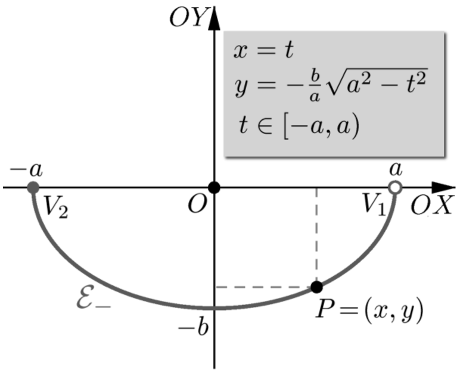

Fig. 12: Semi-elipse $\mathcal{E}_-$.

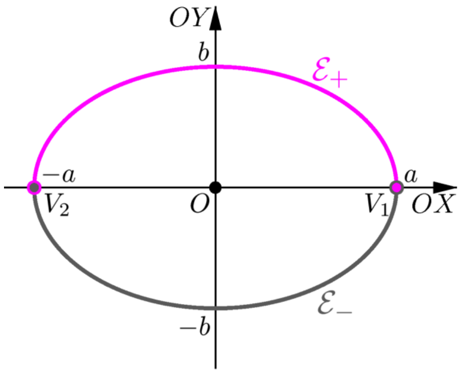

Fig. 13: Elipse $\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_-$.

Exemplo 7

Determine a equação cartesiana e equações paramétricas da hipérbole equilátera $\mathcal{H}$ que passa pelo ponto $P_0 = (-1, -5)$ e tem os eixos coordenados como assíntotas.

Solução.
Como as assíntotas se intersectam na origem e uma de suas bissetrizes é a reta-focal, temos que $C = (0, 0)$ é o centro da hipérbole e a reta-focal é a reta $y = x$ ou a reta $y = -x$.

Além disso, como o ponto $P_0 = (-1, -5) \in \mathcal{H}$ está no terceiro quadrante, vemos que a reta-focal de $\mathcal{H}$ é a reta $y = x$.

Por uma rotação de 45^o em torno da origem no sentido positivo, obtemos um novo sistema de eixos ortogonais $O\,\overline{X}\,\overline{Y}$, sendo:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} - \overline{y}) \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} + \overline{y}) \end{cases} \quad \textit{(1)} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ \overline{y} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) \end{cases} \quad \textit{(2)}$$

as equações de mudança de coordenadas.

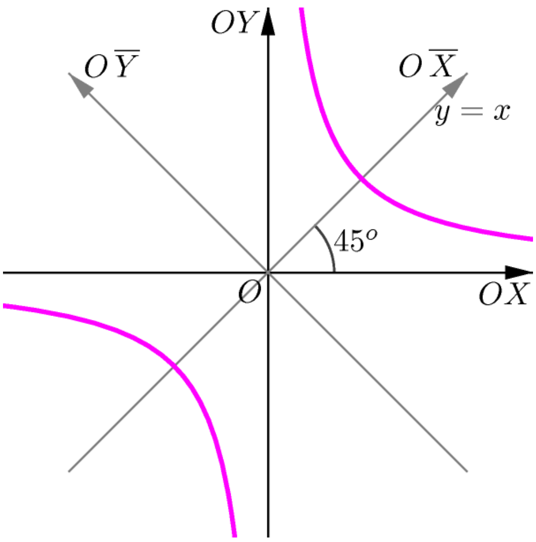

Fig. 14: Hipérbole $\mathcal{H}$

Nesse novo sistema de eixos, a hipérbole é equilátera, tem centro na origem e reta-focal $=$ eixo$-O\,\overline{X}$. Então,

$$\overline{\mathcal{H}} : \frac{\overline{x}^2}{a^2} - \frac{\overline{y}^2}{a^2} = 1 \quad \iff \quad \overline{\mathcal{H}} : \overline{x}^2 - \overline{y}^2 = a^2\,,$$

é a equação da hipérbole nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$.

Como -1 e -5 são, respectivamente, as coordenadas x e y do ponto P_0, temos, por (2), que:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - 5) = -3\sqrt{2} \\ \overline{y} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 5) = -2\sqrt{2}\,, \end{aligned}$$

são as coordenadas deste ponto no sistema de eixos ortogonais $O\,\overline{X}\,\overline{Y}$.

Assim, $a^2 = (-3\sqrt{2})^2 - (-2\sqrt{2})^2 = 18 - 8 = 10$, já que $(-3\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ satisfaz a equação $\overline{x}^2 - \overline{y}^2 = a^2$ da hipérbole nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$.

Finalmente, fazendo $\overline{x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$ e $\overline{y} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)$ na equação $\overline{x}^2 - \overline{y}^2 = 10$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{4}(x+y)^2 - \frac{2}{4}(-x+y)^2 = 10 \quad &\Longleftrightarrow \quad (x^2+2xy+y^2) - (x^2-2xy+y^2) = 20 \\
&\Longleftrightarrow \quad 4xy = 20 \\
&\Longleftrightarrow \quad xy = 5\,,
\end{aligned}$$

que é a equação cartesiana da hipérbole nas coordenadas x e y.

Para parametrizar a hipérbole $\mathcal{H}$, parametrizamos primeiro a hipérbole $\overline{H} : \overline{x}^2 - \overline{y}^2 = 10$, com $a = b = \sqrt{10}$:

$$\overline{\mathcal{H}} : \begin{cases} \overline{x} = \pm\sqrt{10}\,\cosh t \\ \overline{y} = \sqrt{10}\,\operatorname{senh} t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Utilizando a mudança de coordenadas (1), obtemos que:

$$\mathcal{H} : \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\pm\sqrt{10}\,\cosh t - \sqrt{10}\,\operatorname{senh} t\right) \\[2ex] y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\pm\sqrt{10}\,\cosh t + \sqrt{10}\,\operatorname{senh} t\right) \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

são equações paramétricas para a hipérbole $\mathcal{H}$.

Podemos também parametrizar a hipérbole $\mathcal{H}$ fazendo $y = s$, $s \in \mathbb{R} - \{0\}$, e $x = \dfrac{5}{y} = \dfrac{5}{s}$.

Para $s \in (0, +\infty)$, a parametrização $\begin{cases} x = \dfrac{5}{s} \\ y = s \end{cases}$ cobre a parte da curva situada no primeiro quadrante e, para $s \in (-\infty, 0)$, a parametrização $\begin{cases} x = \dfrac{5}{s} \\ y = s \end{cases}$ cobre a parte da curva situada no terceiro quadrante. $\square$

Exemplo 8

Determine uma parametrização da cônica dada pela equação do segundo grau:

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0\,.$$

Solução.

Os coeficientes da equação são $A = 9$, $B = -24$, $C = 16$, $D = -20$, $E = 110$, $F = 50$ e seu indicador é $I = B^2 - 4AC = (-24)^2 - 4 \times 9 \times 16 = 0$. Portanto, a equação é do tipo parabólico.

Como $A \neq C$, temos que $\text{tg}(2\theta) = \dfrac{B}{A-C} = \dfrac{-24}{9-16} = \dfrac{24}{7} > 0$ e

$$\cos 2\theta = \sqrt{\frac{1}{1+(\text{tg}\,2\theta)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1+576/49}} = \frac{7}{\sqrt{625}} = \frac{7}{25}\,,$$

de onde obtemos:

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+7/25}{2}} = \frac{4}{5}\,,$$
$$\text{sen}\,\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-7/25}{2}} = \frac{3}{5}\,,$$

onde θ é o ângulo que devemos girar os eixos OX e OY para obter um novo sistema de eixos $O\,\overline{X}\,\overline{Y}$, no qual a cônica se escreve na forma canônica.

As relações de mudança de coordenadas são:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}(4\overline{x} - 3\overline{y}) \\ y = \frac{1}{5}(3\overline{x} + 4\overline{y}) \end{cases} \quad (1) \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \overline{x} = \frac{1}{5}(4x + 3y) \\ \overline{y} = \frac{1}{5}(-3x + 4y) \end{cases} \quad (2)\,,$$

e a equação da cônica nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ fica na forma:

$$\overline{A}\,\overline{x}^2 + \overline{C}\,\overline{y}^2 + \overline{D}\,\overline{x} + \overline{E}\,\overline{y} + \overline{F} = 0\,,$$

onde $\overline{F} = F = -50$;

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -75 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

ou seja, $\overline{A} = 0$ e $\overline{C} = 25$;

$$\begin{pmatrix} \overline{D} \\ \overline{E} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -20 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \end{pmatrix},$$

ou seja, $\overline{D} = 50$ e $\overline{E} = 100$.

Logo, a equação da cônica nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ é dada por:

$$25\overline{y}^2 + 50\overline{x} + 100\overline{y} - 50 = 0 \iff \overline{y}^2 + 2\overline{x} + 4\overline{y} - 2 = 0\,.$$

Completando o quadrado, temos:

$$\overline{y}^2 + 4\overline{y} = -2\overline{x} + 2 \iff (\overline{y}+2)^2 = -2\overline{x} + 2 + 4 = -2(\overline{x} - 3)\,.$$

Assim, a curva representa uma parábola de vértice $\overline{V} = (3, -2)$, parâmetro $p = +\dfrac{1}{2}$, reta-focal $\overline{\ell} : \overline{y} = -2$, foco $\overline{F} = \left(3 - \dfrac{1}{2}, -2\right) = \left(\dfrac{5}{2}, -2\right)$ e diretriz $\overline{\mathcal{L}} : \overline{x} = 3 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2}$.

Portanto,

$$\begin{cases} \overline{x} = -\dfrac{t^2}{2} + 3 \\ \overline{y} = t - 2 \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização da parábola nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$.

Então, usando a mudança de coordenadas (1), obtemos que:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = \dfrac{1}{5}\left(4\left(-\dfrac{t^2}{2}+3\right) - 3(t-2)\right) = -\dfrac{1}{5}(2t^2+3t-18) \\[2ex] y = \dfrac{1}{5}\left(3\left(-\dfrac{t^2}{2}+3\right) + 4(t-2)\right) = \dfrac{1}{5}\left(-\dfrac{3}{2}t^2+4t+1\right) \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização da cônica no sistema de coordenadas OXY. $\square$

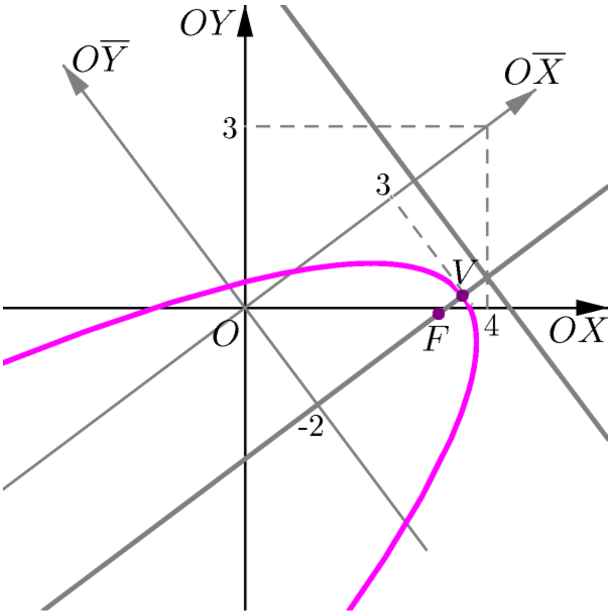

Fig. 15: Parábola $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$