Aula 10

Superfícies Quádricas

Em capítulos anteriores estudamos as cônicas, curvas dadas por uma equação de segundo grau nas variáveis x e y.

Uma *quádrica* é uma superfície cuja equação cartesiana é uma equação de segundo grau nas variáveis x, y e z., isto é, uma equação da forma:

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0}\,, \tag{1}$$

onde A, B, C, D, E, F, G, H, I e J são números reais, sendo pelo menos um dos coeficientes A, B, C, D, E e F não-nulo.

Além das superfícies quádricas, a equação acima também pode representar:

- o conjunto vazio,
- um ponto,
- uma reta,
- um plano,
- um par de planos paralelos,
- um par de planos concorrentes.

Estes conjuntos são denominados *quádricas degeneradas*.

Antes de fazermos um estudo geral das superfícies dadas pela equação (1), apresentaremos primeiro, como no caso das cônicas, as *quádricas na forma canônica*. Para estudá-las, analisaremos as suas seções planas $\mathcal{Q} \cap \pi$, onde π é um plano paralelo a um dos eixos coordenados.

Além disso, analisaremos as simetrias das quádricas com respeito aos planos coordenados e com respeito à origem.

Sabemos que um conjunto $\mathcal{Q}$ é simétrico com respeito:

- ao plano XY quando: $(x, y, z) \in \mathcal{Q} \iff (x, y, -z) \in \mathcal{Q}$;
- ao plano XZ quando: $(x, y, z) \in \mathcal{Q} \iff (x, -y, z) \in \mathcal{Q}$;
- ao plano YZ quando: $(x, y, z) \in \mathcal{Q} \iff (-x, y, z) \in \mathcal{Q}$;
- à origem quando: $(x, y, z) \in \mathcal{Q} \iff (-x, -y, -z) \in \mathcal{Q}$;

É fácil verificar que se o conjunto $\mathcal{Q}$ é simétrico com respeito aos planos XY, XZ e YZ, então é simétrico com respeito à origem.

1. Elipsóide

Um *elipsóide* na forma canônica é uma superfície dada por uma equação de segundo grau do tipo:

$$\mathcal{Q}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,,$$

onde a, b e c são números reais positivos.

É fácil verificar que o elipsóide $\mathcal{Q}$ é uma superfície simétrica com respeito aos três planos coordenados e com respeito à origem.

Observação 1

A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ é um caso particular de elipsóide no qual $a = b = c = R$.

A interseção do elipsóide $\mathcal{Q}$ com o plano $z = k$, $k \in \mathbb{R}$, paralelo ao plano XY,

$$\mathcal{Q} \cap \{z = k\}: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{k^2}{c^2} \\ z = k\,, \end{cases}$$

é

- ∘ uma elipse de centro $(0, 0, k)$ se $k \in (-c, c)$;
- ∘ o ponto $(0, 0, c)$ se $k = c$;
- ∘ o ponto $(0, 0, -c)$ se $k = -c$;
- ∘ o conjunto vazio se $|k| > c$.

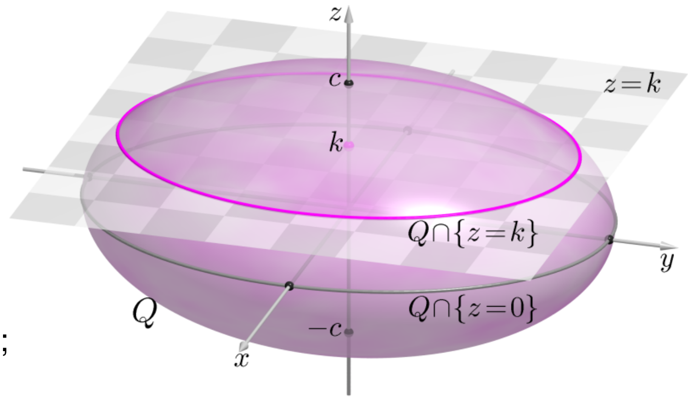

Fig. 1: Interseção do plano $\{z = k\}$ com o elipsóide Q

Por outro lado, a interseção do elipsóide $\mathcal{Q}$ com os planos paralelos ao plano XZ,

$$\mathcal{Q} \cap \{y = k\}: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{b^2} \\ y = k\,, \end{cases}$$

é

- ∘ uma elipse de centro $(0, k, 0)$ se $k \in (-b, b)$;
- ∘ o ponto $(0, b, 0)$ se $k = b$;
- ∘ o ponto $(0, -b, 0)$ se $k = -b$;
- ∘ o conjunto vazio se $|k| > b$.

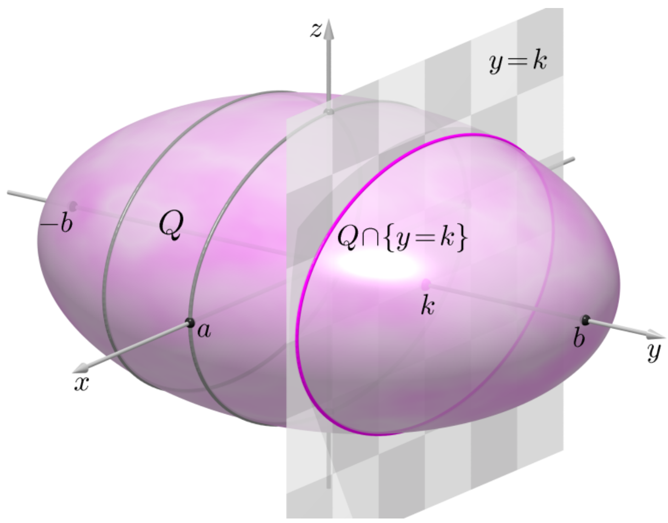

Fig. 2: Interseção do plano $\{y = k\}$ com o elipsóide Q

Finalmente, a interseção do elipsóide $\mathcal{Q}$ com os planos paralelos ao plano YZ,

$$\mathcal{Q} \cap \{x = k\}: \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{a^2} \\ x = k\,, \end{cases}$$

é

- ∘ uma elipse de centro $(k, 0, 0)$ se $k \in (-a, a)$;
- ∘ o ponto $(a, 0, 0)$ se $k = a$;
- ∘ o ponto $(-a, 0, 0)$ se $k = -a$;
- ∘ o conjunto vazio se $|k| > a$.

Para um elipsóide na forma canônica ser uma *superfície de revolução*, pelo menos uma das famílias de seções planas estudadas acima deve ser constituída de círculos.

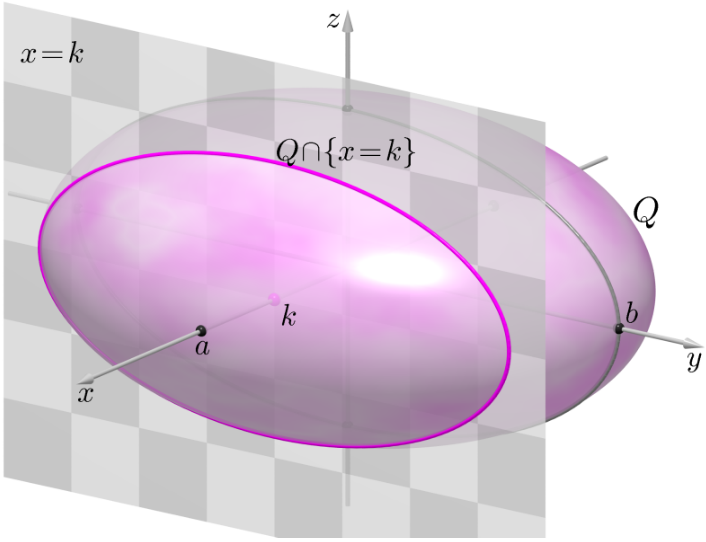

Fig. 3: Interseção do plano $\{x = k\}$ com o elipsóide Q

Portanto,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1\,,$$

são os elipsóides de revolução na forma canônica, cujas geratrizes e eixo de revolução são dados, respectivamente, por:

- $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ e eixo$-OZ$;
- $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ e eixo$-OY$;
- $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ e eixo$-OX$.

Considere o elipsóide de revolução de eixo$-OZ$

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,,$$

cuja geratriz é a elipse $\gamma : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0\,. \end{cases}$

Como

$$\gamma : \begin{cases} x(s) = a \cos s \\ y(s) = 0 \\ z(s) = c \operatorname{sen} s \end{cases} \quad ; \quad s \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização de γ, temos que:

$$\mathcal{Q} : \begin{cases} x(s,t) = a \cos s \cos t \\ y(s,t) = a \cos s \operatorname{sen} t \\ z(s,t) = c \operatorname{sen} s \end{cases} \quad ; \quad s, t \in \mathbb{R}\,.$$

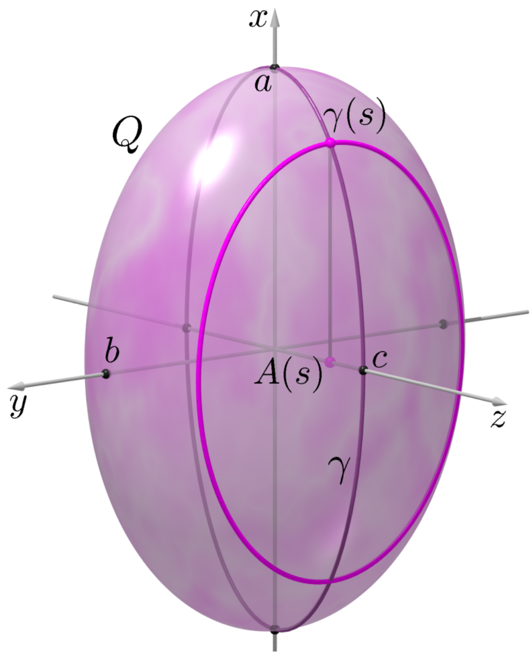

Fig. 4: Geratriz γ e paralelo de centro no ponto $A(s)$

é uma parametrização de $\mathcal{Q}$, pois o paralelo, contido no plano $z = c \operatorname{sen} s$, é um círculo de centro $A(s) = (0, 0, c \operatorname{sen} s)$ e raio igual a $|a \cos s|$.

Assim,

$$\mathcal{Q}:\begin{cases} x(s,t) = a\cos s\cos t \\ y(s,t) = b\cos s\,\text{sen}\, t \\ z(s,t) = c\,\text{sen}\, s \end{cases} ;\quad s,t\in\mathbb{R}\,.$$

é uma parametrização do elipsóide na forma canônica:

$$\mathcal{Q}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,,$$

pois

$$\begin{aligned}\frac{x(s,t)^2}{a^2}+\frac{y(s,t)^2}{b^2}+\frac{z(s,t)^2}{c^2} &= \frac{(a\cos s\cos t)^2}{a^2}+\frac{(b\cos s\,\text{sen}\, t)^2}{b^2}+\frac{(c\,\text{sen}\, s)^2}{c^2}\\ &= \cos^2 s\cos^2 t+\cos^2 s\,\text{sen}^2\, t+\text{sen}^2\, s\\ &= \cos^2 s(\cos^2 t+\text{sen}^2\, t)+\text{sen}^2\, s\\ &= \cos^2 s+\text{sen}^2\, s = 1\,,\end{aligned}$$

para quaisquer $s,t\in\mathbb{R}$.

Veremos agora que nenhum elipsóide é uma superfície regrada.

De fato, seja

$$r:\begin{cases} x(t)=\alpha t+x_0\\ y(t)=\beta t+y_0\\ z(t)=\gamma t+z_0\end{cases} ;\quad t\in\mathbb{R}\,,$$

uma reta que passa por um ponto (x_0,y_0,z_0) pertencente a $\mathcal{Q}$ e é paralela ao vetor $(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$.

Então,

$$\begin{aligned}&(\alpha t+x_0,\beta t+y_0,\gamma t+z_0)\in\mathcal{Q}\\ \iff\ & \frac{(\alpha t+x_0)^2}{a^2}+\frac{(\beta t+y_0)^2}{b^2}+\frac{(\gamma t+z_0)^2}{c^2}=1\\ \iff\ & \left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)t^2+2\left(\frac{\alpha x_0}{a^2}+\frac{\beta y_0}{b^2}+\frac{\gamma z_0}{c^2}\right)t+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1\\ \iff\ & \left(\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)t+2\left(\frac{\alpha x_0}{a^2}+\frac{\beta y_0}{b^2}+\frac{\gamma z_0}{c^2}\right)\right)t=0\,, \qquad (2)\end{aligned}$$

pois

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1\,,$$

uma vez que $(x_0,y_0,z_0)\in\mathcal{Q}$.

Como

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}>0\,,$$

a equação (2) possui no máximo duas soluções:

$$t = 0 \qquad \text{ou} \qquad t = \frac{-2\left(\dfrac{\alpha x_0}{a^2} + \dfrac{\beta y_0}{b^2} + \dfrac{\gamma z_0}{c^2}\right)}{\dfrac{\alpha^2}{a^2} + \dfrac{\beta^2}{b^2} + \dfrac{\gamma^2}{c^2}}.$$

Provamos, assim, que nenhuma reta que passa por um ponto do elipsóide está inteiramente contida no elipsóide. Logo o elipsóide não é uma superfície regrada. □

2. Hiperbolóide de uma Folha

Os *hiperbolóides de uma folha* na forma canônica de eixo$-OX$, eixo$-OY$ e eixo$-OZ$ são as superfícies dadas, respectivamente, pelas equações de segundo grau abaixo:

$$\boxed{\begin{aligned} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1\,, \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1\,, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1\,, \end{aligned}}$$

onde a, b e c são números reais positivos.

É fácil ver que os hiperbolóides de uma folha na forma canônica são simétricos com respeito à origem e aos três planos coordenados.

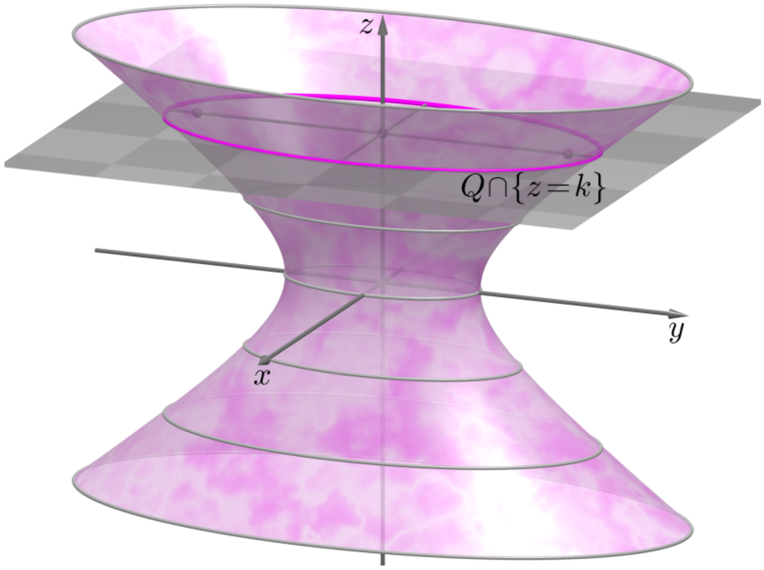

Fig. 5: $\mathcal{Q} \cap \{z = k\}$ é uma elipse de centro $(0, 0, k)$ no plano $z = k$

Vamos analisar o hiperbolóide de uma folha na forma canônica de eixo$-OZ$:

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,.$$

A interseção de $\mathcal{Q}$ com o plano $z = k$, paralelo ao plano XY,

$$\mathcal{Q} \cap \{z = k\} : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{k^2}{c^2} + 1 \\ z = k\,, \end{cases}$$

é uma elipse de centro $(0, 0, k)$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, as seções planas

$$\mathcal{Q} \cap \{x = k\} : \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{a^2} = \dfrac{a^2 - k^2}{a^2} \\ x = k\,, \end{cases}$$

são, para:

• $k \in (-a, a)$, hipérboles

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(\dfrac{a^2-k^2}{a^2}\right)} - \dfrac{z^2}{c^2\left(\dfrac{a^2-k^2}{a^2}\right)} = 1 \\ x = k \end{cases}$$

de centro no ponto $(k, 0, 0)$, reta focal paralela ao eixo$-OY$ e assíntotas $\begin{cases} z = \pm\dfrac{c}{b}\,y \\ x = k \end{cases}$, pois, neste caso, $\dfrac{a^2-k^2}{a^2} > 0$;

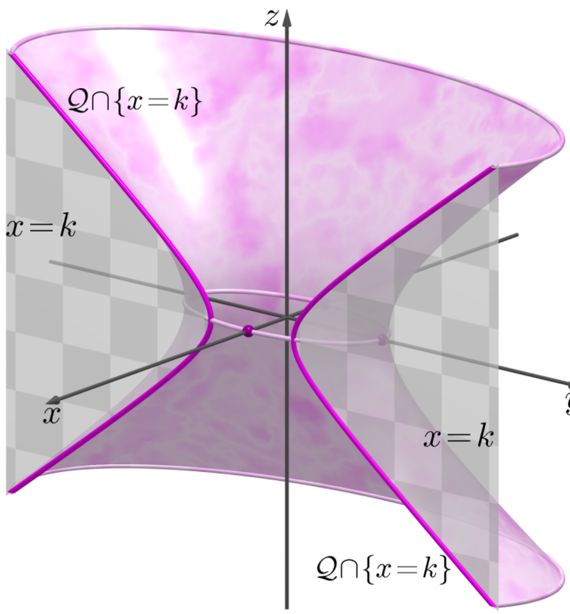

Fig. 6: Hipérbole de centro $(k, 0, 0)$ no plano $x = k$ obtida como a interseção $\mathcal{Q} \cap \{x = k\}$

• $k = a$, duas retas $\begin{cases} y = \pm\dfrac{b}{c}\,z \\ x = a \end{cases}$ concorrentes que se intersectam no ponto $(a, 0, 0)$;

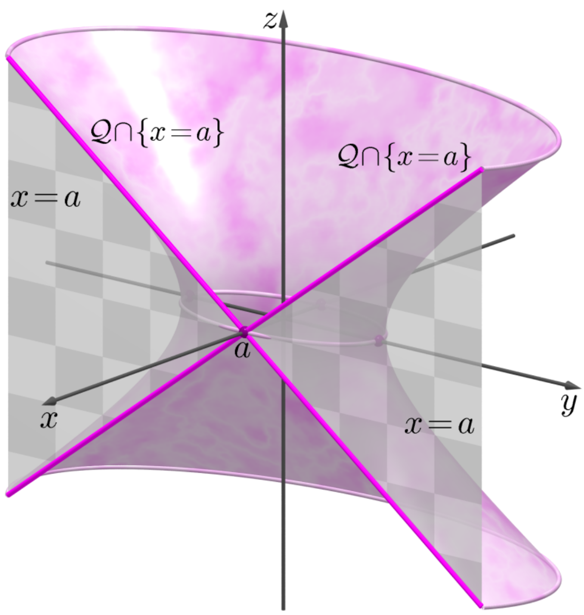

Fig. 7: Retas concorrentes no ponto $(a, 0, 0)$ obtidas como a interseção $\mathcal{Q} \cap \{x = a\}$

• $k=-a$, duas retas $\begin{cases} y=\pm\dfrac{b}{c}\,z \\ x=-a \end{cases}$ concorrentes que se intersectam no ponto $(-a,0,0)$;

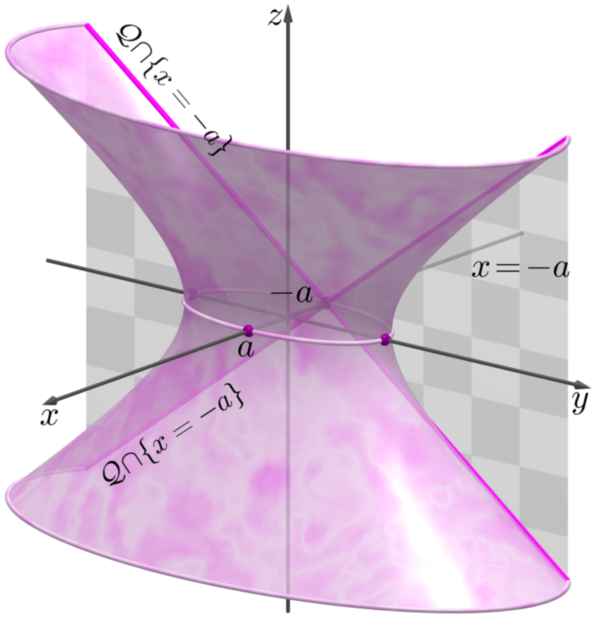

Fig. 8: Retas concorrentes no ponto $(-a,0,0)$ obtidas como a interseção $\mathcal{Q}\cap\{x=-a\}$

• $|k|>a$, hipérboles

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2\left(\dfrac{k^2-a^2}{a^2}\right)}-\dfrac{y^2}{b^2\left(\dfrac{k^2-a^2}{a^2}\right)}=1 \\ x=k \end{cases}$$

de centro $(k,0,0)$, reta-focal paralela ao eixo$-OZ$ e assíntotas $\begin{cases} y=\pm\dfrac{b}{c}\,z \\ x=k \end{cases}$, pois, neste caso, $\dfrac{k^2-a^2}{a^2}>0$.

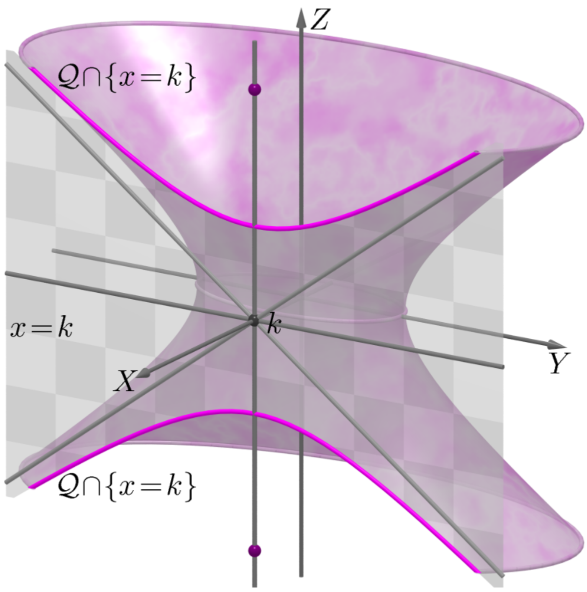

Fig. 9: Interseção $\mathcal{Q}\cap\{x=k\}$ para $|k|>a$

Finalmente, a interseção de $\mathcal{Q}$ com os planos $y = k$, paralelos ao plano XZ,

$$\mathcal{Q} \cap \{y = k\} : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{b^2} = \dfrac{b^2 - k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases}$$

nos dá, para:

- $k \in (-b, b)$, uma hipérbole de centro $(0, k, 0)$, reta focal paralela ao eixo$-OX$ e assíntotas $\begin{cases} z = \pm\dfrac{c}{a}\,x \\ y = k \end{cases}$, uma vez que $\dfrac{b^2 - k^2}{b^2} > 0$;

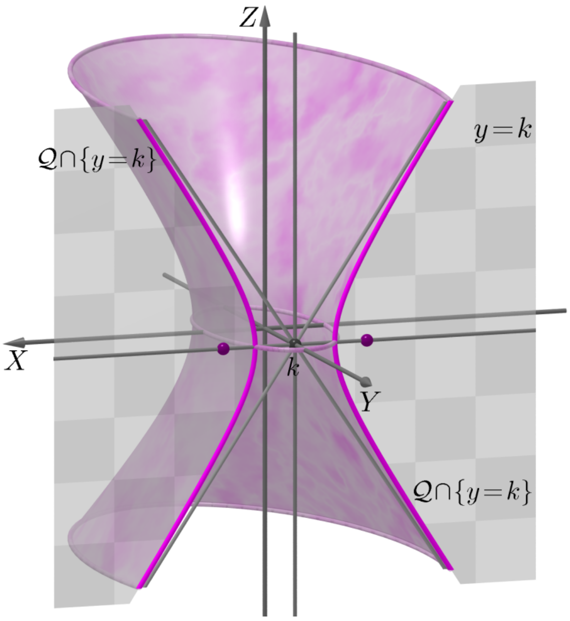

Fig. 10: Interseção $\mathcal{Q} \cap \{y = k\}$ para $-b < k < b$

- $k = b$, duas retas $\begin{cases} z = \pm\dfrac{c}{a}\,x \\ y = b \end{cases}$ que se cortam no ponto $(0, b, 0)$;

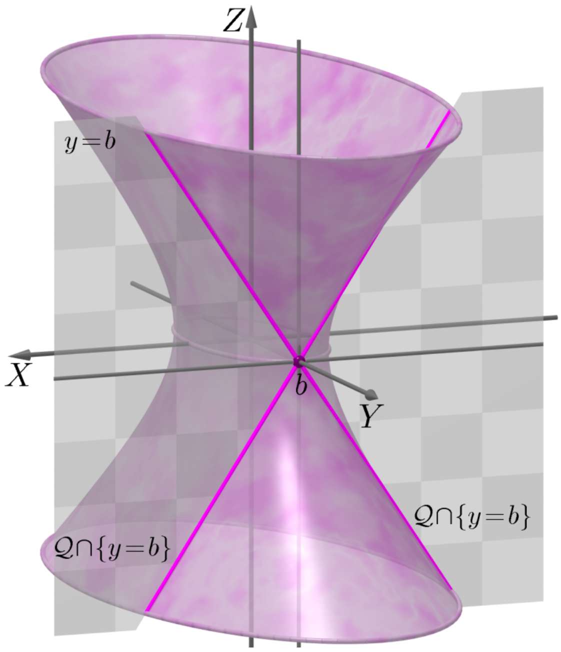

Fig. 11: Interseção $\mathcal{Q} \cap \{y = b\}$

• $k = -b$, duas retas $\begin{cases} z = \pm\dfrac{c}{a}x \\ y = -b \end{cases}$ que se cortam no ponto $(0, -b, 0)$;

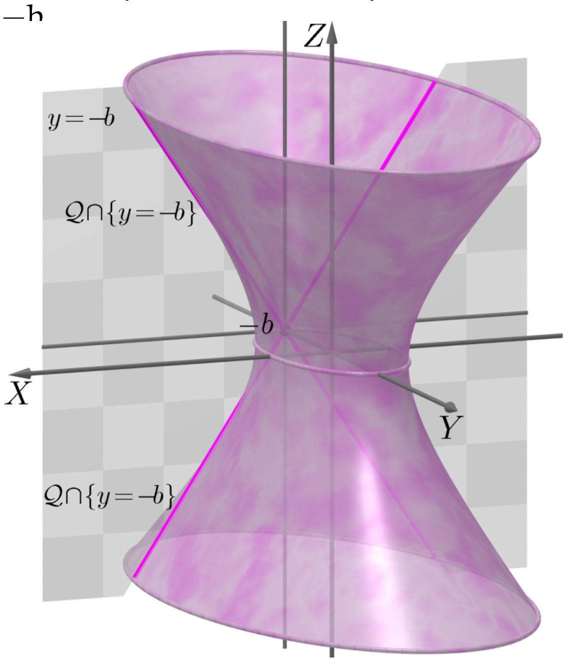

Fig. 12: Interseção $\mathcal{Q}\cap\{y=-b\}$

• $|k| > b$, uma hipérbole

$$\mathcal{Q}\cap\{y=k\}: \begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2\left(\dfrac{k^2-b^2}{b^2}\right)} - \dfrac{x^2}{a^2\left(\dfrac{k^2-b^2}{b^2}\right)} = 1 \\ y = k \end{cases}$$

de centro $(0, k, 0)$, reta focal paralela ao eixo$-OZ$ e assíntotas $\begin{cases} x = \pm\dfrac{a}{c}z \\ y = k \end{cases}$, pois $\dfrac{k^2-b^2}{b^2} < 0$.

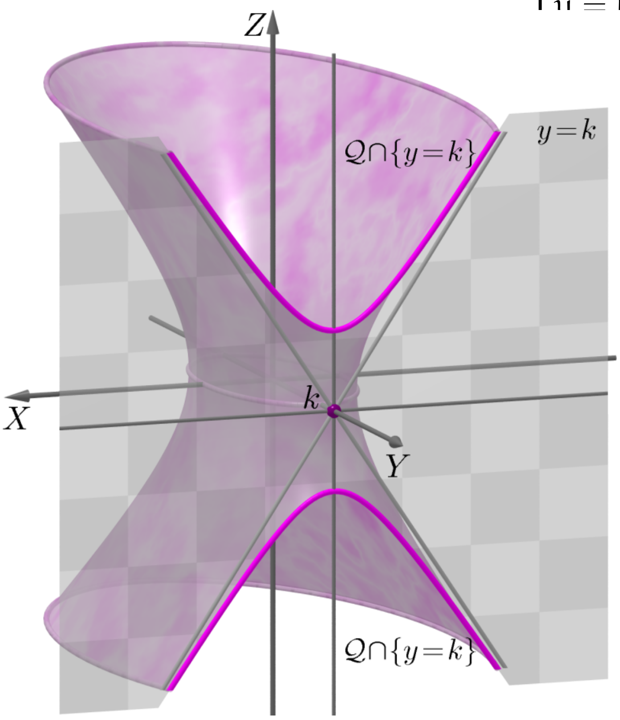

Fig. 13: Interseção $\mathcal{Q}\cap\{y=k\}$, para $k > b$

Para que o hiperbolóide de uma folha de eixo$-OZ$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,,$$

seja uma superfície de revolução, devemos ter $a = b$, pois, neste caso, as seções planas

$$\mathcal{Q} \cap \{z = k\} = \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2\left(1 + \dfrac{k^2}{c^2}\right) \\ z = k \end{cases}$$

são círculos de centros $(0, 0, k)$ pertencentes ao eixo$-OZ$. Assim, o hiperbolóide de uma folha,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,,$$

é uma superfície de revolução de eixo$-OZ$, que possui como geratriz a hipérbole

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0\,, \end{cases}$$

ou um de seus ramos

$$\mathcal{C}^+ : \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad ; \quad y > 0 \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{C}^+ : \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad ; \quad y < 0$$

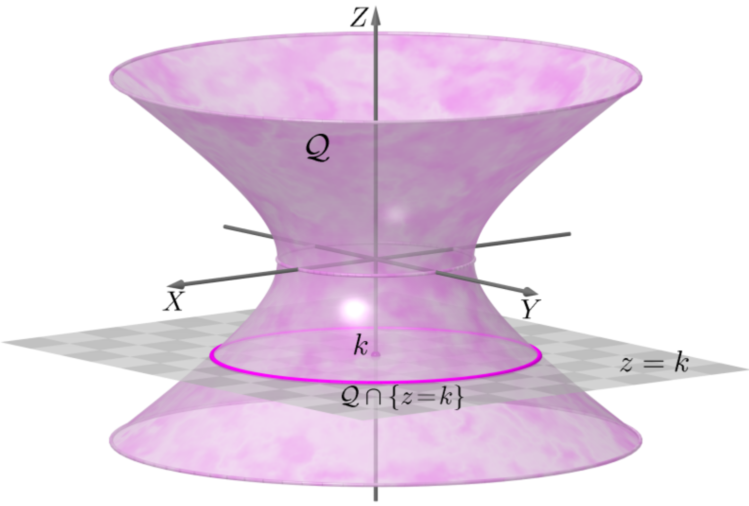

Fig. 14: Interseção $\mathcal{Q} \cap \{z = k\}$, $a = b$

Sendo

$$\mathcal{C}^+ : \begin{cases} x(s) = 0 \\ y(s) = a \cosh s \\ z(s) = c\, \text{senh}\, s \end{cases} \quad , \quad s \in \mathbb{R}$$

uma parametrização da geratriz $\mathcal{C}^+$, obtemos que

$$\mathcal{Q} : \begin{cases} x(s,t) = a \cosh s \cos t \\ y(s,t) = a \cosh s\, \text{sen}\, t \\ z(s,t) = c\, \text{senh}\, s \end{cases} \quad , \quad s, t \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização do hiperbolóide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

de uma folha de revolução de eixo$-OZ$, uma vez que o paralelo, contido no plano $z = c$ senh s, é um círculo de centro $(0,0,c$ senh $s)$ e raio igual a a cosh s.

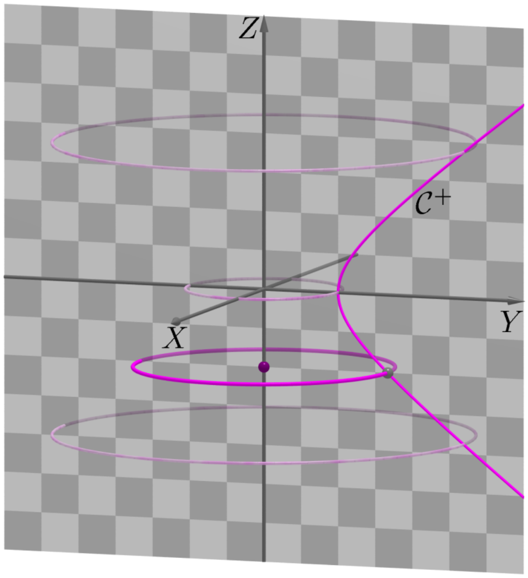

Fig. 15: Hipérbole $\mathcal{C}^+$ e paralelo no plano $z = c\,\text{senh}\,s$

Por analogia, podemos verificar que:

$$\mathcal{Q}:\begin{cases} x(s,t)=a\cosh s\cos t\\ y(s,t)=b\cosh s\,\text{sen}\,t \\ z(s,t)=c\,\text{senh}\,s\end{cases},\quad s,t\in\mathbb{R},$$

é uma parametrização do hiperbolóide de uma folha de eixo$-OZ$ na forma canônica:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Proposição 1

O hiperbolóide de uma folha de eixo$-OZ$

$$\mathcal{Q}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

é uma superfície regrada gerada pelas duas famílias de retas

$$\{r_k \mid k\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\}\quad e \quad \{s_k \mid k\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\},$$

onde:

$$r_k:\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=k\left(1+\dfrac{y}{b}\right)\\ k\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=1-\dfrac{y}{b}\end{cases},\quad k\in\mathbb{R}\qquad e\qquad r_\infty:\begin{cases} y=-b\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0,\end{cases}$$

e

$$s_k:\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=k\left(1+\dfrac{y}{b}\right)\\ k\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=1-\dfrac{y}{b}\end{cases},\quad k\in\mathbb{R}\qquad e\qquad s_\infty:\begin{cases} y=-b\\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0.\end{cases}$$

Além disso, as retas de cada família são reversas entre si e

$$r_k\cap s_k=\left\{\left(\frac{2ak}{1+k^2},\frac{1-k^2}{1+k^2},0\right)\right\},\quad k\in\mathbb{R},\quad e\quad r_\infty\cap s_\infty=\{(0,-b,0)\}.$$

Prova.

Um ponto (x,y,z) pertence a $\mathcal{Q}$ se, e só se,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}\iff\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right). \tag{3}$$

Seja $(x, y, z) \in r_k$, $k \in \mathbb{R}$. Então,

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = k\left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right),$$

e, portanto, $(x, y, z) \in \mathcal{Q}$.

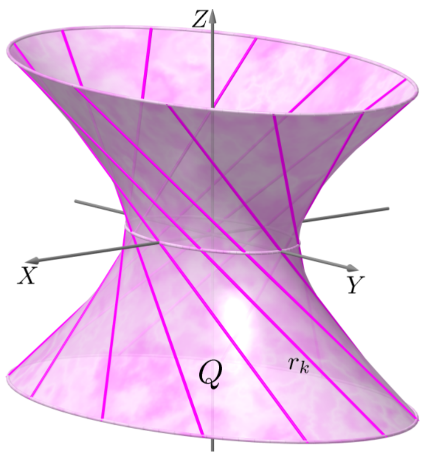

Fig. 16: $Q = \bigcup\{r_k \mid k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$

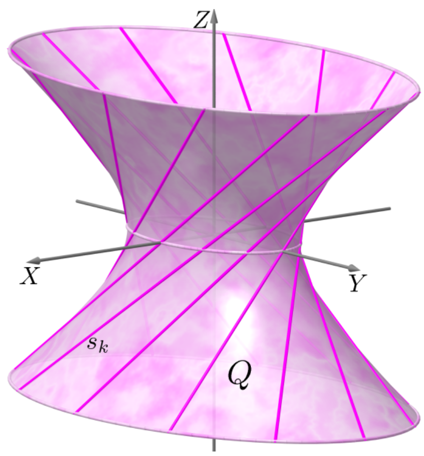

Fig. 17: $Q = \bigcup\{s_k \mid k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$

Seja $(x, y, z) \in r_\infty$. Então,

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 0 = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right),$$

ou seja, $(x, y, z) \in \mathcal{Q}$.

Vamos agora provar que todo ponto (x, y, z) pertencente a $\mathcal{Q}$ pertence a uma das retas r_k, $k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

De fato, se $y \neq -b$, tome $k = \dfrac{x/a - z/c}{1 + y/b}$. Então,

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = k\left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

Além disso, como $(x, y, z) \in \mathcal{Q}$, isto é, satisfaz a igualdade (3), temos que:

$$k\left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right) \Longleftrightarrow k\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

Logo $(x, y, z) \in r_k$, $k \in \mathbb{R}$.

Se $(x, y, z) \in S$ e $y = -b$, então, por (3),

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 0 \Longleftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0.$$

Se $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0$, temos que $(x, y, z) \in r_\infty$. Mas se $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \neq 0$ e $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$, então $(x, y, z) \in r_k$, onde $k = \dfrac{1 - y/b}{x/a + z/c}$, pois

$$k\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b} \quad \text{e} \quad \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 0 = k\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

Com isto provamos que a família de retas $\{r_k \mid k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$ gera a superfície $\mathcal{Q}$.

Prova-se, de modo análogo, que a superfície $\mathcal{Q}$ é gerada pela família de retas $\{s_k \mid k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$.

Para completar a demonstração precisamos paramatrizar as retas r_k e s_k, $k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

A reta r_k, $k \in \mathbb{R}$ é paralela ao vetor

$$\begin{vmatrix} 1/a & -k/b & -1/c \\ k/a & 1/b & k/c \end{vmatrix} = \left(\frac{1-k^2}{bc} \,,\, \frac{-2k}{ac} \,,\, \frac{1+k^2}{ab} \right),$$

e a reta r_∞ é paralela ao vetor

$$\begin{vmatrix} 0 & -1/b & 0 \\ 1/a & 0 & 1/c \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{bc} \,,\, 0 \,,\, \frac{1}{ab} \right).$$

Fazendo $z = 0$ nas equações dos planos que determinam as retas r_k, $k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ obtemos que:

$$r_k \cap \{z = 0\} = \left\{ \left(\frac{2ak}{1+k^2} \,,\, \frac{(1-k^2)b}{1+k^2} \,,\, 0 \right) \right\} \quad \text{e} \quad r_\infty \cap \{z = 0\} = \{(0, -b, 0)\}.$$

Logo,

$$r_k = \left\{ \left(\frac{1-k^2}{bc}\, t + \frac{2ak}{1+k^2} \,,\, \frac{-2kt}{ac} + \frac{(1-k^2)b}{1+k^2} \,,\, \frac{(1+k^2)t}{ab} \right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad k \in \mathbb{R},$$

e

$$r_\infty = \left\{ \left(-\frac{t}{bc} \,,\, -b \,,\, \frac{t}{ab} \right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

A reta s_k, $k \in \mathbb{R}$, é paralela ao vetor

$$\begin{vmatrix} k/a & 1/b & -k/c \\ 1/a & -k/b & 1/c \end{vmatrix} = \left(\frac{1-k^2}{bc} \,,\, \frac{-2k}{ac} \,,\, \frac{-(1+k^2)}{ab} \right),$$

e a reta s_∞ é paralela ao vetor

$$\begin{vmatrix} 1/a & 0 & -1/c \\ 0 & -1/b & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{bc}, 0, \frac{-1}{ab} \right)$$

Fazendo $z = 0$ nas equações dos planos que determinam as retas s_k, $k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, obtemos que:

$$s_k \cap \{z = 0\} = \left\{ \left(\frac{2ak}{1+k^2} \,,\, \frac{(1-k^2)b}{1+k^2} \,,\, 0 \right) \right\} \quad \text{e} \quad s_\infty = \{(0, -b, 0)\}.$$

Assim,

$$s_k = \left\{ \left(\frac{1-k^2}{bc}\, s + \frac{2ak}{1+k^2} \,,\, \frac{-2ks}{ac} + \frac{1-k^2}{1+k^2}\, b \,,\, \frac{-(1+k^2)}{ab}\, s \right) \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}, \quad k \in \mathbb{R},$$

e

$$s_\infty = \left\{ \left(-\frac{s}{bc} \,,\, -b \,,\, -\frac{s}{ab} \right) \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}$$

Como as retas r_k e s_k, $k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, se intersectam e os seus vetores paralelos não são múltiplos, temos que

$$r_k \cap s_k = \left\{ \left(\frac{2ak}{1+k^2} \,,\, \frac{(1-k^2)b}{1+k^2} \,,\, 0 \right) \right\}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad r_\infty \cap s_\infty = \{(0, -b, 0)\}.$$

Por fim, vamos verificar que as retas r_k e $r_{k'}$, com $k \neq k'$, são retas reversas. Para isso, basta mostrar que os vetores paralelos às retas r_k e $r_{k'}$ não são múltiplos e $r_k \cap r_{k'} = \varnothing$.

Suponhamos, por absurdo, que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} \frac{1-k^2}{bc} &= \lambda \frac{1-k'^2}{bc}, \\ \frac{-2k}{ac} &= \lambda \frac{-2k'}{ac}, \\ \frac{1+k^2}{ab} &= \lambda \frac{1+k'^2}{ab}. \end{aligned}$$

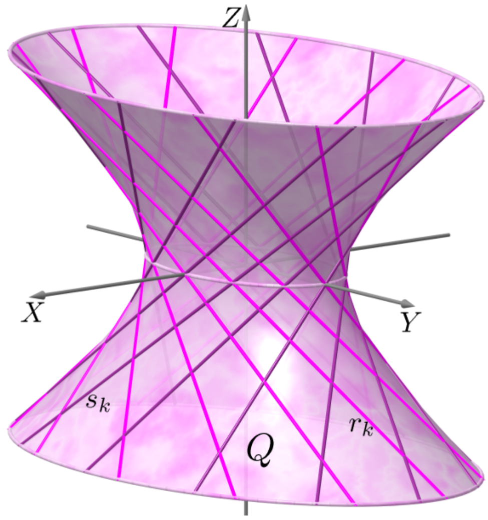

Fig. 18: Interseções $r_k \cap s_k$

Logo

$$\begin{aligned} k &= \lambda k', \\ 1+\lambda^2 k'^2 &= \lambda + \lambda k'^2, \\ 1-\lambda^2 k'^2 &= \lambda - \lambda k'^2 \end{aligned}$$

e, portanto, $\lambda = 1$, o que é uma contradição, pois $k \neq k'$.

Suponhamos que existe $(x, y, z) \in r_k \cap r_{k'}$, $k \neq k'$. Então:

$$k\left(1+\frac{y}{b}\right) = \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = k'\left(1+\frac{y}{b}\right) \qquad (4)$$

e

$$k\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right) = 1-\frac{y}{b} = k'\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right). \qquad (5)$$

Como $y \neq -b$ ou $\frac{x}{a}+\frac{z}{c} \neq 0$, temos, por (4) e (5), que $k = k'$, o que é uma contradição.

Resta mostrar que as retas r_k, $k \in \mathbb{R}$, e r_∞ são reversas e também que duas retas quaisquer da família $\{s_k \mid k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$ são reversas, o que se faz de modo análogo ao caso que analisamos acima. ■

Veremos como obter geometricamente as retas que geram o hiperbolóide de uma folha

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Seja r uma reta contida em $\mathcal{Q}$ e seja $(x_0, y_0, z_0) \in r$. Suponhamos que r é paralela ou está contida no plano $z = 0$. Neste caso, existiria um vetor não-nulo $(\alpha, \beta, 0)$ tal que

$$r = \{(\alpha t + x_0, \beta t + y_0, \gamma t + z_0) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Como $r \subset S$, temos que

$$\frac{(\alpha t + x_0)^2}{a^2} + \frac{(\beta t + y_0)^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1, \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Desenvolvendo a expressão acima, vemos que:

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right) t^2 + \left(\frac{2\alpha x_0}{a^2} + \frac{2\beta y_0}{b^2}\right) t = 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, pois $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1$, o que é uma contradição, uma vez que $\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} \neq 0$.

Logo toda reta contida em $\mathcal{Q}$ intersecta o plano XY em apenas um ponto.

Sejam $r \subset \mathcal{Q}$ e $(x_0, y_0, 0) \in r \cap$ plano XY.

Então $(x_0, y_0, 0)$ pertence à elipse

$$\mathcal{E} = \mathcal{Q} \cap \{z = 0\} = \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0\,. \end{cases}$$

Seja (α, β, γ) um vetor não-nulo paralelo à reta r. Como $r \subset \mathcal{Q}$, temos que

$$\frac{(\alpha t + x_0)^2}{a^2} + \frac{(\beta t + y_0)^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} t^2 = 1 \iff \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2}\right) t^2 + \left(\frac{2\alpha x_0}{a^2} + \frac{2\beta y_0}{b^2}\right) t = 0\,,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, pois $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$.

Logo $\dfrac{\alpha^2}{a^2} + \dfrac{\beta^2}{b^2} - \dfrac{\gamma^2}{c^2} = 0$ e $\dfrac{2\alpha x_0}{a^2} + \dfrac{2\beta y_0}{b^2} = 0$.

Assim,

$$(\alpha, \beta, 0) \parallel \left(-\frac{y_0}{b^2}, \frac{x_0}{a^2}, 0\right) \parallel \left(-\frac{a y_0}{b}, \frac{b x_0}{a}, 0\right).$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $(\alpha, \beta, 0) = \left(-\dfrac{a y_0}{b}, \dfrac{b x_0}{a}, 0\right)$.

Como $\dfrac{\gamma^2}{c^2} = \dfrac{\alpha^2}{a^2} + \dfrac{\beta^2}{b^2}$, temos que:

$$\frac{\gamma^2}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1\,,$$

ou seja, $\gamma = \pm c$.

Já provamos que um vetor tangente à elipse $\mathcal{E}$ no ponto $(x_0, y_0, 0)$ é o vetor $\left(-\dfrac{a y_0}{b}, \dfrac{b x_0}{a}, 0\right)$, pois a reta tangente a $\mathcal{E}$ nesse ponto é dada por:

$$\begin{cases} b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = a^2 b^2 \\ z = 0\,. \end{cases}$$

Mostramos assim que as únicas retas contidas em $\mathcal{Q}$ que passam pelo ponto $(x_0, y_0, 0)$ da elipse $\mathcal{E}$ são as retas:

$$r^+_{(x_0,y_0,0)} : \begin{cases} x(t) = -\dfrac{a y_0}{b} t + x_0 \\ y(t) = \dfrac{b x_0}{a} t + y_0 \\ z(t) = ct \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}\,, \qquad \text{e} \qquad r^-_{(x_0,y_0,0)} : \begin{cases} x(t) = -\dfrac{a y_0}{b} t + x_0 \\ y(t) = \dfrac{b x_0}{a} t + y_0 \\ z(t) = -ct \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

onde $(\alpha, \beta, 0) = \left(-\dfrac{a y_0}{b}, \dfrac{b x_0}{a}, 0\right)$ é um vetor tangente à elipse $\mathcal{E}$ no ponto $(x_0, y_0, 0)$ tal que $\dfrac{\alpha^2}{a^2} + \dfrac{\beta^2}{b^2} = 1$.

Uma maneira mais simples de obter as famílias de retas que geram o hiperbolóide de uma folha,

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,,$$

consiste em parametrizar a elipse

$$\gamma = \mathcal{Q} \cap \{z = 0\} : \begin{cases} x(s) = a\,\cos s \\ y(s) = b\,\text{sen}\,s \\ z(s) = 0 \end{cases}, \quad s \in [0, 2\pi)\,,$$

e calcular o vetor velocidade $\gamma'(s) = (-a\,\text{sen}\,s\,,\ b\,\cos s\,,\ 0)$ de γ em s.

Então, segundo as equações anteriores, temos:

$$\begin{aligned} r_s^+ &= r^+_{(a\cos s, b\,\text{sen}\,s, 0)} \\ &= \{(a\,\cos s\,,\ b\,\text{sen}\,s\,,\ 0) + (-a\,\text{sen}\,s\,,\ b\,\cos s\,,\ c)t \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\gamma(s) + (\gamma'(s) + ce_3)t \mid t \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} r_s^- &= r^-_{(a\cos s, b\,\text{sen}\,s, 0)} \\ &= \{(a\,\cos s\,,\ b\,\text{sen}\,s\,,\ 0) + (-a\,\text{sen}\,s\,,\ b\,\cos s\,,\ -c)t \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\gamma(s) + (\gamma'(s) - ce_3)t \mid t \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

pois, se $(x_0, y_0, 0) = (a\,\cos s\,,\ b\,\text{sen}\,s\,,\ 0)$, então

$$\left(-\frac{ay_0}{b}\,,\ \frac{bx_0}{a}\,,\ 0\right) = (-a\,\text{sen}\,s\,,\ b\,\cos s\,,\ 0) = \gamma'(s)\,.$$

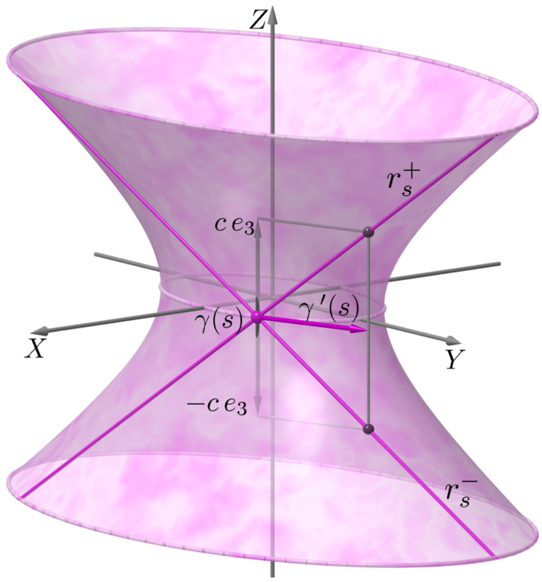

Fig. 19: $\gamma'(s)$ tangente à elipse $\mathcal{E} \subset Q$

Observação 2

Seja

$$(x_0, y_0, 0) = \left(\frac{2ak}{1+k^2}\,,\ \frac{(1-k^2)b}{1+k^2}, 0\right), \quad k \in \mathbb{R}\,,$$

um ponto pertencente à elipse $\mathcal{E}$.

Como as retas r_k e s_k contidas em $\mathcal{Q}$ passam pelo ponto $(x_0, y_0, 0)$ e pelo fato de existirem apenas duas retas contidas em $\mathcal{Q}$ que passam por este ponto, vemos que $s_k = r^+_{(x_0,y_0,0)}$ e $r_k = r^-_{(x_0,y_0,0)}$, pois

$$\left(\frac{-ay_0}{b}, \frac{bx_0}{a}, c\right) = \frac{-abc}{1+k^2}\left(\frac{1-k^2}{bc}, \frac{-2k}{ac}, \frac{-(1+k^2)}{ab}\right).$$

De modo análogo, temos que $s_\infty = r^+_{(0,-b,0)}$ e $r_\infty = r^-_{(0,-b,0)}$, uma vez que

$$(a, 0, c) = -abc\left(\frac{-1}{bc}, 0, \frac{-1}{ab}\right).$$

Exemplo 1

Determine as duas famílias de retas que geram o hiperbolóide de uma folha de eixo−OZ:

$$S : x^2 + y^2 - \frac{z^2}{2} = 1.$$

Esta superfície é de revolução? Parametrize S de duas maneiras diferentes.

Solução.

Seja

$$\gamma : \begin{cases} x(s) = \cos s \\ y(s) = \operatorname{sen} s \\ z(s) = 0 \end{cases}, \quad s \in [0, 2\pi),$$

uma parametrização do círculo

$$S \cap \{z = 0\} : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Sendo $\gamma'(s) = (-\operatorname{sen} s, \cos s, 0)$ o vetor tangente a γ em s e $c = \sqrt{2}$, obtemos que:

$$\begin{aligned} r_s^+ &= \left\{\gamma(s) + \left(\gamma'(s) + \sqrt{2}\, e_3\right) t \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{(\cos s - t \operatorname{sen} s, \operatorname{sen} s + t\cos s, \sqrt{2}\, t) \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}, \quad s \in [0, 2\pi), \\ \text{e} \qquad r_s^- &= \left\{\gamma(s) + \left(\gamma'(s) - \sqrt{2}\, e_3\right) t \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{(\cos s - t \operatorname{sen} s, \operatorname{sen} s + t\cos s, -\sqrt{2}\, t) \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}, \quad s \in [0, 2\pi), \end{aligned}$$

são as duas famílias de retas que geram a superfície S.

Como S é uma superfície de revolução de eixo−OZ, pois $a = b = 1$, e tem por geratriz o ramo de hipérbole

$$\beta : \begin{cases} y^2 - \dfrac{z^2}{2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}, \quad y > 0,$$

podemos parametrizá-la da seguinte maneira:

$$S : \begin{cases} x(s,t) = \cosh s\ \cos t \\ y(s,t) = \cosh s\ \text{sen}\, t \\ z(s,t) = \sqrt{2}\ \text{senh}\, s \end{cases}, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, usando a família de retas $\{r_s^+ \mid s \in \mathbb{R}\}$ que geram S, obtemos que

$$S : \begin{cases} x(s,t) = \cos s - t\,\text{sen}\, s \\ y(s,t) = \text{sen}\, s + t\cos s \\ z(s,t) = \sqrt{2}\, t \end{cases}, \quad s,t \in \mathbb{R},$$

é outra parametrização de S. $\square$

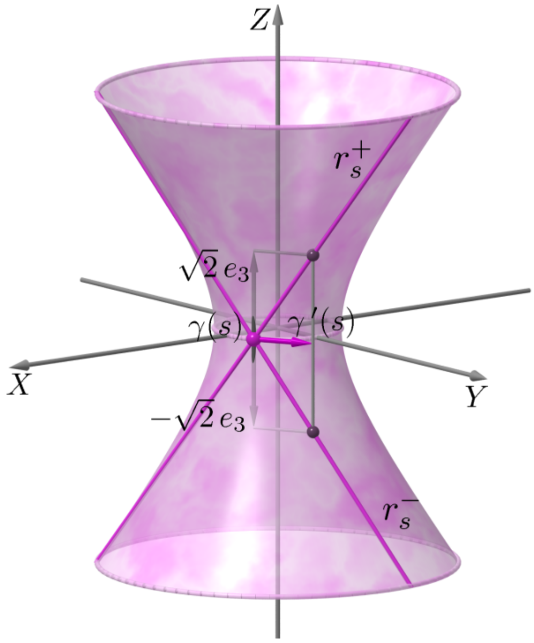

Fig. 20: Vetor $\gamma'(s)$ tangente ao círculo γ no ponto $\gamma(s)$

Exemplo 2

Considere o hiperbolóide de uma folha de eixo$-OX$:

$$S : 4x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 4\,.$$

Dê duas parametrizações diferentes de S e determine as retas contidas em S que passam pelo ponto $(1,2,1) \in S$.

Solução.

No hiperbolóide de eixo$-OX$,

$$S : x^2 - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1\,,$$

vemos que $a = 1$, $b = 4$ e $c = 2$.

A elipse

$$\gamma : S \cap \{y = 0\} : \begin{cases} x^2 + \dfrac{z^2}{4} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

pode ser parametrizada da seguinte maneira:

$$\gamma : \begin{cases} x(s) = \cos s \\ y(s) = 0 \\ z(s) = 2\,\text{sen}\, s \end{cases}, \quad s \in [0, 2\pi)$$

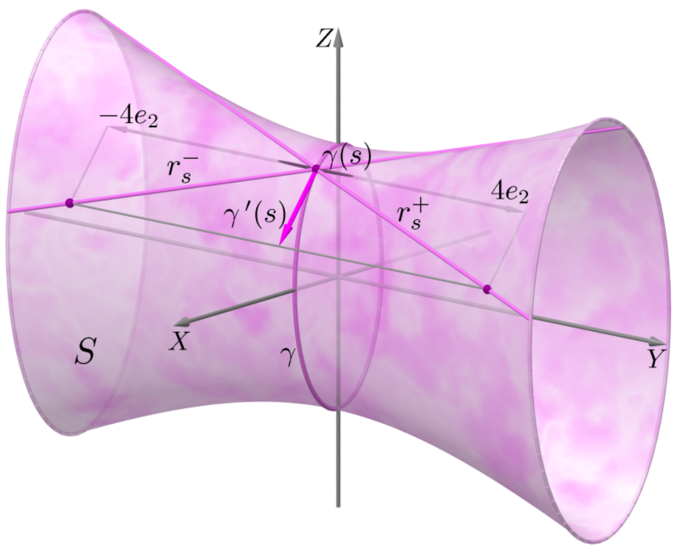

Fig. 21: Hiperbolóide S e retas r_s^+, r_s^- passando por $\gamma(s)$

Então,

$$r_s^+ = \{\gamma(s) + (\gamma'(s) + 4e_2)t \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad s \in [0, 2\pi)$$

e

$$r_s^- = \{\gamma(s) + (\gamma'(s) - 4e_2)t \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad s \in [0, 2\pi)$$

são as duas famílias de retas que geram S.

Assim,

$$S : \begin{cases} x(s,t) = \cos s - t \operatorname{sen} s \\ y(s,t) = 4t \\ z(s,t) = 2\operatorname{sen} s + 2t\cos s \end{cases}, \quad s \in [0, 2\pi), \quad t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização de S dada pela família de retas $\{r_s^+ \mid s \in [0, 2\pi)\}$

O hiperbolóide de uma folha S não é uma superfície de revolução, pois $a \neq c$, ou seja, as seções planas

$$S \cap \{y = k\} : \begin{cases} x^2 + \dfrac{z^2}{4} = 1 + \dfrac{k^2}{16} \\ y = k \end{cases}$$

são elipses e não cícrulos.

Mas S pode ser parametrizada também da seguinte maneira:

$$S : \begin{cases} x(s,t) = \cosh s \cos t \\ y(s,t) = 4 \operatorname{senh} s \\ z(s,t) = 2 \cosh s \operatorname{senh} t \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Seja $P = (1, 2, 1) \in S$. Se $P \in r_s^+$, temos que

$$\begin{cases} \cos s - t \operatorname{sen} s = 1 \\ 4t = 2 \\ 2\operatorname{sen} s + 2t\cos s = 1\,. \end{cases}$$

Logo $t = \dfrac{1}{2}$ e:

$$\begin{cases} 2\cos s - \operatorname{sen} s = 2 \\ 2\operatorname{sen} s + \cos s = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\cos s - \operatorname{sen} s = 2 \\ 2\cos s + 4\operatorname{sen} s = 2 \end{cases} \Longrightarrow \operatorname{sen} s = 0 \quad \text{e} \quad \cos s = 1 \Longrightarrow s = 0\,.$$

Ou seja, $P = (1, 2, 1) \in r_0^+ = \{(1, 4t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Por outro lado, se $P \in r_{s_0}^-$, temos que

$$\begin{cases} \cos s_0 - t \operatorname{sen} s_0 = 1 \\ -4t = 2 \\ 2\operatorname{sen} s_0 + 2t\cos s_0 = 1\,. \end{cases}$$

Assim, $t = -\dfrac{1}{2}$ e:

$$\begin{cases} 2\cos s_0 + \operatorname{sen} s_0 = 2 \\ 2\operatorname{sen} s_0 - \cos s_0 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\cos s_0 + \operatorname{sen} s_0 = 2 \\ -2\cos s_0 + 4\operatorname{sen} s_0 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \operatorname{sen} s_0 = \frac{4}{5} \quad \text{e} \quad \cos s_0 = \frac{3}{5}\,.$$

Então,

$$P \in r_{s_0}^- = \left\{ \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}t\,,\ -4t\,,\ \frac{8}{5} + \frac{6}{5}t \right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}. \quad \square$$

Exemplo 3

Mostre que a interseção do plano $\pi : 4x - 5y - 10z = 20$ *com o hiperbolóide de uma folha*

$$S : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$$

consiste de duas retas, e determine as equações paramétricas dessas retas.

Solução.

Temos que:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1 \iff 16x^2 - 4 \times 25z^2 = 25 \times 16 - 25y^2$$
$$\iff (4x - 10z)(4x + 10z) = 25(4 - y)(4 + y)\,.$$

Logo $(x, y, z) \in S \cap \pi$ se, e só se, $4x - 10z = 20 + 5y$ e

$$(20 + 5y)(4x + 10z) = 25(4 - y)(4 + y) \iff (4 + y)(4x + 10z) = 5(4 - y)(4 + y)\,,$$

Portanto, se $y \neq -4$, temos que

$$4x + 10z = 20 - 5y\,,$$

ou seja, $(x, y, z) \in \pi' : 4x + 5y + 10z = 20$.

Assim, (x, y, z) pertence à reta

$$\ell : \begin{cases} 4x - 5y - 10z = 20 \\ 4x + 5y + 10z = 20\,, \end{cases}$$

que é paralela ao vetor

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 & -10 \\ 4 & 5 & 10 \end{vmatrix} = (0, -80, 40) \parallel (0, -2, 1)$$

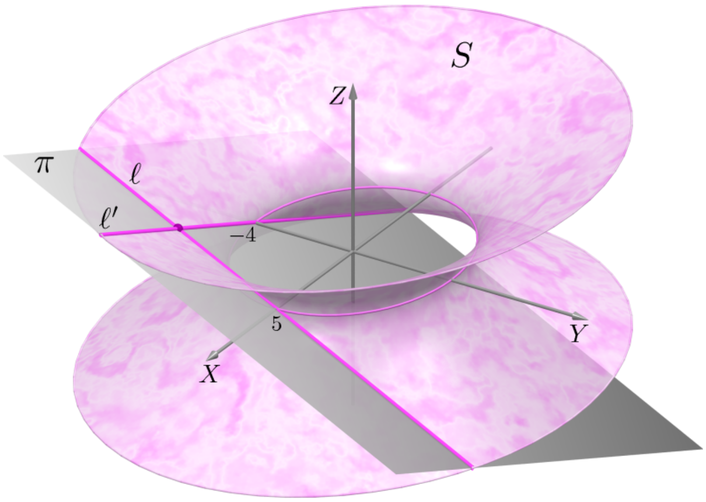

Fig. 22: Hiperbolóide S, plano π e retas ℓ e ℓ'

e passa pelo ponto $(5, 0, 0)$. Então,

$$\ell = \{(5, -2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset S \cap \pi\,.$$

Seja agora $(x, -4, z) \in \pi$.

Como $4x + 20 - 10z = 20$, obtemos que $x = \frac{5}{2}z$, ou seja, $\pi \cap \{y = -4\}$ é a reta

$$\ell' = \{(5t, -4, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Além disso, temos que $\ell' \subset S$, pois, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{25t^2}{25} + \frac{16}{16} - \frac{4t^2}{4} = 1\,.$$

Logo $\ell' \subset S \cap \pi$.

Provamos, assim, que $S \cap \pi = \ell \cup \ell'$ consiste de duas retas.

Como no hiperbolóide de uma folha de eixo$-OZ$,

$$S : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1\,,$$

$a = 5$, $b = 4$, $c = 2$, e

$$\gamma : \begin{cases} x(s) = 5\cos s \\ y(s) = 4\,\text{sen}\, s \\ z(s) = 0 \end{cases}$$

é uma parametrização da elipse

$$\gamma = \mathcal{Q} \cap \{z = 0\} : \begin{cases} \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \\ z = 0 \end{cases},$$

temos que:

$$r_s^{\pm} = \{\gamma(s) + (\gamma'(s) \pm c e_3) \mid s \in \mathbb{R}\} = \{(5\cos s, 4\,\text{sen}\, s, 0) + (-5\,\text{sen}\, s, 4\cos s, \pm 2)t \mid t \in \mathbb{R}\}$$

são as únicas retas contidas em S.

Assim, sendo $\ell \parallel (0,-2,1) \parallel (0,4,-2)$ e $\ell \cap \{z=0\} = \{(5,0,0)\}$, obtemos que $\ell = r_0^-$, e sendo $\ell' \parallel (5,0,2)$ e $\ell' \cap \{z=0\} = \{(0,-4,0)\}$, vemos que $\ell' = r_{3\pi/2}^+$. □

3. Hiperbolóide de duas folhas

Os *hiperbolóides de duas folhas na forma canônica* de eixo$-OX$, eixo$-OY$ e eixo$-OZ$ são as quádricas definidas, respectivamente, pelas seguintes equações de segundo grau:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1\,, \\ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1\,, \\ -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1\,, \end{aligned}}$$

onde a, b e c são números reais positivos. Essas equações são simétricas em relação à origem e aos três planos coordenados.

Vamos estudar o hiperbolóide de duas folhas de eixo$-OZ$:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,.$$

A interseção de $\mathcal{Q}$ com o plano $z = k$, $k \in \mathbb{R}$, paralelo ao plano XY,

$$\mathcal{Q} \cap \{z = k\} : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{k^2}{c^2} - 1 = \dfrac{k^2 - c^2}{c^2} \\ z = k\,, \end{cases}$$

é:

- o conjunto vazio, para $k \in (-c, c)$;
- o ponto $(0,0,c)$, para $k = c$;
- o ponto $(0,0,-c)$, para $k = -c$;

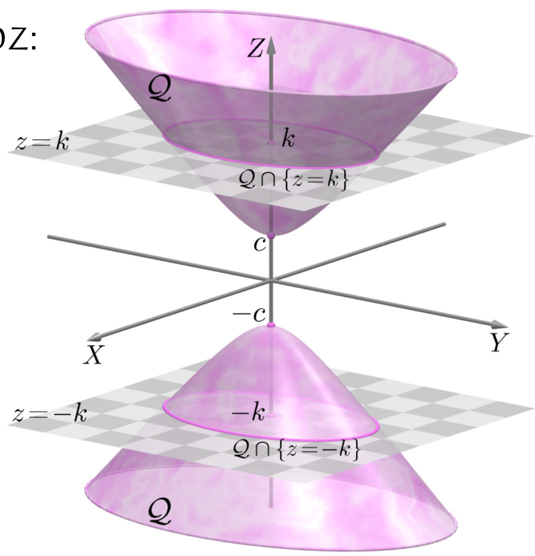

Fig. 23: Interseção de $\mathcal{Q}$ com os planos $z =$cte.

- a elipse

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(\dfrac{k^2-c^2}{c^2}\right)} + \dfrac{y^2}{b^2\left(\dfrac{k^2-c^2}{c^2}\right)} = 1 \\ z = k,, \end{cases}$$

de centro $(0,0,k)$, para $k \in (-\infty, c) \cup (c, +\infty)$.

Por outro lado, as seções planas contidas em planos paralelos ao plano XZ,

$$\mathcal{Q} \cap \{y=k\} : \begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 + \dfrac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases} \iff \mathcal{Q} \cap \{y=k\} : \begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2\left(1+\dfrac{k^2}{b^2}\right)} - \dfrac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{k^2}{b^2}\right)} = 1 \\ y = k \end{cases},$$

são hipérboles de centro $(0,k,0)$, reta-focal paralela ao eixo$-OZ$ e assíntotas $\begin{cases} x = \pm\dfrac{a}{c}z \\ y = k \end{cases}$,

pois $1 + \dfrac{k^2}{b^2} > 0$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

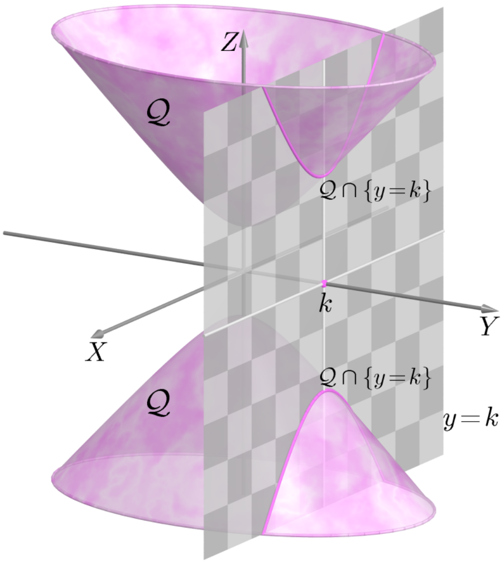

Fig. 24: Interseção de $\mathcal{Q}$ com planos y =cte.

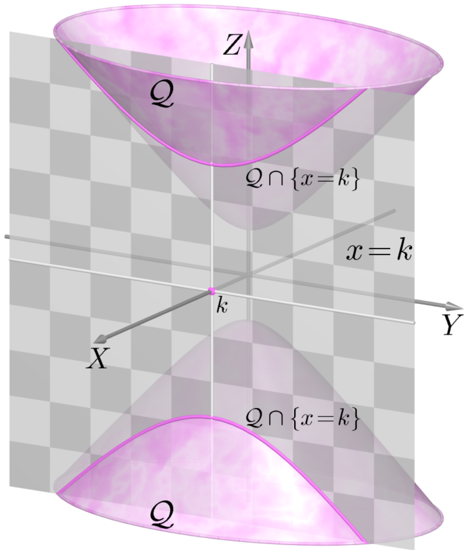

Fig. 25: Interseção de $\mathcal{Q}$ com planos x =cte.

Finalmente, a interseção de $\mathcal{Q}$ com o plano $x = k$, $k \in \mathbb{R}$, paralelo ao plano YZ (fig. 25),

$$\mathcal{Q} \cap \{x=k\} : \begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases} \iff \mathcal{Q} \cap \{x=k\} : \begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2\left(1+\dfrac{k^2}{a^2}\right)} - \dfrac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{k^2}{a^2}\right)} = 1 \\ x = k \end{cases}$$

é uma hipérbole de centro $(k,0,0)$, reta-focal paralela ao eixo$-OZ$ e assíntotas $\begin{cases} y = \pm\dfrac{b}{a}z \\ x = k \end{cases}$,

para todo $k \in \mathbb{R}$.

Um hiperbolóide de duas folhas de eixo$-OZ$ na forma canônica é de revolução se $a = b$.

De fato, neste caso as seções planas

$$\mathcal{Q}\cap\{z=k\}:\begin{cases} x^2+y^2=a^2\left(\dfrac{k^2}{c^2}-1\right)\\ z=k\end{cases}$$

são círculos de centros $(0,0,k)$ pertencentes ao eixo$-OZ$, para $k\in(-\infty,-c)\cup(c,+\infty)$.

Uma geratriz de $\mathcal{Q}$ é o hipérbole

$$\gamma:\begin{cases} -\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases},$$

de centro $(0,0,0)$ e reta-focal$\,=\,$eixo$-OZ$.

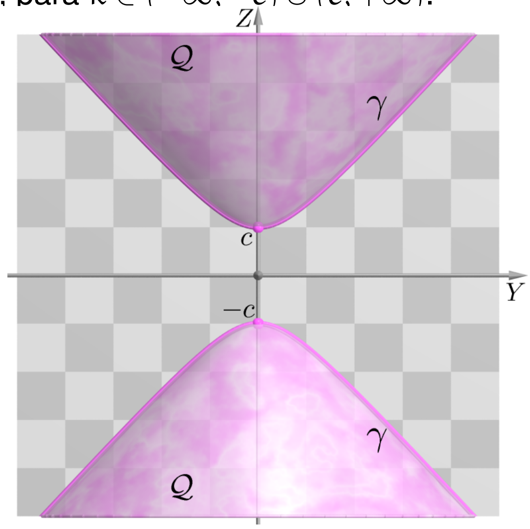

Fig. 26: Geratriz γ de $\mathcal{Q}$

Sendo

$$\gamma:\begin{cases} x(s)=0\\ y(s)=a\ \text{senh}\, s\\ z(s)=\pm c\ \cosh s\end{cases},\quad s\in\mathbb{R}$$

uma parametrização da geratriz γ, obtemos que

$$\mathcal{Q}:\begin{cases} x(s,t)=a\ \text{senh}\, s\ \cos t\\ y(s,t)=a\ \text{senh}\, s\ \text{sen}\, t\\ z(s,t)=\pm c\ \cosh s\end{cases},\quad s,t\in\mathbb{R},$$

é uma parametrização do hiperbolóide de duas folhas de revolução de eixo$-OZ$ na forma canônica:

$$\mathcal{Q}:-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,.$$

Assim, por analogia, podemos verificar que

$$\begin{cases} x(s,t)=a\ \text{senh}\, s\ \cos t\\ y(s,t)=b\ \text{senh}\, s\ \text{sen}\, t\\ z(s,t)=\pm c\ \cosh s\end{cases},\quad s,t\in\mathbb{R},$$

é uma parametrização do hiperbolóide de duas folhas de eixo$-OZ$ na forma canônica:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,.$$

Mas nenhum hiperboloide de duas folhas é uma superfície regrada.

De fato, sejam $(x_0,y_0,z_0)\in\mathcal{Q}$ e

$$r:\begin{cases} x(t)=\alpha t+x_0\\ y(t)=\beta t+y_0\\ z(t)=\gamma t+z_0\end{cases},\quad t\in\mathbb{R},$$

uma reta paralela ao vetor $(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$, que passa pelo ponto (x_0,y_0,z_0).

Como $(\alpha t+x_0,\beta t+y_0,\gamma t+z_0)\in\mathcal{Q}$ se, e só se,

$$-\frac{(\alpha t+x_0)^2}{a^2}-\frac{(\beta t+y_0)^2}{b^2}+\frac{(\gamma t+z_0)^2}{c^2}=1\iff t^2\left(-\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)+2t\left(-\frac{\alpha x_0}{a^2}-\frac{\beta y_0}{b^2}+\frac{\gamma z_0}{c^2}\right)=0,$$

pois $-\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$, obtemos que $r \subset \mathcal{Q}$ se, e só se,

$$-\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 0 \tag{6}$$

e

$$-\frac{\alpha x_0}{a^2} - \frac{\beta y_0}{b^2} + \frac{\gamma z_0}{c^2} = 0\,.$$

Por (6), vemos que $\gamma \neq 0$ pois, caso contrário, teríamos $\alpha = \beta = 0$, uma contradição, visto que $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$.

Por outro lado , se $\gamma \neq 0$, a reta r intersectaria o plano XY, uma contradição, pois $r \subset \mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q} \cap$ plano XY $= \varnothing$.

Provamos, assim, que uma reta intersecta o hiperbolóide de duas folhas em no máximo dois pontos.

4. Cone Elíptico

Os cones elípticos na forma canônica de eixo$-OX$, eixo$-OY$ e eixo$-OZ$ são as superfícies dadas, respectivamente, pelas equações de segundo grau:

$$\boxed{\begin{aligned} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 0\,, \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 0\,, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 0\,, \end{aligned}}$$

onde a, b, c são números reais positivos.

É fácil mostrar que os cones elípticos na forma canônica são simétricos com respeito à origem e aos três planos coordenados.

Vamos analisar as seções planas do cone elíptico de eixo$-OZ$:

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}\,.$$

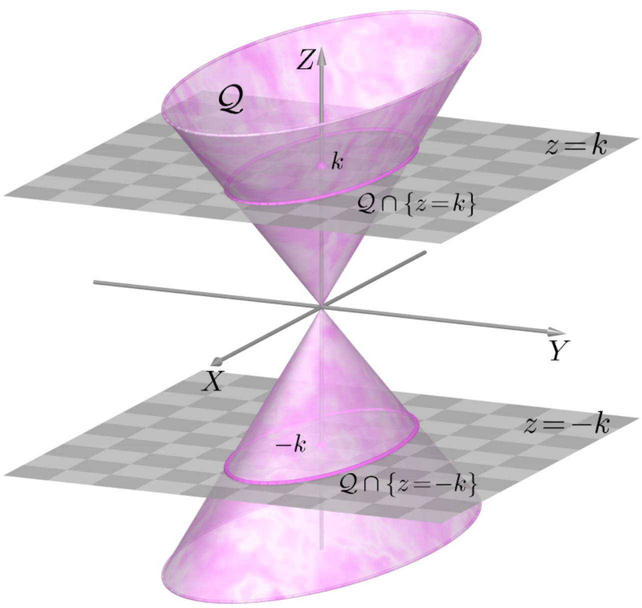

Fig. 27: Interseção do cone elíptico $\mathcal{Q}$ com os planos z =cte.

As seções planas de $\mathcal{Q}$ em planos paralelos ao plano XY,

$$\mathcal{Q} \cap \{z = k\} : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases},$$

são elipses de centro $(0, 0, k)$ se $k \neq 0$, e é a origem $(0, 0, 0)$ se $k = 0$.

A interseção de $\mathcal{Q}$ com o plano $y = k$, $k \in \mathbb{R}$, paralelo ao plano XZ,

$$\mathcal{Q} \cap \{y = k\} : \begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases},$$

é uma hipérbole de centro $(0, k, 0)$, reta-focal paralela ao eixo$-OZ$ e assíntotas

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{c}{a}\,z \\ y = k\,, \end{cases}$$

se $k \neq 0$, e um par de retas

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{c}{a}\,z \\ y = 0\,, \end{cases}$$

que se cortam na origem quando $k = 0$.

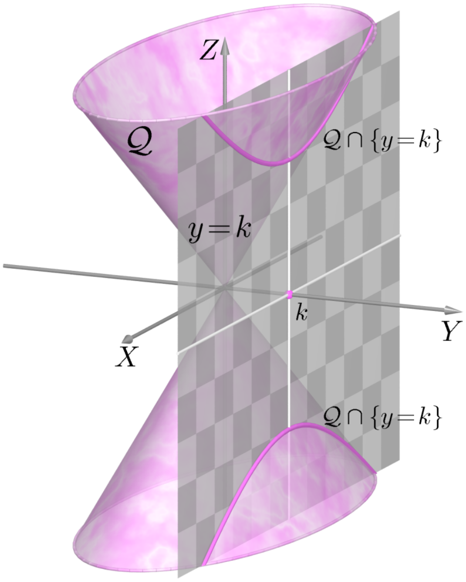

Fig. 28: $\mathcal{Q} \cap \{y = k\}$, $k > 0$

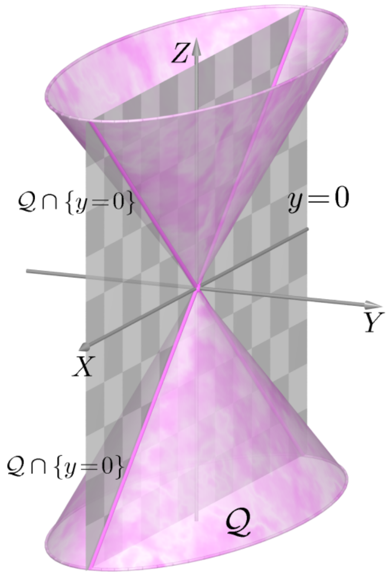

Fig. 29: $\mathcal{Q} \cap \{y = 0\}$

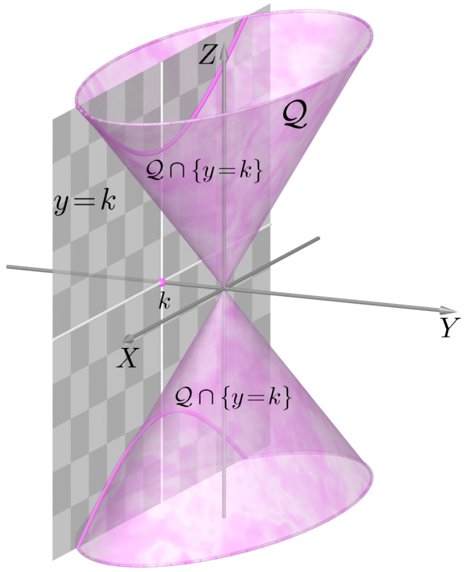

Fig. 30: $\mathcal{Q} \cap \{y = k\}$, $k < 0$

Além disso, a seção plana de $\mathcal{Q}$ em um plano paralelo ao plano YZ,

$$\mathcal{C} \cap \{x = k\} : \begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{k^2}{a^2} \\ x = k\,, \end{cases}$$

é uma hipérbole de centro $(k, 0, 0)$, reta-focal paralela ao eixo$-OZ$ e assíntotas

$$\begin{cases} y = \pm\dfrac{c}{b}\,z \\ x = k \end{cases}$$

quando $k \neq 0$, e um par de retas concorrentes

$$\begin{cases} y = \pm\dfrac{c}{b}\,z \\ x = 0 \end{cases}$$

que passam pela origem se $k = 0$.

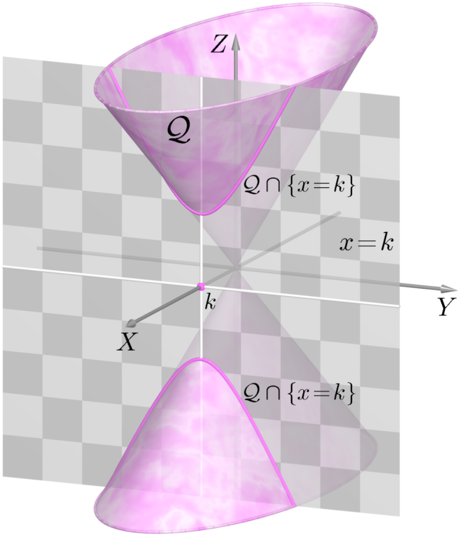

Fig. 31: $\mathcal{Q}\cap\{x=k\}$, $k>0$

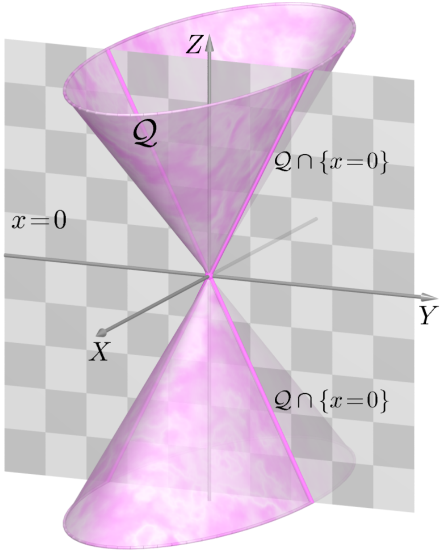

Fig. 32: $\mathcal{Q}\cap\{x=0\}$

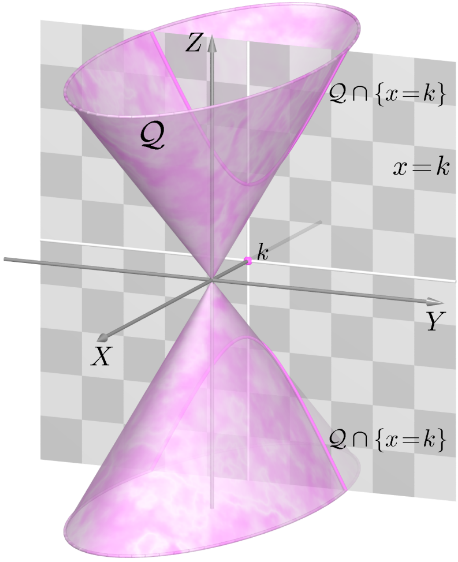

Fig. 33: $\mathcal{Q}\cap\{x=k\}$, $k<0$

Um cone elíptico de eixo$-OZ$ na forma canônica é uma superfície de revolução se as seções planas $\mathcal{Q}\cap\{z=k\}$ são círculos, ou seja, quando $a=b$.

Neste caso, o cone circular

$$\mathcal{Q}: x^2+y^2=\frac{a^2}{c^2}z^2$$

é uma superfície de revolução de eixo$-OZ$ que possui a reta

$$\gamma: \begin{cases} y=\dfrac{a}{c}z \\ x=0 \end{cases}$$

como uma de suas geratrizes.

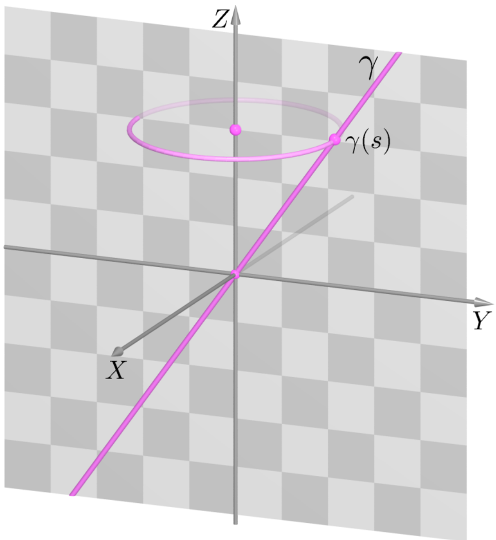

Fig. 34: Reta γ geratriz de $\mathcal{Q}$

Sendo

$$\gamma: \begin{cases} x(s)=0 \\ y(s)=as \\ z(s)=cs \end{cases}, \quad s\in\mathbb{R},$$

uma parametrização de γ, obtemos que

$$\mathcal{Q}: \begin{cases} x(s,t)=as\cos t \\ y(s,t)=as\,\text{sen}\,t \\ z(s,t)=cs \end{cases}, \quad s,t\in\mathbb{R},$$

é uma parametrização do cone circular

$$\mathcal{Q}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

de eixo$-OZ$ e geratriz γ.

Por analogia, vemos que

$$\begin{cases} x(s,t) = as\cos t \\ y(s,t) = bs\,\text{sen}\, t \\ z(s,t) = cs \end{cases}, \quad s,t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização do cone elíptico de eixo$-OZ$ na forma canônica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

Já vimos que todo cone elíptico é uma superfície regrada gerada por uma família de retas concorrentes.

De fato, se

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

é um cone elíptico de eixo$-OZ$, então $\mathcal{Q}$ é um cone de vértice na origem $V = (0,0,0)$, que possui a elipse

$$\mathcal{E} : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = c \end{cases}$$

como uma de suas diretrizes.

Assim,

$$\mathcal{Q} = \left\{ V + t\overrightarrow{VP} \;\middle|\; P \in \mathcal{E} \quad \text{e} \quad t \in \mathbb{R} \right\},$$

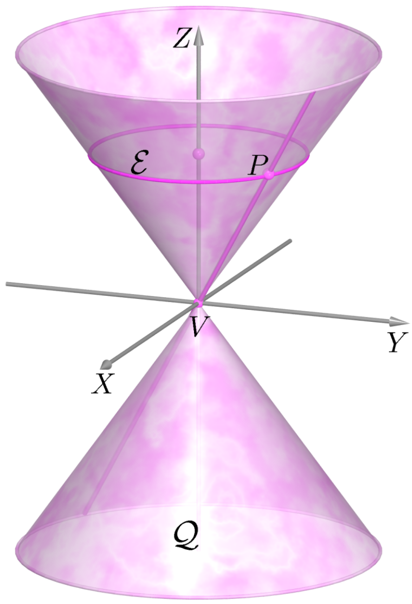

Fig. 35: Elipse $\mathcal{E}$ diretriz de $\mathcal{Q}$

ou seja, $\mathcal{Q}$ é gerada pelas retas que passam pelo vértice V e por algum ponto P pertencente à elipse $\mathcal{E}$.

5. Cilindro Elíptico

Os *cilindros elípticos* de eixo$-OX$, eixo$-OY$ e eixo$-OZ$ na forma canônica são as superfícies dadas, respectivamente, pelas equações de segundo grau nas variáveis x, y z, abaixo:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1\,, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1\,, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1\,, \end{aligned}}$$

onde a, b, c são números reais positivos.

Estas superfícies são simétricas em relação à origem e aos três eixos coordenados.

Estudaremos as seções planas do cilindro elíptico de eixo$-OZ$:

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \, .$$

Todas as seções planas contidas em planos paralelos ao plano XY,

$$\mathcal{Q} \cap \{z = k\} : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = k \end{cases} ,$$

são elipses de centros $(0, 0, k)$ pertencentes ao eixo$-OZ$.

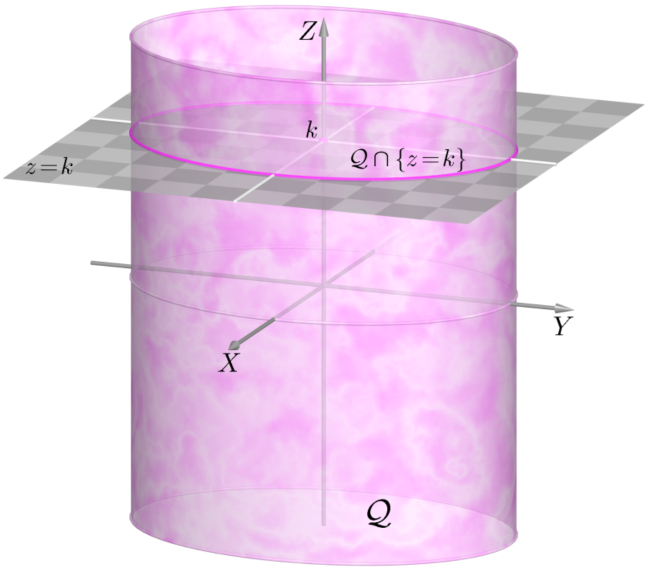

Fig. 36: Seções planas de $\mathcal{Q}$ em planos paralelos ao plano XY

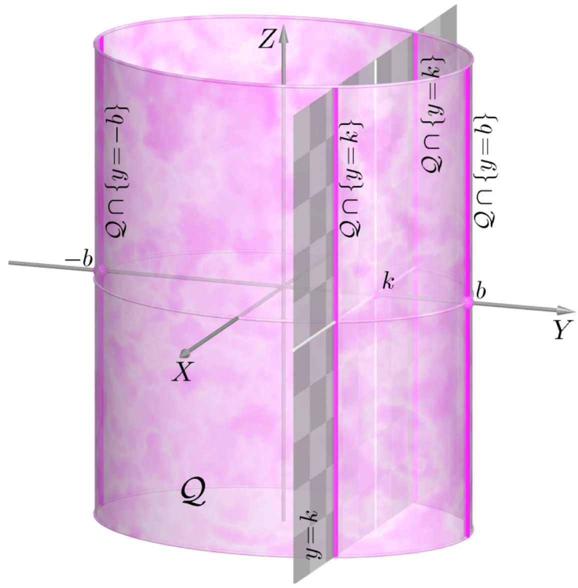

Fig. 37: Seções planas de $\mathcal{Q}$ em planos paralelos ao plano XZ

A seção plana de $\mathcal{Q}$ no plano $y = k$, $k \in \mathbb{R}$, paralelo ao plano XZ (ver figura 37),

$$\mathcal{Q} \cap \{y = k\} : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = 1 - \dfrac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases} ,$$

- são duas retas paralelas ao eixo$-OZ$: $\begin{cases} x = \pm \dfrac{a}{b} \sqrt{b^2 - k^2} \\ y = k \, , \end{cases}$ se $k \in (-b, b)$;

- é uma reta paralela ao eixo$-OZ$: $\begin{cases} x = 0 \\ y = b \end{cases}$ se $k = b$;

- é uma reta paralela ao eixo$-OZ$: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -b \end{cases}$ se $k = -b$;

- é o conjunto vazio se $|k| > b$

De modo análogo, a seção plana

$$\mathcal{Q} \cap \{x = k\} : \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases}$$

• são duas retas paralelas ao eixo$-OZ$: $\begin{cases} y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-k^2} \\ x = k\,, \end{cases}$ para $k \in (-a, a)$;

• é uma reta paralela ao eixo$-OZ$: $\begin{cases} y = 0 \\ x = a\,, \end{cases}$ para $k = a$;

• é uma reta paralela ao eixo$-OZ$: $\begin{cases} y = 0 \\ x = -a\,, \end{cases}$ para $k = -a$;

• é o conjunto vazio para $k \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$.

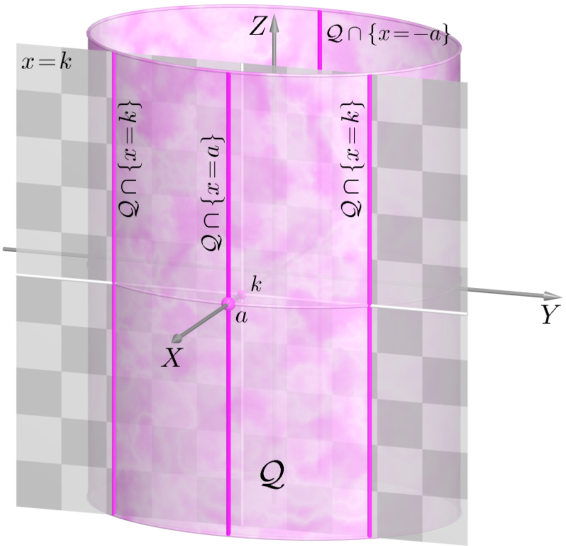

Fig. 38: Seções planas de $\mathcal{Q}$ em planos paralelos ao plano YZ

Um cilindro elíptico de eixo$-OZ$ na forma canônica é uma superfície de revolução se as seções planas $\mathcal{Q} \cap \{z = k\}$ são círculos, isto é, quando $a = b$.

Neste caso, o cilindro circular

$$\mathcal{Q} : x^2 + y^2 = a^2$$

é uma superfície de revolução de eixo$-OZ$ que possui a reta $\gamma : \begin{cases} y = a \\ x = 0 \end{cases}$ como uma de suas geratrizes.

Sendo

$$\gamma : \begin{cases} x(s) = 0 \\ y(s) = a \\ z(s) = s \end{cases}$$

uma parametrização de γ, temos que

$$\mathcal{Q} : \begin{cases} x(s,t) = a \cos t \\ y(s,t) = a \operatorname{sen} t \;, s, t \in \mathbb{R} \\ z(s,t) = s \end{cases}$$

é uma parametrização de $\mathcal{Q}$.

Generalizando, podemos verificar que:

$$\mathcal{Q}: \begin{cases} x(s,t) = a\cos t \\ y(s,t) = b\,\text{sen}\,t\ , s,t \in \mathbb{R} \\ z(s,t) = s \end{cases}$$

é uma parametrização do cilindro elíptico $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ de eixo$-OZ$ na forma canônica.

Já sabemos também que todo cilindro elíptico é uma superfície regrada gerada por uma família de retas paralelas.

De fato, o cilindro elíptico de eixo$-OZ$,

$$\mathcal{Q}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

é gerado pelas retas paralelas ao eixo$-OZ$ que passam por um ponto da diretriz

$$\beta: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$\mathcal{Q} = \{P + t(0,0,1) \mid P \in \beta \ \text{ e } \ t \in \mathbb{R}\}.$$

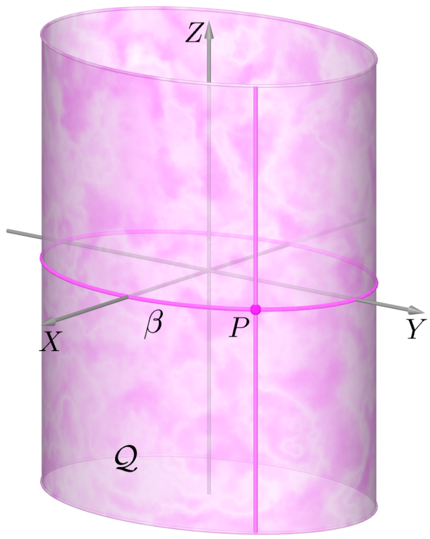

Fig. 39: Cilindro $\mathcal{Q}$ como superfície regrada

6. Cilindro Hiperbólico

Os *cilindros hiperbólicos* de eixo$-OX$, eixo$-OY$ e eixo$-OZ$ na forma canônica são as superfícies definidas, respectivamente, pelas equações de segundo grau abaixo:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 & \text{ou} & \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1\,, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 & \text{ou} & \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1\,, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 & \text{ou} & \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1\,, \end{array}}$$

onde a, b, c são números reais positivos. Essas superfícies são simétricas em relação à origem e aos três planos coordenados.

Vamos estudar o seguinte cilindro hiperbólico de eixo$-OZ$:

$$\mathcal{Q}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Todas as seções planas contidas em planos paralelos ao plano XY,

$$\mathcal{Q} \cap z = k: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = k \end{cases}\,,$$

são hipérboles de centros $(0,0,k)$ sobre o eixo$-OZ$, reta focal paralela ao eixo$-OX$ e assíntotas $\begin{cases} y = \pm\dfrac{b}{a}x \\ z = k\,. \end{cases}$

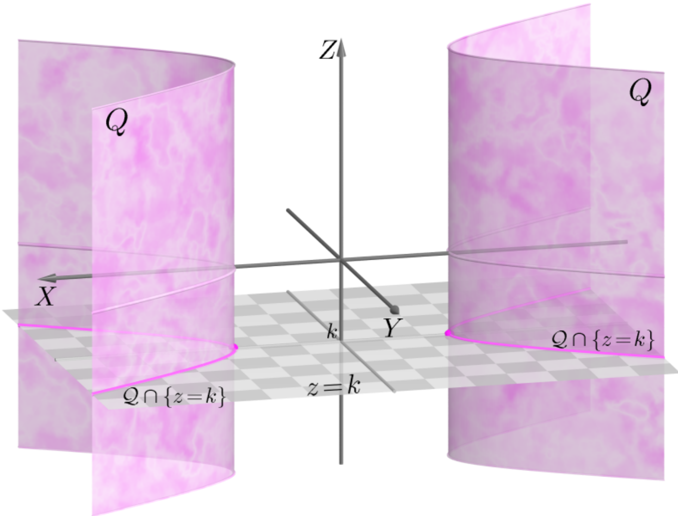

Fig. 40: Seções planas do cilindro hiperbólico $\mathcal{Q}$ em planos paralelos ao plano XY

A interseção de $\mathcal{Q}$ com o plano $x = k$, paralelo ao plano YZ,

$$\mathcal{Q}\cap\{x=k\}: \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{k^2}{a^2} - 1 \\ x = k \end{cases} ,$$

- são duas retas $\begin{cases} y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{k^2-a^2} \\ x = k \end{cases}$ paralelas ao eixo$-OZ$ se $|k| > a$;
- é a reta $\begin{cases} y = 0 \\ x = a \end{cases}$ paralela ao eixo$-OZ$ se $k = a$;
- é a reta $\begin{cases} y = 0 \\ x = -a \end{cases}$ paralela ao eixo$-OZ$ se $k = -a$;
- é o conjunto vazio se $|k| < a$, pois, neste caso, $\dfrac{k^2}{a^2} - 1 < 0$.

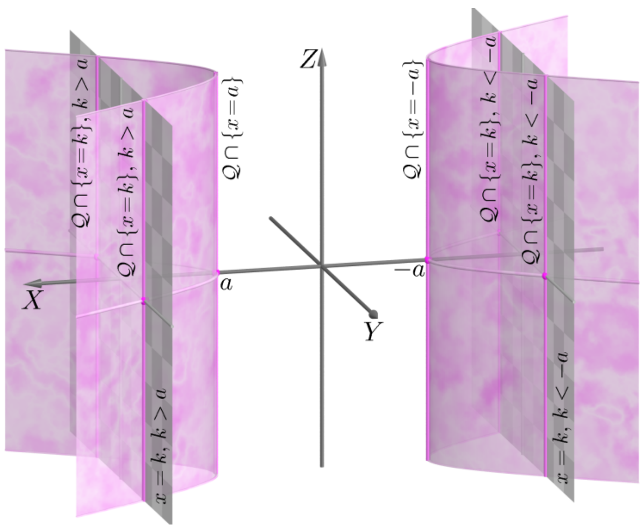

Fig. 41: Seções planas do cilindro hiperbólico $\mathcal{Q}$ em planos paralelos ao plano YZ

Por outro lado, a seção plana

$$\mathcal{Q}\cap\{y=k\}:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}=1+\dfrac{k^2}{b^2}\\ y=k\end{cases}\iff \mathcal{Q}\cap\{y=k\}:\begin{cases}x=\pm\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2+k^2}\\ y=k\,,\end{cases}$$

consiste de duas retas paralelas ao eixo$-OZ$, para todo $k\in\mathbb{R}$.

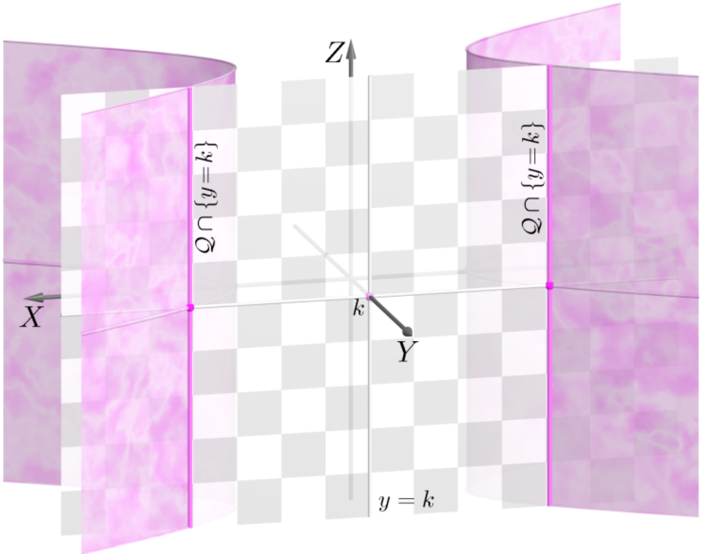

Fig. 42: Seções planas do cilindro hiperbólico $\mathcal{Q}$ em planos paralelos ao plano XZ

Assim, $\mathcal{Q}$ é uma superfície regrada gerada pela família de retas paralelas ao eixo$-OZ$ que passam por um ponto da diretriz

$$\gamma:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases},$$

ou seja,

$$\mathcal{Q}=\{P+t(0,0,1)\mid P\in\gamma\quad\text{e}\quad t\in\mathbb{R}\}.$$

Além disso, como as seções planas estudadas acima são hipérboles ou retas, nenhum cilindro hiperbólico é uma superfície de revolução.

As seis quádricas apresentadas até agora são chamadas *quádricas cêntricas*, pois todas são simétricas com respeito à origem.

Restam apenas três quádricas na forma canônica, denominadas *quádricas não-cêntricas*, já que não são simétricas com respeito à origem.

---

7. Parabolóide Elíptico

Os *parabolóides elípticos* na forma canônica de eixo$-OX$, eixo$-OY$ e eixo$-OZ$ são as superfícies dadas, respectivamente, pelas equações de segundo grau:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} &= ax\,,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2} &= by\,,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} &= cz\,,\end{aligned}}$$

onde a, b, c são números reais não-nulos.

Vamos analisar o parabolóide elíptico de eixo$-OZ$

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = cz\,, \qquad c>0\,.$$

É fácil verificar que $\mathcal{Q}$ é simétrica com respeito aos planos YZ e XZ, mas não é simétrica com respeito ao plano XY e à origem.

A interseção de $\mathcal{Q}$ com o plano $z=k$, paralelo ao plano XY,

$$\mathcal{Q}\cap\{z=k\} : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = ck \\ z=k \end{cases},$$

- é uma elipse de centro $(0,0,k)$ se $k>0$;
- é a origem $(0,0,0)$ se $k=0$;
- é o conjunto vazio se $k<0$.

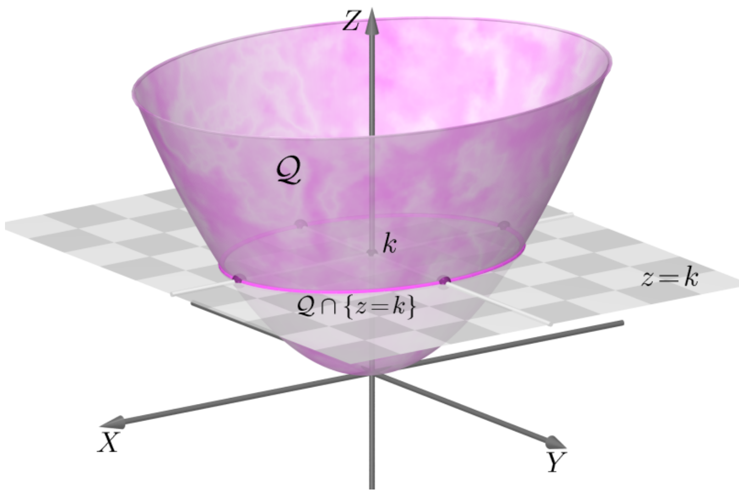

Fig. 43: Interseção $\mathcal{Q}\cap\{z=k\}$

As seções planas contidas nos planos paralelos ao plano XZ,

$$\mathcal{Q}\cap\{y=k\} : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = cz-\dfrac{k^2}{b^2} \\ y=k \end{cases} \iff \mathcal{Q}\cap\{y=k\} : \begin{cases} x^2 = a^2c\left(z-\dfrac{k^2}{cb^2}\right) \\ y=k \end{cases}$$

são parábolas de vértices $V_k = \left(0,k,\dfrac{k^2}{b^2c}\right)$ e retas-focais paralelas ao eixo$-OZ$, com concavidade voltada para cima (fig. 44).

E as seções planas

$$\mathcal{Q}\cap\{x=k\} : \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = cz-\dfrac{x^2}{a^2} \\ x=k \end{cases} \iff \mathcal{Q}\cap\{y=k\} : \begin{cases} y^2 = b^2c\left(z-\dfrac{k^2}{ca^2}\right) \\ x=k \end{cases}$$

também são parábolas de vértices $V_k = \left(k, 0, \dfrac{k^2}{a^2c}\right)$ e retas focais paralelas ao eixo$-OZ$, com concavidade voltada para cima (fig. 45).

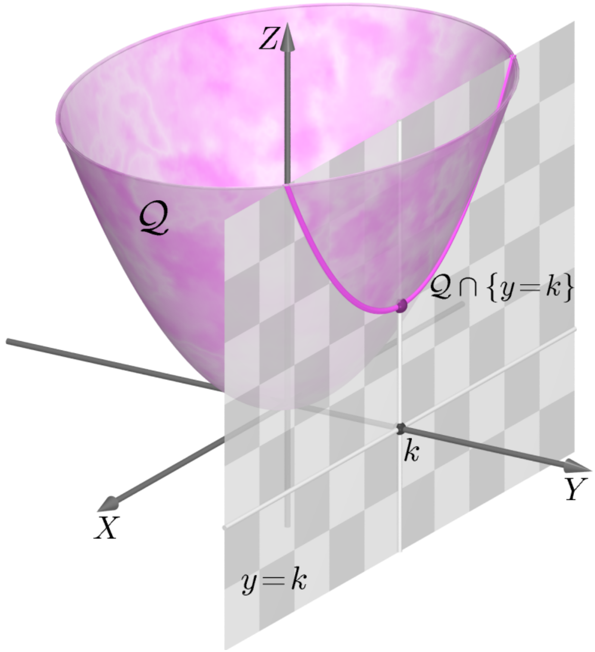

Fig. 44: Interseção de Q com planos paralelos ao plano XZ

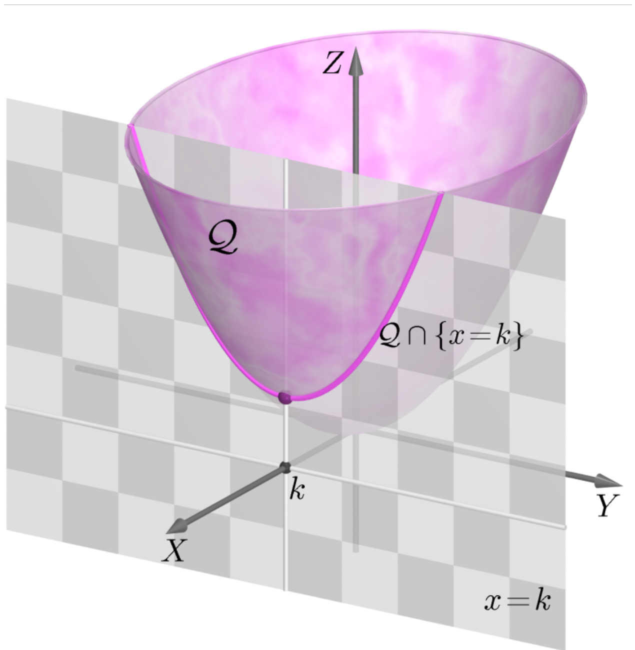

Fig. 45: Interseção de Q com planos paralelos ao plano YZ

Um parabolóide elíptico na forma canônica de eixo$-OZ$ é uma superfície de *revolução* quando as seções planas $\mathcal{Q} \cap \{z = k\}$, $k > 0$, são círculos, isto é, quando $a = b$.

Neste caso, o parabolóide circular:

$$\mathcal{Q} : x^2 + y^2 = a^2cz$$

é uma superfície de revolução de eixo$-OZ$, que possui a parábola

$$\gamma : \begin{cases} y^2 = a^2cz \\ x = 0 \end{cases}$$

como uma de suas geratrizes.

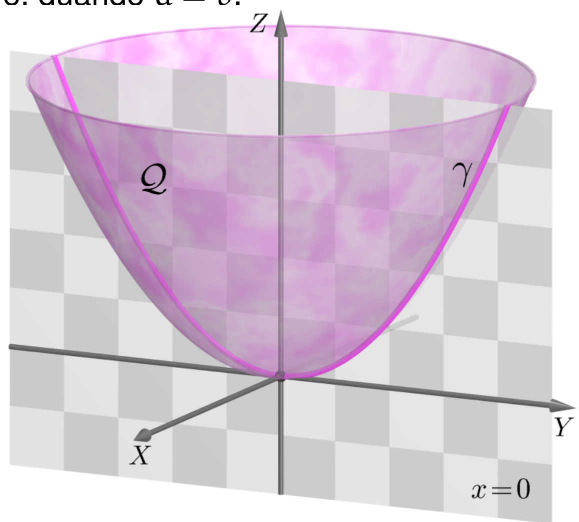

Fig. 46: Parabolóide de revolução $\mathcal{Q}$ e geratriz γ

Sendo

$$\gamma : \begin{cases} x(s) = 0 \\ y(s) = as \\ z(s) = \dfrac{s^2}{c} \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R},$$

uma parametrização da geratriz γ, obtemos que:

$$\mathcal{Q} : \begin{cases} x(s,t) = as\cos t \\ y(s,t) = as\,\text{sen}\, t \\ z(s,t) = \dfrac{s^2}{c} \end{cases}, \quad s,t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização do parabolóide circular de eixo$-OZ$.

Por analogia, podemos verificar facilmente que

$$\mathcal{Q}: \begin{cases} x(s,t) = as\cos t \\ y(s,t) = bs\,\text{sen}\,t \\ z(s,t) = \dfrac{s^2}{c} \end{cases}, \quad s,t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização do parabolóide elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$ de eixo$-OZ$ na forma canônica.

Mas nenhum parabolóide elíptico é uma superfície regrada.

De fato, se $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$ e

$$r: \begin{cases} x(t) = \alpha t + x_0 \\ y(t) = \beta t + y_0 \\ z(t) = \gamma t + z_0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

é uma reta paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$ que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0), temos que um ponto $(\alpha t + x_0, \beta t + y_0, \gamma t + z_0) \in \mathcal{Q}$ se, e só se,

$$\frac{(\alpha t + x_0)^2}{a^2} + \frac{(\beta t + y_0)^2}{b^2} = c(\gamma t + z_0) \iff \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right) t^2 + \left(\frac{2\alpha x_0}{a^2} + \frac{2\beta y_0}{b^2} - c\gamma\right) t = 0,$$

pois $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = cz_0$.

Então $r \subset \mathcal{Q}$ se, e só se,

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{2\alpha x_0}{a^2} + \frac{2\beta y_0}{b^2} - c\gamma = 0,$$

ou seja, se, e só se, $\alpha = \beta = \gamma = 0$, uma contradição.

Logo uma reta intersecta o parabolóide elíptico em no máximo dois pontos.

8. Parabolóide Hiperbólico

Os *parabolóides hiperbólicos* na forma canônica de eixo$-OZ$, eixo$-OY$ e eixo$-OX$ são as quádricas dadas, respectivamente, pelas equações de segundo grau:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= cz, \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} &= by, \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= ax, \end{aligned}}$$

onde a, b, c são números reais não-nulos.

Vamos estudar o parabolóide hiperbólico de eixo$-OZ$

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz\,, \quad c < 0\,.$$

Esta quádrica é simétrica com respeito ao plano YZ e ao plano XZ, mas não é simétrica com respeito ao plano XY e à origem.

A interseção de $\mathcal{Q}$ com o plano $z = k$, $k \in \mathbb{R}$, paralelo ao plano XY,

$$\mathcal{Q} \cap \{z = k\} : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = ck \\ z = k \end{cases},$$

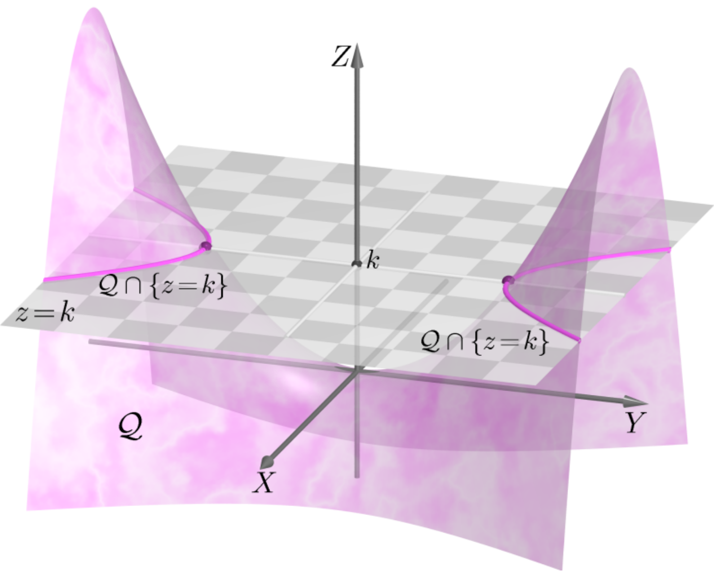

Fig. 47: Interseção do parabolóide hiperbólico $\mathcal{Q}$ com o plano $z = k$, $k > 0$

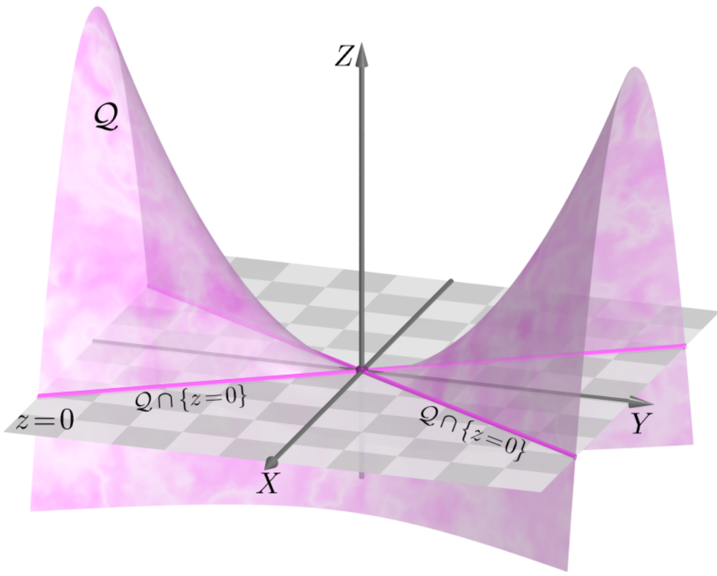

Fig. 48: Interseção do parabolóide hiperbólico $\mathcal{Q}$ com o plano $z = 0$

• é uma hipérbole de reta-focal paralela ao eixo$-OY$, centro no ponto $(0, 0, k)$ e assíntotas $\begin{cases} x = \pm\dfrac{a}{b}\,y \\ z = k \end{cases}$ se $k > 0$, pois, neste caso, $ck < 0$ (ver fig. 47);

• são duas retas $\begin{cases} y = \pm\dfrac{b}{a}\,x \\ z = 0 \end{cases}$ se $k = 0$ (ver fig. 48);

• é uma hipérbole de reta-focal paralela ao eixo$-OX$, centro $C = (0, 0, k)$ e assíntotas $\begin{cases} y = \pm\dfrac{b}{a}\,x \\ z = k \end{cases}$ se $k < 0$, pois, neste caso, $ck > 0$ (ver fig. 49).

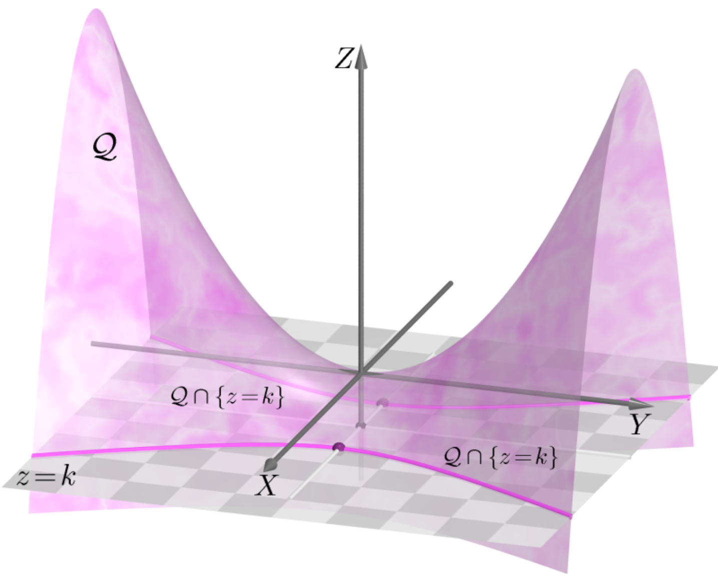

Fig. 49: Interseção do parabolóide hiperbólico $\mathcal{Q}$ com o plano $z = k$, $k < 0$

As seções planas contidas em planos paralelos ao plano XZ,

$$\mathcal{Q}\cap\{y=k\}:\begin{cases} x^2 = a^2\left(cz+\dfrac{k^2}{b^2}\right) = a^2c\left(z+\dfrac{k^2}{b^2c}\right) \\ y=k \end{cases},$$

são parábolas de retas-focais paralelas ao eixo$-OZ$ e vértice no ponto $\left(0, k, -\dfrac{k^2}{cb^2}\right)$, com concavidade voltada para baixo, para todo $k\in\mathbb{R}$, uma vez que $a^2c<0$ (fig. 50).

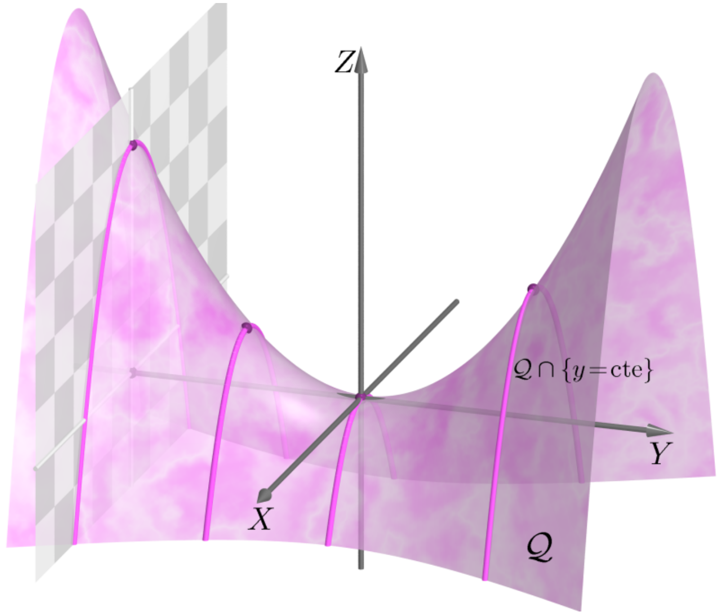

Fig. 50: Interseção do parabolóide hiperbólico $\mathcal{Q}$ com os planos y =cte

De modo análogo, as seções planas, para todo $k\in\mathbb{R}$,

$$\mathcal{Q}\cap\{x=k\}:\begin{cases} y^2 = b^2\left(\dfrac{k^2}{a^2}-cz\right) = -b^2c\left(z-\dfrac{k^2}{a^2c}\right) \\ x=k \end{cases},$$

são parábolas de retas-focais paralelas ao eixo$-OZ$ e vértice

$$V=\left(k\,,\,0\,,\,\frac{k^2}{a^2c}\right),$$

com concavidade voltada para cima pois, neste caso, $-b^2c>0$ (fig. 51).

Como as seções planas de $\mathcal{Q}$ são hipérboles ou parábolas, *nenhum parabolóide hiperbólico é uma superfície de revolução*.

Por outro lado, todo parabolóide hiperbólico é uma superfície regrada.

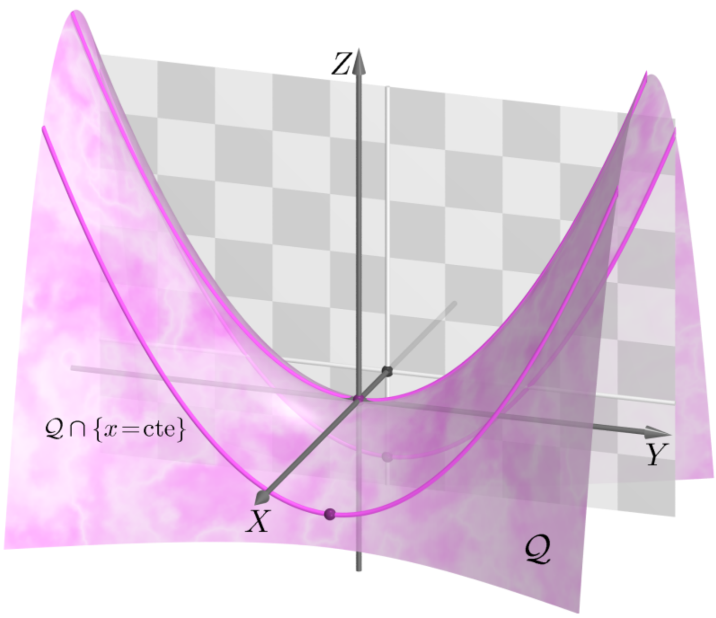

Fig. 51: Interseção do parabolóide hiperbólico $\mathcal{Q}$ com o plano $x=k$

Proposição 2

O parabolóide hiperbólico

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$$

é uma superfície regrada gerada por duas famílias de retas:

$$r_k : \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = k \\ k\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = cz \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}, \qquad e \qquad s_k : \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = k \\ k\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = cz \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

As retas de cada família são reversas entre si e

$$r_k \cap s_k = \left\{ \left(ak, 0, \frac{k^2}{c} \right) \right\}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Prova.

Um ponto (x, y, z) pertence a $\mathcal{Q}$ se, e só se,

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = cz.$$

Seja $(x, y, z) \in r_k$. Então

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = k\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = cz,$$

isto é, $(x, y, z) \in \mathcal{Q}$.

Seja agora $(x, y, z) \in \mathcal{Q}$ e tome $k = \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}$. Então,

$$k\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = cz.$$

Logo $(x, y, z) \in r_k$. Provamos, assim, que $\mathcal{Q}$ é gerada pela família de retas r_k, $k \in \mathbb{R}$.

De modo análogo, podemos mostrar que a família de retas $\{s_k \mid k \in \mathbb{R}\}$ gera a superfície $\mathcal{Q}$.

As retas r_k são paralelas ao vetor

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a} & -\dfrac{1}{b} & 0 \\ \dfrac{k}{a} & \dfrac{k}{b} & -c \end{vmatrix} = \left(\frac{c}{b}, \frac{c}{a}, \frac{2k}{ab} \right)$$

que passam pelo ponto $\left(ak, 0, \dfrac{k^2}{c} \right)$. Assim,

$$r_k : \begin{cases} x(t) = ak + \dfrac{c}{b}\,t \\ y(t) = \dfrac{c}{a}\,t \\ z(t) = \dfrac{k^2}{c} + \dfrac{2k}{ab}\,t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização da reta r_k.

Analogamente, podemos mostrar que:

$$s_k : \begin{cases} x(s) &= ak + \dfrac{c}{b}\,s \\ y(s) &= -\dfrac{c}{a}\,s \\ z(s) &= \dfrac{k^2}{c} + \dfrac{2k}{ab}\,s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização da reta s_k.

Logo,

$$\begin{aligned} ak + \frac{c}{b}\,t &= ak + \frac{c}{b}\,s \\ \frac{c}{a}\,t &= -\frac{c}{a}\,s \\ \frac{k^2}{c} + \frac{2k}{ab}\,t &= \frac{k^2}{c} + \frac{2k}{ab}\,s \end{aligned}$$

se, e só se, $t = s = 0$. Ou seja,

$$r_k \cap s_k = \left\{ \left(ak, 0, \frac{k^2}{c} \right) \right\}.$$

Resta mostrar que as retas r_k e $r_{k'}$, com $k \neq k'$, são reversas. Para isso, devemos verificar que os vetores $\overrightarrow{u_k} = \left(\dfrac{c}{b}, \dfrac{c}{a}, \dfrac{2k}{ab}\right)$ e $\overrightarrow{u_{k'}} = \left(\dfrac{c}{b}, \dfrac{c}{a}, \dfrac{2k'}{ab}\right)$ paralelos às retas r_k e r'_k, respectivamente, não são múltiplos, e $r_k \cap r_{k'} = \varnothing$.

De fato, como

$$\begin{vmatrix} \dfrac{c}{b} & \dfrac{c}{a} & \dfrac{2k}{ab} \\ \dfrac{c}{b} & \dfrac{c}{a} & \dfrac{2k'}{ab} \end{vmatrix} = \left(\frac{2c}{a^2 b}(k'-k), -\frac{2c}{ab^2}(k'-k), 0 \right) \neq (0,0,0),$$

temos que $\overrightarrow{u_k}$ e $\overrightarrow{u_{k'}}$ não são múltiplos.

Além disso, como $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = k$, para todo $(x, y, z) \in r_k$, $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = k'$, para todo $(x, y, z) \in s_k$, e $k \neq k'$, vemos que $r_k \cap s_k = \varnothing$. ■

Mostraremos agora uma maneira mais geométrica de obter as famílias de retas que geram o parabolóide hiperbólico.

Seja r uma reta contida em $\mathcal{Q}$. Então r não é paralela ao plano XZ. De fato, suponhamos que $(\alpha, 0, \gamma)$ é um vetor paralelo à reta r e $(x_0, y_0, z_0) \in r$.

Assim,

$$\frac{(x_0 + \alpha t)^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = c(z_0 + \gamma t) \iff \frac{\alpha^2 t^2}{a^2} + \frac{2\alpha x_0 t}{a^2} - c\gamma t = 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ se, e só se, $\alpha = \gamma = 0$, uma contradição, pois $(\alpha, 0, \gamma) \neq (0, 0, 0)$.

Logo toda reta r contida em $\mathcal{Q}$ intersecta o plano XZ em um único ponto.

Seja $(x_0, 0, z_0) \in \mathcal{Q}$ e seja r uma reta contida em $\mathcal{Q}$ que passa pelo ponto $(x_0, 0, z_0)$.

Então,

$$r : \begin{cases} x(t) = x_0 + \alpha t \\ y(t) = \beta t \\ z(t) = z_0 + \gamma t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

sendo $\beta \neq 0$ pelo visto acima.

Como $r \subset \mathcal{Q}$, ou seja,

$$\frac{(x_0 + \alpha t)^2}{a^2} - \frac{\beta^2 t^2}{b^2} = c(z_0 + \gamma t) \iff \left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}\right) t^2 + \left(\frac{2x_0\alpha}{a^2} - c\gamma\right) t = 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $\dfrac{\alpha^2}{a^2} = \dfrac{\beta^2}{b^2}$ e $c\gamma = \dfrac{2x_0\alpha}{a^2}$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\alpha = 1$, pois $\dfrac{\alpha^2}{a^2} = \dfrac{\beta^2}{b^2} \neq 0$.

Neste caso, $\beta = \pm\dfrac{b}{a}$ e $\gamma = \dfrac{2x_0}{a^2 c}$.

Assim,

$$r^+_{(x_0,0,z_0)} : \begin{cases} x(t) = t + x_0 \\ y(t) = \dfrac{b}{a} t \\ z(t) = \dfrac{2x_0}{a^2c} t + z_0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad r^-_{(x_0,0,z_0)} : \begin{cases} x(t) = t + x_0 \\ y(t) = -\dfrac{b}{a} t \\ z(t) = \dfrac{2x_0}{a^2c} t + z_0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

são as únicas retas contidas em $\mathcal{Q}$ que passam pelo ponto $(x_0, 0, z_0) \in \mathcal{Q}$.

Observe que $r_k = r^+_{(x_0,0,z_0)}$ e $s_k = r^-_{(x_0,0,z_0)}$, se $(x_0, 0, z_0) = \left(ak, 0, \dfrac{k^2}{c}\right)$, pois $k = \dfrac{x_0}{a}$ e

$$\left(\frac{c}{b}, \pm\frac{c}{a}, \frac{2k}{ab}\right) = \frac{c}{b}\left(1, \pm\frac{b}{a}, \frac{2x_0}{a^2c}\right) \parallel \left(1, \pm\frac{b}{a}, \frac{2x_0}{a^2c}\right),$$

Foi provado, anteriormente, que:

$$\ell : -2z_0 x + x_0 z = -x_0 z_0, \quad \text{se } x_0 \neq 0, \qquad \text{ou} \qquad \ell : z = 0, \quad \text{se } x_0 = 0,$$

é a reta tangente à parábola $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \cap \{y = 0\} : \begin{cases} cz = \dfrac{x^2}{a^2} \\ y = 0 \end{cases}$ no ponto $(x_0, 0, z_0)$ pertencente a $\mathcal{P}$.

Como ℓ é perpendicular ao vetor $(-2z_0, 0, x_0) = \left(-\dfrac{2x_0^2}{a^2c}, 0, x_0\right)$ se $x_0 \neq 0$, e é perpendicular ao vetor $(0, 0, 1)$ se $x_0 = 0$, então o vetor $\left(1, 0, \dfrac{2x_0}{a^2c}\right)$ é paralelo à reta tangente a $\mathcal{P}$ no ponto $(x_0, 0, z_0)$ de $\mathcal{P}$.

Portanto, sendo

$$\gamma : \begin{cases} x(s) = s \\ y(s) = 0 \\ z(s) = \dfrac{s^2}{a^2c} \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R},$$

uma parametrização de $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \cap \{y = 0\}$, temos que, se

$$\gamma(s) = \left(s, 0, \frac{s^2}{a^2c}\right) = (x_0, 0, z_0)\,,$$

então o vetor velocidade de γ em s,

$$\gamma'(s) = \left(1, 0, \frac{2s}{a^2c}\right) = \left(1, 0, \frac{2x_0}{a^2c}\right)\,.$$

é o vetor tangente à parábola $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \cap \{y = 0\}$ no ponto $\gamma(s)$.

Concluindo,

$$r_s^+ = \left\{\gamma(s) + t\left(\gamma'(s) + \frac{b}{a}e_2\right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}, \quad s \in \mathbb{R}\,,$$

e

$$r_s^- = \left\{\gamma(s) + t\left(\gamma'(s) - \frac{b}{a}e_2\right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}, \quad s \in \mathbb{R}\,,$$

são as duas famílias de retas que geram a quádrica $\mathcal{Q}$.

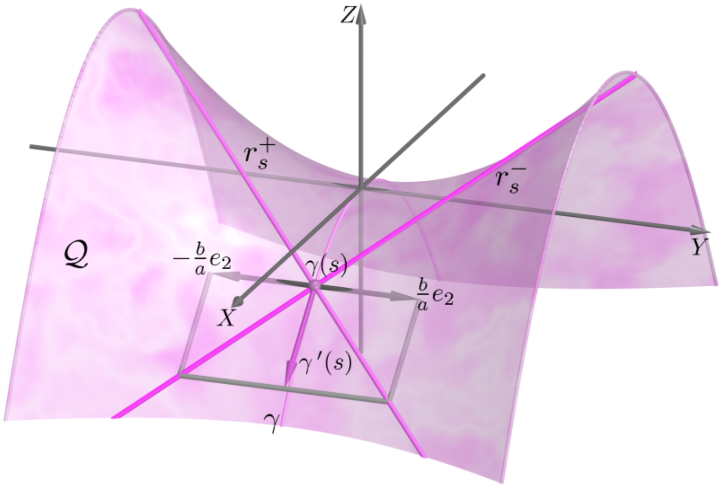

Fig. 52: Parametrização das famílias r_s^- e r_s^+

Assim,

$$\mathcal{Q}: \begin{cases} x(s,t) = s + t \\ y(s,t) = \dfrac{b}{a}t \\ z(s,t) = \dfrac{s^2}{a^2c} + \dfrac{2st}{a^2c} \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}\,,$$

e

$$\mathcal{Q}: \begin{cases} x(s,t) = s + t \\ y(s,t) = -\dfrac{b}{a}t \\ z(s,t) = \dfrac{s^2}{a^2c} + \dfrac{2st}{a^2c} \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}\,,$$

são duas maneiras de parametrizar o parabolóide hiperbólico

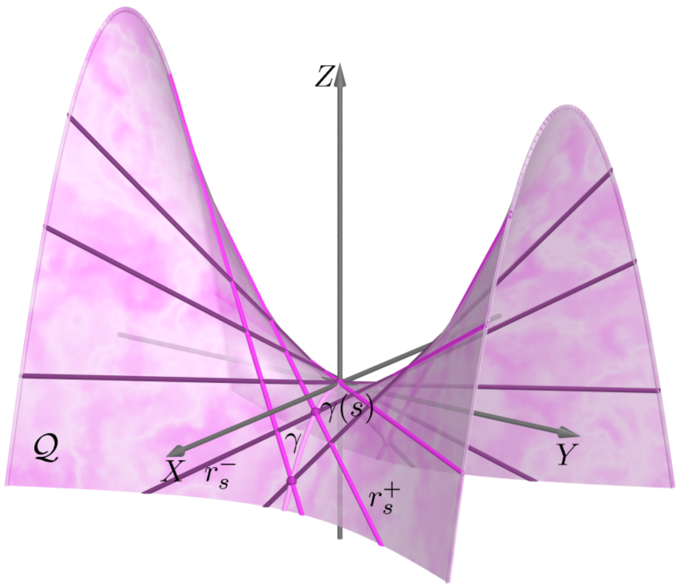

Fig. 53: Famílias r_s^+ e r_s^-

$$\mathcal{Q}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz\,.$$

Exemplo 4

Considere os parabolóides hiperbólicos abaixo:

$$S_1 : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = -z \quad e \quad S_2 : x^2 - \frac{z^2}{9} = 2y\,.$$

Determine as duas famílias de retas que geram S_1 e S_2.

Solução.

O parabolóide hiperbólico de eixo$-OZ$

$$S_1 : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = -z\,,$$

com $a = 2$, $b = 4$ e $c = -1$, intersecta o plano XZ ao longo da parábola

$$\gamma : \begin{cases} x^2 = -4z \\ y = 0 \end{cases}$$

de vértice na origem e reta-focal$=$eixo$-OZ$, com concavidade voltada para baixo.

Parametrizando esta parábola,

$$\gamma : \begin{cases} x(s) = s \\ y(s) = 0 \\ z(s) = -\dfrac{s^2}{4} \end{cases} \quad , \quad s \in \mathbb{R}\,,$$

obtemos que:

$$r_s^+ = \left\{ \gamma(s) + \left(\gamma'(s) + \frac{b}{a}e_2\right)t \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(s, 0, -\frac{s^2}{4}\right) + \left(1, 2, -\frac{s}{2}\right)t \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad s \in \mathbb{R}\,,$$

e

$$r_s^- = \left\{ \gamma(s) + \left(\gamma'(s) - \frac{b}{a}e_2\right)t \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(s, 0, -\frac{s^2}{4}\right) + \left(1, -2, -\frac{s}{2}\right)t \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad s \in \mathbb{R}\,,$$

são as duas famílias de retas que geram o parabolóide hiperbólico S_1.

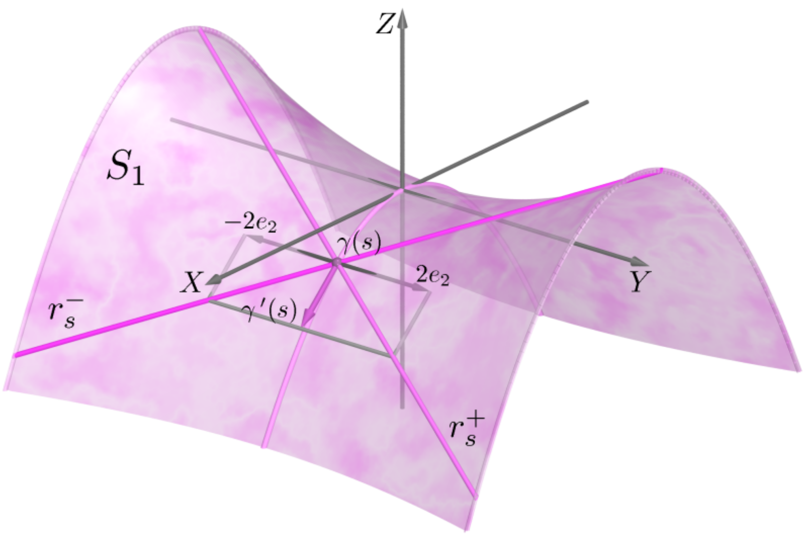

Fig. 54: Parabolóide hiperbólico S_1 e as retas r_s^+ e r_s^- passando por $\gamma(s)$

Por outro lado, o parabolóide hiperbólico de eixo$-OY$,

$$S_2 : x^2 - \frac{z^2}{9} = 2y\,,$$

com $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, intersecta o plano XY ao longo da parábola

$$\beta : \begin{cases} x^2 = 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

de vértice na origem e reta-focal$=$eixo$-OY$, com concavidade voltada para cima.

Assim, sendo

$$\beta : \begin{cases} x(s) = s \\ y(s) = \dfrac{s^2}{2} \\ z(s) = 0 \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}\,,$$

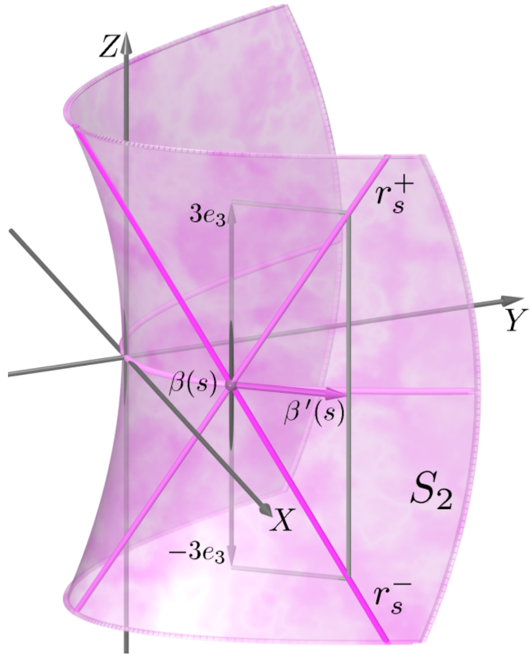

Fig. 55: S_2 e as retas r_s^+ e r_s^- passando por $\beta(s)$

uma parametrização de β, temos que:

$$r_s^+ = \left\{ \beta(s) + \left(\beta'(s) + \frac{c}{a}e_3\right)t \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(s, \frac{s^2}{2}, 0\right) + (1, s, 3)t \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad s \in \mathbb{R}\,,$$

e $$r_s^- = \left\{ \beta(s) + \left(\beta'(s) - \frac{c}{a}e_3\right)t \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(s, \frac{s^2}{2}, 0\right) + (1, s, -3)t \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad s \in \mathbb{R}\,,$$

são as duas famílias de retas que geram o parabolóide hiperbólico S_2. $\square$

9. Cilindro Parabólico

Os cilindros parabólicos na forma canônica de eixo$-OX$, eixo$-OY$ e eixo$-OZ$ são as superfícies dadas, respectivamente, pelas seguintes equações de segundo grau:

$$\boxed{\begin{array}{lclclcl} \dfrac{y^2}{b^2} & = & cz & \text{ou} & \dfrac{z^2}{c^2} & = & by\,, \\ \dfrac{x^2}{a^2} & = & cz & \text{ou} & \dfrac{z^2}{c^2} & = & ax\,, \\ \dfrac{x^2}{a^2} & = & by & \text{ou} & \dfrac{y^2}{b^2} & = & ax\,, \end{array}}$$

onde a, b, c são números reais não-nulos.

Estudaremos o cilindro parabólico de eixo$-OY$:

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} = cz\,, \quad c > 0.$$

É fácil mostrar que $\mathcal{Q}$ é simétrico com respeito ao plano YZ e ao plano XZ, mas não é simétrico em relação ao plano XY e à origem.

Como estamos supondo $c > 0$, a interseção de $\mathcal{Q}$ com o plano $y = k$, paralelo ao plano XZ, é a parábola:

$$\mathcal{Q} \cap \{y = k\} : \begin{cases} x^2 = ca^2 z \\ y = k \end{cases}$$

de vértice $V_k = (0, k, 0)$ e reta-focal paralela ao eixo$-OZ$ com concavidade voltada para cima.

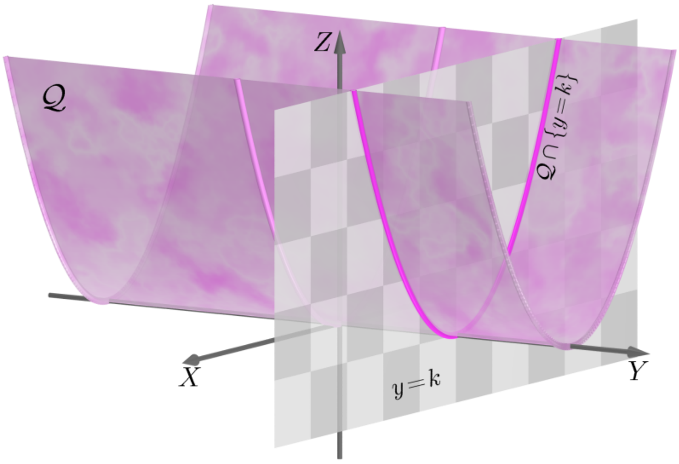

Fig. 56: Interseção de $\mathcal{Q}$ com os planos $y = k$ paralelos ao plano XZ

A seção plana contida em um plano paralelo ao plano XY:

$$\mathcal{Q} \cap \{z = k\} : \begin{cases} x^2 = ca^2 k \\ z = k \end{cases},$$

representa:

• duas retas $\begin{cases} x = \pm\sqrt{ca^2 k} \\ z = k \end{cases}$ paralelas ao eixo$-OY$ se $k > 0$;

• a reta $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, ou seja, o eixo$-OY$ se $k = 0$;

• o conjunto vazio se $k < 0$.

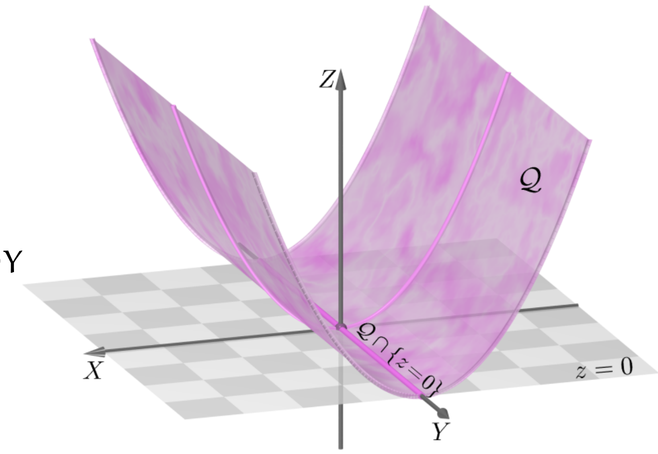

Fig. 57: Interseção de $\mathcal{Q}$ com o plano XY ($k = 0$)

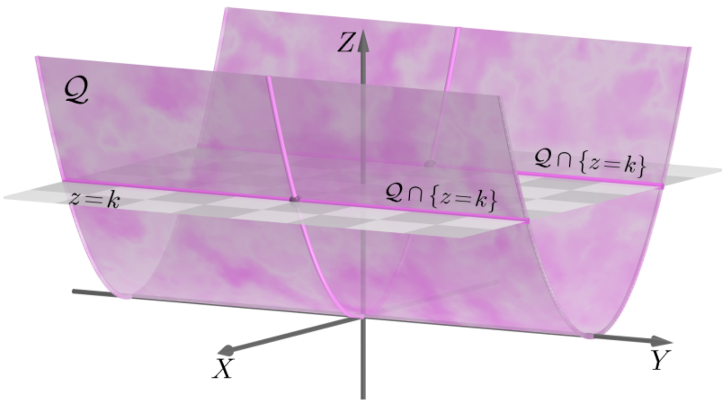

Fig. 58: Interseção de $\mathcal{Q}$ com os planos $z = k$ paralelos ao plano XY, com $k > 0$

Finalmente, as seções planas

$$\mathcal{Q} \cap \{x = k\} : \begin{cases} z = \dfrac{k^2}{a^2 c} \\ x = k \end{cases}$$

são retas paralelas ao eixo$-OY$.

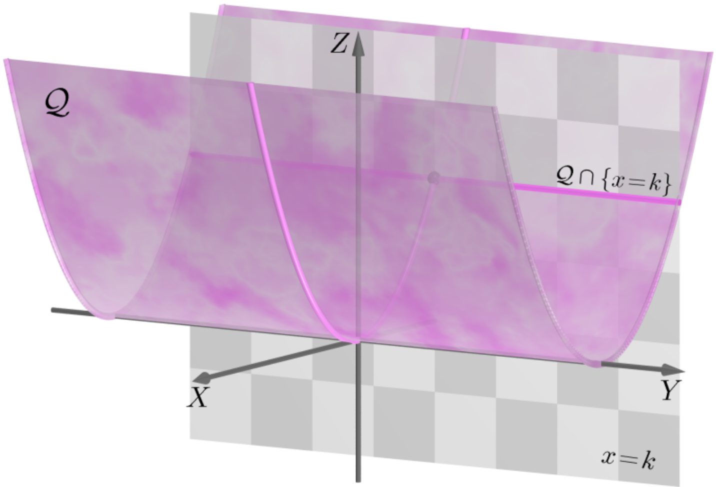

Fig. 59: Interseção de $\mathcal{Q}$ com os planos $x = k$ paralelos ao plano YZ

O cilindro parabólico de eixo$-OY$,

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} = cz\,,$$

é, portanto, uma superfície regrada gerada por uma família de retas paralelas ao eixo$-OY$, sendo a parábola

$$\gamma : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = cz \\ y = 0 \end{cases}$$

uma de suas diretrizes.

Como as seções planas estudadas acima são retas ou parábolas, *nenhum cilindro parabólico é uma superfície de revolução*.

10. Rotação e translação de equações de segundo grau

Provaremos, a seguir, que após uma rotação e/ou uma translação dos eixos coordenados, podemos transformar qualquer equação de segundo grau em $\mathbb{R}^3$ em uma equação de um dos tipos abaixo:

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$	(Quádrica Cêntrica)
$Ax^2 + By^2 = Sz$	(Quádrica não-Cêntrica)

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $R \geq 0$ e $S \geq 0$.

Analisando o sinal dos coeficientes A, B, C e R na equação

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R\,,$$

obtemos que:

(I) se $R > 0$ e os coeficientes A, B, C são:

- todos positivos $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é um elipsóide;
- todos negativos $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é o conjunto vazio;
- dois positivos e um negativo $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é um hiperbolóide de uma folha;
- um positivo e dois negativos $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é um hiperbolóide de duas folhas;
- um zero e dois positivos $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é um cilindro elíptico;
- um zero e dois negativos $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é o conjunto vazio;
- um zero, um positivo e um negativo $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é um cilindro hiperbólico;
- dois zero e um positivo $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é união de dois planos paralelos;
- dois zero e um negativo $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é o conjunto vazio;

(II) se $R = 0$ e os coeficientes A, B, C são:

- todos de mesmo sinal $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é um ponto;
- dois de mesmo sinal e o outro de sinal contrário $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é um cone elíptico;
- um zero e os outros dois de mesmo sinal $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é uma reta;
- um zero, um positivo e um negativo $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é união de dois planos concorrentes;
- dois zeros e um diferente de zero $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é um plano;

Analisando agora os sinais dos coeficientes A, B e S na equação:

$$Ax^2 + By^2 = Sz\,,$$

obtemos que:

(I) se $S > 0$ e os coeficientes A e B:

- têm o mesmo sinal $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é um parabolóide elíptico;
- têm sinais opostos $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é um parabolóide hiperbólico;
- um é zero e o outro diferente de zero $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é um cilindro parabólico.

(II) se $S = 0$ e os coeficientes A e B:

- têm o mesmo sinal $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é uma reta;
- têm sinais opostos $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é união de dois planos concorrentes;
- um é zero e o outro diferente de zero $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é um plano.

Dizemos que o conjunto vazio, um ponto, uma reta, um plano, um par de planos paralelos ou um par de planos concorrentes são *quádricas degeneradas*.

Exemplo 5

Determine as quádricas cêntricas na forma canônica que contêm o ponto $P_0 = (1, 1, -1)$ *e possuem a seção plana* $\gamma : \begin{cases} 4y^2 + 2z^2 = 3 \\ x = 2 \,. \end{cases}$ *Existe uma quádrica não cêntrica na forma canônica com as propriedades acima?*

Solução.
Seja

$$\mathcal{Q} : Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$$

uma quádrica cêntrica na forma canônica tal que $P_0 \in \mathcal{Q}$ e $\gamma \subset \mathcal{Q}$.

Então, como

$$\gamma : \begin{cases} By^2 + Cz^2 = R - 4A \\ x = 2 \end{cases},$$

existe $\lambda \neq 0$ tal que $B = 4\lambda$, $C = 2\lambda$ e $R - 4A = 3\lambda$.

Ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} : Ax^2 + 4\lambda y^2 + 2\lambda z^2 = R \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{Q} : \frac{A}{\lambda}x^2 + 4y^2 + 2z^2 = \frac{R}{\lambda} \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{Q} : A'x^2 + 4y^2 + 2z^2 = R' \,, \end{aligned}$$

onde

$$R' - 4A' = 3 \,. \tag{7}$$

Além disso, como $P_0 = (1, 1, -1) \in \mathcal{Q}$, temos que

$$A' + 4 + 2 = R' \Longleftrightarrow R' = A' + 6 \,.$$

Logo, por (7),

$$A' + 6 - 4A' = 3 \Longrightarrow A' = 1 \quad \text{e} \quad R' = 7.$$

Assim, a quádrica

$$\mathcal{Q} : x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 7$$

é um elipsóide na forma canônica com $a = \sqrt{7}$, $b = \frac{\sqrt{7}}{2}$, $c = \sqrt{\frac{7}{2}}$.

Suponhamos que existe uma quádrica não-cêntrica $\widetilde{\mathcal{Q}}$ na forma canônica tal que $P_0 \in \widetilde{\mathcal{Q}}$ e $\gamma \subset \widetilde{\mathcal{Q}}$.

Então $\widetilde{\mathcal{Q}}$ é da seguinte forma:

$$\widetilde{\mathcal{Q}} : By^2 + Cz^2 = Ax \,,$$

pois a seção plana $\widetilde{\mathcal{Q}} \cap \{x = 2\}$ deve ser uma elipse.

Como

$$\gamma : \begin{cases} By^2 + Cz^2 = 2A \\ x = 2 \,, \end{cases}$$

existe $\lambda \neq 0$ tal que $B = 4\lambda$, $C = 2\lambda$ e $2A = 3\lambda$.

Ou seja,

$$\widetilde{\mathcal{Q}} : 4\lambda y^2 + 2\lambda z^2 = \frac{3\lambda}{2}\,x \quad \Longleftrightarrow \quad \widetilde{\mathcal{Q}} : 4y^2 + 2z^2 = \frac{3}{2}\,x\,.$$

Mas, como o ponto $P_0 = (1, 1, -1)$ não pertence a $\widetilde{\mathcal{Q}}$, pois $4 + 2 \neq \frac{3}{2}$, não existe uma quádrica não-cêntrica na forma canônica com as propriedades acima. $\square$

Exemplo 6

Determine, classifique e parametrize as quádricas na forma canônica que possuem como seções planas as curvas:

$$\gamma : \begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 5 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \beta : \begin{cases} 4z^2 - 3y^2 = 1 \\ x = 1\,. \end{cases}$$

Solução.
Como as seções planas $\alpha = \mathcal{Q} \cap \{z = 1\}$ e $\beta = \mathcal{Q} \cap \{x = 1\}$ são elipses, a quádrica $\mathcal{Q}$ tem que ser cêntrica.

Seja

$$\mathcal{Q} : Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$$

uma quádrica cêntrica na forma canônica tal que $\gamma \subset \mathcal{Q}$ e $\beta \subset \mathcal{Q}$.

Então, como

$$\gamma : \begin{cases} Ax^2 + By^2 = R - C \\ z = 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \beta : \begin{cases} By^2 + Cz^2 = R - A \\ x = 1\,, \end{cases}$$

existem $\lambda \neq 0$ e $\mu \neq 0$ tais que

$$A = 2\lambda,\ B = 3\lambda,\ R - C = 5\lambda,\ B = -3\mu,\ C = 4\mu \quad \text{e} \quad R - A = \mu.$$

Logo, sendo $3\lambda = -3\mu$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\mu = -1$ e $\lambda = 1$.

Assim, $A = 2$, $B = 3$, $C = -4$, $R = C + 5\lambda = -4 + 5 = 1 = 2 - 1 = A + \mu$, ou seja,

$$\mathcal{Q} : 2x^2 + 3y^2 - 4z^2 = 1$$

é um hiperbolóide de uma folha de eixo$-OZ$, que não é de revolução, pois $a = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq b = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Uma parametrização de $\mathcal{Q}$ é dada por:

$$\mathcal{Q} : \begin{cases} x(s,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cosh s\ \cos t \\ y(s,t) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cosh s\ \text{sen}\, t\,, \qquad s, t \in \mathbb{R}\,. \\ z(s,t) = \dfrac{1}{2} \,\text{senh}\, s \end{cases}$$

$\square$

Exemplo 7

Classifique, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, a equação de segundo grau:

$$(\lambda^3 - \lambda)x^2 + \lambda^2 y^2 + (\lambda + 1)z^2 = \lambda^2 + 1\,. \qquad (8)$$

Para que valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, a equação representa uma quádrica: regrada, degenerada e de revolução? Justifique.

Solução.
Analisamos abaixo a variação do sinal dos coeficientes da equação (8):

	$-\infty < \lambda < -1$	$\lambda = -1$	$-1 < \lambda < 0$	$\lambda = 0$	$0 < \lambda < 1$	$\lambda = 1$	$1 < \lambda < \infty$
$\lambda^3 - \lambda$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
λ^2	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$\lambda + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\lambda^2 + 1$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Então, a equação representa:

- um hiperbolóide de duas folhas de eixo$-OY$ se $\lambda \in (-\infty, -1)$;
- dois planos paralelos, $y = \pm\sqrt{2}$, se $\lambda = -1$;
- um elipsóide se $\lambda \in (-1, 0)$;
- dois planos paralelos, $z = \pm 1$, se $\lambda = 0$;
- um hiperbolóide de uma folha de eixo$-OX$ se $\lambda \in (0, 1)$;
- o cilindro elíptico $y^2 + 2z^2 = 2$ de eixo$-OX$ se $\lambda = 1$;
- um elipsóide se $\lambda \in (1, +\infty)$.

Para $\lambda = -1$, $\lambda = 0$, $\lambda \in (0,1)$, $\lambda = 1$ a quádrica é uma superfície regrada e, para $\lambda = -1$ e $\lambda = 0$, a quádrica é degenerada.

Um elipsóide dado pela equação (8) é de revolução se, e só se,

$$\lambda^3 - \lambda = \lambda^2 \quad \text{ou} \quad \lambda^3 - \lambda = \lambda + 1 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 = \lambda + 1\,,$$

com $\lambda \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

Então, como:

- $$\begin{aligned} \lambda^3 - \lambda = \lambda^2 &\iff \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda = 0 \iff \lambda(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0 \\ &\iff \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+4}\right) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)\,; \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \lambda^3 - \lambda = \lambda + 1 &\iff \lambda^3 - 2\lambda - 1 = 0 \iff \lambda = -1 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \\ &\iff \lambda = -1 \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)\,; \end{aligned}$$

- $$\lambda^2 = \lambda + 1 \iff \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right) ,$$

a equação representa um elipsóide de revolução se, e só se, $\lambda = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$, pois

$$\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) \in (1, +\infty) \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right) \in (-1, 0).$$

Para $\lambda \in (-\infty, -1)$, a equação representa um hiperbolóide de duas folhas de eixo$-OY$.

Como as raízes $\lambda = -1$ e $\lambda = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$ da equação $\lambda^3 - \lambda = \lambda + 1$ não pertencem ao intervalo $(-\infty, -1)$, nenhum destes hiperbolóides é de revolução.

A equação representa um hiperbolóide de uma folha de eixo$-OX$ se $\lambda \in (0, 1)$ e será de revolução se, e só se, $\lambda^2 = \lambda + 1$. Ou seja, se, e só se, $\lambda = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$.

Como $\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right) \notin (0, 1)$, nenhum hipérbole de uma folha de eixo$-OX$ dado pela equação (8) é de revolução. □

Exemplo 8

Determine e classifique as quádricas na forma canônica que possuem como seções planas as curvas:

$$\gamma : \begin{cases} x^2 = 2\left(y + \frac{1}{4}\right) \\ z = 1 \end{cases} \qquad e \qquad \beta : \begin{cases} x^2 = 2(y+1) \\ z = 2 \end{cases}$$

Solução.

Como as seções planas são parábolas de retas-focais paralelas ao eixo$-OY$, a quádrica tem que ser não-cêntrica de eixo$-OY$:

$$Ax^2 + Cz^2 = Sy \, .$$

Sendo

$$\gamma : \begin{cases} Ax^2 = Sy - C \\ z = 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \beta : \begin{cases} Ax^2 = Sy - 4C \\ z = 2 \end{cases} ,$$

existem $\lambda \neq 0$ e $\mu \neq 0$ tais que

$$A = \lambda,\ S = 2\lambda,\ -C = \frac{\lambda}{2},\ A = \mu,\ S = 2\mu \quad \text{e} \quad -4C = 2\mu.$$

Assim, $\lambda = \mu \neq 0$ e, sem perda de generalidade, podemos supor $\lambda = \mu = 1$.

Logo, como

$$A = \lambda = \mu = 1 \, , \quad C = -\frac{\lambda}{2} = -\frac{1}{2} = \frac{2\mu}{-4} \quad \text{e} \quad S = 2\lambda = 2\mu = 2 \, ,$$

a quádrica é o parabolóide hiperbólico de eixo$-OY$:

$$x^2 - \frac{z^2}{2} = 2y \, . \; \square$$

Exemplo 9

(a) *Determine e parametrize as quádricas na forma canônica que possuem a curva γ como seção plana e passam pelo ponto $P_0 = (1, 3, 1)$, onde*

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + 5z^2 = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

(b) *Ache as curvas de interseção das quádricas obtidas acima e faça um esboço das superfícies, indicando as curvas de interseção.*

Solução.

(a) Seja

$$\mathcal{Q} : Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$$

uma quádrica cêntrica tal que $\gamma \subset \mathcal{Q}$ e $P_0 \in \mathcal{Q}$.

Então, como

$$\gamma : \begin{cases} Ax^2 + Cz^2 = R - B \\ y = 1 \end{cases},$$

existe $\lambda \neq 0$ tal que $A = \lambda$, $C = 5\lambda$ e $R - B = 2\lambda$, ou seja,

$$\mathcal{Q} : \lambda x^2 + By^2 + 5\lambda z^2 = B + 2\lambda.$$

Além disso, como $P_0 = (1, 3, 1) \in \mathcal{Q}$, obtemos:

$$\lambda + 9B + 5\lambda = B + 2\lambda \iff 8B = -4\lambda \iff B = -\frac{\lambda}{2}.$$

Logo,

$$\mathcal{Q} : \lambda x^2 - \frac{\lambda}{2}y^2 + 5\lambda z^2 = -\frac{\lambda}{2} + 2\lambda = \frac{3\lambda}{2} \iff \mathcal{Q} : x^2 - \frac{y^2}{2} + 5z^2 = \frac{3}{2},$$

é um hiperbolóide de uma folha de eixo$-OY$, com $a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{3}$, $c = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$.

Uma parametrização de $\mathcal{Q}$ é dada por:

$$\mathcal{Q} : \begin{cases} x(s,t) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cosh s \cos t \\ y(s,t) = \sqrt{3} \operatorname{senh} s \\ z(s,t) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \cosh s \operatorname{sen} t \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Seja agora

$$\mathcal{Q}' : Ax^2 + Cz^2 = Sy$$

uma quádrica não-cêntrica de eixo$-OY$ (por quê?) tal que $\gamma \subset \mathcal{Q}'$ e $P_0 \in \mathcal{Q}'$.

Então, sendo

$$\gamma : \begin{cases} Ax^2 + Cz^2 = S \\ y = 1 \end{cases},$$

existe $\lambda \neq 0$ tal que $A = \lambda$, $C = 5\lambda$, $S = 2\lambda$, ou seja,

$$\mathcal{Q}' : \lambda x^2 + 5\lambda z^2 = 2\lambda y \iff \mathcal{Q}' : x^2 + 5z^2 = 2y\,,$$

é um parabolóide elíptico de eixo$-OY$.

Além disso, como $P_0 = (1,3,1) \in \mathcal{Q}'$, pois $1 + 5 \times 1 = 6 = 2 \times 3$, $\mathcal{Q}'$ é uma quádrica tal que $\gamma \subset Q'$ e $P_0 \in \mathcal{Q}'$.

Uma parametrização deste parabolóide elíptico é dada por

$$\mathcal{Q}' : \begin{cases} x(s,t) = s \cos t \\ y(s,t) = \dfrac{s^2}{2} \\ z(s,t) = \dfrac{s}{\sqrt{5}} \operatorname{sen} t \end{cases}, \quad s,t \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Um ponto (x,y,z) pertence a $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}'$ se, e só se,

$$\begin{cases} x^2 + 5z^2 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{y^2}{2} \\ x^2 + 5z^2 = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 5z^2 = 2y \\ \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{3}{2} = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 5z^2 = 2y \\ y^2 - 4y + 3 = 0\,. \end{cases}$$

Como as raízes da equação $y^2 - 4y + 3 = 0$ são $y = 1$ e $y = 3$, obtemos que

$$\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}' = \gamma \cup \beta\,,$$

onde γ e β são as elipses:

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + 5z^2 = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \beta : \begin{cases} x^2 + 5z^2 = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$

Veja, na figura abaixo, o esboço de $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$, com as curvas γ e β.

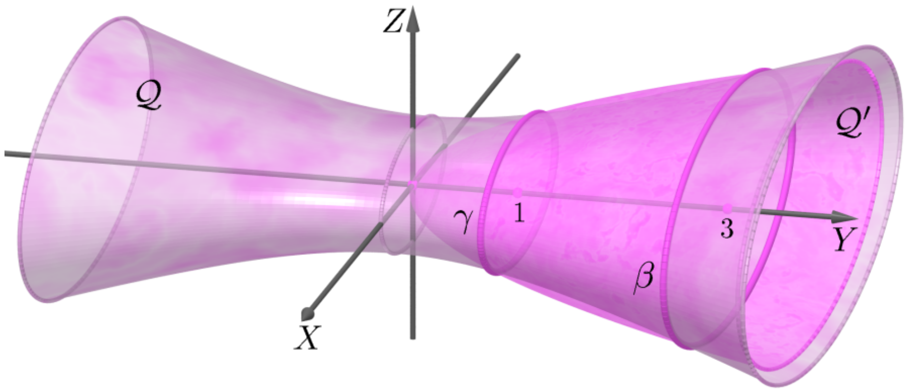

Fig. 60: Superfícies $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ □

Exemplo 10

Classifique, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, a quádrica dada pela equação de segundo grau:

$$\mathcal{Q} : (\lambda^3 + \lambda^2)x^2 + (\lambda^2 - 1)y^2 + (\lambda + 2)z^2 = \lambda\,.$$

Para que valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, a equação representa uma quádrica degenerada ou regrada? Quais hiperbolóides de uma folha ou de duas folhas são de revolução?

Solução.

Começamos efetuando o estudo do sinal dos coeficientes:

	$\lambda < -2$	$\lambda = -2$	$-2 < \lambda < -1$	$\lambda = -1$	$-1 < \lambda < 0$	$\lambda = 0$	$0 < \lambda < 1$	$\lambda = 1$	$\lambda > 1$
$\lambda^3 + \lambda^2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$\lambda^2 - 1$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\lambda + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
λ	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

Portanto, a equação representa:

- um hiperbolóide de uma folha de eixo$-OY$ se $\lambda \in (-\infty, -2)$;
- o cilindro hiperbólico $-4x^2 + 3y^2 = -2$ de eixo$-OZ$ se $\lambda = -2$;
- um hiperbolóide de duas folhas de eixo$-OX$, se $\lambda \in (-2, -1)$;
- o conjunto vazio ($z^2 = -1$) se $\lambda = -1$;
- um hiperbolóide de duas folhas de eixo$-OY$ se $\lambda \in (-1, 0)$;
- dois planos paralelos, $y = \pm\sqrt{2}\,z$, se $\lambda = 0$;
- um hiperbolóide de uma folha de eixo$-OY$ se $\lambda \in (0, 1)$;
- o cilindro elíptico $2x^2 + 3z^2 = 1$ de eixo$-OY$ se $\lambda = 1$;
- um elipsóide, se $\lambda \in (1, +\infty)$.

Assim, $\mathcal{Q}$ é uma quádrica degenerada se $\lambda = -1$ ou $\lambda = 0$, e $\mathcal{Q}$ é uma superfície regrada se $\lambda \in (-\infty, -2] \cup [0, 1]$.

Para $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (0, 1)$, o hiperboloide de uma folha de eixo$-OY$ é de revolução se, e só se,
$$\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda + 2\,.$$

Como $\lambda^3 + \lambda^2 < 2$ e $\lambda + 2 > 2$ para $\lambda \in (0, 1)$, a equação $\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda + 2$ não possui solução neste intervalo.

Além disso, sendo $\lambda^2(\lambda + 1) < -\lambda^2$, para $\lambda \in (-\infty, -2)$, e a desigualdade
$$\lambda + 2 < -\lambda^2 \Longleftrightarrow \lambda^2 + \lambda + 2 < 0$$
sem solução em $\mathbb{R}$, concluímos que a equação $\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda + 2$ não tem raiz no intervalo $(-\infty, -2)$.

Logo nenhum dos hiperbolóides de uma folha de eixo$-OY$, $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (0, 1)$, é de revolução.

Por outro lado, o hiperbolóide de duas folha de eixo$-OY$, $\lambda \in (-1, 0)$, é de revolução se, e só se,
$$\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda + 2\,.$$

Mas, para $\lambda \in (-1, 0)$, $\lambda^2(\lambda + 1) < |\lambda|(\lambda + 1) = -\lambda^2 - \lambda$.

Assim,
$$\lambda + 2 = \lambda^3 + \lambda^2 < -\lambda^2 - \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda^2 + 2\lambda + 2 < 0\,,$$
uma contradição, pois $\lambda^2 + 2\lambda + 2 > 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Então os hiperbolóides de duas folhas

de eixo$-OY$, $\lambda \in (-1,0)$, também não são de revolução.

O hiperbolóide de duas folhas de eixo$-OX$, $\lambda \in (-2,-1)$, é de revolução se, e só se,

$$\lambda^2 - 1 = \lambda + 2 \Longleftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 3 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+12}\right) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{13}\right).$$

Como $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{13}\right) \notin (-2,-1)$ e $\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{13}\right) \in (-2,-1)$, temos que, para $\lambda = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{13}\right)$, o hiperbolóide de duas folhas de eixo$-OX$,

$$(\lambda^3+\lambda^2)x^2 + (\lambda^2-1)y^2 + (\lambda+2)z^2 = \lambda\,,$$

é de revolução. $\square$

Exemplo 11

Determine as quádricas $\mathcal{Q}$ na forma canônica tais que todas as seções planas $x = k$, $k \in \mathbb{R}$, são hipérboles equiláteras com reta-focal paralela ao eixo$-OY$ e que possuem o círculo

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$$

como seção plana.

Solução.

Como todas as seções planas contidas em planos paralelos ao plano YZ são hipérboles com retas-focais paralelas a um mesmo eixo (no caso, o eixo$-OY$), a quádrica só pode ser um hiperbolóide de duas folhas de eixo$-OY$ ou um cilindro hiperbólico de eixo$-OX$.

Por outro lado, como o círculo

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$$

é também uma seção plana da superfície, ela só pode ser um hiperbolóide de duas folhas de eixo$-OY$:

$$\mathcal{Q} : \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,.$$

Sendo

$$\gamma : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{2}{b^2} - 1 \\ y = \sqrt{2} \end{cases},$$

obtemos que $a^2 = c^2$ e $a^2\left(\frac{2}{b^2} - 1\right) = 1$.

Além disso, como as seções planas

$$\mathcal{Q} \cap \{x = k\} : \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 + \dfrac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases}$$

são hipérboles equiláteras, vemos que $b^2 = c^2$.

Logo $a^2 = b^2 = c^2$ e

$$a^2\left(\frac{2}{a^2} - 1\right) = 1 \iff 2 - a^2 = 1 \iff a^2 = 1\,.$$

Ou seja,

$$\mathcal{Q} : y^2 - x^2 - z^2 = 1\,. \quad \square$$

Exemplo 12

Seja $\mathcal{H}$ a hipérbole, no plano $z = 1$, de centro no ponto $C = (0, 0, 1)$ e reta-focal paralela ao eixo$-OY$, sendo $F = \left(0, \sqrt{5}, 1\right)$ um dos seus focos e a reta $r : 2y - x = 0$ uma das suas assíntotas.

(a) *Determine as quádricas $\mathcal{Q}$ na forma canônica tais que $\mathcal{H} \subset \mathcal{Q}$ e $(0, 0, 0) \in \mathcal{Q}$.*

(b) *Ache as curvas de interseção das quádricas obtidas acima.*

(c) *Faça um esboço das quádricas indicando as curvas de interseção.*

Solução.

(a) Temos $c = d(C, F) = \sqrt{5}$ e $\dfrac{b}{a} = 2$ pois $r : x = 2y$ é uma assíntota de $\mathcal{H}$ e a sua reta-focal é paralela ao eixo$-OY$.

Como $5 = c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + 4a^2$, vemos que $a = 1$ e $b = 2$.

Assim, a hipérbole é dada por:

$$\mathcal{H} : \begin{cases} y^2 - \dfrac{x^2}{4} = 1 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Seja

$$\mathcal{Q} : Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R\,,$$

uma quádrica cêntrica na forma canônica tal que $\mathcal{H} \subset Q$ e $(0, 0, 0) \in \mathcal{Q}$.

Então $R = 0$ e

$$\mathcal{H} = \mathcal{Q} \cap \{z = 1\} : \begin{cases} Ax^2 + By^2 = -C \\ z = 1 \end{cases}.$$

Portanto, existe $\lambda \neq 0$ tal que $A = -\dfrac{\lambda}{4}$, $B = \lambda$ e $C = -\lambda$, ou seja,

$$\mathcal{Q} : -\frac{\lambda}{4}x^2 + \lambda y^2 - \lambda z^2 = 0\,.$$

Supondo, sem perda de generalidade, que $\lambda = 1$, obtemos:

$$\mathcal{Q} : -\frac{1}{4}x^2 + y^2 - z^2 = 0 \iff \mathcal{Q} : \frac{1}{4}x^2 + z^2 = y^2\,,$$

que é um cone elíptico de eixo$-OY$.

Seja, agora,

$$\mathcal{Q}' : Ax^2 + By^2 = Sz$$

uma quádrica não-cêntrica na forma canônica de eixo$-OZ$.

Logo $(0,0,0) \in \mathcal{Q}'$ e

$$\mathcal{H} : \mathcal{Q}' \cap \{z = 1\} : \begin{cases} Ax^2 + By^2 = S \\ z = 1 \end{cases}.$$

Existe, assim, $\lambda \neq 0$ tal que $A = -\dfrac{\lambda}{4}$, $B = \lambda$ e $S = \lambda$.

Supondo $\lambda = 1$, obtemos que

$$\mathcal{Q}' : -\frac{x^2}{4} + y^2 = z$$

é um parabolóide elíptico de eixo$-OZ$.

(b) Um ponto (x, y, z) pertence a $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}'$ se, e só se,

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{4} + y^2 = z^2 \\ -\dfrac{x^2}{4} + y^2 = z \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{x^2}{4} + y^2 = z^2 \\ z^2 = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\dfrac{x^2}{4} + y^2 = z^2 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -\dfrac{x^2}{4} + y^2 = z^2 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Ou seja, $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}' = \gamma \cup \beta$, onde

$$\gamma = \mathcal{H} : \begin{cases} -\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \beta : \begin{cases} x = \pm 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

(c) O esboço de $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ são mostrados na figura 61 ao lado. □

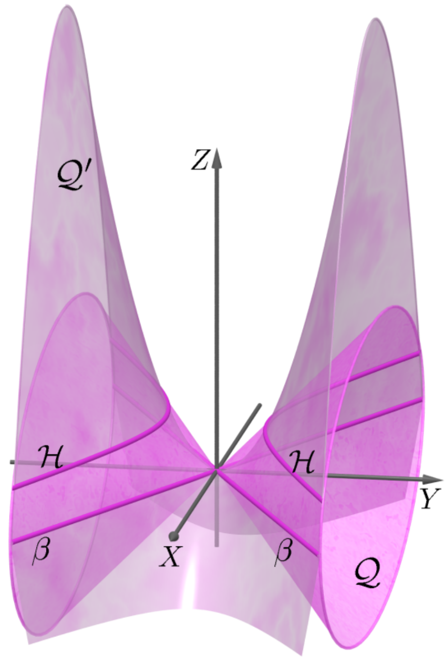

Fig. 61: Interseção $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}' = \mathcal{H} \cup \beta$

Observação 3

Uma quádrica dada por uma equação do segundo grau *sem termo misto*,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

pode, por meio de uma translação dos eixos coordenados, ser reduzida a sua forma canônica quando:

- pelo menos dois dos coeficientes A, B e C são não-nulos;
- $A \neq 0$, $B = C = 0$, $H = 0$ ou $I = 0$;
- $B \neq 0$, $A = C = 0$, $G = 0$ ou $I = 0$;
- $C \neq 0$, $A = B = 0$, $G = 0$ ou $H = 0$.

Mas, quando

- $A \neq 0$, $B = C = 0$, $H \neq 0$ e $I \neq 0$;
- $B \neq 0$, $A = C = 0$, $G \neq 0$ e $I \neq 0$;
- $C \neq 0$, $A = B = 0$, $G \neq 0$ e $H \neq 0$,

devemos fazer primeiro uma rotação e depois uma translação dos eixos coordenados para reduzir a quádrica à sua forma canônica. Nestes casos, a quádrica é sempre um cilindro parabólico.

Veja os exemplos abaixo.

Exemplo 13

Classifique as quádricas transladadas abaixo e parametrize-as.

(a) $S : 4x^2 + y^2 + 3z^2 - 8x + 2y + 6z = -7$ *;*

(b) $S : x^2 - y^2 - z^2 + 8x - 2y + 6z = -5$.

Essas quádricas são de revolução? Justifique.

Solução.

(a) Completando os quadrados, obtemos que:

$$\begin{aligned} & S : 4(x^2 - 2x) + (y^2 + 2y) + 3(z^2 + 2z) = -7 \\ \iff \quad & S : 4(x-1)^2 + (y+1)^2 + 3(z+1)^2 = -7 + 4 + 1 + 3 = 1 \\ \iff \quad & S : \frac{(x-1)^2}{1/4} + (y+1)^2 + \frac{(z+1)^2}{1/3} = 1 \,. \end{aligned}$$

Seja $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$ o sistema de eixos ortogonais no qual $\overline{O} = C = (1, -1, -1)$ e os semi-eixos positivos $\overline{O}\,\overline{X}$, $\overline{O}\,\overline{Y}$ e $\overline{O}\,\overline{Z}$ têm, respectivamente, a mesma direção e o mesmo sentido dos semi-eixos positivos OX, OY e OZ.

Então, como

$$(x, y, z) = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) + (1, -1, -1) \,, \tag{9}$$

temos que:

$$\frac{\overline{x}^2}{1/4} + \overline{y}^2 + \frac{\overline{z}^2}{1/3} = 1$$

é a equação da quádrica nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$ e $\overline{z}$.

Logo a quádrica é um elipsóide de centro $C = (1, -1, -1)$ com $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1$ e $c = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Esse elipsóide não é de revolução, pois $a \neq b$, $a \neq c$ e $b \neq c$.

Sendo

$$S : \begin{cases} \overline{x}(s,t) = \dfrac{1}{2} \cos s \cos t \\ \overline{y}(s,t) = \cos s \,\text{sen}\, t \\ \overline{z}(s,t) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \,\text{sen}\, s \end{cases} , \quad s, t \in \mathbb{R} \,,$$

uma parametrização do elipsóide nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$ e $\overline{z}$, obtemos, por (9), que:

$$S : \begin{cases} x(s,t) = \dfrac{1}{2}\cos s\,\cos t + 1 \\ y(s,t) = \cos s\,\text{sen}\, t - 1 \\ z(s,t) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\text{sen}\, s - 1 \end{cases} \quad , \quad s,t \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização do elipsóide nas coordenadas x, y e z.

(b) Completando os quadrados, temos que:

$$S : (x^2 + 8x) - (y^2 + 2y) - (z^2 - 6z) = -5$$

$$\iff \quad S : (x+4)^2 - (y+1)^2 - (z-3)^2 = -5 + 16 - 1 - 9 = 1\,.$$

Seja $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$ uma translação do sistema de eixos $OXYZ$ no qual $\overline{O} = C = (-4,-1,3)$.

Como

$$(x,y,z) = (\overline{x},\overline{y},\overline{z}) + (-4,-1,3)\,, \tag{10}$$

obtemos que

$$S : \overline{x}^2 - \overline{y}^2 - \overline{z}^2 = 1$$

é a equação da quádrica nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$.

Logo S é um hiperbolóide de duas folhas de eixo

$$r = \{(-4,-1,3) + t(1,0,0)\mid t \in \mathbb{R}\}$$

paralelo ao eixo$-OX$ com $a = b = c = 1$.

Como $b = c$, S é uma superfície de revolução obtida girando a hipérbole

$$\gamma : \begin{cases} \overline{x}^2 - \overline{y}^2 = 1 \\ \overline{z} = 0 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \gamma : \begin{cases} (x+4)^2 - (y+1)^2 = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

em torno do eixo$-\overline{O}\,\overline{X} = r$.

Assim, sendo

$$S : \begin{cases} \overline{x}(s,t) = \pm\cosh s \\ \overline{y}(s,t) = \text{senh}\, s\,\cos t \\ \overline{z}(s,t) = \text{senh}\, s\,\text{sen}\, t \end{cases} \quad , \quad s,t \in \mathbb{R}\,,$$

uma parametrização de S nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$ e $\overline{z}$, obtemos, por (10), que

$$S : \begin{cases} x(s,t) = \pm\cosh s - 4 \\ y(s,t) = \text{senh}\, s\,\cos t - 1 \\ z(s,t) = \text{senh}\, s\,\text{sen}\, t + 3 \end{cases} \quad , \quad s,t \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização de S nas coordenadas x, y, z. □

Exemplo 14

Reduza a quádrica

$$\mathcal{Q} : 2x^2 + 4x + 3y - 5z - 1 = 0$$

à sua forma canônica e classifique-a.

Solução.
Neste exemplo, $A = 2 \neq 0$, $B = C = 0$, $\mathcal{H} \neq 0$ e $I \neq 0$.

Temos:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{Q} : 2(x^2 + 2x) = -3y + 5z + 1 \\
\Longleftrightarrow \quad & \mathcal{Q} : 2(x+1)^2 = -3y + 5z + 1 + 2 = -3x + 5z + 3 \\
\Longleftrightarrow \quad & \mathcal{Q} : (x+1)^2 = \frac{1}{2}(-3y + 5z) + \frac{3}{2}\,.
\end{aligned}$$

Seja $O\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$ o sistema de eixos ortogonais no qual os semi-eixos positivos $O\,\overline{X}$, $O\,\overline{Y}$ e $O\,\overline{Z}$ tem, respectivamente, o mesmo sentido e a mesma direção dos vetores:

$$\overrightarrow{v_1} = (1, 0, 0)\,, \qquad \overrightarrow{v_2} = \left(0, \frac{5}{\sqrt{34}}, \frac{3}{\sqrt{34}},\right) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{v_3} = \left(0, \frac{-3}{\sqrt{34}}, \frac{5}{\sqrt{34}},\right)\,.$$

Como

$$(x, y, z) = \overline{x}(1, 0, 0) + \overline{y}\left(0, \frac{5}{\sqrt{34}}, \frac{3}{\sqrt{34}},\right) + \overline{z}\left(0, -\frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{5}{\sqrt{34}},\right)$$

ou seja,

$$\begin{cases}
x = \overline{x} \\
y = \dfrac{1}{\sqrt{34}}(5\overline{y} - 3\overline{z}) \\
z = \dfrac{1}{\sqrt{34}}(3\overline{y} + 5\overline{z})
\end{cases}$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
& \mathcal{Q} : (\overline{x} + 1)^2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{\sqrt{34}}(5\overline{y} - 3\overline{z}) + \frac{5}{\sqrt{34}}(3\overline{y} + 5\overline{z})\right) + \frac{3}{2} \\
\Longleftrightarrow \quad & \mathcal{Q} : (\overline{x} + 1)^2 = \frac{\sqrt{34}}{2}\overline{z} + \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{34}}{2}\left(\overline{z} + \frac{3}{\sqrt{34}}\right)
\end{aligned}$$

é a equação cartesiana da quádrica nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$ e $\overline{z}$.

Para reduzí-la à forma canônica tomamos o sistema de eixos $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}}\,\overline{\overline{Z}}$, no qual $\overline{O} = \left(-1, 0, -\frac{3}{\sqrt{34}}\right)$ e os semi-eixos positivos $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$, $\overline{O}\,\overline{\overline{Y}}$ e $\overline{O}\,\overline{\overline{Z}}$ tem a mesma direção e o mesmo sentido, respectivamente, dos semi-eixos positivos $O\,\overline{X}$, $O\,\overline{Y}$ e $O\,\overline{Z}$.

Como $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = (\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}, \overline{\overline{z}}) + \left(-1, 0, -\frac{3}{\sqrt{34}}\right)$, obtemos que a forma canônica de $\mathcal{Q}$ é dada por:

$$\mathcal{Q} : \overline{\overline{x}}^2 = \frac{\sqrt{34}}{2}\,\overline{\overline{z}}$$

que representa um cilindro parabólico de eixo$-\overline{O}\,\overline{\overline{Y}} = \{(0,1,0)t \,|\, t \in \mathbb{R}\}$.

Nas coordenadas x, y e z, a reta

$$\begin{aligned} r &= \left\{ -(1,0,0) + t\left(0, \frac{5}{\sqrt{34}}, \frac{3}{\sqrt{34}}\right) - \frac{3}{\sqrt{34}}\left(0, -\frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{5}{\sqrt{34}}\right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \left(-1, \frac{9}{34}, -\frac{15}{34}\right) + t\left(0, \frac{5}{\sqrt{34}}, \frac{3}{\sqrt{34}}\right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

é o eixo da quádrica $\mathcal{Q}$. □

Exemplo 15

Determine a quádrica $\mathcal{Q}$ na forma canônica transladada que passa pelos pontos $P_0 = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$, $Q_0 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ e possui como seção plana a parábola γ contida no plano $x = 1$, com vértice no ponto $V = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$ e foco no ponto $F = \left(1, -\frac{3}{2}, 0\right)$.

Solução.

Como $\overrightarrow{FV} = (0,2,0)$ é paralelo ao eixo$-OY$, $p = \|\overrightarrow{FV}\| = 2$ e F está à esquerda de V, temos que:

$$\gamma : \begin{cases} z^2 = -8\left(y - \frac{1}{2}\right) = -8y + 4 \\ x = 1\,. \end{cases}$$

A quádrica transladada $\mathcal{Q}$ tem de ser não-cêntrica de eixo paralelo ao eixo$-OY$,

$$\mathcal{Q} : A(x - x_0)^2 + C(z - z_0)^2 = S(y - y_0)\,,$$

pois a parábola γ é uma seção plana de $\mathcal{Q}$.

Sendo

$$\gamma : \begin{cases} A(1 - x_0)^2 + C(z - z_0)^2 = S(y - y_0) \\ x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} Cz^2 - 2Cz_0z + Cz_0^2 = Sy - Sy_0 - A(1 - x_0)^2 \\ x = 1 \end{cases},$$

existe $\lambda \neq 0$ tal que $C = \lambda$, $-2Cz_0 = 0$, $S = -8\lambda$, $-Sy_0 - A(1 - x_0)^2 - Cz_0^2 = 4\lambda$.

Assim, $z_0 = 0$ e

$$\mathcal{Q} : A(x - x_0)^2 + \lambda z^2 = -8\lambda(y - y_0)\,.$$

Supondo, sem perda de generalidade, que $\lambda = 1$, obtemos que:

$$8y_0 - A(1 - x_0)^2 = 4\,, \tag{11}$$

e

$$\mathcal{Q} : A(x - x_0)^2 + z^2 = -8(y - y_0)\,. \tag{12}$$

Além disso, como $P_0 = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right) \in \mathcal{Q}$, temos, por (12), que:

$$Ax_0^2 = -8\left(\frac{1}{2} - y_0\right) = -4 + 8y_0\,. \tag{13}$$

Logo, por (11) e por (13), obtemos:

$$\begin{aligned} Ax_0^2 = A(1-x_0)^2 &\iff A = 0 \quad \text{ou} \quad A \neq 0 \quad \text{e} \quad x_0^2 = (1-x_0)^2 = x_0^2 - 2x_0 + 1 \\ &\iff A = 0 \quad \text{ou} \quad A \neq 0 \quad \text{e} \quad x_0 = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Se $A = 0$, temos, por (13), que $y_0 = \frac{1}{2}$ e

$$\mathcal{Q} : z^2 = -8\left(y - \frac{1}{2}\right)\,,$$

uma contradição, pois $Q_0 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) \notin \mathcal{Q}$.

Se $A \neq 0$ e $x_0 = \frac{1}{2}$, então, por (13),

$$\frac{A}{4} = -4 + 8y_0 \iff A = 4(8y_0 - 4)\,.$$

Ou seja, neste caso,

$$\mathcal{Q} : 4(8y_0 - 4)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = -8(y - y_0)\,.$$

Finalmente, como $Q_0 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) \in \mathcal{Q}$, vemos que

$$4(8y_0 - 4)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 = -8(0 - y_0) \iff y_0 = 0\,.$$

Portanto, a quádrica

$$\mathcal{Q} : -16\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = -8y$$

é um parabolóide hiperbólico de eixo paralelo ao eixo$-OY$. $\square$

Exemplo 16

Seja S o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^3$ eqüidistantes do ponto $A = (0, 2, 0)$ e da esfera $S_0 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Classifique e parametrize a superfície encontrada.

Solução.

A esfera S_0 tem centro na origem $O = (0, 0, 0)$ e raio igual a 1.

Então $P = (x, y, z) \in S$ se, e só se,

$$\begin{aligned} d(P, A) = d(P, S_0) = |1 - d(O, P)| &\iff \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + z^2} = |1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}| \\ &\iff x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1 - 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + x^2 + y^2 + z^2 \\ &\iff (y-2)^2 = 1 - 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + y^2 \end{aligned}$$

$$\iff y^2 - 4y + 4 = 1 - 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} + y^2$$
$$\iff -4y + 3 = -2\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\iff 4y - 3 = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.$$

Logo $y > \frac{3}{4}$ e

$$S : 16y^2 - 24y + 9 = 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 \iff S : 4x^2 - 12y^2 + 4z^2 + 24y = 9$$
$$\iff S : 4x^2 - 12(y-1)^2 + 4z^2 = 9 - 12 = -3$$
$$\iff S : -\frac{4}{3}x^2 + 4(y-1)^2 - \frac{4}{3}z^2 = 1\,.$$

Como $12(y-1)^2 = 4x^2 + 4z^2 + 3$, temos que (x, y, z) satisfaz a equação se, e só se,

$$(y-1)^2 \geq \frac{1}{4} \iff |y-1| \geq \frac{1}{2} \iff y \geq \frac{3}{2} \text{ ou } y \leq \frac{1}{2}\,.$$

Além disso, sendo $y > \frac{3}{4}$, temos que:

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -\frac{4}{3}x^2 + 4(y-1)^2 - \frac{4}{3}z^2 = 1 \text{ e } y \geq \frac{3}{2} \right\},$$

ou seja, S é um dos ramos do hiperbolóide de duas folhas de revolução de eixo $r = \{(0, 1, 0) + t(0, 1, 0)\} =$ eixo $-$ OY:

$$\mathcal{Q} : -\frac{4}{3}x^2 + 4(y-1)^2 - \frac{4}{3}z^2 = 1\,.$$

Como $a = c = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ e $y \geq \frac{3}{2}$,

$$S : \begin{cases} x(s,t) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ senh}\, s \cos t \\ y(s,t) = \dfrac{1}{2} \cosh s + 1 \\ z(s,t) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ senh}\, s \text{ sen}\, t \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização da superfície de revolução S de eixo$-OY$ que possui o ramo da hipérbole

$$\gamma : \begin{cases} 4(y-1)^2 - \dfrac{4}{3}z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}, \quad y \geq \frac{3}{2},$$

como uma de suas geratrizes. $\square$

Se uma equação do segundo grau possuir apenas um termo misto (xy, xz ou yz), podemos reduzí-la à sua forma canônica fazendo uma rotação dos eixos coordenados (OX e OY, OX e OZ, OY e OZ, respectivamente) de modo análogo ao que faríamos para uma equação de segundo grau em duas variáveis (x e y, x e z, y e z, respectivamente).

Veja o exemplo abaixo.

Exemplo 17

Considere a quádrica

$$\mathcal{Q} : x^2 + 9y^2 + 10z^2 + 6xy - 12\sqrt{10}x + 4\sqrt{10}y = 0\,.$$

(a) *Reduza $\mathcal{Q}$ à sua forma canônica e classifique-a.*

(b) *A quádrica é de revolução? Justifique.*

(c) *Determine o eixo da quádrica e parametrize-a.*

(d) *Mostre que a interseção de $\mathcal{Q}$ com o plano $\pi : x + 3y = \sqrt{10}$ é uma parábola cujo vértice é o ponto $V = \left(\frac{7}{4\sqrt{10}}, \frac{11}{4\sqrt{10}}, 0\right)$.*

Solução.
Para reduzir a expressão de segundo grau nas variáveis x e y,

$$x^2 + 9y^2 + 6xy - 12\sqrt{10}x + 4\sqrt{10}y\,,$$

à sua forma canônica, devemos girar os eixos OX e OY de um ângulo θ, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, tal que

$$\text{tg}\,2\theta = \frac{6}{1-9} = -\frac{3}{4} \iff \cos 2\theta = \frac{-1}{\sqrt{1+\text{tg}^2(2\theta)}} = \frac{-1}{\sqrt{1+9/16}} = -\frac{4}{5}$$
$$\iff \begin{cases} \cos\theta = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-4/5}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ \text{sen}\,\theta = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+4/5}{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \end{cases}.$$

Seja $O\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$ o sistema de eixos ortogonais no qual os semi-eixos positivos $O\,\overline{X}$, $O\,\overline{Y}$ e $O\,\overline{Z}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido, respectivamente, dos vetores unitários:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_1} &= (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}, 0\right)\,; \\ \overrightarrow{v_2} &= (-\text{sen}\,\theta, \cos\theta, 0) = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, 0\right)\,; \\ \overrightarrow{v_3} &= (0,0,1)\,. \end{aligned}$$

Então, sendo

$$(x,y,z) = \overline{x}\overrightarrow{v_2} + \overline{y}\overrightarrow{v_2} + \overline{z}\overrightarrow{v_3}\,,$$

temos que:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(\overline{x} - 3\overline{y}) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(3\overline{x} + \overline{y}) \\ z = \overline{z}\,. \end{cases} \qquad (14)$$

Nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, a equação da quádrica é dada por:

$$\overline{A}\,\overline{x}^2 + \overline{C}\,\overline{y}^2 + 10\overline{z}^2 + \overline{D}\,\overline{x} + \overline{E}\,\overline{y} = 0\,,$$

onde

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\overline{A} & 0\\ 0 & \overline{C}\end{pmatrix} &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}10 & 30\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix}100 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

e $$\begin{pmatrix}\overline{D}\\ \overline{E}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-12\sqrt{10}\\ 4\sqrt{10}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 40\end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\mathcal{Q} : 10\overline{x}^2 + 10\overline{z}^2 + 40\overline{y} = 0 \iff \mathcal{Q} : \overline{x}^2 + \overline{z}^2 = -4\overline{y}\,,$$

é um parabolóide circular de eixo$-O\,\overline{Y}$.

(b) Como as seções planas $\mathcal{Q} \cap \{\overline{y} = k\}$ são círculos, para $k < 0$, a quádrica é uma superfície de revolução de eixo$-O\,\overline{Y}$, sendo a parábola

$$\gamma : \begin{cases}\overline{z}^2 = -4\overline{y}\\ \overline{x} = 0\end{cases}$$

uma de suas geratrizes.

(c) Assim, por (14),

$$r = \left\{ \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, 0\right) t \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

é o eixo de revolução de $\mathcal{Q}$ e

$$S : \begin{cases} x(s,t) &= \dfrac{1}{\sqrt{10}}(\overline{x}(s,t) - 3\overline{y}(s,t)) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\left(s\cos t + 3\dfrac{s^2}{4}\right)\\ y(s,t) &= \dfrac{1}{\sqrt{10}}(3\overline{x}(s,t) + \overline{y}(s,t)) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\left(3s\cos t - \dfrac{s^2}{4}\right)\\ z(s,t) &= \overline{z}(s,t) = s\,\text{sen}\, t \end{cases}, \quad s,t \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização de S nas coordenadas x, y e z, pois

$$S : \begin{cases}\overline{x}(s,t) = s\cos t\\ \overline{y}(s,t) = -\dfrac{s^2}{4}\\ \overline{z}(s,t) = s\,\text{sen}\, t\end{cases}, \quad s,t \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização da quádrica no sistema $O\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$.

(d) O plano $\pi : x + 3y = \sqrt{10}$ nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ é dado por

$$\pi : \frac{1}{\sqrt{10}}(\overline{x} - 3\overline{y} + 9\overline{x} + 3\overline{y}) = \sqrt{10} \quad \Longleftrightarrow \quad \pi : \overline{x} = 1\,.$$

Portanto,

$$\mathcal{Q} \cap \{\overline{x} = 1\} : \begin{cases} \overline{z}^2 = -4\overline{y} - 1 = -4\left(\overline{y} + \dfrac{1}{4}\right) \\ \overline{x} = 1 \end{cases}$$

é uma parábola de vértice $\overline{V} = \left(1, -\frac{1}{4}, 0\right)$ que nas coordenadas x, y, z, é o ponto

$$V = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\left(1 + \frac{3}{4}\right)\,,\, \frac{1}{\sqrt{10}}\left(3 - \frac{1}{4}\right)\,,\, 0\right) \quad \Longleftrightarrow \quad V = \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{7}{4}, \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{11}{4}\,,\, 0\right)\,. \square$$