Aula 11

Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

Para descrever de modo mais simples algumas curvas e regiões no plano, introduzimos, anteriormente, as coordenadas polares. No espaço, existem dois sistemas de coordenadas que nos fornecem uma maneira mais conveniente de descrever algumas superfícies e sólidos.

Seja $P = (x, y, z)$ um ponto do espaço, onde x, y, z são suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$.

Seja $P' = (x, y, 0)$ a projeção ortogonal do ponto P sobre o plano XY e sejam ρ e θ as coordenadas polares de (x, y).

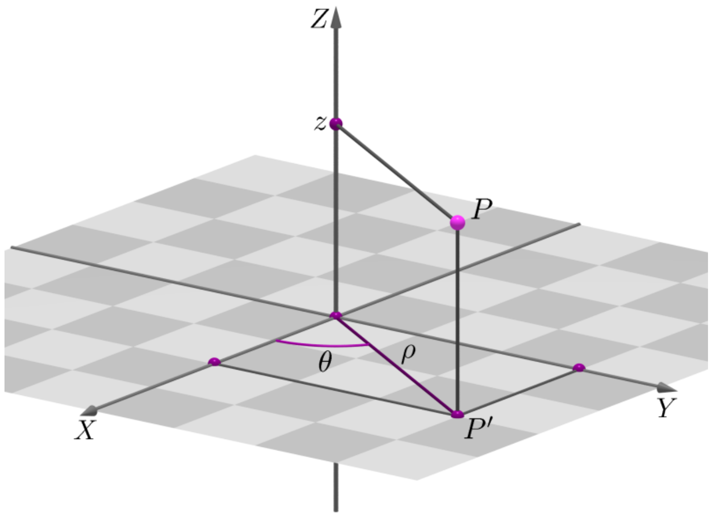

Fig. 1: Ponto P representado pelas coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z)

Dizemos então que (ρ, θ, z) são as *coordenadas cilíndricas* do ponto P.

Sabemos que

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \rho \cos\theta \\ y &= \rho \operatorname{sen}\theta \end{aligned}} \quad \text{e} \quad \boxed{\begin{aligned} \rho &= \pm\sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta &= \pm\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \operatorname{sen}\theta &= \pm\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \operatorname{tg}\theta &= \frac{y}{x} \end{aligned}}$$

Nas coordenadas cilíndricas, o cilindro circular de eixo$-OZ$,

$$S : x^2 + y^2 = a^2 ,$$

é dado por:

$$S : \rho^2 = a^2 \quad \Longleftrightarrow \quad S : \rho = a ,$$

ou seja, $S = \{ (a, \theta, z) \mid \theta, z \in \mathbb{R} \}$.

A simplicidade da equação do cilindro, $\rho = a$, justifica o nome “coordenadas cilíndricas”.

Considere agora $r = d(O, P)$, φ o ângulo que o vetor $\overrightarrow{OP}$ faz com o semi-eixo positivo OZ, $\varphi \in [0, \pi]$, e θ o ângulo que o vetor $\overrightarrow{OP'}$ faz como o semi-eixo positivo$-OX$.

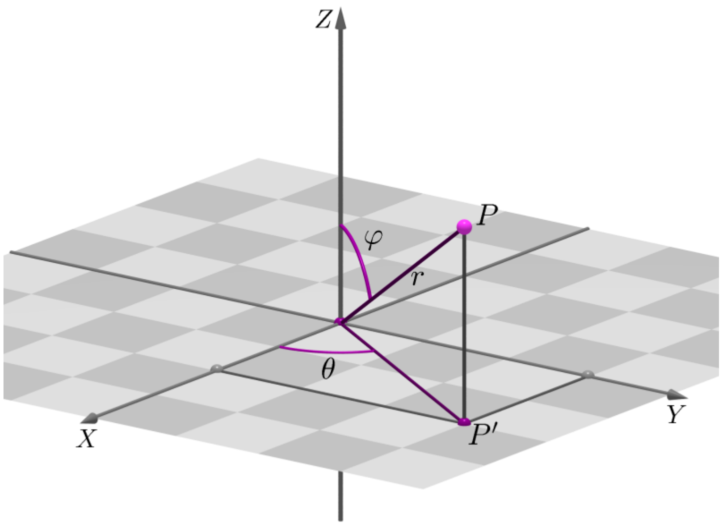

Fig. 2: Ponto P representado pelas coordenadas esféricas (θ, φ, r)

Dizemos que (r, θ, φ) são as *coordenadas esféricas* do ponto P.

Como $r = d(O, P)$, temos:

$$z = r \cos\varphi \qquad \text{e} \qquad \rho = d(O, P') = r \,\text{sen}\,\varphi .$$

Logo,

$$x = \rho \cos\theta = r \,\text{sen}\,\varphi \cos\theta \qquad \text{e} \qquad y = \rho \,\text{sen}\,\theta = r \,\text{sen}\,\varphi \,\text{sen}\,\theta .$$

Ou seja, se (r, θ, φ) são as coordenadas esféricas do ponto P, então as suas coordenadas cartesianas (x, y, z) são dadas por:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x & = & r \,\text{sen}\,\varphi \cos\theta \\ y & = & r \,\text{sen}\,\varphi \,\text{sen}\,\theta \\ z & = & r \cos\varphi \end{array}}$$

Observação 1

• Se $r < 0$, (r, θ, φ) corresponde ao ponto $(-r, \pi + \theta, \pi - \varphi)$, que é o simétrico de $(-r, \theta, \varphi)$ com respeito à origem.

• Como $\rho = r \,\text{sen}\,\varphi$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$, ρ e r têm sempre o mesmo sinal.

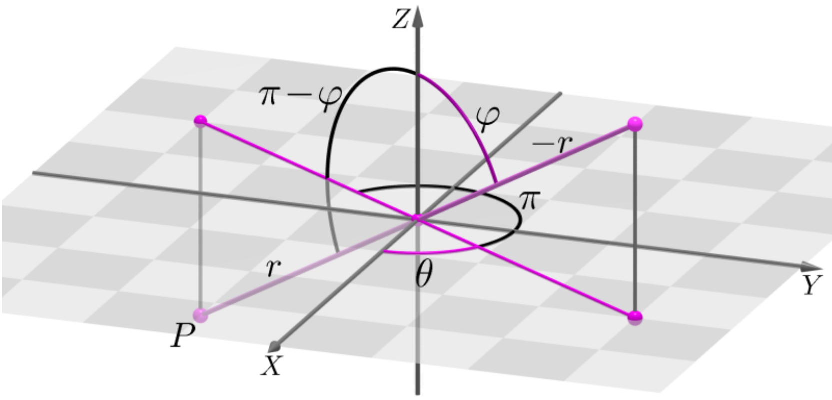

Fig. 3: Ponto P de coordenadas (r, θ, φ), $r < 0$

Sendo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e $x^2 + y^2 = r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi = \rho^2$, obtemos que:

$$\boxed{\begin{array}{rclcrcl} r &=& \pm\sqrt{x^2+y^2+z^2} & , & & & \\ \operatorname{sen}\varphi &=& \dfrac{\rho}{r} = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & , & \cos\varphi &=& \dfrac{z}{r} = \pm\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,, \\ \cos\theta &=& \dfrac{x}{\rho} = \pm\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & , & \operatorname{sen}\theta &=& \pm\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,. \end{array}}$$

A esfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ de centro na origem e raio a é dada em coordenadas esféricas da seguinte maneira:

$$\begin{array}{rl} & S : (r \operatorname{sen}\varphi\, \cos\theta)^2 + (r \operatorname{sen}\varphi\, \operatorname{sen}\theta)^2 + (r^2 \cos^2\varphi) = a^2 \\ \Longleftrightarrow & S : r^2 \operatorname{sen}^2\varphi + r^2\cos^2\varphi = a^2 \\ \Longleftrightarrow & S : r^2 = a^2 \\ \Longleftrightarrow & \boxed{S : r = a} \end{array}$$

Ou seja,

$$S = \{ (a, \theta, \varphi) \mid \theta \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \varphi \in [0, \pi] \}.$$

Esta maneira simples, $r = a$, de representar uma esfera centrada na origem é a razão para o nome *coordenadas esféricas*.

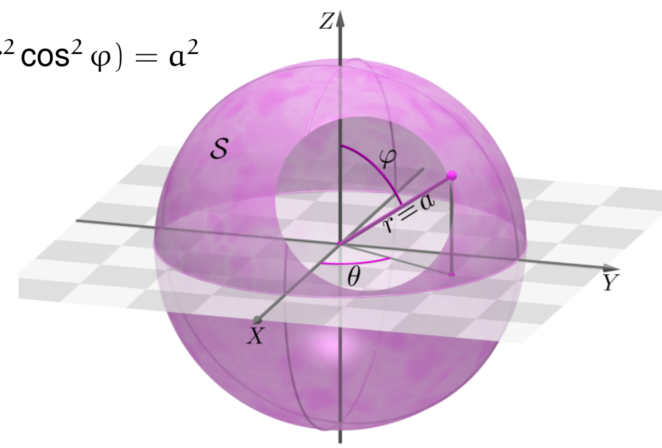

Fig. 4: Esfera $S : r = a$

Exemplo 1

Determine as coordenadas cilíndricas e esféricas dos pontos abaixo dados em coordenadas cartesianas.

(a) $P = (1, 1, 1)$.

Solução.

Temos $\rho = \pm\sqrt{2}$, $\cos\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen}\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Assim
$$P = \left(\sqrt{2}\,,\, \frac{\pi}{4} + 2\pi k\,,\, 1\right) \quad \text{ou} \quad P = \left(-\sqrt{2}\,,\, \pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi k\,,\, 1\right), \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$
é o ponto P em coordenadas cilíndricas.

Sendo $r = \pm\sqrt{3}$ e $\rho = \pm\sqrt{2}$, temos $\operatorname{sen}\varphi = \frac{\rho}{r} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\cos\varphi = \frac{z}{r} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\rho} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Logo,
$$P = \left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \varphi_0\right) \quad \text{ou} \quad P = \left(-\sqrt{3}, \pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \pi - \varphi_0\right), \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$
é o ponto P em coordenadas esféricas, onde $\cos\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\operatorname{sen}\varphi_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\varphi_0 \in (0, \pi)$. □

(b) $P = (0, 1, 2)$.

Solução.
Temos $\rho = \pm 1$, $\cos\theta = 0$ e $\operatorname{sen}\theta = \pm 1$.

Logo,
$$P = \left(1, \frac{\pi}{2} + 2\pi k, 2\right) \quad \text{ou} \quad P = \left(-1, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\right), \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$
é o ponto dado em coordenadas cilíndricas.

Por outro lado, sendo $r = \pm\sqrt{5}$ e $\rho = \pm 1$, temos $\operatorname{sen}\varphi = \frac{\rho}{r} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\varphi = \frac{z}{r} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = \frac{x}{\rho} = 0$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\rho} = \pm 1$.

Então,
$$P = \left(\sqrt{5}, \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \varphi_0\right) \quad \text{ou} \quad P = \left(-\sqrt{5}, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \pi - \varphi_0\right), \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$
é o ponto dado em coordenadas esféricas, onde $\cos\varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ e $\operatorname{sen}\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\varphi_0 \in (0, \pi)$. □

Exemplo 2

Determine as coordenadas cartesianas e esféricas dos pontos abaixo dados em coordenadas cilíndricas.

(a) $P = (1, 0, 2)$.

Solução.
Como $\rho = 1$, $\theta = 0$ e $z = 2$, temos que $x = \rho\cos\theta = 1$, $y = \rho\operatorname{sen}\theta = 0$ e $z = 2$ são as coordenadas cartesianas de P.

Assim, como $r = \pm\sqrt{5}$, $\rho = \pm 1$, $\operatorname{sen}\varphi = \frac{\rho}{r} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\varphi = \frac{z}{r} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \pm 1$ e

$\text{sen}\,\theta = \dfrac{y}{\rho} = 0$, temos que:

$$P = (\sqrt{5}, 2\pi k, \varphi_0) \quad \text{ou} \quad P = (-\sqrt{5}, \pi + 2\pi k, \pi - \varphi_0)\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

é o ponto dado em coordenadas esféricas, onde $\cos\varphi_0 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ e $\text{sen}\,\varphi_0 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\varphi_0 \in (0, \pi)$. □

(b) $P = \left(2, \frac{\pi}{4}, 3\right)$.

Solução.

Sendo $\rho = 2$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ e $z = 3$, temos que $x = \rho\cos\theta = 2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, $y = \rho\,\text{sen}\,\theta = \sqrt{2}$ e $z = 3$ são as coordenadas cartesianas de P.

Assim, como $r = \pm\sqrt{2+2+9} = \pm\sqrt{13}$ e $\rho = \pm 2$, obtemos que:

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{\rho}{r} = \frac{2}{\sqrt{13}}\,, \quad \cos\varphi = \frac{z}{r} = \pm\frac{3}{\sqrt{13}}\,, \quad \cos\theta = \frac{x}{\rho} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen}\,\theta = \frac{y}{\rho} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ou seja,

$$P = \left(\sqrt{13}, \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \varphi_0\right) \quad \text{ou} \quad P = \left(-\sqrt{13}, \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \pi - \varphi_0\right), \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

é o ponto dado em coordenadas esféricas, onde $\cos\varphi_0 = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$ e $\text{sen}\,\varphi_0 = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$, $\varphi_0 \in (0, \pi)$. □

Exemplo 3

Determine as coordenadas cartesianas e as coordenadas cilíndricas dos pontos abaixo dados em coordenadas esféricas.

(a) $P = \left(\sqrt{10}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Solução.

Sendo $r = \sqrt{10}$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ e $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$, temos que $x = r\,\text{sen}\,\varphi\,\cos\theta = \sqrt{10}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$, $y = r\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta = \sqrt{10}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$ e $z = r\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ são as coordenadas cartesianas de P.

Assim, como $\rho = \pm\sqrt{x^2+y^2} = \pm\sqrt{\dfrac{30}{4}} = \pm\dfrac{\sqrt{30}}{2}$, obtemos que

$$P = \left(\frac{\sqrt{30}}{2}\,, \frac{\pi}{4} + 2\pi k\,, \frac{\sqrt{10}}{2}\right) \quad \text{ou} \quad P = \left(-\frac{\sqrt{30}}{2}\,, \pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi k\,, \frac{\sqrt{10}}{2}\right), \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

é o ponto em coordenadas cilíndricas. □

(b) $P = \left(2\,, \frac{\pi}{6}\,, \frac{\pi}{4}\right)$.

Solução.

Como $r = 2$, $\theta = \frac{\pi}{6}$ e $\varphi = \frac{\pi}{4}$, temos que $x = r\,\text{sen}\,\varphi\,\cos\theta = 2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $y = r\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta = 2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $z = r\cos\varphi = 2\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ são as coordenadas cartesianas de P.

Logo, como $\rho = \pm\sqrt{x^2+y^2} = \pm\sqrt{\frac{8}{4}} = \pm\sqrt{2}$, obtemos que

$$P = \left(\sqrt{2}\,,\,\frac{\pi}{6} + 2\pi k\,,\,\sqrt{2}\right) \quad \text{ou} \quad P = \left(-\sqrt{2}\,,\,\frac{7\pi}{6} + 2\pi k\,,\,\sqrt{2}\right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

é o ponto em coordenadas cilíndricas. □

Exemplo 4

Determine a equação em coordenadas cartesianas e em coordenadas esféricas das superfícies abaixo dadas em coordenadas cilíndricas.

(a) $S : \rho = 2a\cos\theta$, $a > 0$.

Solução.

Sendo $\rho = \pm\sqrt{x^2+y^2}$ e $\cos\theta = \pm\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, temos que

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = 2a\,\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}} \iff x^2+y^2 = 2ax \iff (x-a)^2 + y^2 = a^2$$

é a equação cartesiana de S.

Portanto, S é um cilindro circular de eixo $r = \{(a,0,0) + t(0,0,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ paralelo ao eixo$-OZ$.

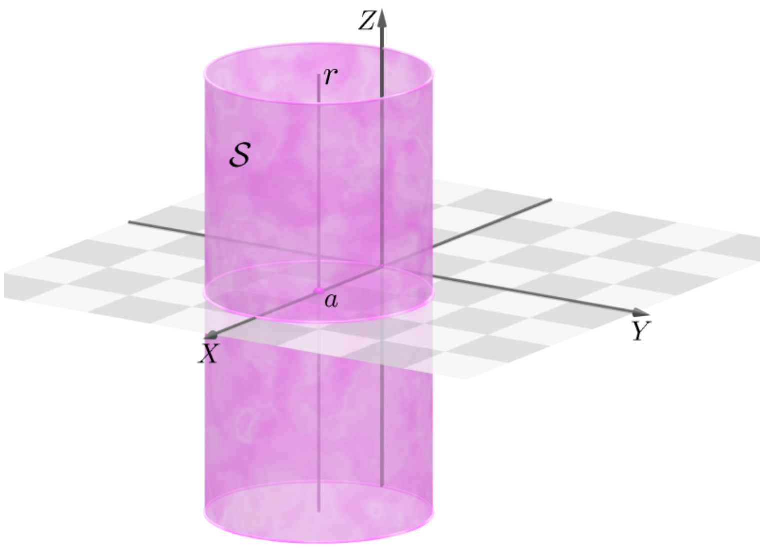

Fig. 5: Superfície $S : \rho = 2a$

A equação de S em coordenadas esféricas é dada por:

$$\begin{aligned} & S : (r\,\text{sen}\,\varphi\,\cos\theta)^2 + (r\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta)^2 = 2ar\,\text{sen}\,\varphi\,\cos\theta \\ \iff & S : r^2\,\text{sen}^2\,\varphi = 2ar\,\text{sen}\,\varphi\,\cos\theta \\ \iff & S : r\,\text{sen}\,\varphi = 2a\cos\theta\,. \end{aligned}$$ □

(b) $S : z = |\rho|$.

Solução.

Como $|\rho| = \sqrt{x^2 + y^2}$, temos que

$$S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

é a equação cartesiana de S.

Logo S é a parte do cone circular

$$z^2 = x^2 + y^2$$

situada no semi-espaço $z \geq 0$.

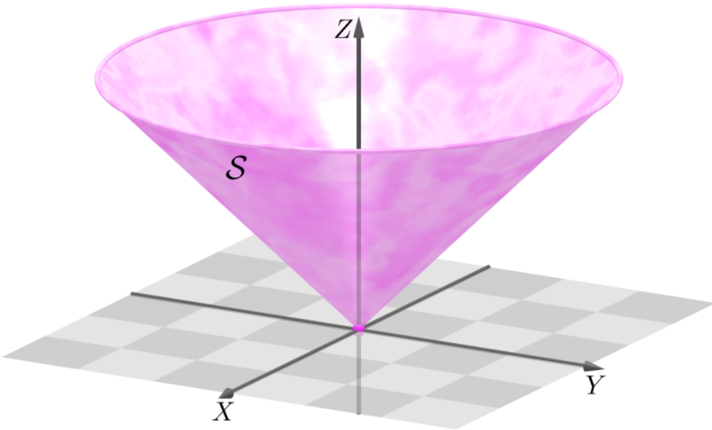

Fig. 6: Superfície $S : z = |\rho|$

A equação de S em coordenadas esféricas é:

$$S : r \cos \varphi = \sqrt{r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \theta + r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \theta}$$

$$\iff \quad S : r \cos \varphi = r \operatorname{sen} \varphi \,, \quad r \geq 0$$

$$\iff \quad S : \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi = 1 \,, \quad r \geq 0$$

$$\iff \quad S : \varphi = \frac{\pi}{4} \,, \quad r \geq 0 \,. \; \square$$

(c) $S : z = \rho$.

Solução.

Como $\rho = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, temos que

$$S : z = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \iff S : z^2 = x^2 + y^2 \,,$$

é a equação cartesiana de S, que representa um cone circular de eixo$-OZ$.

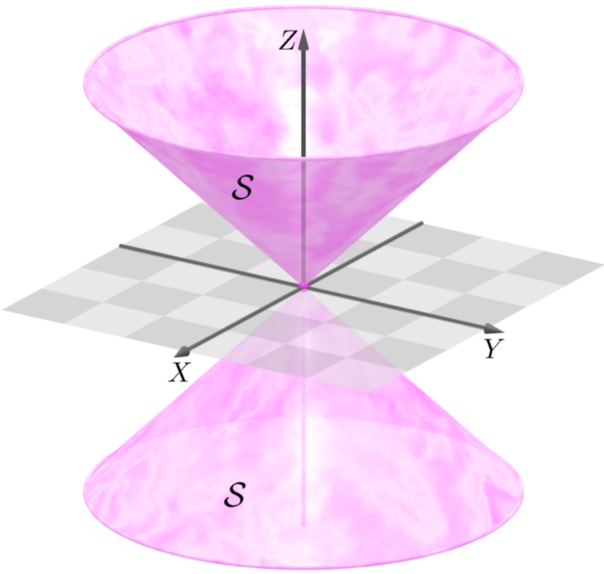

Fig. 7: Superfície $S : z = \rho$

Pelo feito no item (b), $S : \varphi = \dfrac{\pi}{4}$ é a equação da superfície em coordenadas esféricas. $\square$

(d) $S : z = \rho^2$.

Solução.
Como $\rho^2 = x^2 + y^2$,

$$S : z = x^2 + y^2$$

é a equação cartesiana de S, que representa um parabolóide circular de eixo$-OZ$.

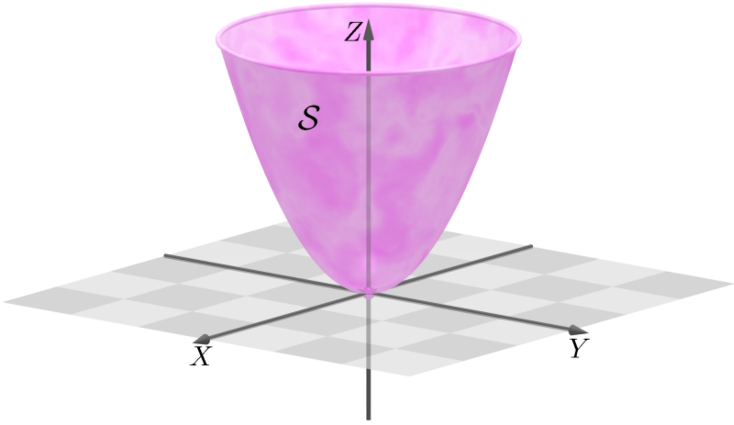

Fig. 8: Superfície $S : z = \rho^2$

Assim,

$$S : r\cos\varphi = r^2\,\text{sen}^2\,\varphi \quad\Longleftrightarrow\quad S : r = \frac{\cos\varphi}{\text{sen}^2\,\varphi} = \text{cotg}\,\varphi\,\text{cossec}\,\varphi$$

é a equação da superfície em coordenadas esféricas. □

(e) $S : \rho\cos\theta + \rho\,\text{sen}\,\theta + z = 1$.

Solução.
Como $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\,\text{sen}\,\theta$, temos que:

$$S : x + y + z = 1$$

é um plano.

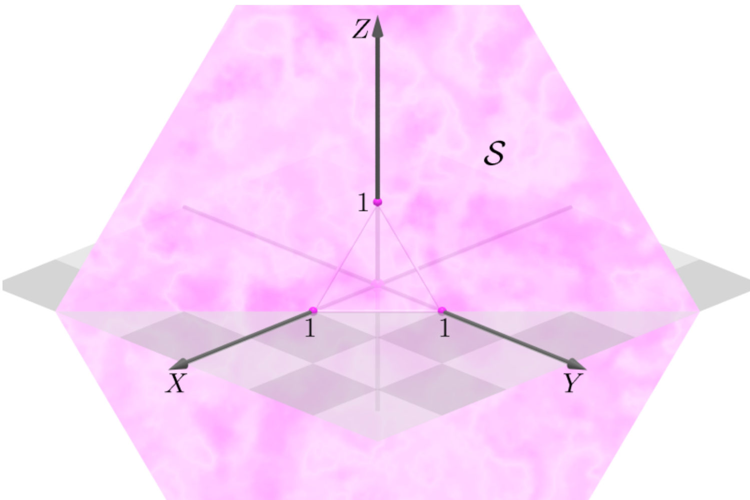

Fig. 9: Superfície $S : \rho\cos\theta + \rho\,\text{sen}\,\theta + z = 1$

Então,

$$S : r\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta + r\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta + r\cos\varphi = 1$$

é a equação de S em coordenadas esféricas. □

(f) $S : \rho^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$.

Solução.
Sendo $\rho^2 = x^2 + y^2$, temos que

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

é a equação cartesiana de S, a esfera de centro na origem e raio a.

Como já vimos anteriormente, $S : \rho = a$ é a equação da esfera em coordenadas esféricas. □

(g) $S : z = \rho^2 + 2\rho \cos\theta - 2\rho \operatorname{sen}\theta + 2$.

Solução.
Sendo $\rho\cos\theta = x$, $\rho\operatorname{sen}\theta = y$ e $\rho^2 = x^2 + y^2$, obtemos que:

$$S : z = x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2$$

$$\iff \quad S : z = (x+1)^2 + (y-1)^2$$

é a equação cartesiana de S, um parabolóide circular de eixo
$r = \{(-1,1,0) + (0,0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

A equação de S em coordenadas esféricas é dada por:

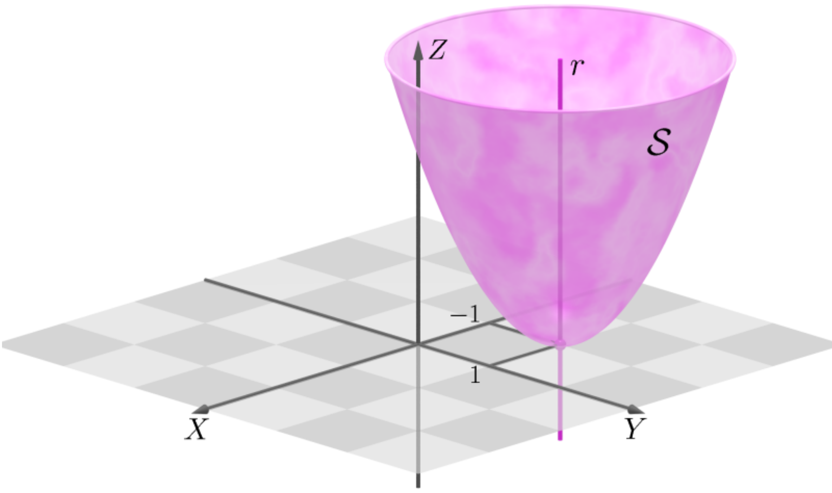

Fig. 10: Superfície $S : z = \rho^2 + 2\rho\cos\theta - 2\rho\operatorname{sen}\theta + 2$

$$S : r\cos\varphi = r^2 \operatorname{sen}^2\varphi + 2r\operatorname{sen}\varphi(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) + 2\,.$$ □

Exemplo 5

Faça um esboço e dê uma parametrização em coordenadas cartesianas das superfícies dadas, em coordenadas cilíndricas, pelas equações abaixo.

(a) $S : \rho = e^\theta$

Solução.
Como $x = \rho\cos\theta = e^\theta\cos\theta$ e $y = \rho\operatorname{sen}\theta = e^\theta\operatorname{sen}\theta$, temos que:

$$S : \begin{cases} x(\theta,z) = e^\theta\cos\theta \\ y(\theta,z) = e^\theta\operatorname{sen}\theta\,, \quad \theta, z \in \mathbb{R} \\ z(\theta,z) = z \end{cases}$$

é uma parametrização de S, um cilindro de geratrizes paralelas ao vetor $\overrightarrow{v} = (0,0,1)$ que possui a *espiral*

$$\gamma : \begin{cases} x(\theta) = e^\theta\cos\theta \\ y(\theta) = e^\theta\operatorname{sen}\theta\,, \quad \theta \in \mathbb{R} \\ z(\theta) = 0 \end{cases}$$

como uma de suas diretrizes.

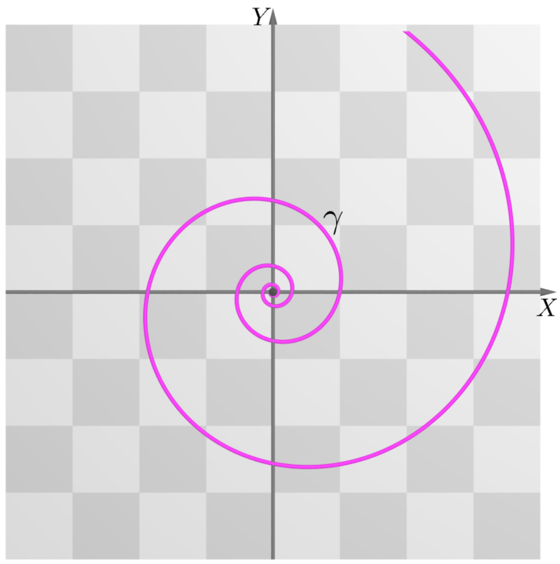

Fig. 11: Diretriz γ da superfície S

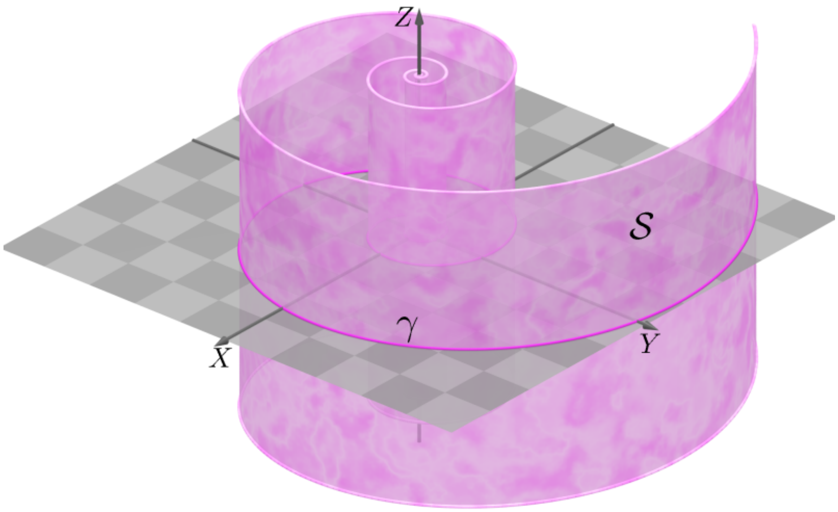

Fig. 12: Superfície $S : \rho = e^{\theta}$ $\square$

(b) $S : z = \theta$.

Solução.

Sendo $z = \theta$, temos que

$$S : \begin{cases} x(\theta, \rho) = \rho \cos\theta \\ y(\theta, \rho) = \rho \,\text{sen}\,\theta \\ z(\theta, \rho) = \theta \end{cases}, \quad \rho \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização de S, helicóide gerado pelas retas paralelas ao plano XY que intersectam o eixo$-OZ$ e a *hélice*

$$\gamma : \begin{cases} x(\theta) = \cos\theta \\ y(\theta) = \text{sen}\,\theta \\ z(\theta) = \theta \end{cases}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

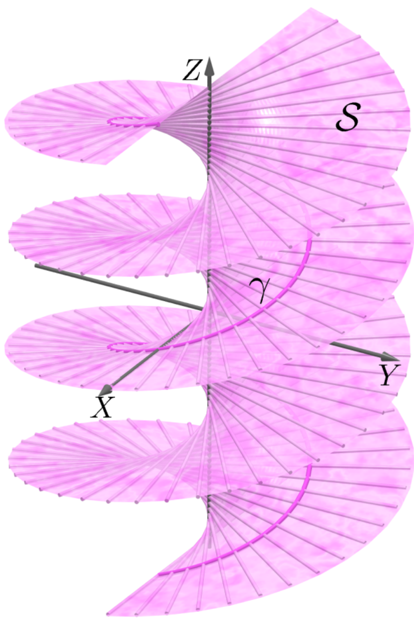

Fig. 13: Helicóide $S : z = \theta$ e hélice γ $\square$

Exemplo 6

Determine as equações cartesianas e paramétricas das superfícies abaixo dadas em coordenadas esféricas e identifique-as.

(a) $S : r = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$.

Solução.

Como $r = \pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ e $\operatorname{sen}\theta = \pm\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, temos que:

$$S : \pm\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \pm\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \iff S : x^2+y^2+z^2 = y$$
$$\iff S : x^2+(y-\frac{1}{2})^2+z^2 = \frac{1}{4}$$

é a equação cartesiana da esfera de centro $\left(0,\frac{1}{2},0\right)$ e raio igual a $\frac{1}{2}$, e

$$S : \begin{cases} x(\theta,\varphi) = \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta \cos\theta \\ y(\theta,\varphi) = \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta \\ z(\theta,\varphi) = \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \operatorname{sen}\theta \end{cases}, \quad \varphi\in[0,\pi], \quad \theta\in[0,2\pi)$$

é uma parametrização de S em coordenadas cartesianas.

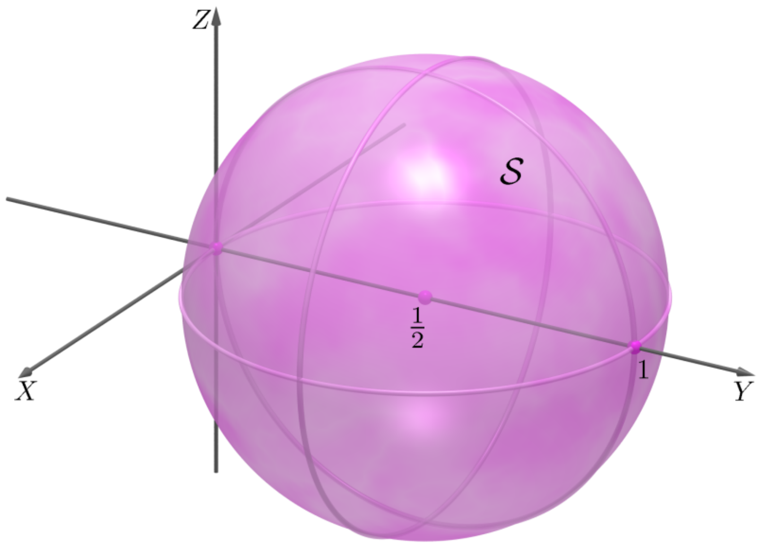

Fig. 14: Esfera $S : r = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$ □

(b) $S : r = \operatorname{sen}\varphi$.

Solução.

Sendo $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, pois $r \geq 0$, e $\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, obtemos que

$$S : \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \iff S : x^2+y^2+z^2 = \sqrt{x^2+y^2}$$

é a equação cartesiana da superfície S.

Além disso, como

$$S : \begin{cases} x(\theta,\rho) = \text{sen}^2\varphi\ \cos\theta \\ y(\theta,\rho) = \text{sen}^2\varphi\ \text{sen}\,\theta\ , \quad \varphi\in[0,\pi]\,, \quad \theta\in\mathbb{R} \\ z(\theta,\rho) = \text{sen}\,\varphi\ \cos\varphi \end{cases}$$

é uma parametrização de S em coordenadas cartesianas, vemos que S é uma superfície de revolução de eixo$-OZ$, sendo a curva

$$\gamma = S\cap\left\{\theta=\frac{\pi}{2}\right\} : \begin{cases} x(\varphi)=0 \\ y(\varphi)=\text{sen}^2\varphi \qquad , \quad \varphi\in[0,\pi] \\ z(\varphi)=\text{sen}\,\varphi\cos\varphi \end{cases}$$

uma de suas geratrizes.

Mas,

$$\begin{aligned} y(\varphi)^2+z(\varphi)^2-y(\varphi) &= \text{sen}^4\varphi+\text{sen}^2\varphi\ \cos^2\varphi-\text{sen}^2\varphi \\ &= \text{sen}^2\varphi\left(\text{sen}^2\varphi+\cos^2\varphi\right)-\text{sen}^2\varphi=0\,. \end{aligned}$$

Ou seja, a curva γ é o círculo

$$\gamma : \begin{cases} y^2+z^2-y=0 \\ x=0 \end{cases} \iff \gamma : \begin{cases} \left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{1}{4} \\ x=0 \end{cases}$$

de centro $\left(0,\frac{1}{2},0\right)$ e raio igual a $\frac{1}{2}$ no plano $x=0$

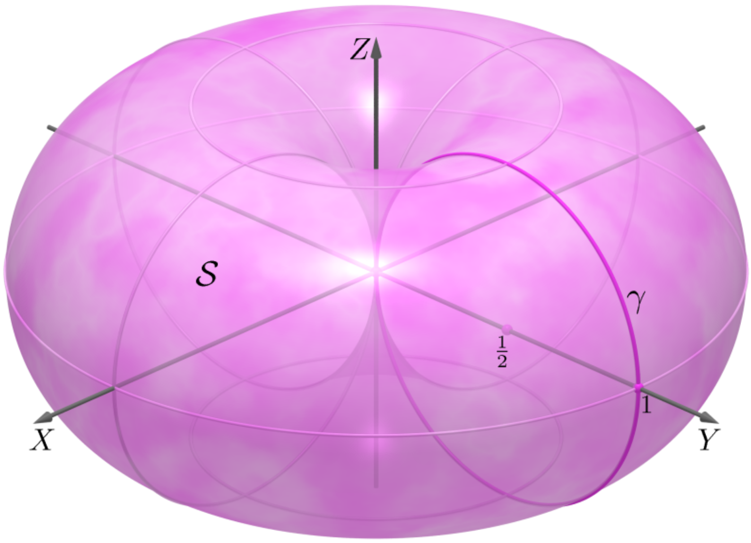

Fig. 15: Superfície $S : r = \text{sen}\,\varphi$ e sua geratriz γ □

Observação 2

Seja S uma superfície dada pela equação $f(\rho,z)=0$ em coordenadas cilíndricas.

Como a equação independe da variável θ, intersectando a superfície S com os semi-planos θ =const. obtemos sempre a mesma curva. Assim, S é uma superfície de revolução obtida girando a curva

$$\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}, \quad y \geq 0$$

em torno do eixo$-OZ$, pois $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

De modo análogo, se S é uma superfície dada pela equação $f(r,\varphi)=0$ em coordenadas esféricas, então S é uma superfície de revolução de eixo$-OZ$, sendo a curva

$$\begin{cases} f\left(\sqrt{y^2+z^2}, \text{arcsen}\,\dfrac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)=0 \\ x=0 \end{cases}, \quad y \geq 0$$

uma de suas geratrizes, pois $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e sen $\varphi = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Para fixar as idéias, reveja os exemplos 4, 5 e 6.

Exemplo 7

Use sistemas de inequações:

$$\begin{cases} z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y) \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \\ x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases}; \quad \begin{cases} z_1(\rho,\theta) \leq z \leq z_2(\rho,\theta) \\ \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta) \\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \end{cases}; \quad \begin{cases} r_1(\theta,\varphi) \leq r \leq r_2(\theta,\varphi) \\ \varphi_1(\theta) \leq \varphi \leq \varphi_2(\theta) \\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \end{cases}$$

para descrever, em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas, respectivamente, os sólidos delimitados pelas superfícies abaixo.

(a) $S_1 : z = x^2+y^2$, $S_2 : x^2+y^2=1$ e $S_3 : z=0$.

Solução.

A superfície S_1 é um parabolóide circular de eixo$-OZ$ e S_2 é um cilindro circular de eixo$-OZ$, cuja interseção

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$$

é o círculo de centro $(0,0,1)$ e raio igual a 1, contido no plano $z=1$.

Assim, o esboço do sólido $\mathcal{R}$ delimitado pelas superfícies S_1, S_2 e S_3 é:

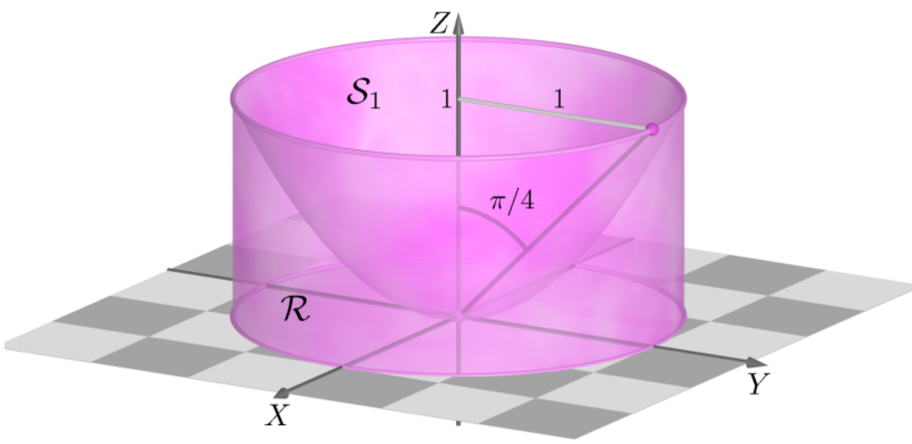

Fig. 16: Região $\mathcal{R}$ delimitada pelas superfícies S_1, S_2 e S_3

Sendo o disco D de centro na origem e raio igual a 1 a projeção do sólido sobre o plano XY,

temos que

$$D : \begin{cases} -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$$

ou

$$D : \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases} .$$

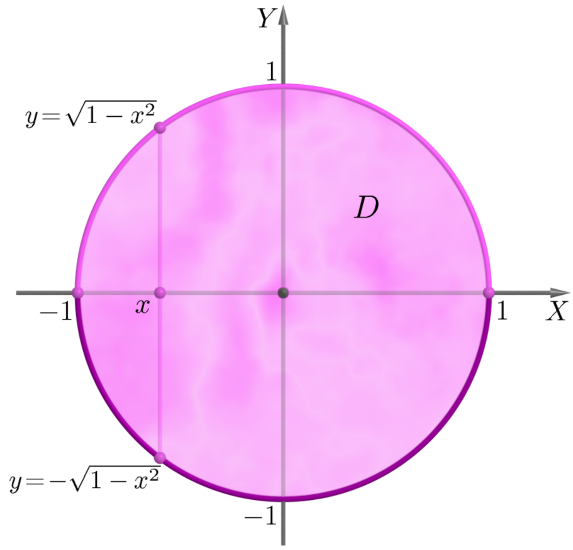

Fig. 17: Disco D: projeção da região $\mathcal{R}$ sobre o plano XY

Logo, o sólido $\mathcal{R}$ é dado por:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} 0 \le & z & \le x^2 + y^2 \\ -\sqrt{1-x^2} \le & y & \le \sqrt{1-x^2} \\ -1 \le & x & \le 1 \end{cases} ,$$

em coordenadas cartesianas;

$$\mathcal{R} : \begin{cases} 0 \le & z & \le \rho^2 \\ 0 \le & \rho & \le 1 \\ 0 \le & \theta & \le 2\pi \end{cases} ,$$

em coordenadas cilíndricas;

$$\mathcal{R} : \begin{cases} \dfrac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi} \le & r & \le \dfrac{1}{\operatorname{sen}\varphi} \\ \dfrac{\pi}{4} \le & \varphi & \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le & \theta & \le 2\pi \end{cases} ,$$

em coordenadas esféricas, pois $S_1 : z = \rho^2$, $S_2 : \rho = 1$ e $S_3 : z = 0$ são equações das superfícies em coordenadas cilíndricas, e

$$\begin{aligned} S_1 : &\quad r\cos\varphi = r^2\operatorname{sen}^2\varphi \iff S_1 : r = \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi} ; \\ S_2 : &\quad r^2\operatorname{sen}^2\varphi = 1 \iff S_2 : r = \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} ; \\ S_3 : &\quad r\cos\varphi = 0 \iff S_3 : \varphi = \frac{\pi}{2} ; \end{aligned}$$

são as equações das superfícies em coordenadas esféricas. □

(b) $S_1 : z = x^2 + y^2$ e $S_2 : z = 1$.

Solução.

A superfície S_1 é um parabolóide circular de eixo$-OZ$, cuja interseção com o plano $z = 1$ é o círculo

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}.$$

O esboço do sólido $\mathcal{R}$ delimitado por S_1 e S_2 é dado por:

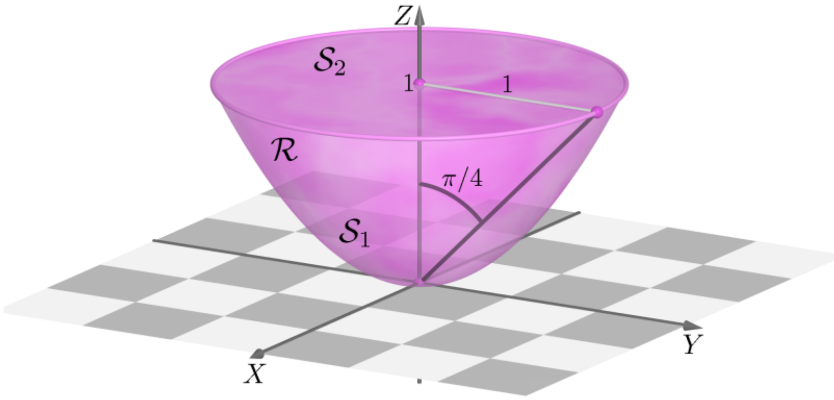

Fig. 18: Região $\mathcal{R}$ delimitada pelas superfícies S_1 e S_2

sendo o disco D : $\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ z=0 \end{cases}$ a projeção do sólido sobre o plano XY.

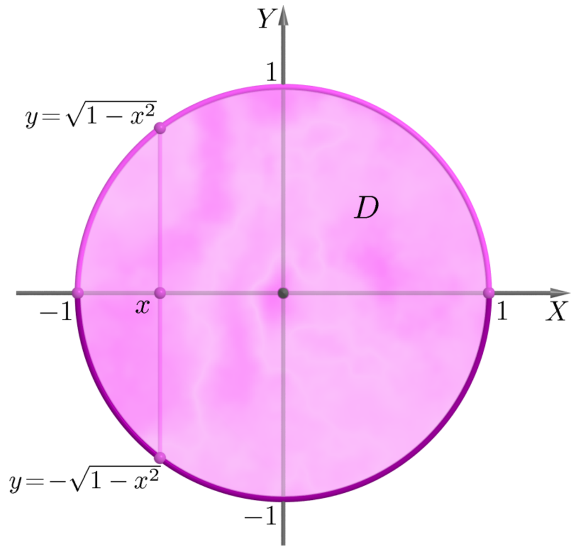

Fig. 19: Disco D: projeção da região $\mathcal{R}$ sobre o plano XY

Assim, o sólido $\mathcal{R}$ é dado por:

$$\mathcal{R}: \begin{cases} x^2+y^2 \leq & z & \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq & y & \leq \sqrt{1-x^2} \\ -1 \leq & x & \leq 1 \end{cases},$$

em coordenadas cartesianas;

$$\mathcal{R}: \begin{cases} \rho^2 \leq & z & \leq 1 \\ 0 \leq & \rho & \leq 1 \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \end{cases},$$

em coordenadas cilíndricas;

$$\mathcal{R}: \begin{cases} 0 \leq & r & \leq \sec\varphi \\ 0 \leq & \varphi & \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \end{cases} \bigcup \begin{cases} 0 \leq & r & \leq \operatorname{cotg}\varphi \operatorname{cossec}\varphi \\ \frac{\pi}{4} \leq & \varphi & \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \end{cases},$$

em coordenadas esféricas, pois $S_1 : z = \rho^2$ e $S_2 : z = 1$ são as equações das superfícies em coordenadas cilíndricas, e

$$S_1 : r\cos\varphi = r^2 \operatorname{sen}^2\varphi \iff S_1 : r = \operatorname{cotg}\varphi \operatorname{cossec}\varphi$$

e

$$S_2 : r\cos\varphi = 1 \iff S_2 : r = \sec\varphi$$

são as equações das superfícies em coordenadas esféricas. □

(c) $S_1 : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e $S_2 : z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solução.

A superfície S_1 é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ contida no semi-plano $z \geq 0$ e S_2 é a parte do cone circular $z^2 = x^2 + y^2$ contida no semi-plano $z \geq 0$.

Como

$$\gamma = S_1 \cap S_2 : \begin{cases} z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \iff \gamma : \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = \sqrt{1 - z^2} \end{cases}$$

$$\iff \gamma : \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ 2z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

é o círculo, no plano $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, de centro $\left(0, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e raio $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, temos que:

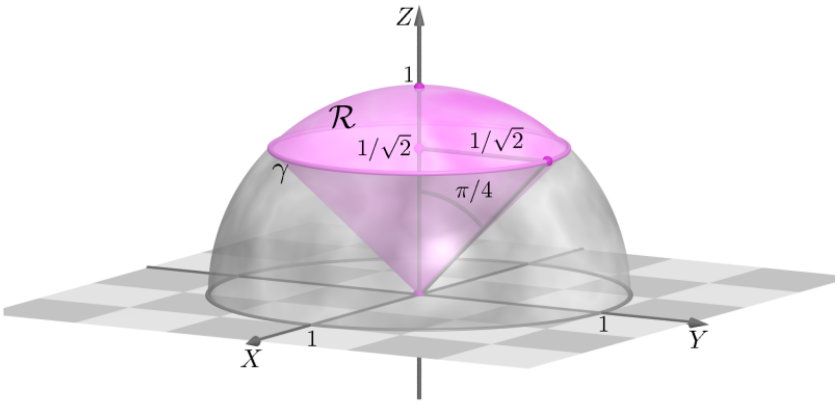

Fig. 20: Região $\mathcal{R}$ delimitada pelas superfícies S_1 e S_2

é o esboço do sólido $\mathcal{R}$ delimitado pelas superfícies S_1 e S_2., e o disco

$$D : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq \dfrac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

é a projeção de $\mathcal{R}$ sobre o plano XY.

Logo, o sólido $\mathcal{R}$ é dado por:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ -\sqrt{\dfrac{1}{2} - x^2} \leq y \leq \sqrt{\dfrac{1}{2} - x^2} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases},$$

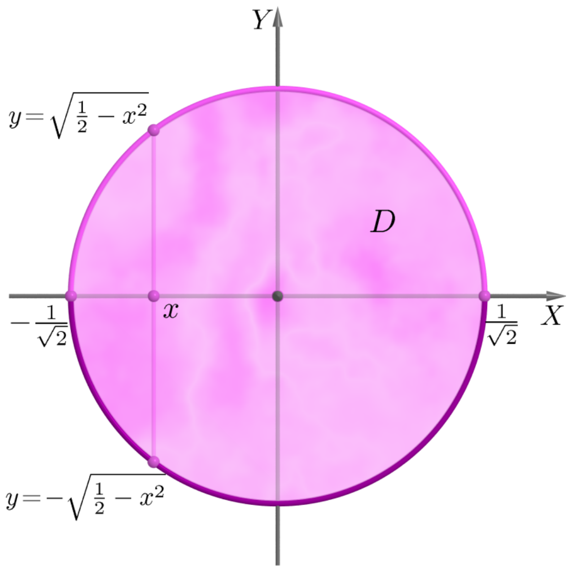

Fig. 21: Disco D: projeção da região $\mathcal{R}$ sobre o plano XY

em coordenadas cartesianas;

$$\mathcal{R}: \begin{cases} \rho \leq & z & \leq \sqrt{1-\rho^2} \\ 0 \leq & \rho & \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \end{cases},$$

em coordenadas cilíndricas;

$$\mathcal{R}: \begin{cases} 0 \leq & r & \leq 1 \\ 0 \leq & \varphi & \leq \dfrac{\pi}{4} \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \end{cases},$$

em coordenadas esféricas, pois $S_1 : z = \sqrt{1-\rho^2}$ e $S_2 : z = |\rho|$ são as equações das superfícies em coordenadas cilíndricas, e

$$S_1 : r\cos\varphi = \sqrt{1 - r^2 \operatorname{sen}^2\varphi} \iff S_1 : r = 1\,, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

e

$$S_2 : r\cos\varphi = r\operatorname{sen}\varphi \iff S_2 : \varphi = \frac{\pi}{4}\,, \quad r > 0\,,$$

são as superfícies em coordenadas esféricas. □

(d) $S_1 : z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ e $S_2 : z = -x^2 - y^2 + 4$.

Solução.

A superfície S_1 é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, de centro na origem e raio igual a 2 contida no semi-plano $z \geq 0$ e a superfície $S_2 : x^2 + y^2 = -(z-4)$ é um parabolóide circular de eixo$-OZ$ e vértice $(0,0,4)$, com concavidade voltada para baixo.

A interseção das superfícies é

$$S_1 \cap S_2 : \begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ z = -x^2 - y^2 + 4 \end{cases} \iff S_1 \cap S_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 - z \\ z = \sqrt{4 - (4 - z)} = \sqrt{z} \end{cases} \iff S_1 \cap S_2 = \gamma_0 \cup \gamma_1,$$

onde

$$\gamma_0 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

é o círculo, contido no plano $z = 0$, de centro na origem e raio igual a 2, e

$$\gamma_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

é o círculo, contido no plano $z = 1$, de centro $(0,0,1)$ e raio igual a $\sqrt{3}$.

Assim, o esboço do sólido $\mathcal{R}$ delimitado pelas superfícies S_1 e S_2 é dado por:

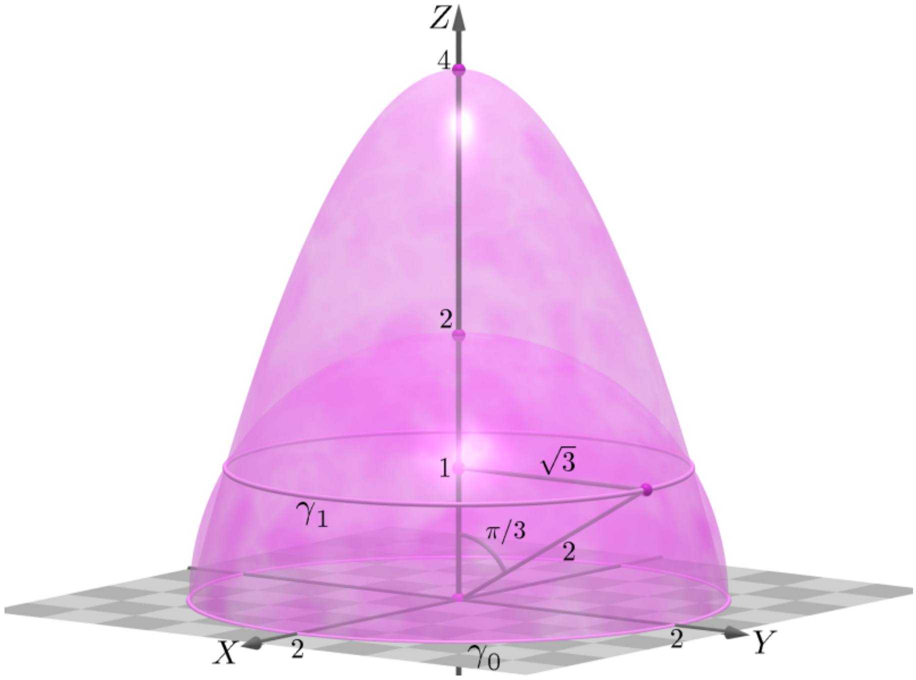

Fig. 22: Região $\mathcal{R}$ delimitada pelas superfícies S_1 e S_2 (tg $\varphi_0 = \sqrt{3} \Longleftrightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{3}$)

sendo o disco

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

a projeção da parte do sólido, situada no semi-plano $z \geq 1$, sobre o plano XY, e o anel

$$\mathcal{A}: \begin{cases} 3 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

a projeção da parte do sólido, situada na faixa $0 \leq z \leq 1$, sobre o plano XY.

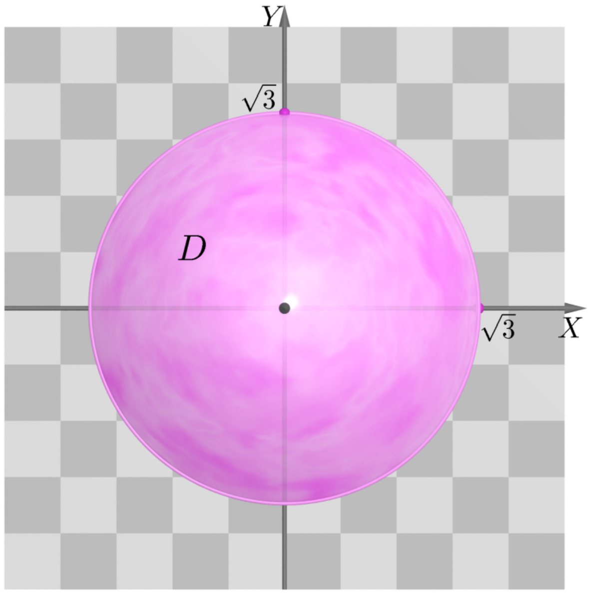

Fig. 23: Disco D: projeção da região $\mathcal{R} \cap \{z \geq 1\}$ sobre o plano XY

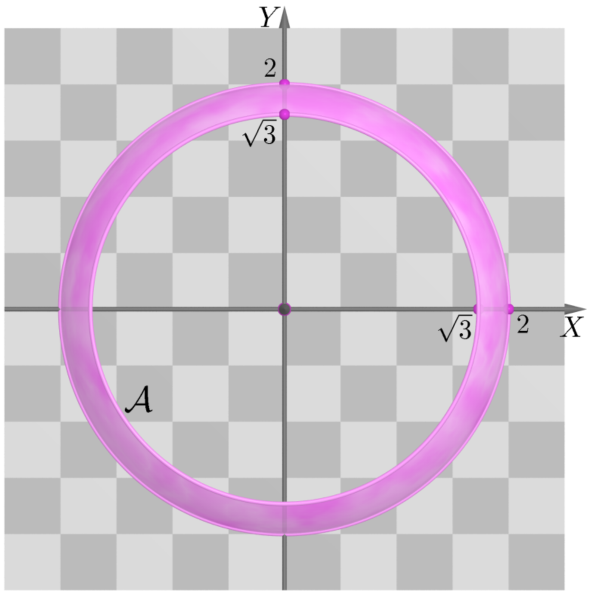

Fig. 24: Anel $\mathcal{A}$: projeção da região $\mathcal{R} \cap \{0 \leq z \leq 1\}$ sobre o plano XY

Portanto, o sólido $\mathcal{R}$ pode ser dado nas seguintes formas:

$$\mathcal{R}: \left\{\begin{array}{rcl} 4-x^2-y^2 \leq & z & \leq \sqrt{4-x^2-y^2} \\ -\sqrt{4-x^2} \leq & y & \leq \sqrt{4-x^2} \\ -2 \leq & x & \leq -\sqrt{3} \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{rcl} 4-x^2-y^2 \leq & z & \leq \sqrt{4-x^2-y^2} \\ -\sqrt{4-x^2} \leq & y & \leq \sqrt{4-x^2} \\ \sqrt{3} \leq & x & \leq 2 \end{array}\right.$$

$$\cup \left\{\begin{array}{rcl} 4-x^2-y^2 \leq & z & \leq \sqrt{4-x^2-y^2} \\ -\sqrt{4-x^2} \leq & y & \leq -\sqrt{3-x^2} \\ -\sqrt{3} \leq & x & \leq \sqrt{3} \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{rcl} 4-x^2-y^2 \leq & z & \leq \sqrt{4-x^2-y^2} \\ \sqrt{3-x^2} \leq & y & \leq \sqrt{4-x^2} \\ -\sqrt{3} \leq & x & \leq \sqrt{3} \end{array}\right. ,$$

$$\cup \left\{\begin{array}{rcl} \sqrt{4-x^2-y^2} \leq & z & \leq 4-x^2-y^2 \\ -\sqrt{3-x^2} \leq & y & \leq \sqrt{3-x^2} \\ -\sqrt{3} \leq & x & \leq \sqrt{3} \end{array}\right.$$

em coordenadas cartesianas;

$$\mathcal{R}: \left\{\begin{array}{rcl} 4-\rho^2 \leq & z & \leq \sqrt{4-\rho^2} \\ \sqrt{3} \leq & \rho & \leq 2 \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{rcl} \sqrt{4-\rho^2} \leq & z & \leq 4-\rho^2 \\ 0 \leq & \rho & \leq \sqrt{3} \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \end{array}\right. ,$$

em coordenadas cilíndricas;

$$\mathcal{R}: \left\{\begin{array}{rcl} 2 \leq & r & \leq \dfrac{-\cos\varphi + \sqrt{1+15\,\text{sen}^2\varphi}}{2\,\text{sen}^2\varphi} \\ 0 \leq & \varphi & \leq \dfrac{\pi}{3} \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{-\cos\varphi + \sqrt{1+15\,\text{sen}^2\varphi}}{2\,\text{sen}^2\varphi} \leq & r & \leq 2 \\ \dfrac{\pi}{3} \leq & \varphi & \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \end{array}\right. ,$$

em coordenadas esféricas, pois $S_1 : z = \sqrt{4-\rho^2}$ e $S_2 : z = 4-\rho^2$ são as equações das superfícies em coordenadas cilíndricas, e $S_1 : r = 2$, $\varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, e

$$\begin{aligned} & S_2: \ r\cos\varphi = 4 - r^2\,\text{sen}^2\varphi \\ \Longleftrightarrow\ & S_2: \ r^2\,\text{sen}^2\varphi + r\cos\varphi - 4 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & S_2: \ r = \frac{-\cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi + 16\,\text{sen}^2\varphi}}{2\,\text{sen}^2\varphi} \\ \Longleftrightarrow\ & S_2: \ r = \frac{-\cos\varphi + \sqrt{1+15\,\text{sen}^2\varphi}}{2\,\text{sen}^2\varphi} \end{aligned}$$

são as equações das superfícies em coordenadas esféricas. □

(e) $S_1 : z = x^2 + 2y^2$ e $S_2 : z = 1$.

Solução.

A superfície S_1 é um parabolóide elíptico de eixo$-OZ$, e sua interseção com o plano $z = 1$,

$$\gamma = S_1 \cap S_2 : \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases},$$

é uma elipse de centro $(0, 0, 1)$.

Assim, o esboço do sólido $\mathcal{R}$ delimitado pelas superfícies S_1 e S_2 é:

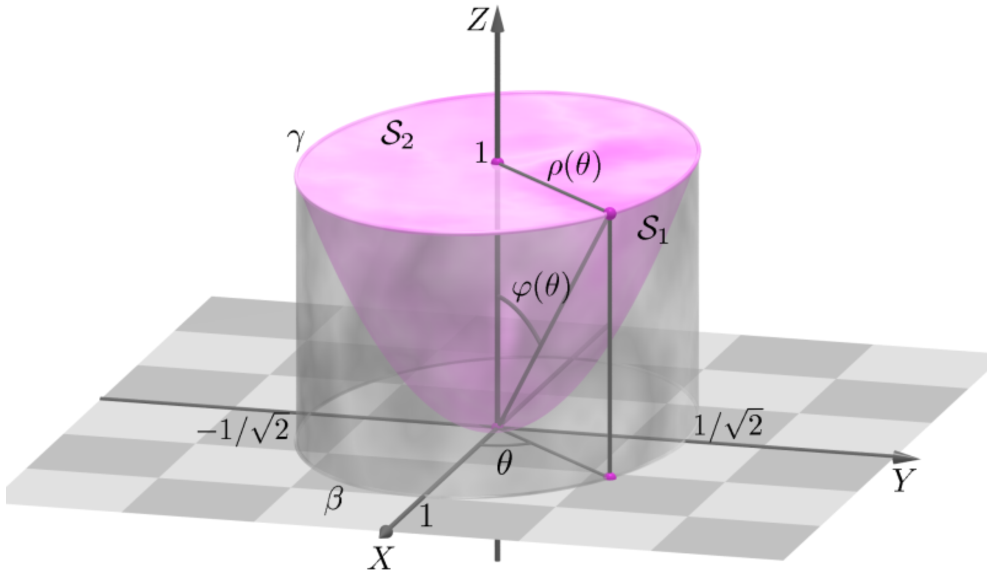

Fig. 25: Sólido $\mathcal{R}$ delimitado pelas superfícies S_1 e S_2

e sua projeção D sobre o plano XY é a região:

$$D : \begin{cases} x^2 + 2y^2 \leq 1 \\ z = 0 \end{cases},$$

limitada pela elipse

$$\beta : \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

A elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ em coordenadas polares é dada por:

$$\rho^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta = 1 \iff \rho(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2\theta}},$$

e o ângulo φ que o vetor $\overrightarrow{OP}$ faz com o semi-eixo positivo OZ, onde P pertence à elipse γ, é tal que:

$$\operatorname{tg}\varphi_1(\theta) = \frac{\rho(\theta)}{1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2\theta}}$$

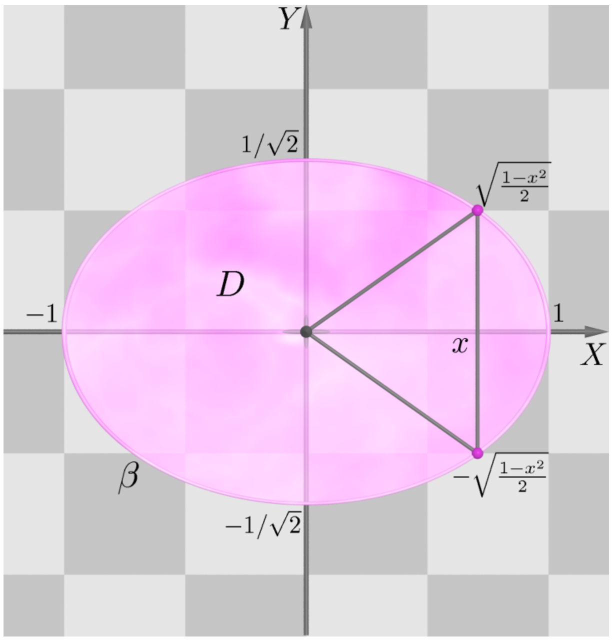

Fig. 26: Região plana D

Logo o sólido $\mathcal{R}$ pode ser descrito nas seguintes maneiras:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} x^2 + 2y^2 \leq & z & \leq 1 \\ -\sqrt{\dfrac{1-x^2}{2}} \leq & y & \leq \sqrt{\dfrac{1-x^2}{2}} \\ -1 \leq & x & \leq 1 \end{cases},$$

em coordenadas cartesianas;

$$\mathcal{R} : \begin{cases} \rho^2(1+\text{sen}^2\theta) \leq & z & \leq 1 \\ 0 \leq & \rho & \leq \dfrac{1}{\sqrt{1+\text{sen}^2\theta}} \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \end{cases},$$

em coordenadas cilíndricas;

$$\mathcal{R} : \begin{cases} 0 \leq & r & \leq \sec\varphi \\ 0 \leq & \varphi & \leq \varphi_1(\theta) \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \end{cases} \bigcup \begin{cases} 0 \leq & r & \leq \dfrac{\text{cotg}\,\varphi\ \text{cossec}\,\varphi}{1+\text{sen}^2\theta} \\ \varphi_1(\theta) \leq & \varphi & \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \end{cases},$$

em coordenadas esféricas, pois $S_1 : z = \rho^2(1+\text{sen}^2\theta)$ e $S_2 : z = 1$ são as superfícies dadas em coordenadas cilíndricas, e

$$S_1 : r\cos\varphi = r^2\,\text{sen}^2\varphi(\cos^2\theta + 2\,\text{sen}^2\theta) \Longleftrightarrow S_1 : r = \frac{\cos\varphi}{\text{sen}^2\varphi} \cdot \frac{1}{1+\text{sen}^2\theta}$$

e

$$S_2 : r = \frac{1}{\cos\varphi} = \sec\varphi$$

são as equações das superfícies em coordenadas esféricas. □

(f) $S_1 : z - 1 = -\sqrt{x^2+y^2}$ e $S_2 : z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Solução.

A superfície S_1 é a parte do cone circular de eixo$-OZ$ e vértice $(1,0,0)$,

$$(z-1)^2 = x^2 + y^2,$$

situada no semi-espaço $z \leq 1$, e a superfície S_2 é a parte da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

situada no semi-espaço $z \leq 0$. A interseção das superfícies é:

$$\gamma = S_1 \cap S_2 : \begin{cases} z - 1 = -\sqrt{x^2+y^2} \\ z = -\sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases} \Longleftrightarrow \gamma = S_1 \cap S_2 : \begin{cases} x^2+y^2 = (1-z)^2 \\ z^2 = 1-(1-z)^2 \\ z \leq 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \gamma = S_1 \cap S_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

um círculo de centro na origem e raio igual a 1 no plano XY.

Portanto, o esboço do sólido S delimitado pelas superfícies S_1 e S_2 é:

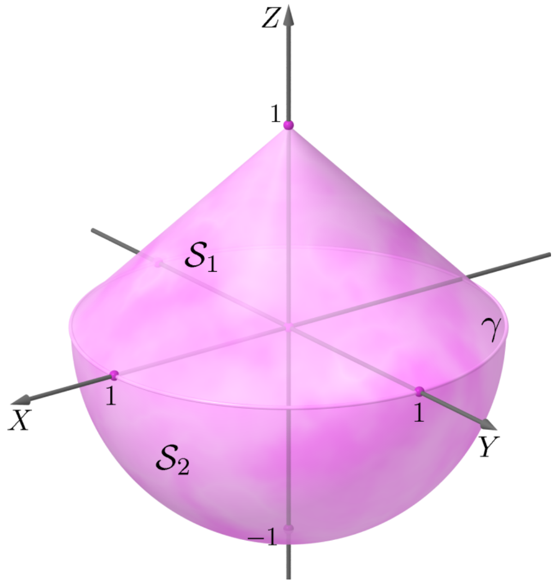

Fig. 27: Sólido $\mathcal{R}$ delimitado pelas superfícies S_1 e S_2

e sua projeção D sobre o plano XY é o disco

$$D : \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ z=0 \end{cases}$$

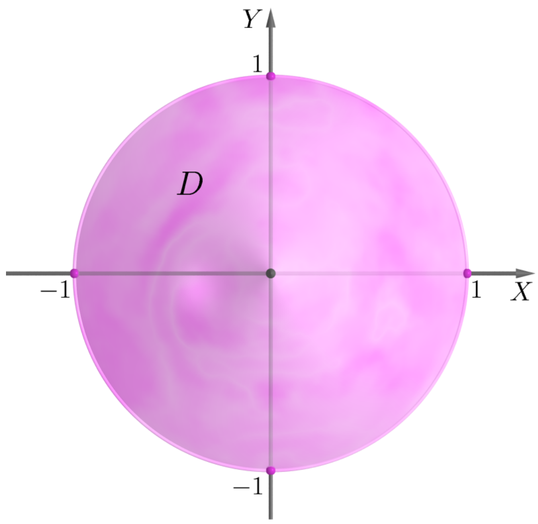

Fig. 28: Região plana D

Assim, o sólido $\mathcal{R}$ pode ser descrito nas seguintes formas:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} -\sqrt{1-x^2-y^2} \le z \le 1-\sqrt{x^2+y^2} \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ -1 \le x \le 1 \end{cases},$$

em coordenadas cartesianas;

$$\mathcal{R} : \begin{cases} -\sqrt{1-\rho^2} \le z \le 1-\rho \\ 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases},$$

em coordenadas cilíndricas;

$$\mathcal{R} : \begin{cases} 0 \le r \le \dfrac{1}{\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi} \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases} \bigcup \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ \dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases},$$

em coordenadas esféricas, pois $S_1 : z = 1-|\rho|$ e $S_2 : z = -\sqrt{1-\rho^2}$ são as superfícies em coordenadas cilíndricas, e

$$S_1 : r\cos\varphi = 1 - r\operatorname{sen}\varphi \iff S_1 : r = \frac{1}{\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi}, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

e $S_2 : r = 1$, $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, são as superfícies em coordenadas esféricas. $\square$

(g) $S_1 : z = x^2 + y^2$ e $S_2 : x + y + z = 1$.

Solução.
A superfície S_1 é um parabolóide de eixo$-OZ$ e S_2 é um plano. A interseção das superfícies é a curva

$$\gamma = S_1 \cap S_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y + z = 1 \end{cases},$$

cuja projeção sobre o plano XY é o círculo,

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1 - x - y &\iff \mathcal{C} : x^2 + x + y^2 + y = 1 \\ &\iff \mathcal{C} : \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

de centro $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ e raio $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

O esboço do sólido delimitado pelas superfícies S_1 e S_2 é:

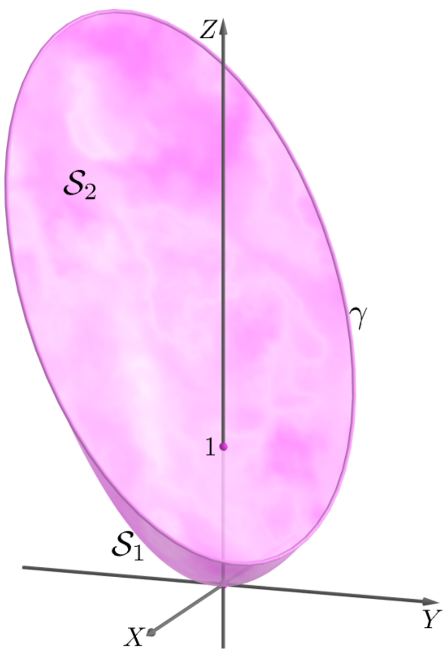

Fig. 29: Sólido delimitado pelas superfícies S_1 e S_2

e sua projeção D sobre o plano XY é o disco:

$$D : \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{2} \\ z = 0\,. \end{cases}$$

O círculo $\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - x - y \\ z = 0 \end{cases}$ em coordenadas polares é dado por:

$$\begin{aligned} \rho^2 = 1 - \rho(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) &\iff \rho^2 + \rho(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) - 1 = 0 \\ &\iff \rho(\theta) = \frac{1}{2}\left[-(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) + \sqrt{(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^2 + 4}\right]. \end{aligned}$$

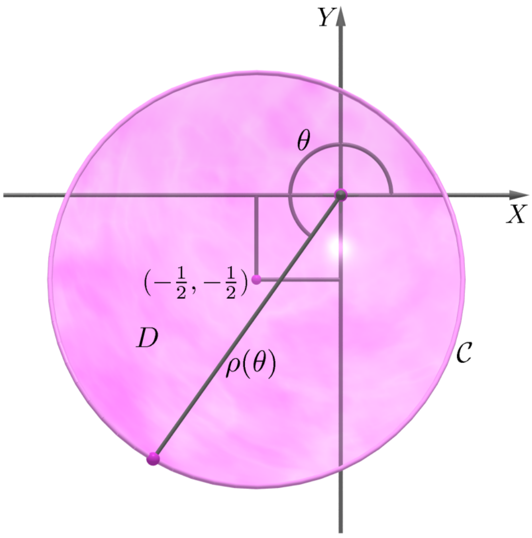

Fig. 30: Disco D

Seja P um ponto pertencente à curva $\gamma : \begin{cases} x^2+y^2=z \\ x+y+z=1 \end{cases}$ e seja $P' = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\,\text{sen}\,\theta, 0)$ a projeção de P sobre o plano XY. Então o ângulo $\varphi(\theta)$ que o vetor $\overrightarrow{OP'}$ faz com o semi-eixo OZ positivo é tal que

$$\text{tg}\,\varphi(\theta) = \frac{\rho(\theta)}{z} = \frac{\rho(\theta)}{1-\rho(\theta)(\cos\theta+\text{sen}\,\theta)},$$

pois $z = 1-x-y = 1-\rho(\theta)(\cos\theta+\text{sen}\,\theta)$.

Logo o sólido $\mathcal{R}$ pode ser dado nas seguintes formas:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} x^2+y^2 \le z \le 1-x-y \\ -\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \le y \le -\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2} \le x \le \sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2} \end{cases},$$

em coordenadas cartesianas;

$$\mathcal{R} : \begin{cases} \rho^2 \le z \le 1-\rho(\cos\theta+\text{sen}\,\theta) \\ 0 \le \rho \le \rho(\theta) \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases},$$

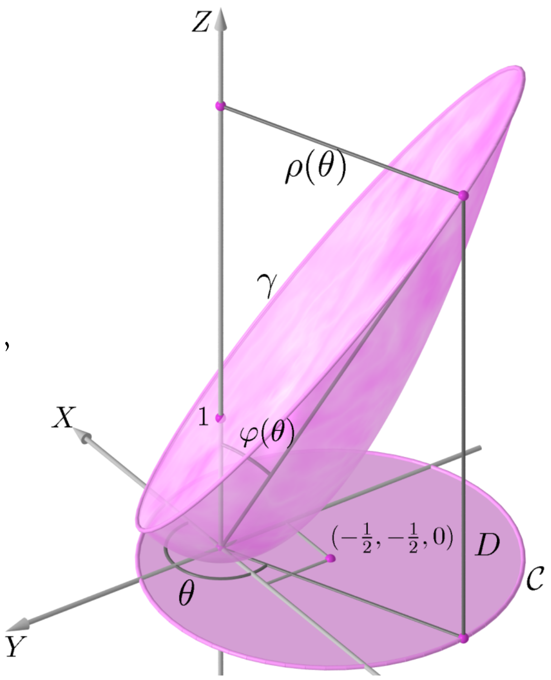

Fig. 31: Elementos θ, $\rho(\theta)$ e $\varphi(\theta)$ de um ponto da curva γ

em coordenadas cilíndricas;

$$\mathcal{R} : \begin{cases} 0 \le r \le \dfrac{1}{\cos\varphi+\text{sen}\,\varphi(\cos\theta+\text{sen}\,\theta)} \\ 0 \le \varphi \le \varphi(\theta) \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases} \bigcup \begin{cases} 0 \le r \le \text{cotg}\,\varphi\,\text{cossec}\,\varphi \\ \varphi(\theta) \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases},$$

em coordenadas esféricas, pois $S_1 : z = \rho^2$ e $S_2 : z = 1-\rho(\cos\theta+\text{sen}\,\theta)$ são as superfícies dadas em coordenadas cilíndricas, e

$$S_1 : r\cos\varphi = r^2 \operatorname{sen}^2\varphi \iff S_1 : r = \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi} = \operatorname{cotg}\varphi \operatorname{cossec}\varphi\,,$$

e

$$S_2 : r\cos\varphi + r\operatorname{sen}\varphi(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) = 1 \iff S_2 : r = \frac{1}{\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}$$

são as superfícies dadas em coordenadas esféricas. □

(h) $S_1 : x^2 + y^2 = 4$, $S_2 : z = 2\sqrt{3}$ e $S_3 : z = -2$.

Solução.

A superfície S_1 é um cilindro circular reto de eixo$-OZ$, e o esboço do sólido delimitado pelas superfícies é

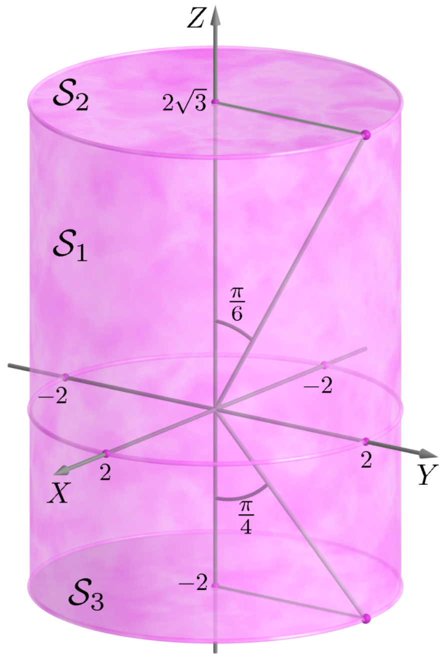

Fig. 32: Sólido $\mathcal{R}$ delimitado pelas superfícies S_1, S_2 e S_3

A projeção D do sólido sobre o plano XY é o disco

$$D : \begin{cases} x^2 + y^2 \le 4 \\ z = 0 \end{cases},$$

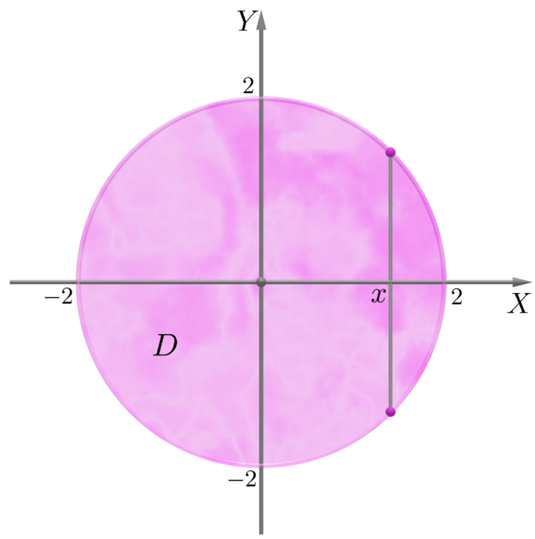

Fig. 33: Disco D

Então, o sólido $\mathcal{R}$ pode ser descrito nas seguintes formas:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} -2 \le & z & \le 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{4-x^2} \le & y & \le \sqrt{4-x^2} \\ -2 \le & x & \le 2 \end{cases},$$

em coordenadas cartesianas;

$$\mathcal{R} : \begin{cases} -2 \le & z & \le 2\sqrt{3} \\ 0 \le & \rho & \le 2 \\ 0 \le & \theta & \le 2\pi \end{cases},$$

em coordenadas cilíndricas;

$$\mathcal{R}: \begin{cases} 0 \leq & r & \leq \dfrac{2\sqrt{3}}{\cos\varphi} \\ 0 \leq & \varphi & \leq \dfrac{\pi}{6} \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \end{cases} \bigcup \begin{cases} 0 \leq & r & \leq \dfrac{2}{\operatorname{sen}\varphi} \\ \dfrac{\pi}{6} \leq & \varphi & \leq \dfrac{3\pi}{4} \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \end{cases} \bigcup \begin{cases} 0 \leq & r & \leq -\dfrac{2}{\cos\varphi} \\ \dfrac{3\pi}{4} \leq & \varphi & \leq \pi \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \end{cases},$$

em coordenadas esféricas, pois $S_1 : r = \dfrac{2}{\operatorname{sen}\varphi}$, $S_2 : r = \dfrac{2\sqrt{3}}{\cos\varphi}$ e $S_3 : r = -\dfrac{2}{\cos\varphi}$ são as superfícies dadas em coordenadas esféricas. □

Exemplo 8

Repita o exercício anterior para as regiões do espaço definidas pelas desigualdades:

(a) $\mathcal{R} : z \geq x^2 + y^2$.

Solução.

A superfície $S : z = x^2 + y^2$ que delimita a região $\mathcal{R}$ é um parabolóide circular de eixo$-OZ$

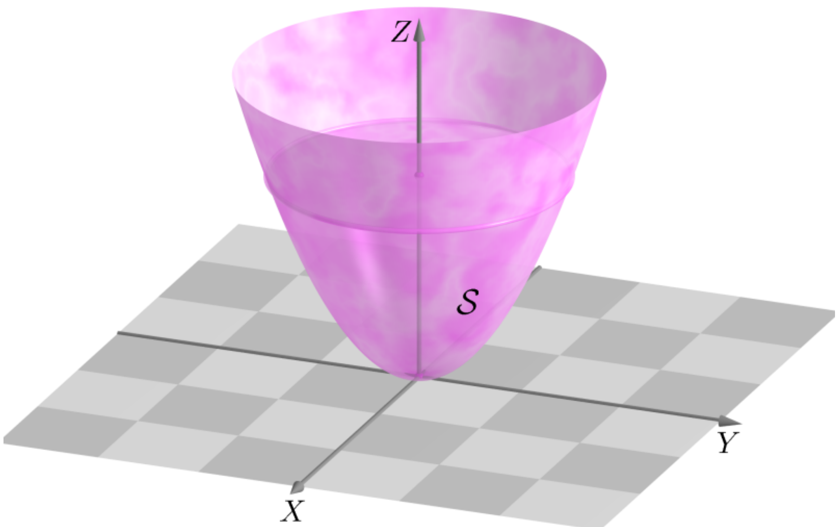

Fig. 34: Região $\mathcal{R}$ delimitada pelo parabolóide circular S

e a região consiste de todos os pontos dentro ou sobre o parabolóide circular S.

Assim, a região $\mathcal{R}$ pode ser dada nas seguintes formas:

$$\mathcal{R}: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq & z & < +\infty \\ -\infty < & y & < +\infty \\ -\infty < & x & < +\infty \end{cases},$$

em coordenadas cartesianas;

$$\mathcal{R}: \begin{cases} \rho^2 \leq & z & < +\infty \\ 0 \leq & \rho & < +\infty \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \end{cases},$$

em coordenadas cilíndricas;

$$\mathcal{R} : \begin{cases} 0 \leq & r & \leq \text{cotg}\,\varphi \,\text{cossec}\,\varphi \\ 0 \leq & \varphi & \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \end{cases},$$

em coordenadas esféricas, pois $S : z = \rho^2$ e $S : r = \text{cotg}\,\varphi\,\text{cossec}\,\varphi$ é a superfície dada em coordenadas cilíndricas e esféricas, respectivamente. □

(b) $\mathcal{R} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}.$

Solução.

A região $\mathcal{R}$ é delimitada pela esfera $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 2$ e pelo cilindro circular de eixo$-OZ$, $S_2 : x^2 + y^2 = 1$. A interseção dessas superfícies é:

$$S_1 \cap S_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff S_1 \cap S_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z^2 = 1 \end{cases} \iff S_1 \cap S_2 = \gamma_1 \cup \gamma_{-1},$$

onde γ_1 e γ_{-1} são os círculos:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \gamma_{-1} : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = -1 \end{cases}.$$

O esboço da região $\mathcal{R}$ é

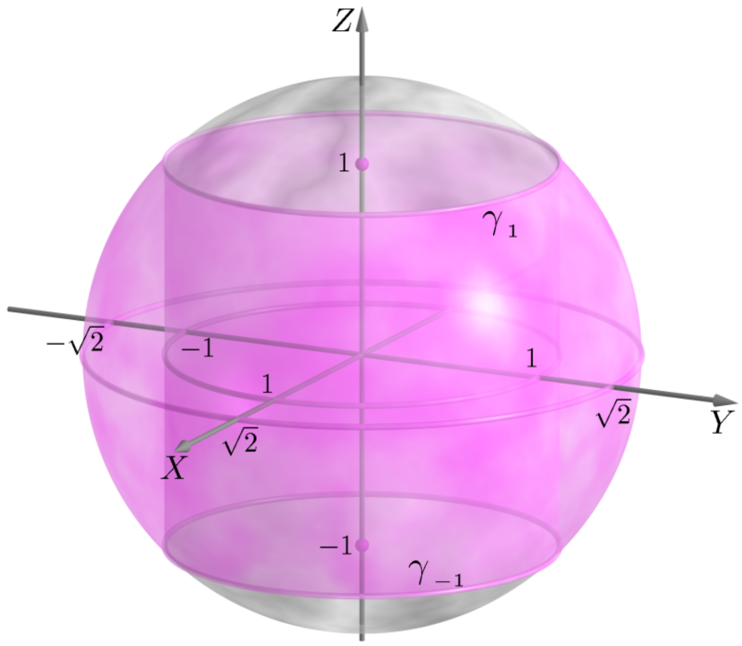

Fig. 35: Região $\mathcal{R}$ delimitada pela esfera S_1 e pelo cilindro S_2

e sua projeção $\mathcal{A}$ sobre o plano XY é o anel:

$$\mathcal{A} : \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

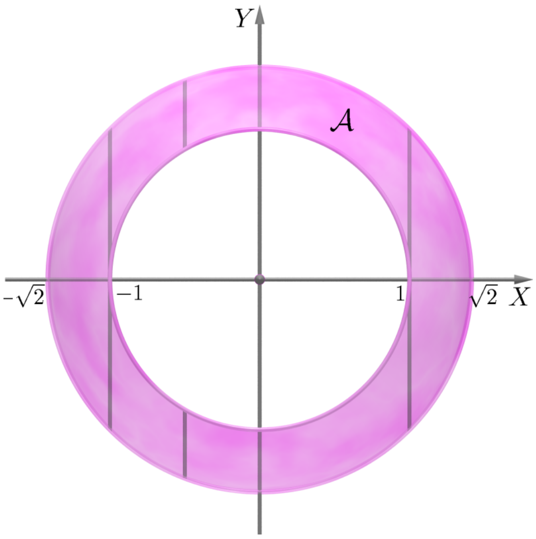

Fig. 36: Anel $\mathcal{A}$

Logo a região $\mathcal{R}$ pode ser descrita nas seguintes formas:

$$\mathcal{R}\left\{\begin{array}{rcl} -\sqrt{2-x^2-y^2} \leq & z & \leq \sqrt{2-x^2-y^2} \\ -\sqrt{2-x^2} \leq & y & \leq \sqrt{2-x^2} \\ -\sqrt{2} \leq & x & \leq -1 \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{rcl} -\sqrt{2-x^2-y^2} \leq & z & \leq \sqrt{2-x^2-y^2} \\ -\sqrt{2-x^2} \leq & y & \leq \sqrt{2-x^2} \\ 1 \leq & x & \leq \sqrt{2} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\sqrt{2-x^2-y^2} \leq & z & \leq \sqrt{2-x^2-y^2} \\ -\sqrt{2-x^2} \leq & y & \leq -\sqrt{1-x^2} \\ -1 \leq & x & \leq 1 \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{rcl} -\sqrt{2-x^2-y^2} \leq & z & \leq \sqrt{2-x^2-y^2} \\ -\sqrt{1-x^2} \leq & y & \leq \sqrt{2-x^2} \\ -1 \leq & x & \leq 1 \end{array}\right. ,$$

em coordenadas cartesianas;

$$\mathcal{R} : \left\{\begin{array}{rcl} -\sqrt{2-\rho^2} \leq & z & \leq \sqrt{2-\rho^2} \\ 1 \leq & \rho & \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \end{array}\right. ,$$

em coordenadas cilíndricas;

$$\mathcal{R} : \left\{\begin{array}{rcl} \text{cossec}\,\varphi \leq & r & \leq \sqrt{2} \\ \frac{\pi}{4} \leq & \varphi & \frac{3\pi}{4} \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \end{array}\right. ,$$

em coordenadas esféricas, pois

$$S_1 : z^2 = 2 - \rho^2 , \qquad S_2 : \rho = 1$$

são as equações das superfícies em coordenadas cilíndricas, e

$$S_1 : r = \sqrt{2} , \qquad S_2 : r = \frac{1}{\text{sen}\,\varphi} = \text{cossec}\,\varphi$$

são as equações das superfícies em coordenadas esféricas. □

(c) $\mathcal{R}: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ z^2 \leq x^2+y^2 \end{cases}$.

Solução.

A região é delimitada pela esfera $S_1 : x^2+y^2+z^2 = 1$ e pelo cone circular de eixo$-OZ$ $S_2 : z^2 = x^2+y^2$.

A interseção das superfícies são os círculos:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x^2+y^2 = \dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \gamma_2 : \begin{cases} x^2+y^2 = \dfrac{1}{2} \\ z = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

e o esboço da região $\mathcal{R}$ é:

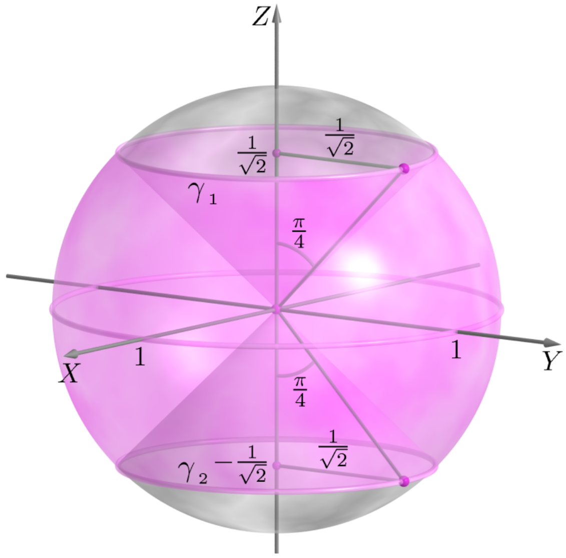

Fig. 37: Região $\mathcal{R}$ delimitada pela esfera S_1 e pelo cone S_2

sendo o disco:

$$D : \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

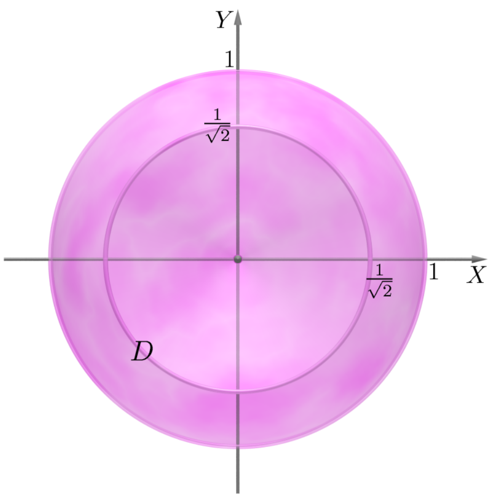

Fig. 38: Disco D

a sua projeção sobre o plano XY.

Assim, a região $\mathcal{R}$ pode ser descrita das seguintes maneiras:

$$\mathcal{R}: \begin{cases} -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq & z & \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \\ -\sqrt{1-x^2} \leq & y & \leq \sqrt{1-x^2} \\ -1 \leq & x & \leq -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \bigcup \begin{cases} -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq & z & \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \\ -\sqrt{1-x^2} \leq & y & \leq \sqrt{1-x^2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq & x & \leq 1 \end{cases}$$

$$\bigcup \begin{cases} -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq & z & \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \\ -\sqrt{1-x^2} \leq & y & \leq -\sqrt{\dfrac{1}{2}-x^2} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq & x & \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \bigcup \begin{cases} -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq & z & \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \\ \sqrt{\dfrac{1}{2}-x^2} \leq & y & \leq \sqrt{1-x^2} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq & x & \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\bigcup \begin{cases} -\sqrt{x^2+y^2} \leq & z & \leq \sqrt{x^2+y^2} \\ -\sqrt{\dfrac{1}{2}-x^2} \leq & y & \leq \sqrt{\dfrac{1}{2}-x^2} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq & x & \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

em coordenadas cartesianas;

$$\mathcal{R}: \begin{cases} -\rho \leq & z & \leq \rho \\ 0 \leq & \rho & \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \end{cases} \bigcup \begin{cases} -\sqrt{1-\rho^2} \leq & z & \leq \sqrt{1-\rho^2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq & \rho & \leq 1 \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \end{cases},$$

em coordenadas cilíndricas;

$$\mathcal{R}: \begin{cases} 0 \leq & r & \leq 1 \\ \dfrac{\pi}{4} \leq & \rho & \leq \dfrac{3\pi}{4} \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \end{cases},$$

em coordenadas esféricas, pois $S_1 : z^2 = 1-\rho^2$, $S_2 : z^2 = \rho^2$ são as superfícies em coordenadas cilíndricas, e $S_1 : r = 1$, $S_2 : \varphi = \dfrac{\pi}{4}$ são as superfícies em coordenadas esféricas. □

(d) $\mathcal{R}: \begin{cases} 0 \leq z \leq x^2+y^2 \\ x^2+(y-1)^2 \leq 1 \end{cases}$.

Solução.

As superfícies que delimitam a região $\mathcal{R}$ são: o plano XY, $S_1 : z = 0$, o parabolóide circular de eixo$-OZ$, $S_2 : z = x^2+y^2$ e o cilindro circular de eixo paralelo ao eixo$-OZ$, $S_3 : x^2+(y-1)^2 = 1$.

O esboço da região é

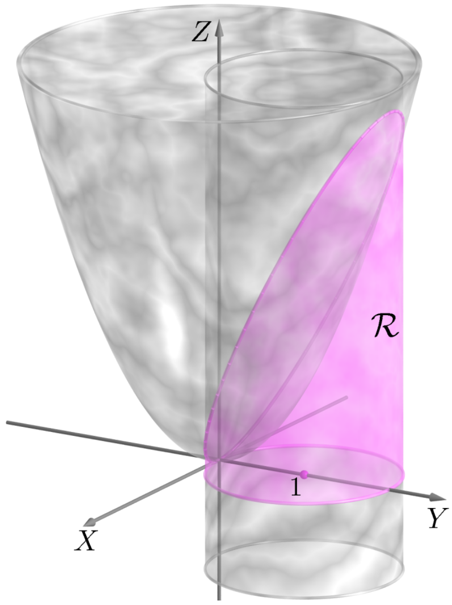

Fig. 39: Região $\mathcal{R}$ delimitada pelas superfícies S_1, S_2 e S_3

e sua projeção sobre o plano XY é o disco

$$D : \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

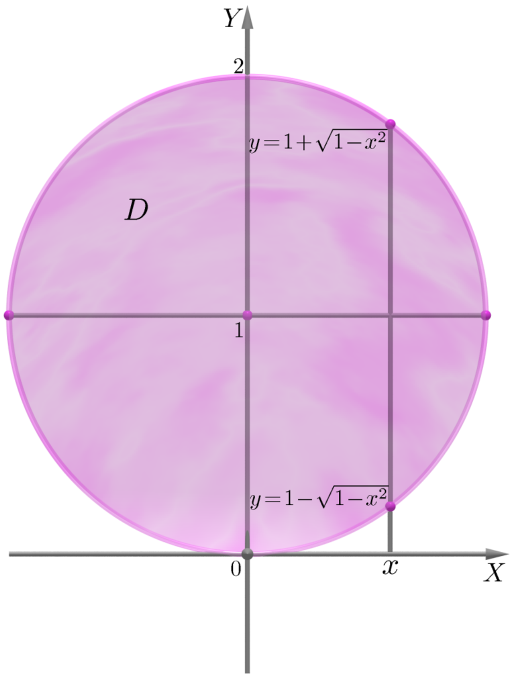

Fig. 40: Disco D

O círculo

$$\mathcal{C} : x^2 + (y-1)^2 = 1 \iff \mathcal{C} : x^2 + y^2 = 2y$$

em coordenadas polares é dado por:

$$\mathcal{C} : \rho(\theta) = 2\,\text{sen}\,\theta\,, \qquad \theta \in [0, \pi],$$

e o ângulo $\varphi(\theta)$ que o vetor $\overrightarrow{OP}$, $P \in S_2 \cap S_3$, faz com o semi-eixo positivo$-OZ$, sendo

$$P' = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\,\text{sen}\,\theta, 0)$$

a projeção do ponto P sobre o plano XY, é tal que:

$$\text{tg}\,|\varphi(\theta)| = \frac{\rho(\theta)}{\rho^2(\theta)} = \frac{1}{\rho(\theta)} = \frac{1}{2\,\text{sen}\,\theta},$$

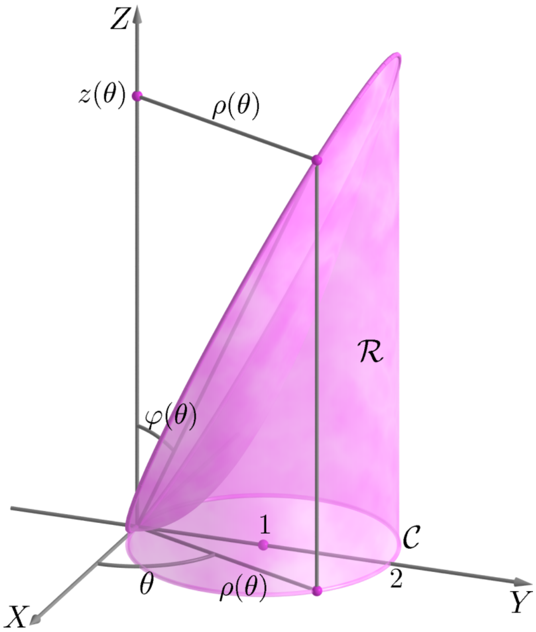

Fig. 41: Região $\mathcal{R}$

pois, se $x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta$, $y(\theta) = \rho(\theta)\,\text{sen}\,\theta$, então $z(\theta) = x^2 + y^2 = \rho^2(\theta)$.

Assim, a região $\mathcal{R}$ pode ser dada nas seguintes formas:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} 0 \leq & z & \leq x^2 + y^2 \\ 1 - \sqrt{1 - x^2} \leq & y & \leq 1 + \sqrt{1 - x^2} \\ -1 \leq & x & \leq 1 \end{cases},$$

em coordenadas cartesianas;

$$\mathcal{R} : \begin{cases} 0 \leq & z & \leq \rho^2 \\ 0 \leq & \rho & \leq 2\,\text{sen}\,\theta \\ 0 \leq & \theta & \leq \pi \end{cases},$$

em coordenadas cilíndricas;

$$\mathcal{R} : \begin{cases} \text{cotg}\,\varphi\ \text{cossec}\,\varphi \leq & r & \leq \dfrac{2\,\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\varphi} \\ \dfrac{1}{2\,\text{sen}\,\theta} \leq & \varphi & \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq & \theta & \leq \pi \end{cases},$$

em coordenadas esféricas, pois $z = \rho^2$ é a superfície S_2 em coordenadas cilíndricas e

$$r = \frac{\cos\varphi}{\text{sen}^2\,\varphi} = \text{cotg}\,\varphi\ \text{cossec}\,\varphi,$$

$$r^2\,\text{sen}^2\,\varphi = 2r\,\text{sen}\,\varphi\ \text{sen}\,\theta \iff r = \frac{2\,\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\varphi},$$

são as superfícies S_2 e S_3, respectivamente, em coordenadas esféricas. $\square$

Exemplo 9

Esboce os sólidos definidos pelos sistemas de inequações abaixo e identifique as superfícies que os delimitam.

(a) $\mathcal{R} : \begin{cases} \rho \leq z \leq 1 \\ 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$, *onde* (ρ, θ, z) *são as coordenadas cilíndricas de um ponto da região.*

Solução.

A região do plano $\mathcal{R}_0 : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$ é dada em coordenadas cartesianas por

$$\mathcal{R}_0 : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

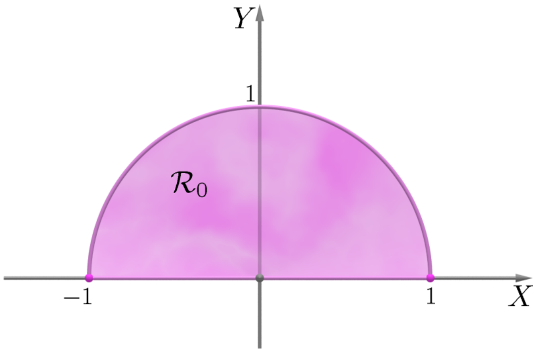

Fig. 42: Região $\mathcal{R}_0$ no plano

Assim, o esboço de $\mathcal{R}$ é:

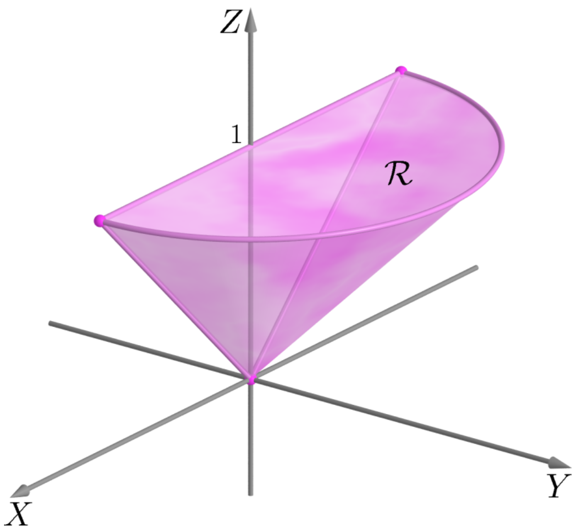

Fig. 43: Sólido $\mathcal{R}$

pois a superfície $z = |\rho| = \sqrt{x^2 + y^2}$ é a parte superior do cone circular de eixo$-OZ$

$$z^2 = x^2 + y^2 .$$

Logo as superfícies que delimitam a região são o plano $y = 0$, o plano $z = 1$ e a parte superior do cone $z^2 = x^2 + y^2$. $\square$

(b) $\mathcal{R} : \begin{cases} 1 \leq r \leq \dfrac{2}{\cos\varphi} \\ 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{4} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$, onde (r, θ, φ) são as coordenadas esféricas de um ponto da região.

Solução.

Observe que:

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \Longleftrightarrow \text{tg}\,\varphi = 1 \Longleftrightarrow r\,\text{sen}\,\varphi = r\cos\varphi \Longleftrightarrow r^2\,\text{sen}^2\,\varphi = r^2\cos^2\varphi \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = z^2$$

é a equação de um cone circular de eixo$-OZ$.

Por outro lado,

$$r = 1 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

é a equação da esfera de centro na origem e raio 1.

Além disso,

$$r = \frac{2}{\cos\varphi} \Longleftrightarrow r\cos\varphi = 2 \Longleftrightarrow z = 2$$

é a equação de um plano paralelo ao plano XY.

Assim, o esboço do sólido $\mathcal{R}$ é dado por

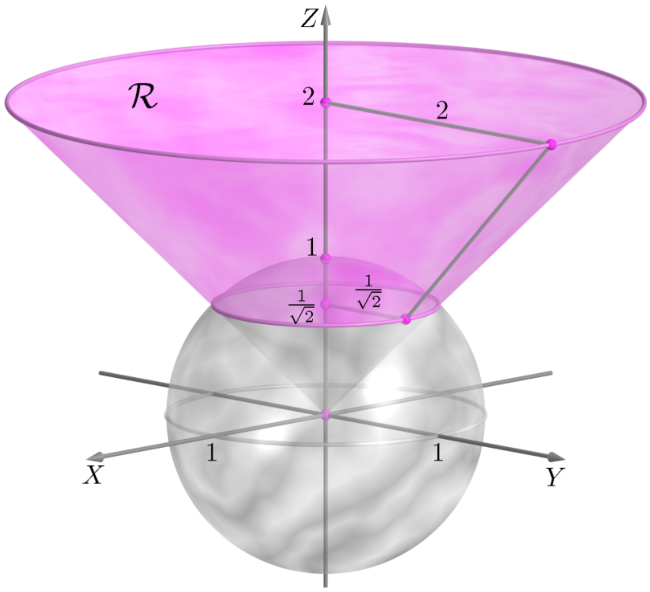

Fig. 44: Sólido $\mathcal{R}$

sendo a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, o cone $z^2 = x^2 + y^2$ e o plano $z = 2$ as superfícies que o delimitam. □

(c) $\mathcal{R} : \begin{cases} 1 \leq r \leq \dfrac{\sqrt{3}}{\text{sen}\,\varphi} \\ \dfrac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi - \dfrac{\pi}{3} \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$, onde (r, θ, φ) são as coordenadas esféricas de um ponto da região.

Solução.

As superfícies que delimitam o sólido são :

- $r = 1 \iff x^2 + y^2 + z^2 = 1$, a esfera de centro na origem e raio igual a 1;

- $r = \dfrac{\sqrt{3}}{\text{sen}\,\varphi} \iff r\,\text{sen}\,\varphi = \sqrt{3} \iff r^2\,\text{sen}^2\,\varphi = 3 \iff x^2 + y^2 = 3$, um cilindro circular reto de eixo$-OZ$;

- $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ ou $\varphi = \pi - \dfrac{\pi}{3} \iff \text{tg}\,\varphi = \pm\sqrt{3} \iff \dfrac{\text{sen}\,\varphi}{\cos\varphi} = \pm\sqrt{3} \iff r\,\text{sen}\,\varphi = \pm\sqrt{3}\,r\cos\varphi \iff r^2\,\text{sen}^2\,\varphi = 3r^2\cos^2\varphi \iff 3z^2 = x^2 + y^2$, um cone circular de eixo$-OZ$;

- $\theta = 0 \iff y = r\ \text{sen}\,\varphi\ \text{sen}\,\theta = 0$, o plano XZ;

- $\theta = \dfrac{\pi}{2} \iff x = r\,\text{sen}\,\varphi\ \cos\theta = 0$, o plano YZ.

Assim, o esboço do sólido é:

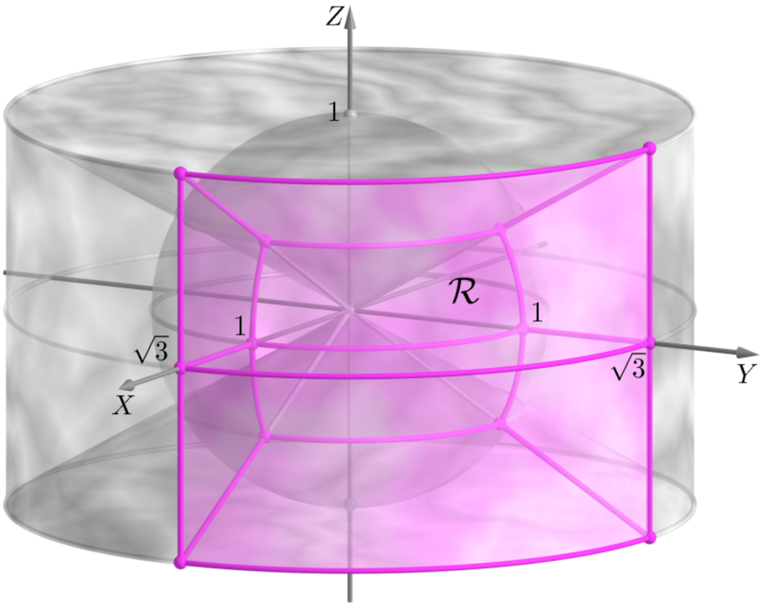

Fig. 45: Sólido $\mathcal{R}$ fora da esfera, entre o cone e o cilindro delimitado pelos planos $x = 0$ e $y = 0$ $\square$

(d) $\mathcal{R} : \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 - \rho \\ 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$, onde (ρ, θ, z) são as coordenadas cilíndricas de um ponto de $\mathcal{R}$.

Solução.
As superfícies que delimitam o sólido $\mathcal{R}$ são:

- $z = 0$, o plano XY;

- $z = 1 - \rho \iff z - 1 = -\sqrt{x^2 + y^2}$, parte do cone circular $(z-1)^2 = x^2 + y^2$ situada no semi-espaço $z \leq 1$;

- $\theta = 0 \iff y = 0$, o plano XZ;

- $\theta = \dfrac{\pi}{4} \iff x - y = 0$, um plano vertical.

Assim, o esboço do sólido $\mathcal{R}$ é:

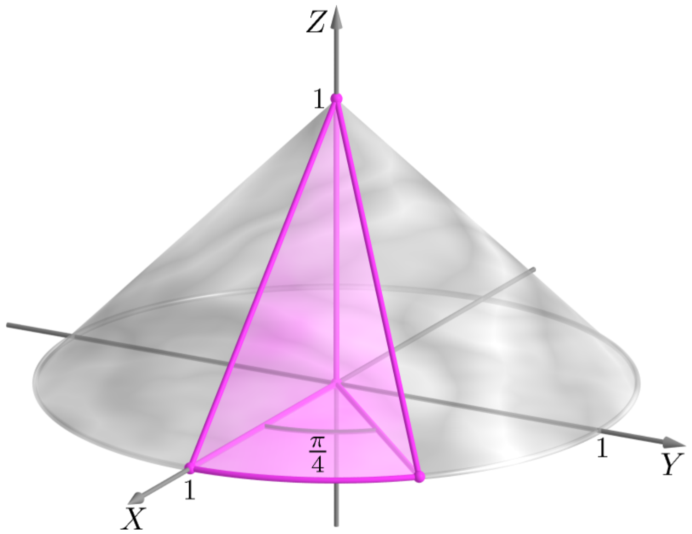

Fig. 46: Sólido $\mathcal{R}$ delimitado pelos planos $\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ e pelo cone $(z-1)^2 = x^2 + y^2$ $\square$