Aula 2

Parametrização de uma cônica contida num plano do espaço

(A) Parametrização do círculo $\mathcal{C}$ de centro $C = (x_0, y_0, z_0)$ e raio $R > 0$ contido no plano $\pi : ax + by + cz = d$.

Para parametrizarmos o círculo, faremos primeiro uma translação e depois uma rotação dos eixos coordenados do sistema $OXYZ$, de modo que o círculo fique centrado na origem e o plano π seja um dos planos coordenados no novo sistema de eixos ortogonais.

1. Translação

Seja $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$ um novo sistema de eixos ortogonais tal que $\overline{O} = C$ e os eixos $\overline{O}\,\overline{X}$, $\overline{O}\,\overline{Y}$ e $\overline{O}\,\overline{Z}$ tenham a mesma direção e sentido dos eixos OX, OY e OZ, respectivamente.

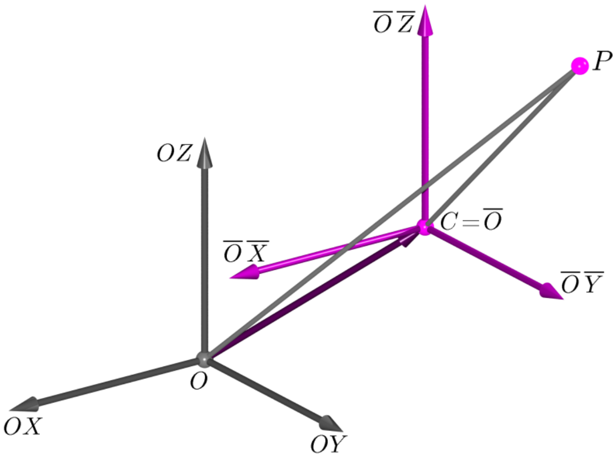

Fig. 1: Translação do sistema de coordenadas

Seja P um ponto do espaço. Sendo $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O\overline{O}} + \overrightarrow{\overline{O}P}$, temos que:

$$(x, y, z) = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) + (x_0, y_0, z_0)\,, \tag{1}$$

onde (x, y, z) e $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ são as coordenadas do ponto P no sistema $OXYZ$ e $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$, respectivamente, e (x_0, y_0, z_0) são as coordenadas de $C = \overline{O}$ no sistema $OXYZ$.

No novo sistema de coordenadas $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$, o centro do círculo tem coordenadas $\overline{x} = \overline{y} = \overline{z} = 0$, isto é,

$$\overline{C} = (0, 0, 0),$$

e o plano $\overline{\pi}$ é dado por:

$$\begin{aligned} \overline{\pi} : a(\overline{x} + x_0) + b(\overline{y} + y_0) + c(\overline{z} + z_0) = d \iff & \overline{\pi} : a\overline{x} + b\overline{y} + c\overline{z} + ax_0 + by_0 + cz_0 = d \\ \iff & \overline{\pi} : a\overline{x} + b\overline{y} + c\overline{z} = 0\,, \end{aligned}$$

pois $(x_0, y_0, z_0) \in \pi$, isto é, $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$.

2. Rotação

Seja $\overrightarrow{v_3} = \dfrac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ um vetor unitário normal ao plano π, e seja $\overrightarrow{v_1}$ um vetor unitário qualquer perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v_3}$.

Tome $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_3} \times \overrightarrow{v_1}$. Então $\overrightarrow{v_2}$ é unitário e perpendicular aos vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_3}$.

Observe que $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são paralelos ao plano π.

Seja $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}}\,\overline{\overline{Z}}$ o sistema de eixos ortogonais com origem $\overline{O}$, tal que os semi-eixos positivos $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$, $\overline{O}\,\overline{\overline{Y}}$ e $\overline{O}\,\overline{\overline{Z}}$ têm a mesma direção e sentido dos vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$, respectivamente.

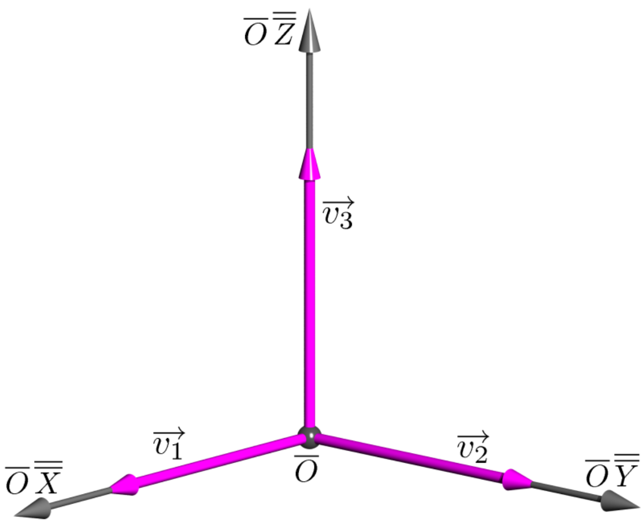

Fig. 2: Vetores

Como os vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$ são linearmente independentes (já que são unitários e dois a dois ortogonais), todo vetor do espaço se escreve, de modo único, como combinação linear destes vetores.

Então, dado $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, existe um único terno ordenado $(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}, \overline{\overline{z}})$ tal que

$$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \overline{\overline{x}}\overrightarrow{v_1} + \overline{\overline{y}}\overrightarrow{v_2} + \overline{\overline{z}}\overrightarrow{v_3}\,. \tag{2}$$

Fazendo o produto interno de (x, y, z) com $\overrightarrow{v_1}$, obtemos que:

$$\begin{aligned}\left\langle (x,y,z), \overrightarrow{v_1} \right\rangle &= \left\langle \overline{\overline{x}}\overrightarrow{v_1} + \overline{\overline{y}}\overrightarrow{v_2} + \overline{\overline{z}}\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_1} \right\rangle \\ &= \overline{\overline{x}}\left\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \right\rangle + \overline{\overline{y}}\left\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1} \right\rangle + \overline{\overline{z}}\left\langle \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_1} \right\rangle = \overline{\overline{x}}\,,\end{aligned}$$

pois $\left\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \right\rangle = \|\overrightarrow{v_1}\|^2 = 1$ e $\left\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_1} \right\rangle = 0$.

De modo análogo, podemos verificar que $\overline{\overline{y}} = \left\langle (x,y,z), \overrightarrow{v_2} \right\rangle$ e $\overline{\overline{z}} = \left\langle (x,y,z), \overrightarrow{v_3} \right\rangle$.

Vamos mostrar agora que $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{y}}$ e $\overline{\overline{z}}$ são as coordenadas do ponto (x, y, z) no sistema de eixos $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}}\,\overline{\overline{Z}}$.

Seja $P_{\overline{\overline{X}}}$ a projeção ortogonal do ponto (x, y, z) sobre o eixo $-\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$.

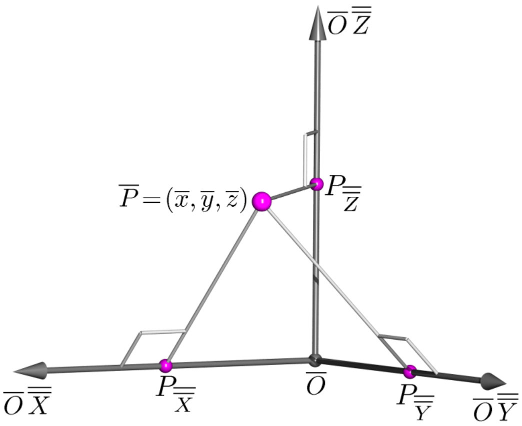

Fig. 3: Projeções ortogonais de $\overline{P}$ sobre os eixos do sistema $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}}\,\overline{\overline{Z}}$

Como $P_{\overline{\overline{X}}} \in$ eixo $-\,\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{\overline{O}\,P_{\overline{\overline{X}}}} = a\overrightarrow{v_1}$.

Além disso, como $(x, y, z) - \overrightarrow{\overline{O}\,P_{\overline{\overline{X}}}} \perp \overrightarrow{v_1}$, temos que:

$$\begin{aligned}0 &= \left\langle (x,y,z) - \overrightarrow{\overline{O}\,P_{\overline{\overline{X}}}}, \overrightarrow{v_1} \right\rangle = \left\langle (x,y,z), \overrightarrow{v_1} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{\overline{O}\,P_{\overline{\overline{X}}}}, \overrightarrow{v_1} \right\rangle \\ &= \left\langle (x,y,z), \overrightarrow{v_1} \right\rangle - a\left\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \right\rangle = \left\langle (x,y,z), \overrightarrow{v_1} \right\rangle - a \Longleftrightarrow \left\langle (x,y,z), \overrightarrow{v_1} \right\rangle = a\end{aligned}$$

Pelo visto acima, $\overline{\overline{x}} = \left\langle (x,y,z), \overrightarrow{v_1} \right\rangle$. Logo $a = \overline{\overline{x}}$ e, portanto, $\overline{O}\,P_{\overline{\overline{X}}} = \overline{\overline{x}}\overrightarrow{v_1}$.

Então $\overline{\overline{x}}$ é a coordenada do ponto $P_{\overline{\overline{X}}}$ no eixo$-\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$, pois o semi-eixo positivo $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$ tem o mesmo sentido de $\overrightarrow{v_1}$ e

$$d(P_{\overline{\overline{X}}}, \overline{O}) = \|\overrightarrow{\overline{O}P_{\overline{\overline{X}}}}\| = \|\overline{\overline{x}}\,\overrightarrow{v_1}\| = \sqrt{\left\langle \overline{\overline{x}}\,\overrightarrow{v_1}, \overline{\overline{x}}\,\overrightarrow{v_1} \right\rangle} = \sqrt{\overline{\overline{x}}^2\left\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \right\rangle} = \sqrt{\overline{\overline{x}}^2} = |\,\overline{\overline{x}}\,|\;.$$

Provamos assim que $\overline{\overline{x}}$ é a primeira coordenada do ponto (x, y, z) no sistema de eixos $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}}\,\overline{\overline{Z}}$.

De modo análogo, podemos mostrar que $\overline{\overline{y}}$ é a segunda coordenada e $\overline{\overline{z}}$ é a terceira coordenada do ponto (x, y, z) no sistema de eixos $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}}\,\overline{\overline{Z}}$.

O centro do círculo tem coordenadas $\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}} = \overline{\overline{z}} = 0$, pois

$$\overline{C} = (0,0,0) = 0\,\overrightarrow{v_1} + 0\,\overrightarrow{v_2} + 0\,\overrightarrow{v_3}\,.$$

Fazendo $(a,b,c) = \left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\overrightarrow{v_3}$ e $(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \overline{\overline{x}}\overrightarrow{v_1} + \overline{\overline{y}}\overrightarrow{v_2} + \overline{\overline{z}}\overrightarrow{v_3}$ na equação do plano $\overline{\pi} : \langle (a,b,c), (\overline{x},\overline{y},\overline{z})\rangle = 0$, vemos que:

$$\overline{\overline{\pi}} : \left\langle \left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\overrightarrow{v_3}, \overline{\overline{x}}\overrightarrow{v_1} + \overline{\overline{y}}\overrightarrow{v_2} + \overline{\overline{z}}\overrightarrow{v_3} \right\rangle = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \overline{\overline{\pi}} : \left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\langle\overrightarrow{v_3},\overrightarrow{v_1}\rangle\overline{\overline{x}} + \left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\langle\overrightarrow{v_3},\overrightarrow{v_2}\rangle\overline{\overline{y}} + \left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\langle\overrightarrow{v_3},\overrightarrow{v_3}\rangle\overline{\overline{z}} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \overline{\overline{\pi}} : \left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\overline{\overline{z}} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \overline{\overline{\pi}} : \overline{\overline{z}} = 0\,,$$

isto é, $\overline{\overline{\pi}} =$ plano $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}}$.

Logo o círculo, no sistema $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}}\,\overline{\overline{Z}}$, tem centro na origem, raio R e está contido no plano $\overline{\overline{z}} = 0$, ou seja,

$$\overline{\overline{\mathcal{C}}} : \begin{cases} \overline{\overline{x}}^2 + \overline{\overline{y}}^2 = R^2 \\ \overline{\overline{z}} = 0\,. \end{cases}$$

Assim,

$$\overline{\overline{\mathcal{C}}} : \begin{cases} \overline{\overline{x}}(t) = R\cos t \\ \overline{\overline{y}}(t) = R\,\text{sen}\, t \quad ; \quad t \in \mathbb{R}. \\ \overline{\overline{z}}(t) = 0 \end{cases}$$

é uma parametrização de $\mathcal{C}$ nas coordenadas $\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}, \overline{\overline{z}}$.

Por (1) e (2), obtemos:

$$\boxed{(x,y,z) = \overline{\overline{x}}\,\overrightarrow{v_1} + \overline{\overline{y}}\,\overrightarrow{v_2} + \overline{\overline{z}}\,\overrightarrow{v_3} + (x_0,y_0,z_0)} \tag{3}$$

Logo,

$$(x(t),y(t),z(t)) = \overline{\overline{x}}(t)\,\overrightarrow{v_1} + \overline{\overline{y}}(t)\,\overrightarrow{v_2} + \overline{\overline{z}}(t)\,\overrightarrow{v_3} + (x_0,y_0,z_0)\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (x(t),y(t),z(t)) = R\cos t\,\overrightarrow{v_1} + R\,\text{sen}\,t\,\overrightarrow{v_2} + (x_0,y_0,z_0)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{4}$$

é uma parametrização do círculo $\mathcal{C}$ nas coordenadas x, y, z.

Exemplo 1

Seja $\mathcal{C}$ o círculo de centro $C = (1,1,1)$ e raio $R = 2$ contido no plano $\pi : x + y + 2z = 4$.

Determine uma parametrização do círculo $\mathcal{C}$.

Solução.
Sabemos que

$$(x(t), y(t), z(t)) = 2\cos t\, \overrightarrow{v_1} + 2\,\text{sen}\, t\, \overrightarrow{v_2} + (1,1,1)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização do círculo $\mathcal{C}$, onde $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são vetores ortogonais e unitários paralelos ao plano π.

Como $(1,1,2) \perp \pi$, basta tomar

$$\overrightarrow{v_3} = \frac{(1,1,2)}{\sqrt{6}}\,,\ \overrightarrow{v_1} = \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}} \text{ e } \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_3} \times \overrightarrow{v_1} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2,2,-2) = \frac{(1,1,-1)}{\sqrt{3}}\,.$$

Logo,

$$(x(t), y(t), z(t)) = \frac{2}{\sqrt{2}}\cos t\,(1,-1,0) + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{sen}\, t\,(1,1,-1) + (1,1,1)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Isto é,

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = \dfrac{2}{\sqrt{2}}\cos t + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\text{sen}\, t + 1 \\ y(t) = -\dfrac{2}{\sqrt{2}}\cos t + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\text{sen}\, t + 1\,; \quad t \in \mathbb{R}\,. \\ z(t) = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\text{sen}\, t + 1 \end{cases}$$

é uma parametrização de $\mathcal{C}$ nas coordenadas x, y e z. □

Exemplo 2

Considere a esfera $S : (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 4$ *e o plano* $\pi : 3x - 4y = 2$.

(a) *Mostre que* $S \cap \pi$ *é um círculo.*

Solução.
Basta verificar que a distância entre o centro $A = (1,-1,2)$ da esfera S e o plano π é menor que o raio $r = 2$ da esfera. De fato:

$$d(A,\pi) = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) - 2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{5}{5} = 1 < 2 = r\,.$$

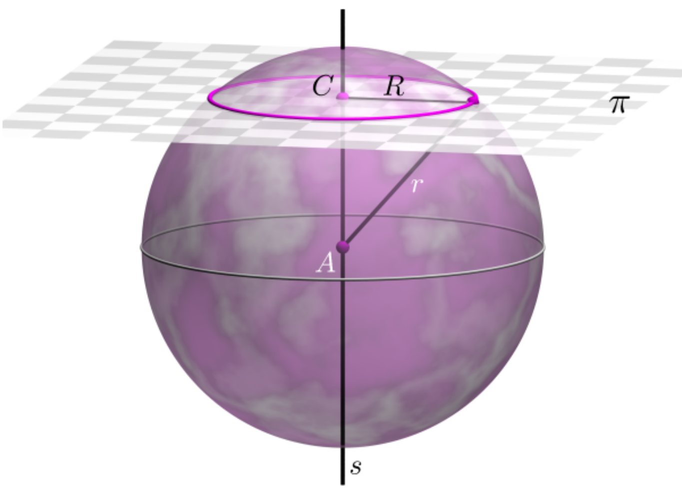

Fig. 4: Círculo no plano π

(b) *Encontre o raio e o centro do círculo.*

Solução.
Pelo teorema de Pitágoras, o raio R do círculo é dado por:

$$R = \sqrt{r^2 - d(A,\pi)^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}\,.$$

Seja, agora, a reta s perpendicular ao plano π que passa pelo centro A da esfera.

Como $s \parallel (3,-4,0)$, já que $(3,-4,0) \perp \pi$, temos que:

$$s : \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -4t - 1 \\ z = 2 \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R},$$

O centro C do círculo é o ponto onde a reta s intersecta o plano π, ou seja, $C = (3t+1, -4t-1, 2)$ e

$$3(3t+1) - 4(-4t-1) = 2 \Longleftrightarrow 9t + 16t = 2 - 7 \Longleftrightarrow t = -\frac{1}{5}.$$

Logo,

$$C = \left(3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + 1\,,\, -4 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) - 1\,,\, 2\right) = \left(\frac{2}{5}\,,\, -\frac{1}{5}\,,\, 2\right),$$

é o centro do círculo.

(c) *Parametrize o círculo.*

Solução.
Sabemos, por (4), que

$$(x(t), y(t), z(t)) = \sqrt{3}\cos t\,\overrightarrow{v_1} + \sqrt{3}\,\text{sen}\,t\,\overrightarrow{v_2} + \left(\frac{2}{5}\,,\, -\frac{1}{5}\,,\, 2\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização de $\mathcal{C}$, onde $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são vetores paralelos ao plano π, unitários e ortogonais.

Sendo $\pi \perp (3, -4, 0)$, basta tomar $\overrightarrow{v_3} = \dfrac{(3,-4,0)}{5}$, $\overrightarrow{v_1} = \dfrac{(4,3,0)}{5}$ e $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_3} \times \overrightarrow{v_1} = (0,0,1)$.

Logo,

$$(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\sqrt{3}}{5}\cos t\,(4,3,0) + \sqrt{3}\,\text{sen}\,t\,(0,0,1) + \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 2\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Isto é,

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = \dfrac{4\sqrt{3}}{5}\cos t + \dfrac{2}{5} \\ y(t) = \dfrac{3\sqrt{3}}{5}\cos t - \dfrac{1}{5} \\ z(t) = \sqrt{3}\,\text{sen}\,t + 2 \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

é uma parametrização do círculo $\mathcal{C}$. □

(B) Parametrização da elipse $\mathcal{E}$ de centro $C = (x_0, y_0, z_0)$ contida no plano $\pi : ax + by + cz = d$.

Seja $\overrightarrow{u} \neq 0$ um vetor paralelo à reta-focal da elipse.

Tomando $\overline{O} = C$, $\overrightarrow{v_1} = \dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$, $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_3} \times \overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_3} = \dfrac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, podemos provar, como fizemos no caso do círculo, que a elipse, no sistema $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$, no qual os semi-eixos positivos $\overline{O}\,\overline{X}$,

$\overline{O}\,\overline{\overline{Y}}$ e $\overline{O}\,\overline{\overline{Z}}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido dos vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$, respectivamente, é uma elipse centrada na origem e contida no plano $\overline{\overline{z}} = 0$, cuja reta-focal é o eixo$-\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$, ou seja,

$$\overline{\overline{\mathcal{E}}} : \begin{cases} \dfrac{\overline{\overline{x}}^2}{a^2} + \dfrac{\overline{\overline{y}}^2}{b^2} = 1 \\ \overline{\overline{z}} = 0\,. \end{cases}$$

Como

$$\overline{\overline{\mathcal{E}}} : \begin{cases} \overline{\overline{x}}(t) = a\cos t \\ \overline{\overline{y}}(t) = b\,\text{sen}\,t\,; \quad t \in \mathbb{R}\,, \\ \overline{\overline{z}}(t) = 0 \end{cases}$$

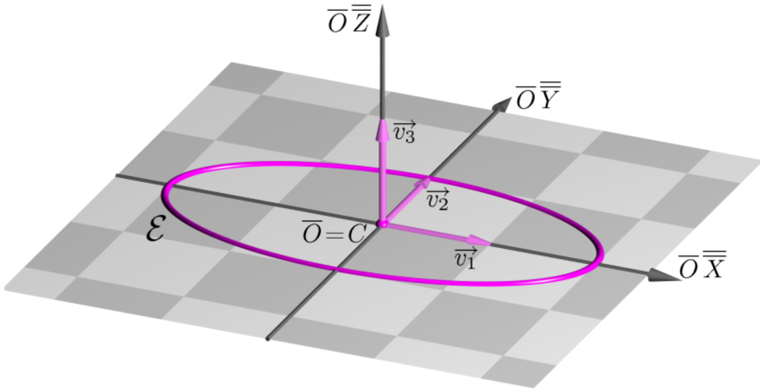

Fig. 5: Elipse $\mathcal{E}$ no plano π

é uma parametrização de $\mathcal{E}$ nas coordenadas $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{y}}$ e $\overline{\overline{z}}$, e

$$(x, y, z) = \overline{\overline{x}}\overrightarrow{v_1} + \overline{\overline{y}}\overrightarrow{v_2} + \overline{\overline{z}}\overrightarrow{v_3} + C\,,$$

temos que:

$$(x(t), y(t), z(t)) = a\cos t\,\overrightarrow{v_1} + b\,\text{sen}\,t\,\overrightarrow{v_2} + C\,;\ t \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização de $\mathcal{E}$ nas coordenadas x, y e z.

Exemplo 3

Seja $\mathcal{E}$ uma elipse contida no plano $\pi : x + 2y - z = 1$, centrada no ponto $C = (1, 1, 2)$, com um dos vértices no ponto $V = (2, 0, 1)$ e um dos focos no ponto $F = (2, 1, 3)$.

(a) *Parametrize a elipse $\mathcal{E}$.*

Solução.

Como $\overrightarrow{CF} = (1, 0, 1)$ é um vetor paralelo à reta-focal, vamos tomar $\overrightarrow{v_1} = \dfrac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}}$.

Sendo $\overrightarrow{CV} = (1, -1, -1) \perp \overrightarrow{CF}$, vemos que V é um vértice sobre a reta não-focal.

Logo, $c = d(C, F) = \sqrt{2}$, $b = d(C, V) = \sqrt{3}$ e $a^2 = b^2 + c^2 = 2 + 3 \Longleftrightarrow a = \sqrt{5}$.

Assim,

$$(x(t), y(t), z(t)) = \sqrt{5}\cos t\,\overrightarrow{v_1} + \sqrt{3}\,\text{sen}\,t\,\overrightarrow{v_2} + (1, 1, 2)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização de $\mathcal{E}$, onde $\overrightarrow{v_3} = \dfrac{(1, 2, -1)}{\sqrt{6}} \perp \pi$ e $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_3} \times \overrightarrow{v_1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)$.

Isto é, as equações paramétricas da elipse nas coordenadas x, y e z são:

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x(t) = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\cos t + \text{sen}\,t + 1 \\ y(t) = -\text{sen}\,t + 1 & ; \quad t \in \mathbb{R}\,. \\ z(t) = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\cos t - \text{sen}\,t + 2 \end{cases}$$

(b) *Determine os outros vértices da elipse.*

Solução.
Sejam $B_1 = V = (2, 0, 1)$ e B_2 os dois vértices sobre a reta não-focal. Então,

$$C = \frac{B_1 + B_2}{2} \iff B_2 = 2C - V = (2, 2, 4) - (2, 0, 1) = (0, 2, 3).$$

Seja A um vértice sobre a reta-focal

$$r : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 \\ z = t + 2 \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como $A = (t + 1, 1, t + 2) \in r$ e $d(A, C) = a = \sqrt{5}$, temos que:

$$t^2 + t^2 = 5 \iff 2t^2 = 5 \iff t = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}.$$

Logo, $A_1 = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + 1\,,\, 1\,,\, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + 2\right)$ e $A_2 = \left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + 1\,,\, 1\,,\, -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + 2\right)$ são os vértices da elipse sobre a reta-focal. □

Exemplo 4

Determine as equações paramétricas da elipse $\mathcal{E}$ contida no plano $\pi : x + y - z = 1$, com centro $C = (1, 0, 0)$, foco $F = (1, 1, 1)$ e um dos vértices no ponto $V = (1, 2, 2)$.

Solução.
Como $\overrightarrow{CF} = (0, 1, 1)$ e $\overrightarrow{CV} = (0, 2, 2)$ são vetores múltiplos, temos que V é um dos vértices sobre a reta-focal, $c = d(C, F) = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, $a = d(C, V) = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$ e, portanto, $b^2 = a^2 - c^2 = 8 - 2 \iff b = \sqrt{6}$.

Tomando $\overrightarrow{v_1} = \frac{\overrightarrow{CF}}{\|\overrightarrow{CF}\|} = \frac{(0, 1, 1)}{\sqrt{2}}$, vetor unitário paralelo à reta-focal, obtemos que:

$$(x(t), y(t), z(t)) = 2\sqrt{2}\cos t\,\overrightarrow{v_1} + \sqrt{6}\,\text{sen}\,t\,\overrightarrow{v_2} + (1, 0, 0)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização da elipse, onde $\overrightarrow{v_3} = \frac{(1, 1, -1)}{\sqrt{3}} \perp \pi$ e $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_3} \times \overrightarrow{v_1} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1)$.

Ou seja,

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x(t) = 2\,\text{sen}\,t + 1 \\ y(t) = 2\cos t - \text{sen}\,t \\ z(t) = 2\cos t + \text{sen}\,t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

são as equações paramétricas da elipse $\mathcal{E}$ nas coordenadas x, y e z. □

Exemplo 5

Parametrize a elipse $\mathcal{E}$ contida no plano $\pi : x - y + 2z = 0$, centrada no ponto $\mathcal{C} = (1, -1, -1)$, com um dos vértices sobre a reta-focal no ponto $A = (5, -1, -3)$ e excentricidade $e = \dfrac{1}{2}$.

Solução.

Como $\overrightarrow{CA} = (4, 0, -2)$, temos que $a = d(C, A) = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$, e portanto, $c = \dfrac{a}{2} = \sqrt{5}$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{20-5} = \sqrt{15}$.

Tomando $\overrightarrow{v_1} = \dfrac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, -1)$ um vetor unitário paralelo à reta-focal, temos que:

$$(x(t), y(t), z(t)) = 2\sqrt{5}\cos t\,\overrightarrow{v_1} + \sqrt{15}\,\mathrm{sen}\, t\,\overrightarrow{v_2} + (1, -1, -1)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização de $\mathcal{E}$, onde $\overrightarrow{v_3} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2) \perp \pi$ e $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_3} \times \overrightarrow{v_1} = \dfrac{1}{\sqrt{30}}(1, 5, 2)$.

Ou seja,

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x(t) = 4\cos t + \dfrac{\mathrm{sen}\, t}{\sqrt{2}} + 1 \\ y(t) = \dfrac{5\,\mathrm{sen}\, t}{\sqrt{2}} - 1 \\ z(t) = -2\cos t + \dfrac{2}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\, t - 1 \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

são as equações paramétricas da elipse $\mathcal{E}$ nas coordenadas x, y e z. □

(C) Parametrização da hipérbole $\mathcal{H}$ de centro $C = (x_0, y_0, z_0)$ contida no plano $\pi : ax + by + cz = d$.

Seja $\overrightarrow{u}$ um vetor não-nulo paralelo à reta-focal da hipérbole.

Tomando $\overline{O} = C$, $\overrightarrow{v_1} = \dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$, $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_3} \times \overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_3} = \dfrac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, podemos provar que $\mathcal{H}$ é uma hipérbole contida no plano $\overline{\overline{z}} = 0$, centrada na origem e com reta-focal paralela ao eixo$-\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$, no sistema $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}}\,\overline{\overline{Z}}$, no qual os semi-eixos positivos $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$, $\overline{O}\,\overline{\overline{Y}}$ e $\overline{O}\,\overline{\overline{Z}}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido dos vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$, respectivamente.

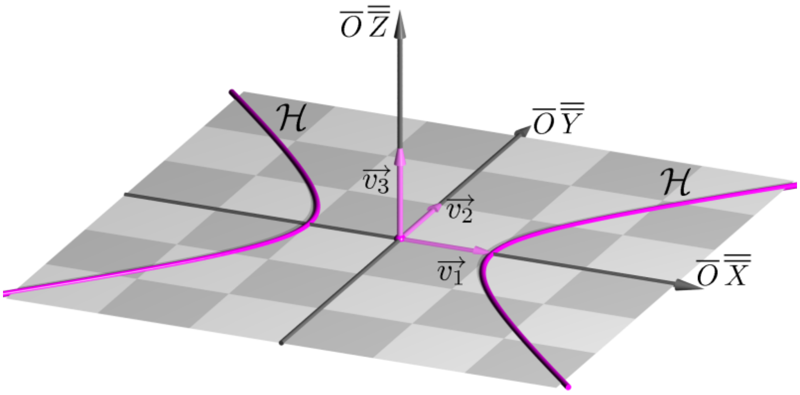

Fig. 6: Hipérbole $\mathcal{H}$ no plano π

Ou seja,

$$\overline{\overline{\mathcal{H}}}:\begin{cases}\dfrac{\overline{\overline{x}}^2}{a^2}-\dfrac{\overline{\overline{y}}^2}{b^2}=1\\[2mm] \overline{\overline{z}}=0\,.\end{cases}$$

Sendo

$$\overline{\overline{\mathcal{H}}}:\begin{cases}\overline{\overline{x}}(t)=\pm a\cosh t\\ \overline{\overline{y}}(t)=b\,\text{senh}\,t\\ \overline{\overline{z}}(t)=0\end{cases}\quad;\quad t\in\mathbb{R}\,,$$

uma parametrização de $\mathcal{H}$ nas coordenadas $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{y}}$ e $\overline{\overline{z}}$ e

$$(x,y,z)=\overline{\overline{x}}\overrightarrow{v_1}+\overline{\overline{y}}\overrightarrow{v_2}+\overline{\overline{z}}\overrightarrow{v_3}+C\,,$$

obtemos que:

$$(x(t),y(t),z(t))=\pm a\cosh t\,\overrightarrow{v_1}+b\,\text{senh}\,t\,\overrightarrow{v_2}+C\,,\quad t\in\mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização de $\mathcal{H}$ nas coordenadas x, y e z.

Exemplo 6

Seja $\mathcal{H}$ a hipérbole contida no plano $\pi: x+y+z=1$ e centrada no ponto $C=(1,0,0)$. com um dos vértices no ponto $V=(0,0,1)$ e um dos focos no ponto $F=(3,0,-2)$.

(a) *Determine uma parametrização da hipérbole.*

Solução.

Como o vetor $\overrightarrow{CF}=(2,0,-2)$ é paralelo à reta-focal, tomaremos $\overrightarrow{v_1}=\dfrac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}$. Além disso, $c=d(C,F)=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ e $a=d(C,V)=\|\overrightarrow{CV}\|=\|(-1,0,1)\|=\sqrt{2}$. Sendo $c^2=a^2+b^2$ numa hipérbole, obtemos que $b^2=c^2-a^2=8-2=6\Longrightarrow b=\sqrt{6}$.

Logo,

$$(x(t),y(t),z(t))=\pm\sqrt{2}\cosh t\,\overrightarrow{v_1}+\sqrt{6}\,\text{senh}\,t\,\overrightarrow{v_2}+C\,,\quad t\in\mathbb{R},$$

é uma parametrização da hipérbole, onde $\overrightarrow{v_3}=\dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$ e $\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{v_3}\times\overrightarrow{v_1}=\dfrac{(-1,2,-1)}{\sqrt{6}}$.

Ou seja,

$$\mathcal{H}:\begin{cases}x(t)=\pm\cosh t-\text{senh}\,t+1\\ y(t)=2\,\text{senh}\,t\\ z(t)=\mp\cosh t-\text{senh}\,t\end{cases}\quad;\quad t\in\mathbb{R}\,,$$

são equações paramétricas da hipérbole $\mathcal{H}$.

(b) *Determine o outro vértice, o outro foco, os vértices imaginários e as equações paramétricas das assíntotas de $\mathcal{H}$.*

Solução.

Sendo C o ponto médio do segmento que liga os vértices $V_1=(0,0,1)$ e V_2, temos que:

$$C = \frac{V_1 + V_2}{2} \Longleftrightarrow V_2 = 2C - V_1 = (2,0,0) - (0,0,1) = (2,0,-1)\,.$$

E como C é também o ponto médio do segmento que liga os focos, temos que:

$$F' = 2C - F = (2,0,0) - (3,0,-2) = (-1,0,2)$$

é o outro foco da hipérbole.

Os vértices imaginários encontram-se sobre a reta não-focal ℓ'. Como ℓ' é perpendicular a $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_3}$ (e portanto paralela ao vetor $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_3} \times \overrightarrow{v_1}$) e passa pelo centro C de $\mathcal{H}$, temos que:

$$\ell' : \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização da reta não-focal.

Então, se B é um vértice imaginário, $B = (-t+1, 2t, -t)$ para algum valor $t \in \mathbb{R}$ e

$$d(C,B)^2 = b^2 = 6 = (-t)^2 + (2t)^2 + (-t)^2 = 6t^2 \Longleftrightarrow t = \pm 1\,.$$

Assim, $B_1 = (0,2,-1)$ e $B_2 = (2,-2,1)$ são os vértices imaginários da hipérbole.

Vamos agora determinar as equações paramétricas das assíntotas.

No sistema de eixos $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}}\,\overline{\overline{Z}}$, no qual $\overline{O} = C$ e os semi-eixos positivos $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$, $\overline{O}\,\overline{\overline{Y}}$ e $\overline{O}\,\overline{\overline{Z}}$ tem a mesma direção e o mesmo sentido dos vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$, respectivamente,

$$(x,y,z) = \overline{\overline{x}}\overrightarrow{v_1} + \overline{\overline{x}}\overrightarrow{v_2} + \overline{\overline{z}}\overrightarrow{v_3} + C, \tag{5}$$

e a hipérbole é dada por:

$$\overline{\overline{\mathcal{H}}} : \begin{cases} \dfrac{\overline{\overline{x}}^2}{2} - \dfrac{\overline{\overline{y}}^2}{6} = 1 \\ \overline{\overline{z}} = 0\,. \end{cases}$$

Então,

$$\overline{\overline{r}}^{\pm} : \begin{cases} \overline{\overline{y}} = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\,\overline{\overline{x}} = \pm\sqrt{3}\,\overline{\overline{x}} \\ \overline{\overline{z}} = 0\,, \end{cases}$$

são as assíntotas de $\mathcal{H}$, que podem ser parametrizadas da seguinte maneira:

$$\overline{\overline{r}}^{\pm} : \begin{cases} \overline{\overline{x}}(t) = t \\ \overline{\overline{y}}(t) = \pm\sqrt{3}\,t\,; \quad t \in \mathbb{R}\,. \\ \overline{\overline{z}}(t) = 0 \end{cases}$$

Logo, por (5),

$$\begin{aligned} (x(t), y(t), z(t)) &= t\,\overrightarrow{v_1} \pm \sqrt{3}\,t\,\overrightarrow{v_2} + C \\ &= t\,\frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{3}\,t\,\frac{(-1,2,-1)}{\sqrt{6}} + (1,0,0) \\ &= \frac{t}{\sqrt{2}}(1,0,-1) \pm \frac{t}{\sqrt{2}}(-1,2,-1) + (1,0,0)\,, \end{aligned}$$

onde $t \in \mathbb{R}$, são parametrizações das assíntotas $r^{\pm}$.

Ou seja,

$$r^+ : \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = \dfrac{2}{\sqrt{2}}\,t = \sqrt{2}\,t \\ z(t) = -\dfrac{2}{\sqrt{2}}\,t = -\sqrt{2}\,t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \text{e} \qquad r^- : \begin{cases} x(t) = \dfrac{2}{\sqrt{2}}\,t + 1 = \sqrt{2}\,t + 1 \\ y(t) = -\dfrac{2}{\sqrt{2}}\,t = -\sqrt{2}\,t \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R},$$

são as equações paramétricas de r^+ e r^-. $\square$

(D) Parametrização da parábola $\mathcal{P}$ de vértice $V = (x_0, y_0, z_0)$ contida no plano $\pi : ax + by + cz = d$

Seja $\overrightarrow{u}$ um vetor não-nulo paralelo à reta-focal da parábola.

Tomando $\overline{O} = C$, $\overrightarrow{v_1} = \dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$, $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_3} \times \overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_3} = \dfrac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, obtemos um novo sistema de eixos ortogonais, no qual $\overline{O} = V$ e os semi-eixos positivos $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$, $\overline{O}\,\overline{\overline{Y}}$ e $\overline{O}\,\overline{\overline{Z}}$ têm a mesma direção e sentido dos vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$, respectivamente.

Nesse novo sistema de eixos, a parábola está contida no plano $\overline{\overline{z}} = 0$, tem vértice na origem e reta-focal igual ao eixo$-\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$, ou seja,

$$\overline{\overline{\mathcal{P}}} : \begin{cases} \overline{\overline{y}}^2 = \pm 4p\,\overline{\overline{x}} \\ \overline{\overline{z}} = 0\,. \end{cases}$$

Então,

$$\overline{\overline{\mathcal{P}}} : \begin{cases} \overline{\overline{x}}(t) = \pm\dfrac{t^2}{4p} \\ \overline{\overline{y}}(t) = t \\ \overline{\overline{z}}(t) = 0 \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

é uma parametrização da parábola nas coordenadas $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{y}}$ e $\overline{\overline{z}}$.

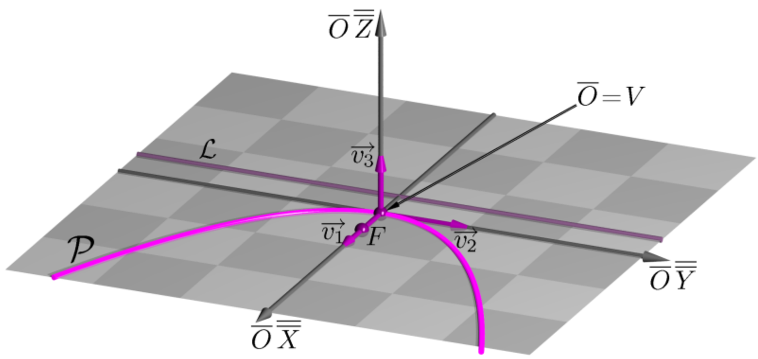

Fig. 7: Parábola $\mathcal{P}$

Logo, sendo

$$(x,y,z) = \overline{\overline{x}}\,\overrightarrow{v_1} + \overline{\overline{y}}\,\overrightarrow{v_2} + \overline{\overline{z}}\,\overrightarrow{v_3} + V\,,$$

temos que:

$$(x(t), y(t), z(t)) = \pm\frac{t^2}{4p}\,\overrightarrow{v_1} + t\,\overrightarrow{v_2} + V; \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização de $\mathcal{P}$ nas coordenadas x, y e z.

Exemplo 7

Seja $\mathcal{P}$ uma parábola contida no plano $\pi : x - 2y + z = 1$, com vértice no ponto $V = (2,1,1)$ e foco no ponto $F = (0,0,1)$.

(a) *Determine uma paramatrização da parábola $\mathcal{P}$.*

Solução.

Sabendo que o vetor $\overrightarrow{VF} = (-2,-1,0)$ é paralelo à reta-focal, tomaremos $\overrightarrow{v_1} = \dfrac{\overrightarrow{VF}}{\|\overrightarrow{VF}\|} = \dfrac{(-2,-1,0)}{\sqrt{5}}$, $\overrightarrow{v_3} = \dfrac{(1,-2,1)}{\sqrt{6}} \perp \pi$ e $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_3} \times \overrightarrow{v_1} = \dfrac{(1,-2,-5)}{\sqrt{30}}$.

No sistema $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}}\,\overline{\overline{Z}}$ de eixos ortogonais $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$, $\overline{O}\,\overline{\overline{Y}}$ e $\overline{O}\,\overline{\overline{Z}}$, de mesma direção e mesmo sentido dos vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$, respectivamente, onde $\overline{O} = V$, a parábola está contida no plano $\overline{\overline{z}} = 0$, tem vértice na origem e reta-focal igual ao eixo$-\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$.

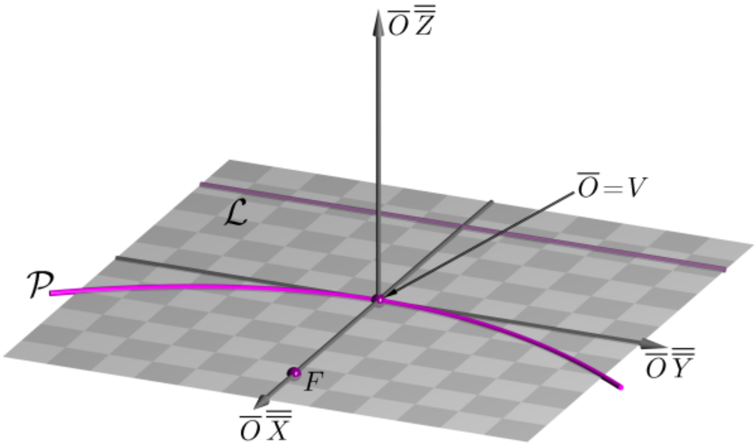

Fig. 8: Parábola com $p = \sqrt{5}$

Além disso, como $p = d(V, F) = \sqrt{5}$ e o ponto F se encontra à direita do ponto V no eixo$-\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$, a parábola, nas coordenadas $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{y}}$ e $\overline{\overline{z}}$, é dada por:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \overline{\overline{y}}^2 = 4\sqrt{5}\,\overline{\overline{x}} \\ \overline{\overline{z}} = 0\,. \end{cases}$$

Então, sendo

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \overline{\overline{x}}(t) = \dfrac{t^2}{4\sqrt{5}} \\ \overline{\overline{y}}(t) = t \\ \overline{\overline{z}}(t) = 0 \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

uma parametrização da parábola nas coordenadas $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{y}}$ e $\overline{\overline{z}}$, obtemos que:

$$(x(t), y(t), z(t)) = \frac{t^2}{4\sqrt{5}}\overrightarrow{v_1} + t\,\overrightarrow{v_2} + V\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização de $\mathcal{P}$ nas coordenadas x, y e z.

Ou seja,

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x(t) = -\dfrac{t^2}{10} + \dfrac{2t}{\sqrt{30}} + 2 \\ y(t) = -\dfrac{t^2}{20} - \dfrac{2t}{\sqrt{30}} + 1 \\ z(t) = -\dfrac{5t}{\sqrt{30}} + 1 \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

são as equações paramétricas de $\mathcal{P}$.

(b) *Determine equações paramétricas da diretriz $\mathcal{L}$ da parábola.*

Solução.

Sabemos que no sistema de eixos ortogonais $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}}\,\overline{\overline{Z}}$ a diretriz é dada por:

$$\mathcal{L} : \begin{cases} \overline{\overline{x}} = -\sqrt{5} \\ \overline{\overline{z}} = 0 \end{cases} .$$

Então, como

$$\begin{cases} \overline{x}(t) = -\sqrt{5} \\ \overline{y}(t) = t \qquad ; \quad t \in \mathbb{R}\,, \\ \overline{z}(t) = 0 \end{cases}$$

é uma parametrização da diretriz nas coordenadas $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{y}}$ e $\overline{\overline{z}}$, vemos que

$$(x(t), y(t), z(t)) = -\sqrt{5}\,\overrightarrow{v_1} + t\,\overrightarrow{v_2} + V \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização de $\mathcal{L}$ nas coordenadas x, y e z.

Ou seja,

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x(t) = 2 + \dfrac{t}{\sqrt{30}} + 2 \\ y(t) = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{30}}t + 1 \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,, \\ z(t) = -\dfrac{5}{\sqrt{30}}t + 1 \end{cases}$$

são equações paramétricas da reta diretriz. □