

Aula 3

Parametrização de algumas curvas planas

Nesta aula veremos como obter equações paramétricas de algumas curvas planas, usando relações trigonométricas básicas e observando as condições que um ponto deve satisfazer para pertencer a uma curva dada.

I. A Bruxa de Agnesi.

Seja \mathcal{C} um círculo de raio r tangente a duas retas paralelas s_1 e s_2 . Sejam O e A os pontos de tangência de \mathcal{C} com s_1 e s_2 , respectivamente. Do ponto O tracemos uma semi-reta em direção à reta s_2 . Denotemos R e Q os pontos de interseção desta semi-reta com o \mathcal{C} e s_2 , respectivamente. Tracemos o segmento QD perpendicular a s_1 , e a reta s paralela a s_1 passando por R (veja a Figura 1).

Seja P o ponto de interseção da reta s com o segmento QD . Os pontos P assim obtidos, traçando todas as semi-retas que partem de O e intersectam \mathcal{C} , descrevem a curva denominada **bruxa de Agnesi**. Para obtermos as equações paramétricas da bruxa de Agnesi, admitamos que s_1 seja o eixo $-OX$, $s_2 : y = 2r$, O seja a origem do sistema de coordenadas e $A = (0, 2r)$ (Figura 1).

O nosso problema consiste em determinar as coordenadas dos pontos $P = (x, y)$ da bruxa de Agnesi em função de apenas um parâmetro.

Denotando t a medida do ângulo \widehat{DOQ} , obtemos:

$$x = |OD| = |OQ| \cos t \quad \text{e} \quad y = |RB| = |OR| \sin t, \quad (1)$$

onde B é a projeção de R sobre o eixo $-OX$.

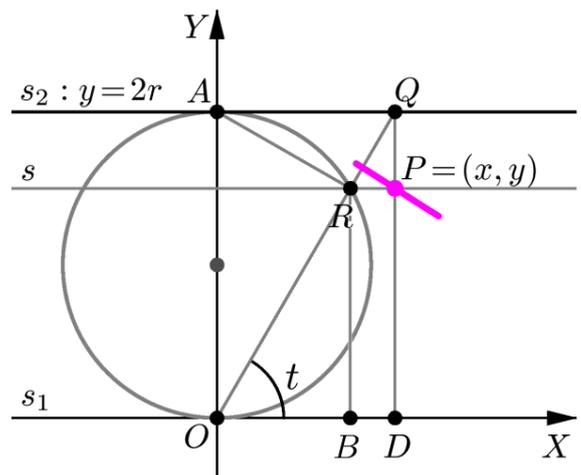


Fig. 1: Construção da bruxa de Agnesi.

Note que os triângulos ORA (inscrito em um semicírculo de C) e ODQ são retângulos. No primeiro, \widehat{ORA} é o ângulo reto, a medida de \widehat{OAR} é t e, portanto, $|OR| = 2r \operatorname{sen} t$. No triângulo ODQ , temos $|QD| = 2r$. Logo $|OQ| \operatorname{sen} t = 2r$, ou seja, $|OQ| = \frac{2r}{\operatorname{sen} t}$.

Substituindo essas relações em (1), obtemos:

$$x = |OD| = \frac{2r \cos t}{\operatorname{sen} t} = 2r \operatorname{cotg} t \quad \text{e} \quad y = |RB| = 2r \operatorname{sen}^2 t. \tag{2}$$

Ou seja, as equações paramétricas da bruxa de Agnesi são:

$$\begin{cases} x = 2r \operatorname{cotg} t \\ y = 2r \operatorname{sen}^2 t \end{cases} \quad t \in (0, \pi),$$

e seu traço é mostrado na figura 2:

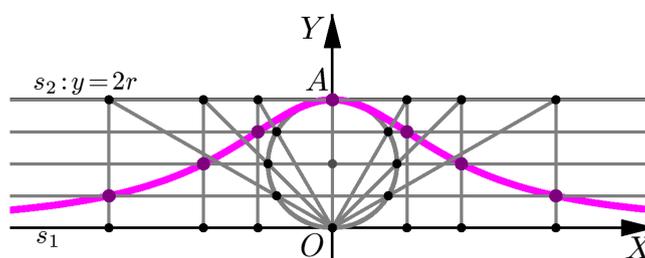


Fig. 2: Bruxa de Agnesi.

II. Ciclóides e Trocóides.

Definição 1

Sejam C um círculo de raio r , s uma reta e P um ponto de C . Denominamos **ciclóide** à curva descrita pelo ponto P quando C rola sobre a reta s , sem deslizar.

Para obtermos as equações paramétricas da ciclóide, admitamos que:

- a reta s é o eixo $-OX$;
- o círculo C inicia o movimento com centro no ponto $(0, r)$;
- o ponto P coincide com a origem do sistema de coordenadas no início do movimento.

Tracemos dois círculos: C_1 , representando C em sua posição inicial, e C_2 , representando C após ter rolado alguns instantes.

Veja, na Figura 3, a designação dos seguintes elementos:

- sejam O_1 e O_2 os centros de C_1 e C_2 , respectivamente;
- $P = (x, y)$ o ponto da ciclóide em C_2 ;
- A o ponto em que C_2 toca o eixo $-OX$;

- $Q = (x, 0)$ e $T = (0, y)$ as projeções ortogonais de P sobre os eixos OX e OY , respectivamente;
- M e N as projeções ortogonais de P sobre O_2O_1 e O_2A .
- t a medida do ângulo $\widehat{AO_2P}$, tomada em radianos.

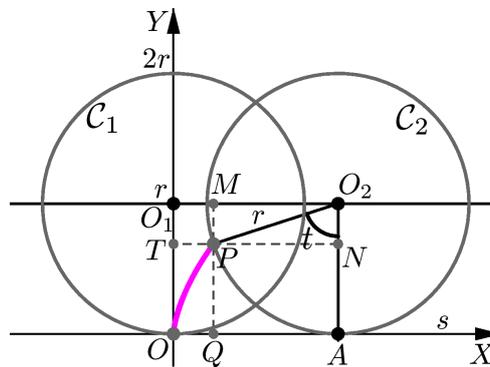


Fig. 3: Desenvolvimento da cicloide.

Note que o segmento OA tem o mesmo comprimento que o arco de A a P sobre o círculo C_2 , que consiste dos pontos que já fizeram contato com a reta s .

Como t é a medida de $\widehat{AO_2P}$, o comprimento do arco de C_2 de A a P que já fez contato com s é rt . Logo $|OA| = rt$.

Analisando o sinal de $\sin t$ e $\cos t$ nos intervalos $[0, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ e $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, vemos que as coordenadas x e y de P são determinadas por meio das seguintes relações:

$$\begin{aligned} x &= |OQ| = |OA| - |QA| = |OA| - |O_2M| = rt - r \sin t, \\ y &= |OT| = |OO_1| - |TO_1| = r - |O_2N| = r - r \cos t. \end{aligned}$$

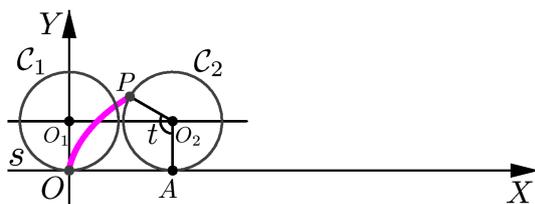
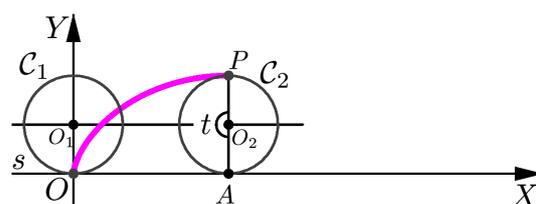
Obtemos, assim, as seguintes equações paramétricas da cicloide:

$$\begin{cases} x = rt - r \sin t \\ y = r - r \cos t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Observação 1

- para $t = 0$, o ponto P está na sua posição inicial;
- para $t = \pi$, P dista $2r$ do eixo- OX ;
- para $t = 2\pi$, o círculo dá um giro completo e o ponto P volta a tocar o eixo- OX .

Veja como é feito o movimento na seqüência de figuras abaixo.

Fig. 4: $t = \frac{2\pi}{3}$.Fig. 5: $t = \pi$.

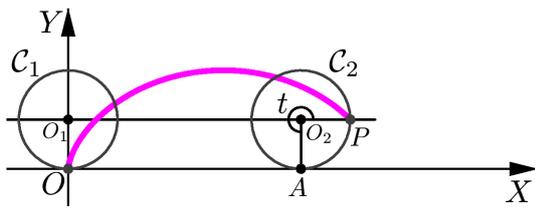


Fig. 6: $t = \frac{3\pi}{2}$.

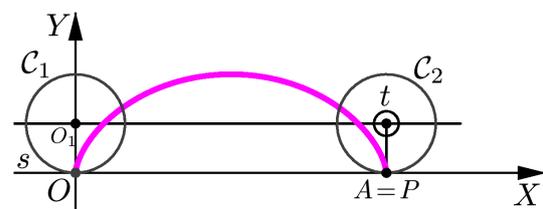


Fig. 7: $t = 2\pi$.

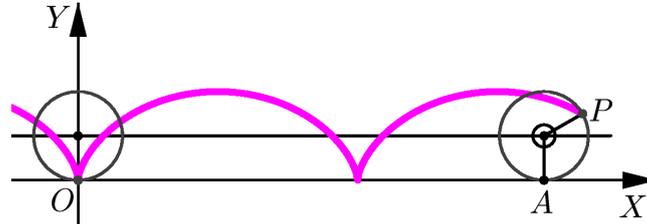


Fig. 8: Ciclóide.

A ciclóide pertence a uma classe mais ampla de curvas rolantes, denominadas **trocóides**.

Definição 2

Seja C um círculo de centro C e raio r , e seja s uma reta. Consideremos uma semi-reta radial CB e um ponto P nessa semi-reta.

Uma **trocóide** é o lugar geométrico descrito pelo ponto P quando C rola sobre a reta s sem deslizar.

A trocóide é denominada:

- **ciclóide longa** quando P é exterior a C (isto é, $R = d(P, C) > r$),

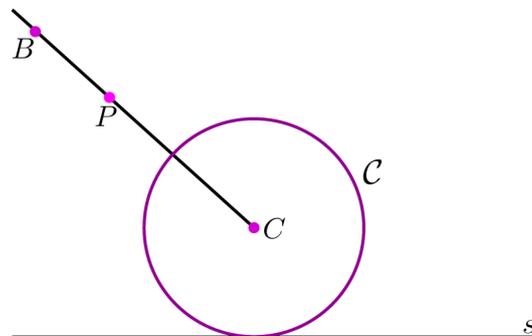


Fig. 9: Caso $R > r$.

- **ciclóide** quando P pertence a C (isto é, $R = d(P, C) = r$),

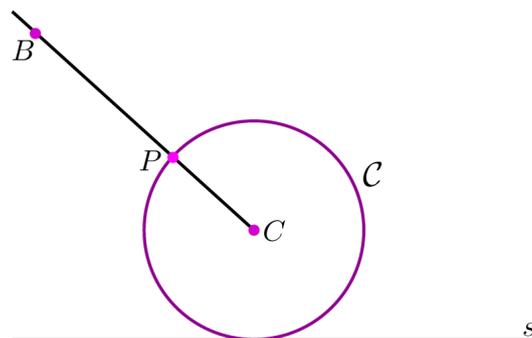


Fig. 10: Caso $R = r$.

- **ciclóide curta** quando P é interior a C (isto é, $R = d(P, C) < r$).

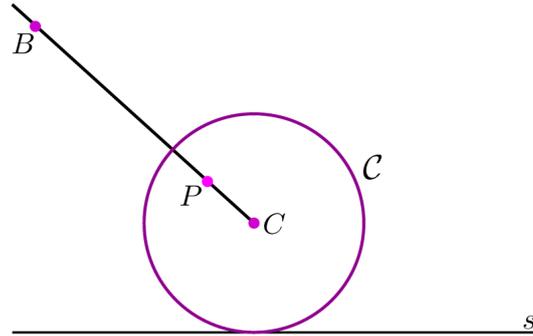


Fig. 11: Caso $R < r$.

O procedimento para obter equações paramétricas da ciclóide curta e da ciclóide longa é análogo ao caso da ciclóide que analisamos anteriormente.

Vamos supor que o círculo C tem centro $C = (0, r)$, raio r e rola sobre a reta $s =$ eixo $-OX$. Acompanhe nas Figuras 12 e 13 a designação dos seguintes elementos: C_1 e C_2 círculos de centros $O_1 = C$ e O_2 , representando C no início do movimento e após transcorrido um instante t , respectivamente; $P = (x, y)$ o ponto rolante que descreve a trocóide partindo da posição $(0, r - R)$, no instante $t = 0$; A o ponto de contato do círculo C_2 com a reta s ; Q e T as projeções de P sobre os eixos OX e OY ; M a projeção de P sobre a reta $y = r$ que contém os centros O_1 e O_2 , e N a projeção de P sobre a reta O_2A .

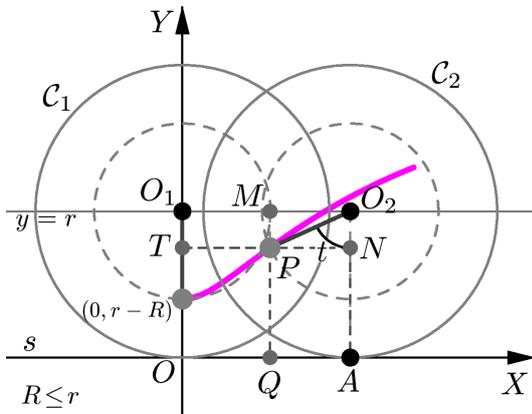


Fig. 12: Ciclóide curta.

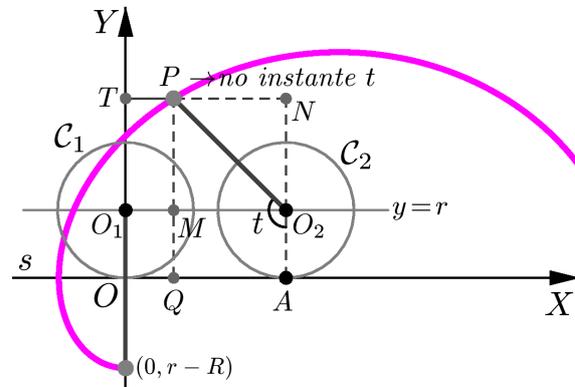


Fig. 13: Ciclóide longa.

Como no caso da ciclóide, temos:

$$\begin{aligned} x &= |OQ| = |OA| \pm |QA| = rt \pm |O_2M|, \\ y &= |OT| = |OO_1| \pm |TO_1| = r \pm |O_2N|, \end{aligned}$$

onde $|O_2M| = R|\text{sen } t|$, $|O_2N| = R|\text{cos } t|$ e o sinal é escolhido segundo a posição de P em relação a O_2 . Isto depende em qual dos intervalos $[0, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ ou $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ está o valor t . Em qualquer caso, você pode verificar que as curvas trocóides têm equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = rt - R \text{sen } t \\ y = r - R \text{cos } t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

sendo a trocóide uma ciclóide curta, uma ciclóide ou uma ciclóide longa segundo seja $R < r$, $R = r$ ou $R > r$, respectivamente.

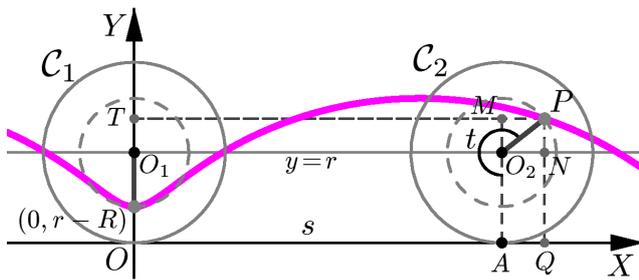


Fig. 14: Ciclóide curta.

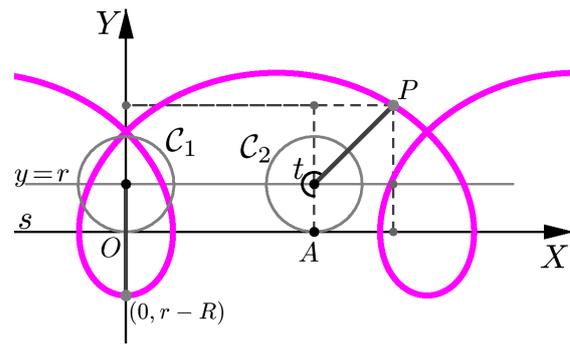


Fig. 15: Ciclóide longa.

Nas Figuras 14 e 15, mostramos a ciclóide curta e a ciclóide longa traçadas em intervalos maiores. Na Figura 16, vemos os três tipos de trocóides.

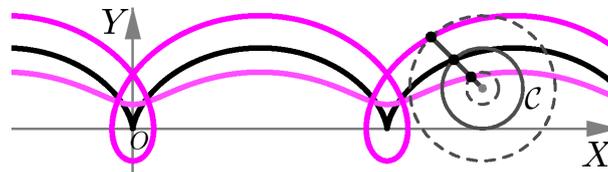


Fig. 16: Trocóides.

III. A Epiciclóide e a Hipociclóide.

Definição 3

Consideremos dois círculos, Γ e C , de raios R e r , respectivamente, tais que:

- Γ e C se tocam apenas em um ponto P ,
- os pontos de C , diferentes de P , estão no exterior de Γ .

Denominamos **epiciclóide** o lugar geométrico descrito pelo ponto P quando C rola sobre Γ , sem deslizar.

Para obtermos as equações paramétricas da epiciclóide, admitamos Γ com centro na origem, C com centro no ponto $(R + r, 0)$ e que a posição inicial de P seja $P_1 = (R, 0)$.

Nas Figuras 17 e 18, mostramos o círculo C após ter rolado alguns instantes sobre o círculo Γ . Acompanhe, nessas figuras, a designação dos seguintes elementos: $P = (x, y)$ o ponto da epiciclóide que, estando inicialmente na posição P_1 , descreve o arco P_1P quando C rola um ângulo de medida θ sobre Γ ; A o ponto de contato entre os círculos; O_2 o centro de C ; B e D as projeções de O_2 sobre os eixos OX e OY , respectivamente; $Q = (x, 0)$ e $T = (0, y)$ as projeções de P sobre OX e OY ; M e N , as projeções de P sobre as retas O_2D e O_2B , e t o ângulo $\widehat{AO_2P}$ descrito pelo ponto P com respeito à semi-reta radial OO_2 .

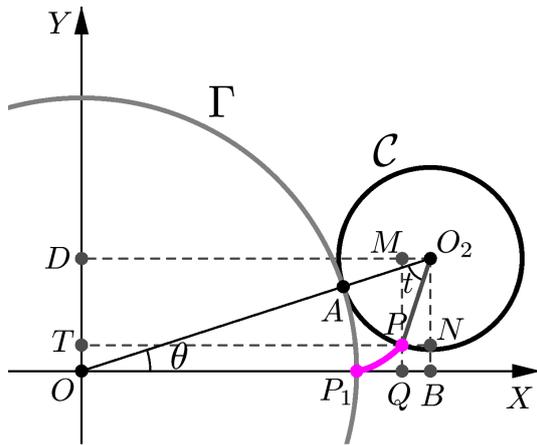


Fig. 17: P descreve uma epiciclóide.

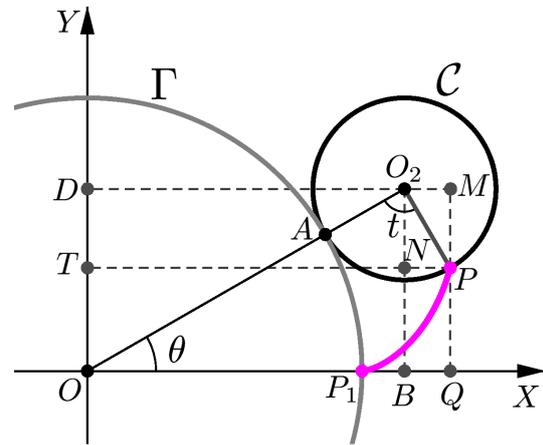


Fig. 18: P continuando o movimento.

O nosso problema consiste em descrever as coordenadas do ponto P em termos de um parâmetro.

Nas figuras acima, vemos que as posições entre Q e B variam de acordo com a posição do ponto P. Isto é, de acordo com a medida t do ângulo $\widehat{AO_2P}$.

No caso em que Q está entre O e B, temos:

$$\begin{aligned} x &= |OQ| = |OB| - |QB| = |OB| - |O_2M|, \\ y &= |OT| = |OD| - |TD| = |OD| - |O_2N|. \end{aligned} \quad (3)$$

Note que, enquanto C rola sobre Γ , seu centro descreve um círculo centrado em O e de raio $R + r$. Sendo θ a medida do ângulo do semi-eixo OX positivo para a semi-reta OO_2 (medido no sentido anti-horário), obtemos:

$$|OB| = (R + r)\cos\theta \quad \text{e} \quad |OD| = (R + r)\sen\theta. \quad (4)$$

Sendo t a medida do ângulo de O_2A para O_2P , no sentido anti-horário, vemos que:

$$\widehat{NO_2P} = \widehat{OO_2B} - \widehat{AO_2P} = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - t = \frac{\pi}{2} - (\theta + t).$$

Portanto, no triângulo-retângulo PNO_2 , temos:

$$\begin{aligned} |O_2M| &= r \sen(\widehat{NO_2P}) = r \sen\left(\frac{\pi}{2} - (\theta + t)\right) = r \cos(\theta + t), \\ |O_2N| &= r \cos(\widehat{NO_2P}) = r \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\theta + t)\right) = r \sen(\theta + t). \end{aligned} \quad (5)$$

Substituindo as identidades (4) e (5) em (3), obtemos:

$$\begin{aligned} x &= (R + r)\cos\theta - r\cos(\theta + t), \\ y &= (R + r)\sen\theta - r\sen(\theta + t). \end{aligned} \quad (6)$$

Mas ainda resta um problema: as expressões das coordenadas x e y estão dadas em função de duas variáveis θ e t . Vamos resolver isto.

Observe que o comprimento do arco de A a P , ao longo de \mathcal{C} , é igual ao comprimento do arco de P_1 a A sobre o círculo Γ (lembre que \mathcal{C} rola sobre Γ). Como a medida do primeiro arco é rt e a medida do segundo é $R\theta$, então $rt = R\theta$, isto é, $t = \frac{R\theta}{r}$.

Logo, substituindo $t = \frac{R\theta}{r}$ em (6), obtemos as seguintes equações paramétricas da epicyclóide, em função apenas do parâmetro θ :

$$\begin{aligned} x &= (R + r) \cos \theta - r \cos\left(\theta + \frac{R\theta}{r}\right) = (R + r) \cos \theta - r \cos\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right), \\ y &= (R + r) \sin \theta - r \sin\left(\theta + \frac{R\theta}{r}\right) = (R + r) \sin \theta - r \sin\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Resta verificar o caso em que B está entre O e Q (Figura 18).

No triângulo NPO_2 , (Figura 18), temos $\widehat{NO_2P} = t - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = (\theta + t) - \frac{\pi}{2}$. Portanto:

$$\begin{aligned} |O_2M| &= r \sin\left((\theta + t) - \frac{\pi}{2}\right) = -r \cos(\theta + t), \\ |O_2N| &= r \cos\left((\theta + t) - \frac{\pi}{2}\right) = r \sin(\theta + t). \end{aligned}$$

Sendo que:

$$\begin{aligned} x &= |OQ| = |OB| + |QB| = |OB| + |O_2M|, \\ y &= |OT| = |OD| - |TD| = |OD| - |O_2N|, \end{aligned}$$

obtemos as mesmas equações paramétricas do caso anterior.

Assim, quando \mathcal{C} rola sobre Γ , as coordenadas do ponto P satisfazem as equações (7), independentemente da posição de P .

Conclusão: as equações paramétricas da epicyclóide são:

$$\begin{cases} x = (R + r) \cos \theta - r \cos\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right) \\ y = (R + r) \sin \theta - r \sin\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right) \end{cases}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Observe que, quando \mathcal{C} percorre um arco de Γ de comprimento igual a $2\pi r$, o ponto P volta a tocar Γ .

Portanto, se $\frac{R}{r} = n$, onde $n \in \mathbb{N}$, então o ponto P toca Γ n vezes e a n -ésima vez coincide com sua posição inicial.

Para verificar isto, basta observar que o comprimento de Γ contém n vezes o comprimento de \mathcal{C} , pois $2\pi R = 2\pi(nr) = n(2\pi r)$.

A Cardióide é a epicyclóide com $r = R$ e, portanto, $\theta = t$:

$$\begin{cases} x = 2r \cos \theta - r \cos(2\theta) \\ y = 2r \sin \theta - r \sin(2\theta) \end{cases}$$

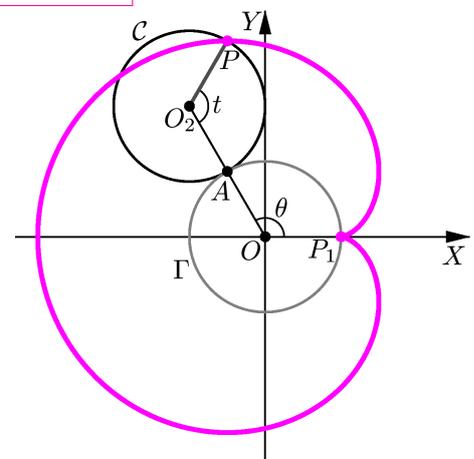


Fig. 19: $r = R$: Cardióide.

Nas figuras abaixo, mostramos várias epicyclóides, indicando os valores de r e R , assim como

suas equações paramétricas.

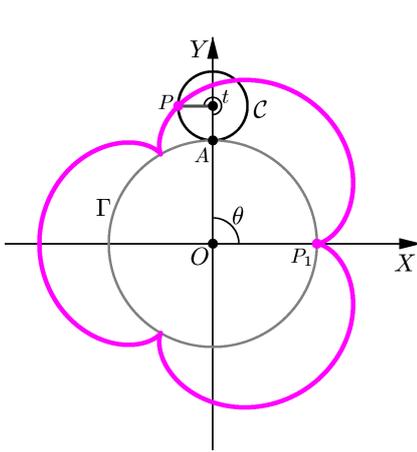


Fig. 20: $r = \frac{1}{2}, R = \frac{3}{2}$.

$$\begin{cases} x = 2 \cos \theta - \frac{1}{2} \cos(4\theta) \\ y = 2 \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(4\theta) \end{cases}$$

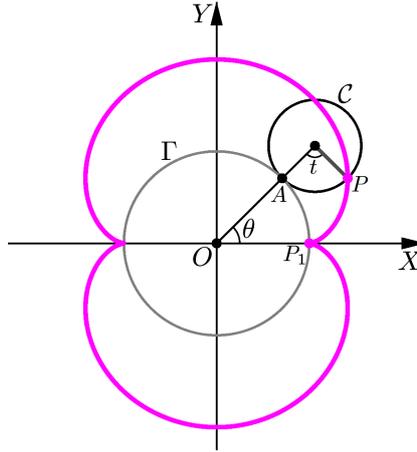


Fig. 21: $r = \frac{2}{3}, R = \frac{4}{3}$.

$$\begin{cases} x = 2 \cos \theta - \frac{2}{3} \cos(3\theta) \\ y = 2 \operatorname{sen} \theta - \frac{2}{3} \operatorname{sen}(3\theta) \end{cases}$$

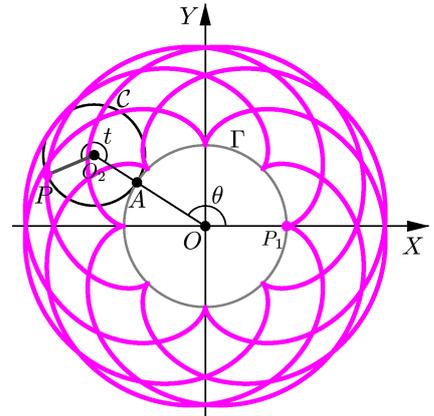


Fig. 22: $r = 5, R = 8$.

$$\begin{cases} x = 13 \cos \theta - 5 \cos(\frac{13}{5} \theta) \\ y = 13 \operatorname{sen} \theta - 5 \operatorname{sen}(\frac{13}{5} \theta) \end{cases}$$

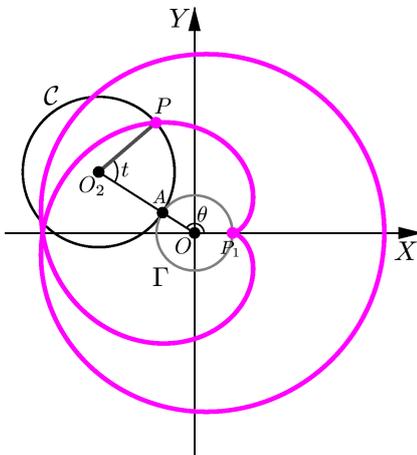


Fig. 23: $r = 2, R = 1$.

$$\begin{cases} x = 3 \cos \theta - 2 \cos(\frac{3}{2} \theta) \\ y = 3 \operatorname{sen} \theta - 2 \operatorname{sen}(\frac{3}{2} \theta) \end{cases}$$

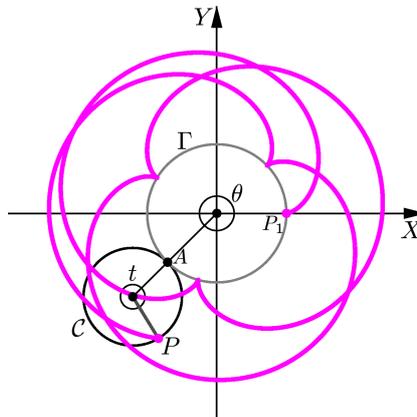


Fig. 24: $r = \sqrt{2}, R = 2$.

$$\begin{cases} x = (2 + \sqrt{2}) \cos \theta - \sqrt{2} \cos(\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \theta) \\ y = (2 + \sqrt{2}) \operatorname{sen} \theta - \sqrt{2} \operatorname{sen}(\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \theta) \end{cases}$$

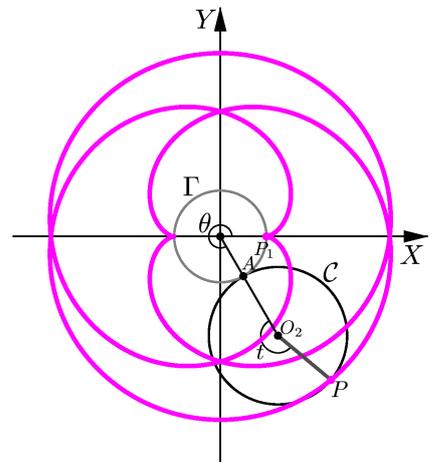


Fig. 25: $r = 3, R = 2$.

$$\begin{cases} x = 5 \cos \theta - 3 \cos(\frac{5}{3} \theta) \\ y = 5 \operatorname{sen} \theta - 3 \operatorname{sen}(\frac{5}{3} \theta) \end{cases}$$

Outra classe de curvas rolantes análoga à epiciclóide é a seguinte.

Definição 4

Consideremos dois círculos Γ e C de raios R e r , respectivamente, tais que:

- $r < R$,
- Γ e C se tocam apenas em um ponto P ,
- os pontos de C , diferentes de P , estão no interior de Γ .

Denominamos **hipociclóide** o lugar geométrico descrito pelo ponto P , quando C rola sobre Γ , sem deslizar, mantendo todos os seus pontos na região limitada por Γ .

Para obtermos as equações paramétricas da hipociclóide, vamos admitir Γ com centro na origem, C iniciando o movimento com centro no ponto $(R-r, 0)$ e P com posição inicial $P_1 = (R, 0)$.

Determinemos as coordenadas do ponto $P = (x, y)$ em termos de um parâmetro, quando C rola sobre Γ sem deslizar.

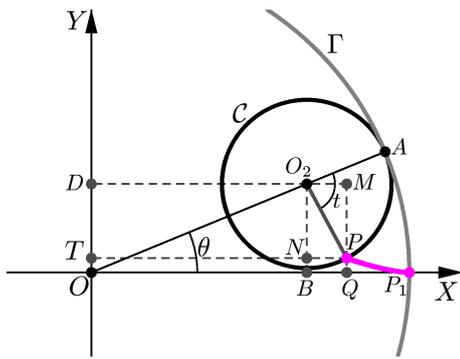


Fig. 26: P descrevendo uma hipociclóide.

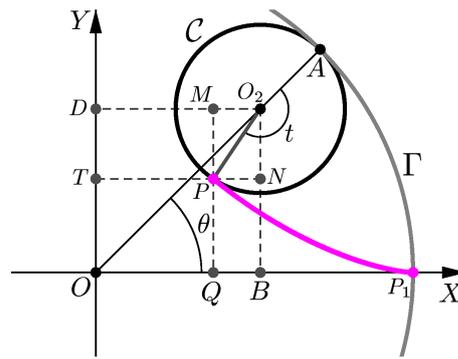


Fig. 27: P continuando o movimento.

Acompanhe, nas Figuras 26 e 27, a designação dos seguintes elementos: A é o ponto de C que toca Γ ; O_2 o centro de C ; B e D as projeções de O_2 sobre os eixos OX e OY ; $Q = (x, 0)$ e $T = (0, y)$ as projeções de P sobre OX e OY ; M e N as projeções de P sobre O_2D e O_2B , respectivamente.

Com essas notações, considerando o caso em que B está entre O e Q , mostrado na Figura 26, temos:

$$\begin{aligned} x &= |OQ| = |OB| + |QB| = |OB| + |O_2M|, \\ y &= |OT| = |OD| - |TD| = |OD| - |O_2N|. \end{aligned} \tag{8}$$

Sabendo que o centro de C descreve um círculo de raio $R - r$, e sendo θ a medida do ângulo do semi-eixo OX positivo para OO_2 , no sentido anti-horário, obtemos:

$$|OB| = (R - r) \cos \theta \quad \text{e} \quad |OD| = (R - r) \sin \theta.$$

Denotando t a medida do ângulo de O_2A para O_2P , no sentido horário, temos:

$$\widehat{OO_2P} = \pi - t \quad \text{e} \quad \widehat{OO_2P} - \widehat{NO_2P} = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Logo,

$$\widehat{NO_2P} = -\frac{\pi}{2} + \theta + \widehat{OO_2P} = -\frac{\pi}{2} + \theta + (\pi - t) = (\theta - t) + \frac{\pi}{2}.$$

Portanto, no triângulo-retângulo PNO_2 , temos:

$$\begin{aligned} |O_2M| &= r \operatorname{sen}(\widehat{NO_2P}) = r \operatorname{sen}\left((\theta - t) + \frac{\pi}{2}\right) = r \cos(\theta - t) = r \cos(t - \theta), \\ |O_2N| &= r \cos(\widehat{NO_2P}) = r \cos\left((\theta - t) + \frac{\pi}{2}\right) = -r \operatorname{sen}(\theta - t) = r \operatorname{sen}(t - \theta). \end{aligned}$$

Substituindo essas identidades nas relações (8) e usando o fato de que $t = \frac{R\theta}{r}$, obtemos as seguintes equações paramétricas da hipociclóide:

$$\begin{cases} x = (R - r) \cos \theta + r \cos\left(\left(\frac{R-r}{r}\right)\theta\right) \\ y = (R - r) \sin \theta - r \operatorname{sen}\left(\left(\frac{R-r}{r}\right)\theta\right) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Procure verificar que as mesmas equações paramétricas são obtidas quando P está em outras posições com respeito ao centro O_2 .

Hipociclóide degenerada. O segmento que liga os pontos $(R, 0)$ e $(-R, 0)$ é também uma hipociclóide. De fato, a hipociclóide tal que $r = \frac{R}{2}$, tem equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2r \cos \theta \\ y = 0 \end{cases} ; \theta \in \mathbb{R},$$

e o seu lugar geométrico é mostrado na figura 28.

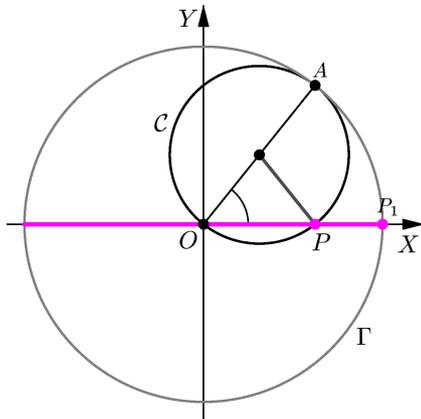


Fig. 28: $r = \frac{R}{2}$.

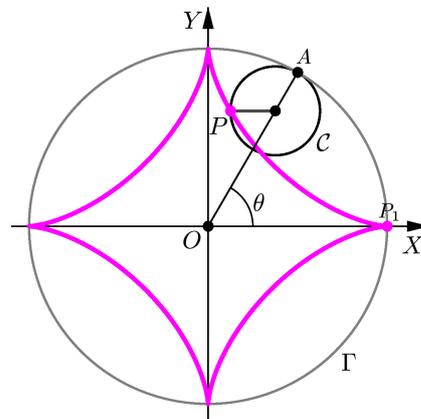


Fig. 29: Astróide.

A astróide, também chamada *tetracúspide*, *cubociclóide* ou *paraciclo*, é a hipociclóide obtida quando $r = \frac{R}{4}$. Suas equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = 3r \cos \theta + r \cos(3\theta) \\ y = 3r \sin \theta - r \sin(3\theta) \end{cases} ; \theta \in \mathbb{R},$$

e seu lugar geométrico é mostrado na figura 29

Nas figuras abaixo, mostramos algumas hipociclóides, indicando os valores de r e R e suas equações paramétricas:

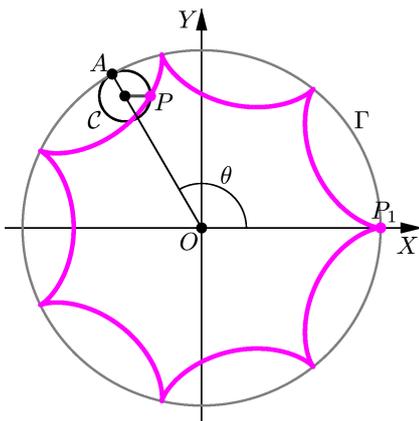


Fig. 30: $r = \frac{3}{7}, R = 3$.

$$\begin{cases} x = \frac{18}{7} \cos \theta + \frac{3}{7} \cos(6\theta) \\ y = \frac{18}{7} \sin \theta - \frac{3}{7} \sin(6\theta) \end{cases}$$

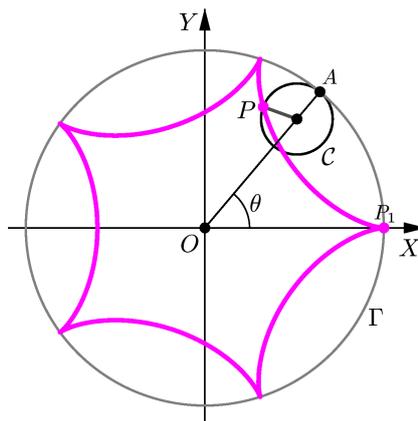


Fig. 31: $r = \frac{3}{5}, R = 3$.

$$\begin{cases} x = \frac{12}{5} \cos \theta + \frac{3}{5} \cos(4\theta) \\ y = \frac{12}{5} \sin \theta - \frac{3}{5} \sin(4\theta) \end{cases}$$

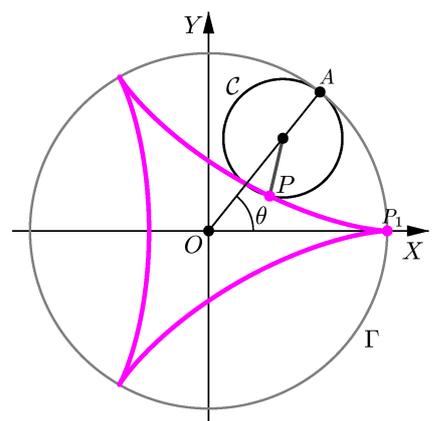


Fig. 32: Deltóide: $r = 1, R = 3$

$$\begin{cases} x = 2 \cos \theta + \cos(2\theta) \\ y = 2 \sin \theta - \sin(2\theta) \end{cases}$$

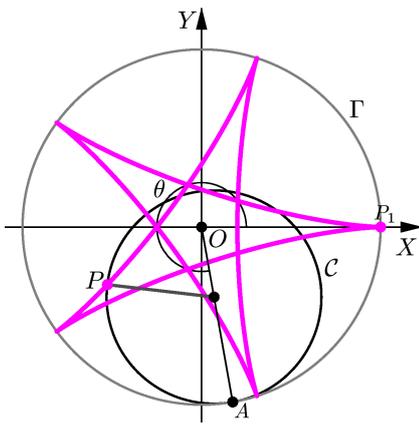


Fig. 33: $r = \frac{2}{5}$, $R = 3$.

$$\begin{cases} x = \frac{6}{5} \cos \theta + \frac{2}{5} \cos(\frac{2}{3} \theta) \\ y = \frac{6}{5} \sin \theta - \frac{2}{5} \sin(\frac{2}{3} \theta) \end{cases}$$

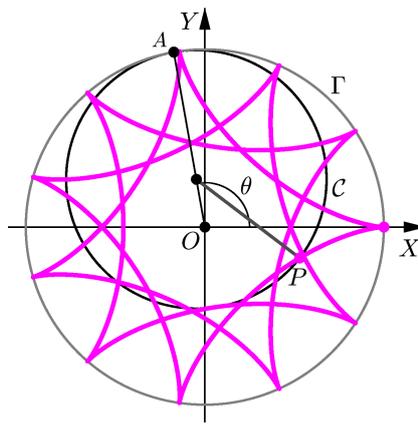


Fig. 34: $r = \frac{24}{11}$, $R = 3$.

$$\begin{cases} x = \frac{9}{11} \cos \theta + \frac{24}{11} \cos(\frac{3}{8} \theta) \\ y = \frac{9}{11} \sin \theta - \frac{24}{11} \sin(\frac{3}{8} \theta) \end{cases}$$

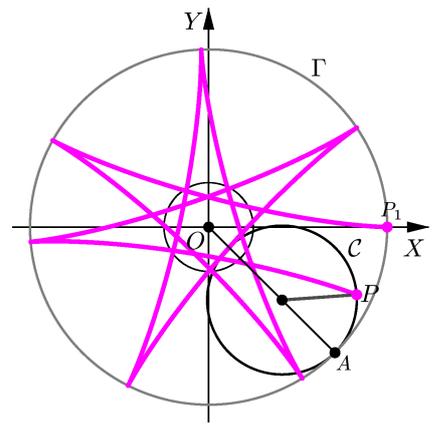


Fig. 35: $r = \frac{2\pi}{5}$, $R = 3$.

$$\begin{cases} x = \frac{15-2\pi}{5} \cos \theta + \frac{2\pi}{5} \cos(\frac{15-2\pi}{2\pi} \theta) \\ y = \frac{15-2\pi}{5} \sin \theta - \frac{2\pi}{5} \sin(\frac{15-2\pi}{2\pi} \theta) \end{cases}$$

- Podemos também obter uma equação paramétrica de uma curva a partir de sua equação cartesiana, ou vice-versa. Mas, como no caso das curvas definidas geometricamente, não existe uma regra geral para obter a equação paramétrica.

IV. O Fólium de Descartes.

A curva chamada *Fólium de Descartes* é a curva cuja equação cartesiana é:

$$C : x^3 + y^3 = 3axy, \quad \text{onde } a > 0. \tag{9}$$

Para fazermos um esboço detalhado desta curva, vamos primeiro parametrizá-la. Para isso, introduzimos o parâmetro:

$$t = \frac{y}{x}.$$

Observe que:

- se $(x, y) \in C$, então $x = 0 \iff y = 0$;
- se $t = -1$, isto é, $y = -x$, e $(x, y) \in C$, então $x^3 + (-x)^3 = 3ax(-x) \implies 0 = -3ax^2 \implies x = 0$ e $y = 0$.

Substituindo $y = tx$ na equação $x^3 + y^3 = 3axy$ e supondo que $(x, y) \neq (0, 0)$, obtemos:

$$x^3 + (tx)^3 = 3ax(tx) \iff (1 + t^3)x^3 = 3atx^2.$$

Portanto, para $t \neq -1$, temos $x = \frac{3at}{1 + t^3}$ e, como $y = tx$, obtemos $y = \frac{3at^2}{1 + t^3} t$.

Assim,

$$C : \begin{cases} x(t) = \frac{3at}{1 + t^3} \\ y(t) = \frac{3at^2}{1 + t^3} \end{cases}; \quad t \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty),$$

é uma parametrização da *Folium de Descartes*.

Vamos agora verificar algumas propriedades relativas a esta curva:

1. A curva intersecta a reta $r : y = x$ nos pontos $(0, 0)$ e $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$.

De fato, fazendo $y = x$ na equação (9), obtemos:

$$x^3 + x^3 = 3axx \iff 2x^3 = 3ax^2 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{3a}{2}.$$

2. A curva é simétrica em relação à reta $r : y = x$.

Para verificar isso, basta mostrar que $(x, y) \in \mathcal{C}$ se, e só se, $(y, x) \in \mathcal{C}$, o que é evidente pela equação cartesiana de \mathcal{C} .

De fato, seja $P = (x_0, y_0)$ um ponto do plano e P' o simétrico de P em relação à reta $r : x - y = 0$.

Seja r' a reta perpendicular à reta r que passa pelo ponto P . Então, $r' \parallel (1, -1)$ e

$$r' : \begin{cases} x = s + x_0 \\ y = -s + y_0 \end{cases}; \quad s \in \mathbb{R},$$

é uma equação paramétrica da reta r' .

O ponto $Q = (s + x_0, -s + y_0)$ de interseção da reta r' com a reta r é dado por:

$$s + x_0 = -s + y_0 \iff s = \frac{y_0 - x_0}{2}.$$

Logo,

$$Q = \left(\frac{y_0 - x_0}{2} + x_0, -\frac{y_0 - x_0}{2} + y_0 \right) = \left(\frac{y_0 - x_0}{2} + x_0, \frac{x_0 - y_0}{2} + y_0 \right) = \left(\frac{y_0 + x_0}{2}, \frac{x_0 + y_0}{2} \right),$$

e, portanto,

$$P' = 2Q - P = (x_0 + y_0, x_0 + y_0) - (x_0, y_0) = (y_0, x_0),$$

como foi afirmado anteriormente.

3. Vamos analisar agora o comportamento da curva em função do parâmetro t nos intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $[0, 1]$ e $[1, +\infty)$.

(A) Para $t \in (-\infty, -1)$: $1 + t^3 < 0$; $x(t) > 0$ e $y(t) < 0$;

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{3a}{1/t + t^2}, \frac{3a}{1/t^2 + t} \right) = (0, 0); \\ \lim_{t \rightarrow -1^-} (x(t), y(t)) &= (+\infty, -\infty). \end{aligned}$$

(B) Para $t \in (-1, 0)$: $1 + t^3 > 0$, $x(t) < 0$ e $y(t) > 0$;

$$\lim_{t \rightarrow -1^+} (x(t), y(t)) = (-\infty, +\infty).$$

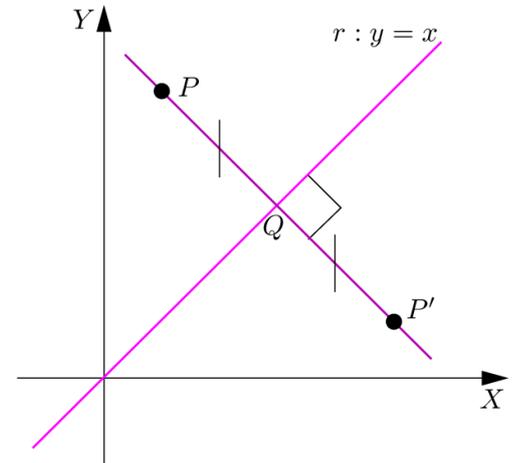


Fig. 36: $r' \perp r$ e P' simétrico de P em relação a r

(C) Para $t \in [0, 1]$: $1 + t^3 > 0$; $x(t) > y(t) > 0$ se $t \in (0, 1)$; $x(0) = y(0) = 0$ e $x(1) = y(1) = \frac{3a}{2}$.

(D) Para $t \in (1, +\infty)$: $1 + t^3 > 0$; $y(t) > x(t) > 0$;

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{3a}{1/t + t^2}, \frac{3a}{1/t^2 + t} \right) = (0, 0).$$

4. A curva está contida no semi-plano $x + y + a > 0$ e $d((x(t), y(t)), r) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -1^\pm$, onde r é a reta $x + y + a = 0$, isto é, r é uma assíntota da curva.

De fato:

$$\begin{aligned} \bullet x(t) + y(t) + a &= \frac{3at}{1+t^3} + \frac{3at^2}{1+t^3} + a = \frac{3at + 3at^2 + a + at^3}{1+t^3} = a \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{1+t^3} \\ &= a \frac{(t+1)(t^2 + 2t + 1)}{(t+1)(t^2 - t + 1)} = a \frac{t^2 + 2t + 1}{t^2 - t + 1} = \frac{a(t+1)^2}{t^2 - t + 1} > 0, \end{aligned} \quad (10)$$

pois $(t+1)^2 > 0$ para todo $t \in \mathbb{R} - \{-1\}$ e $t^2 - t + 1 > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{t \rightarrow -1^\pm} d((x(t), y(t)), r) &= \lim_{t \rightarrow -1^\pm} \frac{|x(t) + y(t) + a|}{\sqrt{2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow -1^\pm} \frac{a(t+1)^2}{\sqrt{2}(t^2 - t + 1)} = \frac{a \cdot 0}{\sqrt{2} \cdot 3} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Usando as informações acima, podemos traçar a curva:

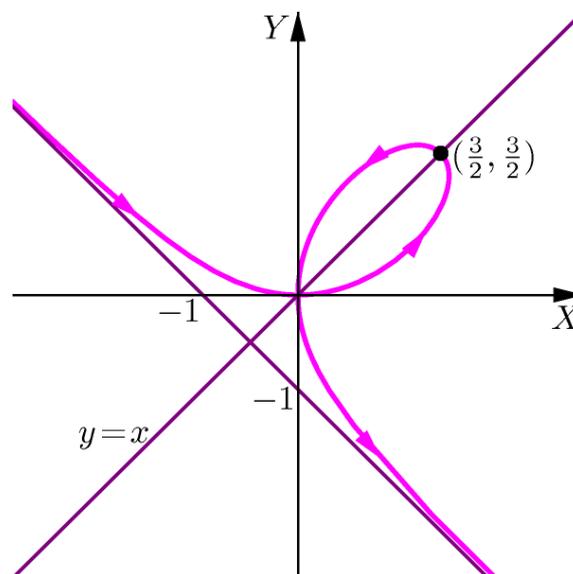


Fig. 37: Folium de Descartes obtido com $a = 1$

(V) A Lemniscata de Bernoulli.

A *Lemniscata de Bernoulli* é a curva dada pelas equações paramétricas:

$$C: \begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^4} \\ y(t) = \frac{t^3}{1+t^4} \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Faremos um esboço desta curva, indicando o sentido em que ela é percorrida, e determinaremos a sua equação cartesiana.

Vamos achar primeiro os pontos onde a curva intersecta a reta $r: x - y = 0$. Para que isso ocorra devemos ter:

$$\begin{aligned} x(t) = y(t) &\iff \frac{t}{1+t^4} = \frac{t^3}{1+t^4} \iff t^3 - t = 0 \\ &\iff t(t^2 - 1) = 0 \iff t = 0 \text{ ou } t = 1 \text{ ou } t = -1. \end{aligned}$$

Logo,

$$C \cap r = \left\{ (0,0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \right\}.$$

Além disso, temos que:

A. para $t \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, $x(t) > y(t)$, pois $t > t^3$, e

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1/t + t^3}, \frac{1}{1/t^3 + t} \right) = (0, 0).$$

B. para $t \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$, $x(t) < y(t)$, pois $t < t^3$, e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0).$$

Com estas informações, podemos traçar a curva:

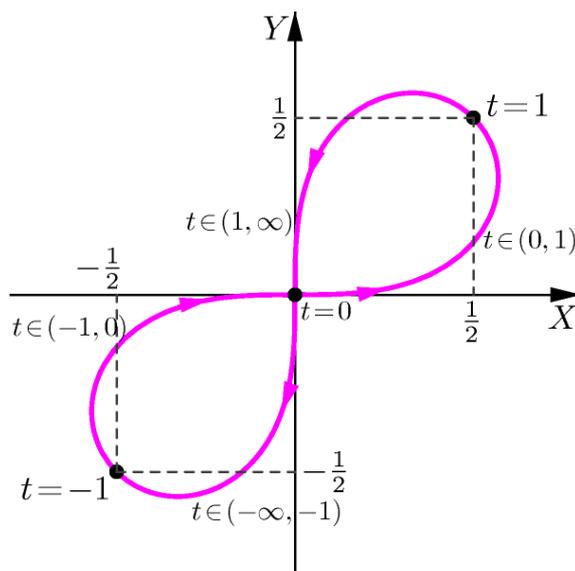


Fig. 38: Lemniscata de Bernoulli

Sendo $y = \frac{t^3}{1+t^4} = t^2 \frac{t}{1+t^4} = t^2 x$, obtemos que $t^2 = \frac{y}{x}$. Em particular, y e x têm o mesmo sinal ao longo da curva.

Como $x = \frac{t}{1+t^4}$, $t = \sqrt{\frac{y}{x}}$ se $x > 0$ e $t = -\sqrt{\frac{y}{x}}$ se $x < 0$, vemos que:

$$\bullet x = \frac{\sqrt{y/x}}{1+y^2/x^2} \iff x = \frac{x^2 y^{1/2}}{x^{1/2} + y^2} \iff x^2 + y^2 = x^{1/2} y^{1/2} \iff x^2 + y^2 = \sqrt{xy}, \text{ se } x > 0;$$

$$\bullet x = \frac{-\sqrt{y/x}}{1+y^2/x^2} \iff x = \frac{-x^2 |y|^{1/2}}{|x|^{1/2} + y^2} \iff x^2 + y^2 = -x \frac{|y|^{1/2}}{|x|^{1/2}} = |x| \frac{\sqrt{|y|}}{\sqrt{|x|}} = \sqrt{|x| |y|} = \sqrt{xy}, \text{ se } x < 0;$$

já que x e y têm o mesmo sinal ao longo da curva.

Assim,

$$x^2 + y^2 = (xy)^{1/2} \iff (x^2 + y^2)^2 = xy$$

é a equação cartesiana da Lemniscata de Bernoulli.

Observe, pela equação acima, que a Lemniscata de Bernoulli é simétrica em relação à reta $r: x - y = 0$.