Aula 4

Coordenadas polares

Nesta aula veremos que há outra maneira de expressar a posição de um ponto no plano, distinta da forma cartesiana. Embora os sistemas cartesianos sejam muito utilizados, há curvas no plano cuja equação toma um aspecto muito simples em relação a um referencial não-cartesiano.

Definição 1

Um sistema de coordenadas polares $O\rho\theta$ no plano *consiste de um ponto O, denominado* pólo *ou* origem*, de uma semi-reta OA, com origem em O, denominada* eixo-polar*, e de uma unidade de comprimento utilizada para medir a distância de O a um ponto qualquer do plano.*

Dado um ponto P do plano, suas coordenadas nesse sistema são dois valores ρ e θ, sendo ρ a distância de P a O e θ a medida do ângulo do eixo-polar para a semi-reta OP. Escrevemos então (Figura 1):

$$\boxed{P = (\rho, \theta)}$$

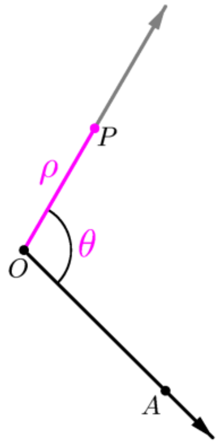

Fig. 1: Coordenadas polares.

Convencionamos que a medida do ângulo tomada de OA para OP no sentido anti-horário é positiva, e negativa no sentido horário.

Observação 1

I. A primeira coordenada polar ρ, de um ponto distinto do pólo, é sempre maior que zero, pois representa a distância do ponto ao pólo. Mas podemos tomar também valores negativos para ρ, convencionando-se, neste caso, marcar a distância $|\rho|$ na semi-reta oposta, ou seja, o ponto $P = (\rho, \theta)$, com $\rho < 0$, corresponde ao ponto $P = (-\rho, \theta + \pi)$.

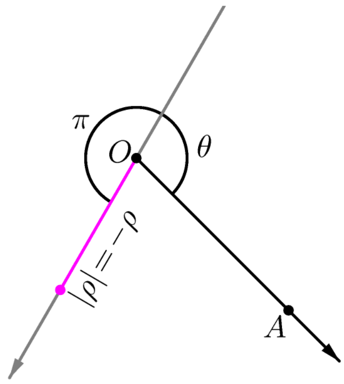

Fig. 2: $(\rho, \theta) = (-\rho, \theta + \pi)$

II. Se a primeira coordenada polar de um ponto é zero então esse ponto é o pólo. O ângulo do pólo não está definido.

III. Podemos também usar a medida radianos para os ângulos. Por exemplo, o ponto $P = (2, 30^o)$ pode ser escrito $P = (2, \pi/6)$.

IV. O par (ρ, θ) determina, de maneira única, um ponto do plano. No entanto, um ponto no plano pode ser determinado por meio de várias coordenadas polares distintas, pois, de acordo com a construção acima, as medidas θ e $\theta + 2\pi k$, onde $k \in \mathbb{Z}$, estão associadas ao mesmo ângulo e, portanto, (ρ, θ) e $(\rho, \theta + 2\pi k)$ representam o mesmo ponto do plano. Além disto, pela observação **(I)**, como $(\rho, \theta) = (-\rho, \theta + \pi)$ se $\rho < 0$, então $(-\rho, \theta + \pi) = (\rho, \theta + 2\pi) = (\rho, \theta)$ se $\rho > 0$.

Assim, $(\rho, \theta) = (-\rho, \theta + (2k + 1)\pi)$ quaisquer que sejam $k \in \mathbb{Z}$ e $\rho \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1

No sistema de coordenadas polares $O\rho\theta$ *mostrado abaixo,*

Fig. 3: Sistema $O\rho\theta$

localize os seguintes pontos e determine outras coordenadas polares que os representem:

(a). $P_1 = (1, 0^o)$.

Fig. 4: Ponto P_1 *no sistema* $O\rho\theta$

Representamos também P_1 das seguintes maneiras: $P_1 = (-1, 180^o) = (1, 360^o\, k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(b). $P_2 = (4, -\pi/4)$.

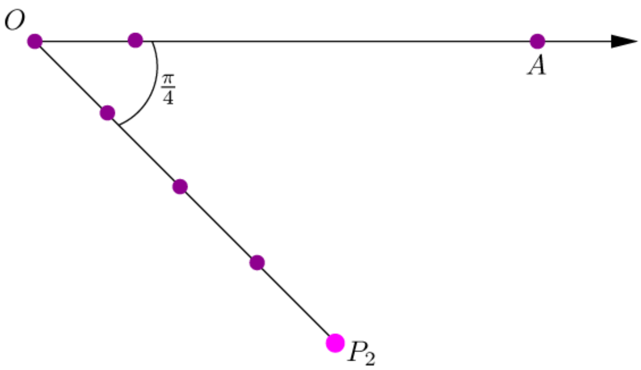

Fig. 5: Ponto P_2 *no sistema* $O\rho\theta$

Outras maneiras de representar o ponto P_1 são, por exemplo, $P_1 = (-4, -\pi/4 + \pi) = (4, -\pi/4 + 2\pi k)\,, \quad k \in \mathbb{Z}$.

(c). $P_3 = (-1, 0^o)$.

Fig. 6: Ponto P_3 *no sistema* $O\rho\theta$

Neste caso, como $\rho = -1$, temos que: $P_3 = (1, 0^o + 180^o) = (1, 180^o) = (1, \pi) = (1, \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(d). $P_4 = (-2, \pi/3)$.

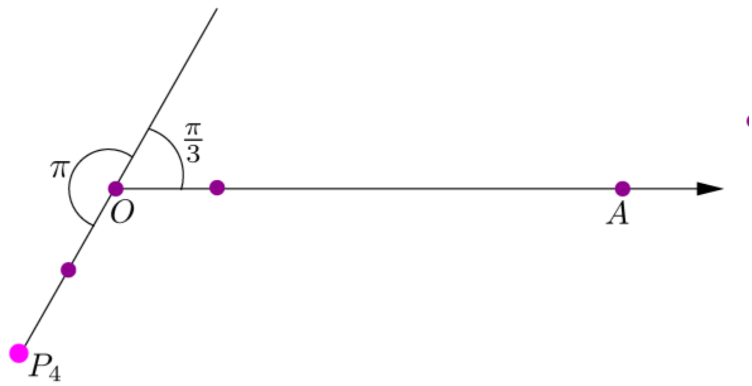

Fig. 7: Ponto P_4 no sistema $O\rho\theta$

Sendo $\rho < 0$, temos que: $P_3 = (2, \pi/3 + \pi) = (2, 4\pi/3 + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 2

Seja $O\rho\theta$ um sistema de coordenadas polares no plano. Determine os pontos $P = (\rho, \theta)$ do plano que satisfazem a equação $\rho = 3$.

Solução.
Como na equação só figura a variável ρ, a outra, θ, é arbitrária.

Isto significa que a equação só estabelece condição sobre a distância do ponto ao eixo-polar, não importando a medida do ângulo.

Portanto, os pontos do plano que satisfazem a equação são aqueles cuja distância ao pólo O é igual a 3.

O conjunto solução é o círculo de centro O e raio 3 (Figura 8).

□

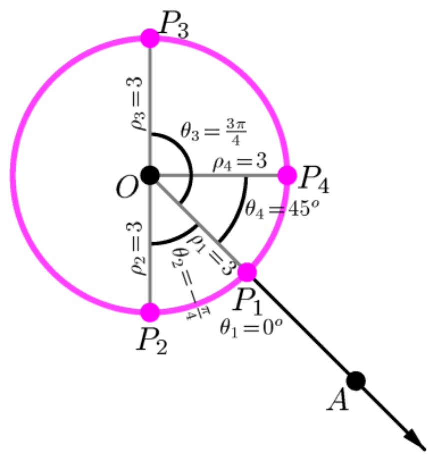

Fig. 8: Pontos com $\rho = 3$.

Observação 2

Pela Observação 1.I, $\rho = -3$ também é uma equação polar do círculo acima. Em geral, $\rho = a$ é a equação polar de um círculo de raio $|a|$ centrado na origem.

Equação polar de uma reta

Exemplo 3

Seja $O\rho\theta$ um sistema de coordenadas polares no plano. Determinemos o conjunto r dos pontos $P = (\rho, \theta)$ do plano que satisfazem a equação $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Solução.
Novamente, como na equação só figura uma variável, a outra é arbitrária.

Logo,

$$r = \{(\rho, \theta) \,|\, \theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad \rho \in \mathbb{R}\},$$

ou seja, r é a reta que passa pelo pólo O e tem inclinação $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ com respeito à semi-reta OA (Figura 9). □

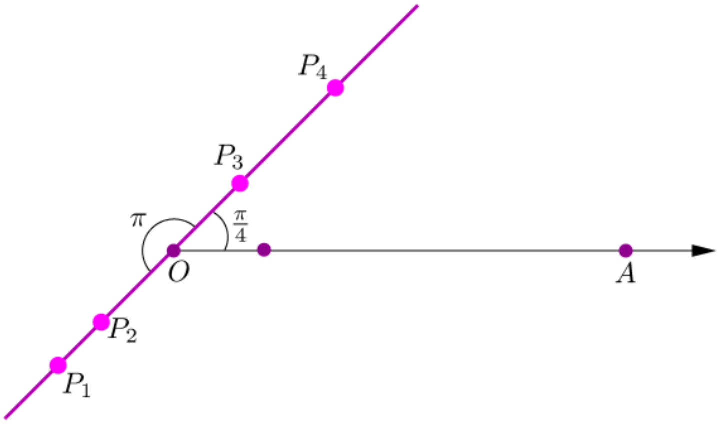

Fig. 9: Pontos $P_1, \ldots, P_4$ na reta r.

Observação 3

Qualquer reta que passa pelo pólo O tem equação polar da forma $\theta = \theta_0$, onde θ_0 é uma constante. Além disso, $\theta = \theta_0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, representa a mesma reta no plano.

Vejamos como obter a equação polar de uma reta r que não passa pelo pólo.

Proposição 1

Seja $O\rho\theta$ um sistema de coordenadas polares no plano. Sejam r uma reta que não passa pelo pólo O, λ a distância de r ao pólo e α o ângulo que o eixo-polar forma com a semi-reta de origem no pólo que é perpendicular a r (Figura 10). Então um ponto P de coordenadas polares (ρ, θ) pertence a r se, e somente se:

$$\boxed{\rho \cos(\theta - \alpha) = \lambda} \tag{1}$$

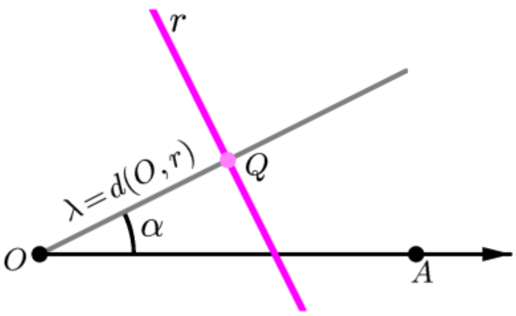

Fig. 10: Reta r no sistema $O\rho\theta$.

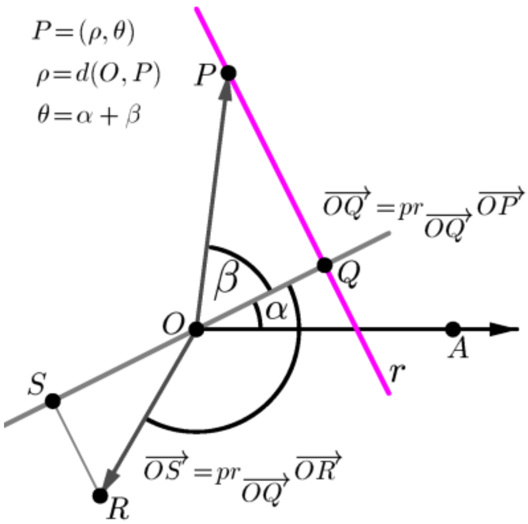

Fig. 11: $P \in r$ e $R \notin r$.

Prova.
Seja Q o ponto de interseção de r com a perpendicular a r contendo o pólo. Sabemos que: $P = (\rho, \theta)$ *pertence a reta r se, e somente se, a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{OP}$ sobre o vetor $\overrightarrow{OQ}$, coincide com $\overrightarrow{OQ}$*, isto é:

$$P \in r \iff pr_{\overrightarrow{OQ}}\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}\,.$$

Seja $\beta = \widehat{POQ}$. Note que $\beta = \theta - \alpha$ independente da posição do ponto P (Figuras 12).

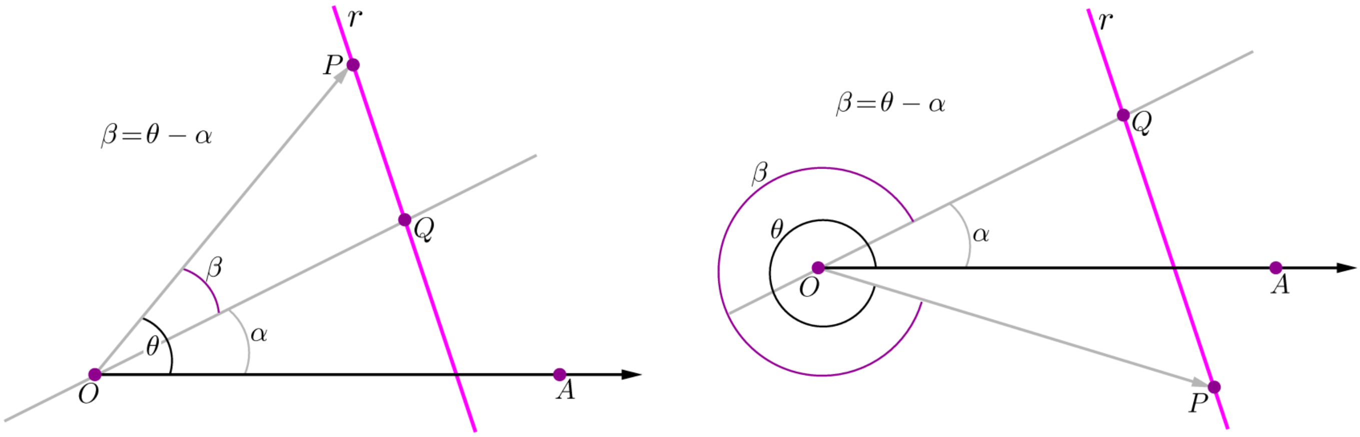

Fig. 12: Nas figuras acima, a medida do ângulo β é tomada de OQ para OP, a medida do ângulo α é tomada de OA para OQ e a medida do ângulo θ é tomada de OA para OP, no sentido anti-horário.

Como

$$|\overrightarrow{OP}| = \rho\,,\ \cos\beta = \cos(\theta-\alpha),$$

e:

$$pr_{\overrightarrow{OQ}}\overrightarrow{OP} = \frac{\left\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \right\rangle}{\|\overrightarrow{OQ}\|^2}\overrightarrow{OQ} = \frac{\|\overrightarrow{OP}\|\,\|\overrightarrow{OQ}\|\cos\beta}{\|\overrightarrow{OQ}\|^2}\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{\lambda}\|\overrightarrow{OP}\|(\cos\beta)\,\overrightarrow{OQ}\,,$$

concluímos:

$$pr_{\overrightarrow{OQ}}\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} \iff \frac{1}{\lambda}\|\overrightarrow{OP}\|\cos\beta\,\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} \iff \frac{1}{\lambda}\|\overrightarrow{OP}\|\cos\beta = 1$$

$$\iff |\overrightarrow{OP}|\cos\beta = \lambda \iff \rho\cos(\theta-\alpha) = \lambda\,,$$

como queríamos. ■

Exemplo 4

Seja $O\rho\theta$ um sistema de coordenadas polares no plano. A equação polar da reta r cuja distância ao pólo é igual a 2 e tal que o ângulo que a semi-reta perpendicular a r, com origem no pólo, forma com o eixo-polar tem medida $\frac{\pi}{3}$, é:

$$r : \rho\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2\,.$$

Observação 4

Note que a equação polar de uma reta no plano depende da escolha do sistema polar (pólo e eixo-polar). Isto é, a equação (1) representa retas distintas com respeito a sistemas polares diferentes.

Relações entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas.

Seja $O\rho\theta$ um sistema de coordenadas polares no plano. Consideremos o sistema cartesiano ortogonal OXY, tal que o eixo-polar seja o semi-eixo positivo OX e o eixo$-OY$ seja obtido rotacionando o eixo$-OX$ de 90^o no sentido anti-horário. Admitamos a mesma unidade de medida nos dois sistemas (Figura 13).

Seja $P \neq O$ um ponto no plano com coordenadas ρ e θ no sistema $O\rho\theta$, e coordenadas x e y no sistema OXY. As relações entre essas coordenadas são assim obtidas:

Traçamos por P as retas r e s perpendiculares aos eixos coordenados OX e OY, respectivamente. Sejam $P_1 = (x, 0)$ o ponto onde r intersecta OX, e seja P_2 o ponto onde s intersecta OY. Então, no triângulo retângulo OP_1P, a medida $|OP_1| = |x|$ é o comprimento do lado adjacente ao ângulo θ e $|OP_2| = |y| = |PP_1|$ é o comprimento do lado oposto ao ângulo θ. Segundo a Trigonometria, para qualquer quadrante em que esteja o ponto P, temos:

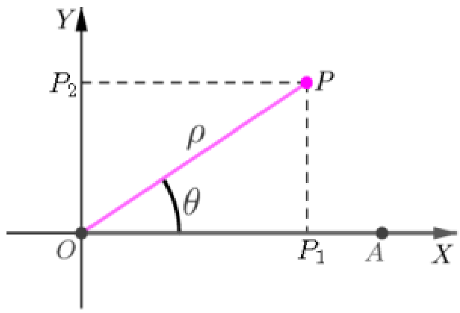

Fig. 13: Sistemas polar $O\rho\theta$ e cartesiano OXY.

$$\boxed{x = \rho \cos\theta \quad \text{e} \quad y = \rho \,\text{sen}\,\theta} \tag{2}$$

Dessas relações, obtemos:

$$x^2 = \rho^2\cos^2\theta\,, \quad y^2 = \rho^2\text{sen}^2\,\theta\,, \quad \cos\theta = \frac{x}{\rho}\,, \quad \text{sen}\,\theta = \frac{y}{\rho} \quad \text{e} \quad \frac{y}{x} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \text{tg}\,\theta\,,$$

de onde concluímos:

$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \quad \text{sen}\,\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{e} \quad \text{tg}\,\theta = \frac{y}{x}} \tag{3}$$

De fato, para obter a primeira relação basta observar que:

$$x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta) = \rho^2\,,$$

o que implica $\rho = |\rho| = \sqrt{x^2+y^2}$, pois $\rho \geq 0$. As duas relações seguintes são substituições diretas da expressão de ρ.

Pela observação 1, podemos tomar $\rho < 0$. Neste caso, teremos $\rho' = -\sqrt{x^2+y^2}$ e, portanto, devemos considerar o ângulo θ' tal que $\cos\theta' = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $\text{sen}\,\theta' = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ para continuarem válidas as igualdades $x = \rho'\cos\theta'$ e $y = \rho'\,\text{sen}\,\theta'$.

Como $\cos\theta' = -\cos\theta$ e $\text{sen}\,\theta' = -\text{sen}\,\theta$, vemos que $\theta' = \theta + \pi$, o que justifica a convenção feita anteriormente que (ρ, θ) e $(-\rho, \theta+\pi)$ representam o mesmo ponto em coordenadas polares.

Convenção: *Daqui em diante, sempre que fizermos referência a um sistema polar* $O\rho\theta$ *e a um sistema cartesiano* OXY*, no mesmo contexto, admitiremos que o semi-eixo* OX *positivo é o eixo-polar, caso este último não tenha sido definido explicitamente.*

Exemplo 5

Determine as coordenadas cartesianas ou polares dos seguintes pontos:

(a) $P = (\rho, \theta) = (2, \pi/2)$.

Solução.
Como $\rho = 2$ e $\theta = \pi/2$, temos que

$$x = \rho \cos\theta = 2\cos\pi/2 = 0$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}\pi/2 = 2$$

são as coordenadas cartesianas de P. $\square$

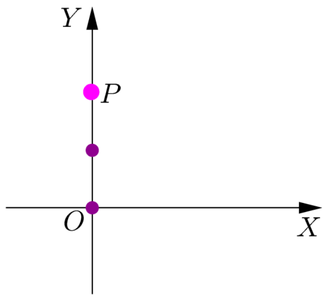

Fig. 14: $P = (2, \pi/2)$ *em coordenadas polares e* $P = (0, 2)$ *em coordenadas cartesianas*

(b) $P = (x, y) = (1, 1)$.

Solução.
Sendo $x = 1$ e $y = 1$, temos que $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e, portanto, $\theta = \pi/4$ ou $\theta = \pi/4 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Então,

$$P = (\rho, \theta) = (\sqrt{2}, \pi/4) = (\sqrt{2}, \pi/4 + 2\pi k)$$

é o ponto P dado em coordenadas polares.

Também $(-\sqrt{2}, \pi/4 + \pi)$ é outra representação de P em coordenadas polares. $\square$

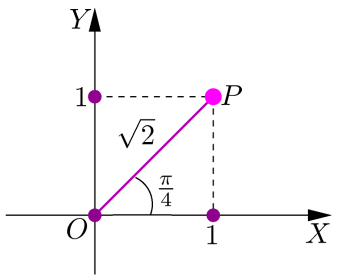

Fig. 15: $P = (1, 1)$ *em coordenadas cartesianas e* $P = (\sqrt{2}, \pi/4)$ *em coordenadas polares*

(c) $P = (\rho, \theta) = (-3, \pi/2)$.

Solução.
Como $P = (-3, \pi/2) = (3, \pi/2 + \pi) = (3, 3\pi/2)$, vemos que:

$$x = \rho\cos\theta = -3\cos\frac{\pi}{2} = 3\cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

$$y = \rho\operatorname{sen}\theta = -3\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 3\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -3$$

são as coordenadas cartesianas de P. $\square$

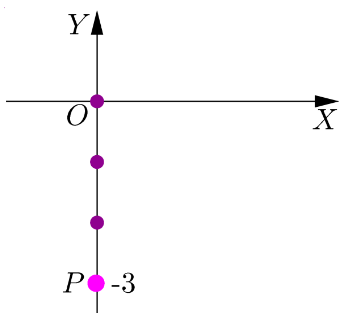

Fig. 16: $P = (-3, \pi/2)$ *em coordenadas polares e* $P = (0, -3)$ *em coordenadas cartesianas*

(d) $P = (\rho, \theta) = (-\sqrt{2}, 5\pi/4)$.

Solução.

Sendo $P = (-\sqrt{2}, 5\pi/4) = (\sqrt{2}, 5\pi/4 + \pi) = (\sqrt{2}, 9\pi/4) = (\sqrt{2}, \pi/4)$, temos que

$$x = -\sqrt{2}\cos 5\pi/4 = \sqrt{2}\cos \pi/4 = 1$$

$$y = -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, 5\pi/4 = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, \pi/4 = 1$$

são as coordenadas cartesianas do ponto P. □

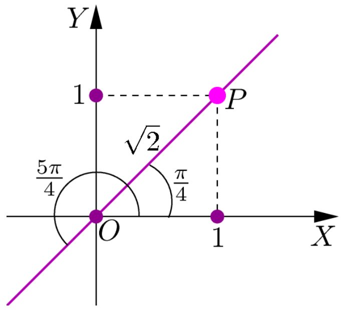

Fig. 17: Ponto $P = (-\sqrt{2}, 5\pi/4)$ em coordenadas polares e $P = (1, 1)$ em coordenadas cartesianas

(e) $P = (x, y) = (4, 5)$.

Solução.

Como $x = 4$ e $y = 5$, $\rho = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$, $\cos\theta_0 = \dfrac{4}{\sqrt{41}}$ e $\mathrm{sen}\,\theta_0 = \dfrac{5}{\sqrt{41}}$.

Portanto,

$$(\rho, \theta) = (\sqrt{41}, \theta_0) = (-\sqrt{41}, \theta_0 + \pi)$$

é o ponto P dado em coordenadas polares. □

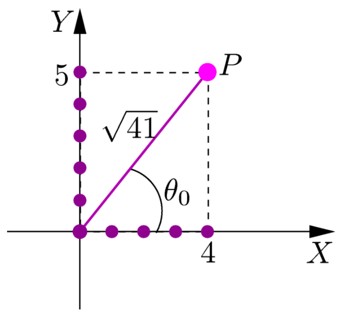

Fig. 18: $P = (4, 5)$ em coordenadas cartesianas e $P = (\sqrt{41}, \theta_0)$ em coordenadas polares

(f) $P = (x, y) = (0, -4)$.

Solução.

Como $x = 0$ e $y = -4$, temos que:

$$\rho = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4,\ \cos\theta = \frac{0}{4} = 0 \text{ e } \mathrm{sen}\,\theta = \frac{-4}{4} = -1.$$

Logo,

$$(\rho, \theta) = (4, 3\pi/2) = (-4, 3\pi/2 + \pi) = (-4, 5\pi/2) = (-4, \pi/2)$$

é o ponto P dado em coordenadas polares. □

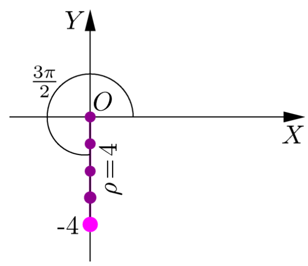

Fig. 19: $P = (0, -4)$ em coordenadas cartesianas e $P = (-4, \pi/2)$ em coordenadas polares

Exemplo 6

Determine a equação, no sistema ortogonal de coordenadas cartesianas OXY, do lugar geométrico definido pela equação polar $\rho = 3$.

Solução.

Substituindo a relação $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, temos:

$$\rho = 3 \iff \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \iff x^2 + y^2 = 9\,.$$

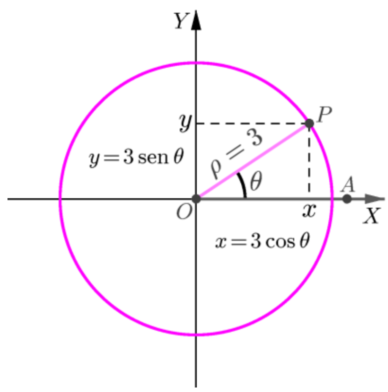

Fig. 20: Círculo $\rho = 3$.

Portanto, a equação $\rho = 3$ corresponde à equação cartesiana do círculo centrado na origem e de raio 3 (Figura 20). □

Exemplo 7

Determine a equação, no sistema ortogonal de coordenadas cartesianas OXY*, do lugar geométrico definido pela equação polar* $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Solução.
Substituindo a relação $\frac{y}{x} = \text{tg}\,\theta$ na equação dada, obtemos:

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \iff \frac{y}{x} = \text{tg}\,\frac{3\pi}{4} = \frac{\text{sen}((3\pi)/4)}{\cos((3\pi)/4)} = \frac{\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = -1\,.$$

Portanto, a equação correspondente no sistema cartesiano de coordenadas é $\frac{y}{x} = -1$.

Isto é, $y = -x$ (Figura 21), que é a equação da reta bissetriz do segundo e quarto quadrantes. □

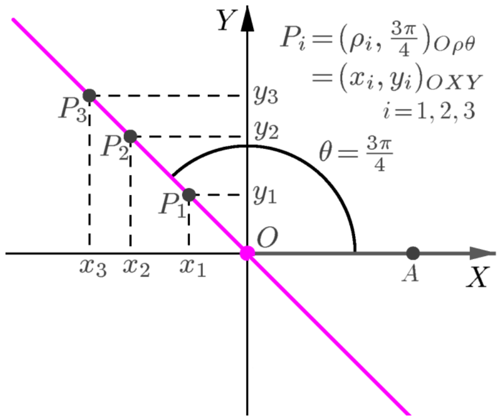

Fig. 21: Reta $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Exemplo 8

Seja r *a reta de equação polar* $\rho\,\cos(\theta - \pi/3) = 2$.

Determine a equação correspondente no sistema cartesiano OXY.

Solução.
Usando a identidade $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b$, temos:

$$\rho\,\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \iff \rho\,\cos\theta\,\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\,.$$

Das relações:

$$x = \rho\,\cos\theta\,, \qquad y = \rho\,\text{sen}\,\theta\,,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\,, \qquad \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

obtemos:

$$x\left(\frac{1}{2}\right) + y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\,,$$

ou seja (Figura 22):

$$x + y\sqrt{3} - 4 = 0\,.$$

□

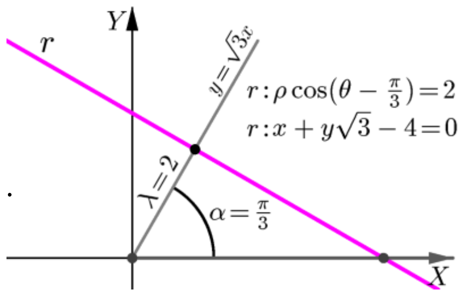

Fig. 22: Reta $r : \rho\cos(\theta - \pi/3) = 2$, ou seja, $r : x + y\sqrt{3} - 4 = 0$.

Exemplo 9

Seja $a > 0$*. Determine os pontos do plano que satisfazem a equação* $\rho = 2\,a\cos\theta$.

Solução.
Utilizando as relações (3) para obter a equação correspondente no sistema cartesiano, temos (Figura 23):

$$\rho = 2\,a\cos\theta \iff \pm\sqrt{x^2+y^2} = 2a\frac{\pm x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\iff x^2+y^2 = 2ax\,.$$

Completando os quadrados na última equação, obtemos:

$$(x-a)^2+y^2 = a^2\,,$$

que é a equação do círculo de centro $(a, 0)$ e raio a. □

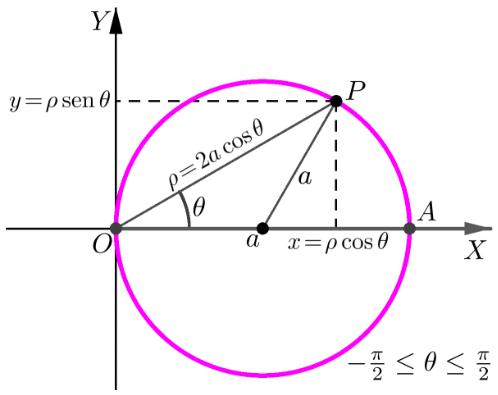

Fig. 23: $\rho = 2\,a\cos\theta$.

O círculo em coordenadas polares.

Em geral, o círculo no plano é caracterizado em termos de coordenadas polares, de acordo com a seguinte proposição.

Proposição 2

Sejam $O\rho\theta$ *um sistema de coordenadas polares no plano,* $P_0 = (\rho_0, \theta_0)_{O\rho\theta}$ *um ponto desse plano e* r *um número real positivo.*

Então o conjunto dos pontos $P = (\rho, \theta)_{O\rho\theta}$ *que pertencem ao círculo de centro* P_0 *e raio* r *satisfazem a seguinte equação em coordenadas polares:*

$$\boxed{\rho^2+\rho_0^2-2\,\rho_0\,\rho\,\cos(\theta-\theta_0) = r^2}$$

Demonstração. Consideremos o sistema de coordenadas cartesianas OXY, tal que o semi-eixo OX positivo coincida com o eixo-polar e o eixo$-OY$ seja obtido rotacionando o eixo$-OX$ de 90^o no sentido anti-horário.

No sistema OXY, temos:

$$P_0 = (\rho_0\cos\theta_0, \rho_0\,\mathrm{sen}\,\theta_0)_{OXY} \;\text{ e }\; P = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)_{OXY}\,.$$

Sabemos que o círculo de centro P_0 e raio r é o conjunto que consiste dos pontos do plano cuja distância a P_0 é igual a r. Então:

$$\begin{aligned}
d(P, P_0) = r \iff\; & \sqrt{(\rho\cos\theta-\rho_0\cos\theta_0)^2+(\rho\,\mathrm{sen}\,\theta-\rho_0\,\mathrm{sen}\,\theta_0)^2} = r\\
\iff\; & \rho^2\cos^2\theta+\rho_0^2\cos^2\theta_0-2\rho_0\,\rho\cos\theta_0\cos\theta+\rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\\
& +\rho_0^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta_0-2\rho_0\,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta_0\,\mathrm{sen}\,\theta = r^2\\
\iff\; & \rho^2\,(\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\,\theta)+\rho_0^2\,(\cos^2\theta_0+\mathrm{sen}^2\,\theta_0)\\
& -2\,\rho_0\,\rho\,(\cos\theta_0\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta_0\,\mathrm{sen}\,\theta) = r^2\\
\iff\; & \rho^2+\rho_0^2-2\,\rho_0\,\rho\,\cos(\theta-\theta_0) = r^2\,. \quad ■
\end{aligned}$$

Note que...

No desenvolvimento acima, calculamos a expressão da distância entre dois pontos em termos de coordenadas polares. Isto é, se $P_0 = (\rho_0, \theta_0)$ e $P_1 = (\rho_1, \theta_1)$, então:

$$\boxed{d(P_0, P_1) = \sqrt{\rho_0^2 + \rho_1^2 - 2\rho_0\rho_1 \cos(\theta_0 - \theta_1)}}$$

Exemplo 10

Considere o círculo abaixo:

$$\mathcal{C} : (x-2)^2 + y^2 = 2\,.$$

Determine a equação polar do arco $\mathcal{C}_1$ do círculo $\mathcal{C}$ contido no semi-plano $x \leq 1$ e a equação polar do arco $\mathcal{C} - \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$.

Solução.

Substituindo as relações $\rho^2 = x^2 + y^2$, $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\,\text{sen}\,\theta$ na equação cartesiana do círculo:

$$(x-2)^2 + y^2 = 2 \iff x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0\,,$$

obtemos que:

$$\rho^2 - 4\rho\cos\theta + 2 = 0 \tag{4}$$

é a equação que relaciona as coordenadas polares de um ponto de $\mathcal{C}$. Nesse círculo, $(\rho_0, \theta_0) = (2, 0)$ é o centro dado em coordenadas polares.

Logo,

$$\begin{aligned} \rho = \frac{4\cos\theta \pm \sqrt{16\cos^2\theta - 8}}{2} &\iff \rho = \frac{4\cos\theta \pm \sqrt{-16\,\text{sen}^2\theta + 16 - 8}}{2} \\ &\iff \rho = 2\cos\theta \pm \sqrt{2 - 4\,\text{sen}^2\theta}\,. \end{aligned}$$

Observe que o discriminante da equação (4) é zero se, e só se,

$$\text{sen}^2\theta = \frac{1}{2} \iff \text{sen}\,\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \theta = \pm\frac{\pi}{4}\,,$$

e que a equação (4) tem duas soluções se, e só se,

$$2 - 4\,\text{sen}^2\theta > 0 \iff \text{sen}^2\theta < \frac{1}{2} \iff |\,\text{sen}\,\theta| < \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \theta \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\,.$$

Note também que as retas $r_1 : y = x$ e $r_2 : y = -x$, que passam pela origem e fazem um ângulo $\frac{\pi}{4}$ e $-\frac{\pi}{4}$, respectivamente, com o semi-eixo positivo OX, são tangentes ao círculo $\mathcal{C}$ nos pontos $P_1 = (1, 1)$ e $P_2 = (1, -1)$, pois:

$$\begin{aligned} (x,y) \in \mathcal{C} \cap r_1 &\iff x = y \text{ e } (x-2)^2 + x^2 = 2 \iff x = y \text{ e } 2x^2 - 4x + 2 = 0 \\ &\iff x = y \text{ e } (x-1)^2 = 0 \iff x = 1 \text{ e } y = 1 \iff (x,y) = (1,1) = P_1\,. \\ (x,y) \in \mathcal{C} \cap r_2 &\iff x = -y \text{ e } (x-2)^2 + (-x)^2 = 2 \iff x = -y \text{ e } (x-1)^2 = 0 \\ &\iff x = 1 \text{ e } y = -1 \iff (x,y) = (1,-1) = P_2\,. \end{aligned}$$

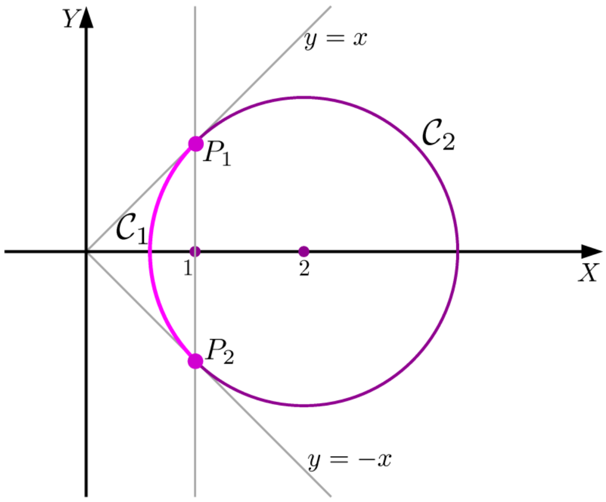

Fig. 24: Círculo $\mathcal{C}$ e arcos $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$

Assim, $\rho = 2\cos\theta - \sqrt{2 - 4\,\text{sen}^2\theta}$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, é a equação polar do arco $\mathcal{C}_1$, e $\rho = 2\cos\theta + \sqrt{2 - 4\,\text{sen}^2\theta}$, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, é a equação polar de $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C} - \mathcal{C}_1$ □

Equação polar das cônicas.

Para determinar as equações polares das cônicas, lembre-se que:

Uma *seção cônica* é o lugar geométrico dos pontos que se movimentam no plano de forma que a sua distância a um ponto dado (chamado *foco*) é um múltiplo positivo fixo da sua distância a uma reta dada (denominada *diretriz* associada ao foco). Isto é, um ponto F, uma reta ℓ e uma constante $e > 0$ (denominada *excentricidade*) determinam a cônica:

$$\boxed{\mathcal{C} = \{\, P \mid d(P, F) = e \cdot d(P, \ell) \,\}}$$

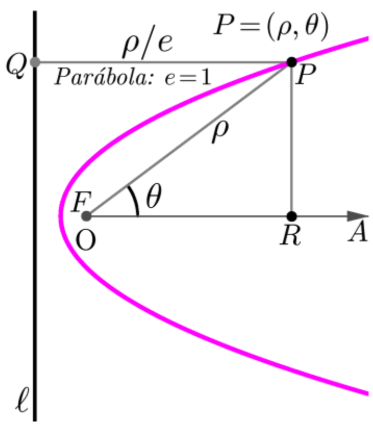

Fig. 25: Parábola

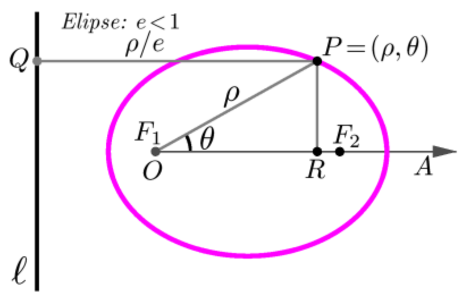

Fig. 26: Elipse

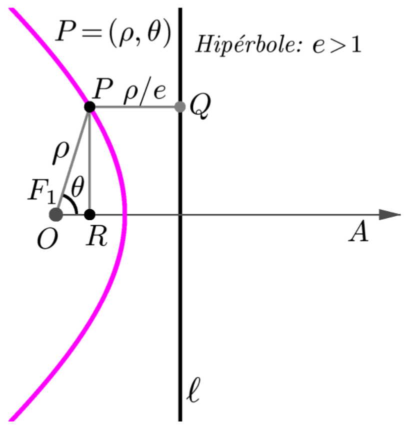

Fig. 27: Hipérbole

Segundo a excentricidade e, a cônica $\mathcal{C}$ é:

- uma parábola $\Longleftrightarrow e = 1$;
- uma elipse $\Longleftrightarrow e < 1$;
- uma hipérbole $\Longleftrightarrow e > 1$.

Seja $\mathcal{C}$ uma cônica de excentricidade $e > 0$. Consideremos um sistema de coordenadas polares em que um foco F da cônica é a origem O e o eixo-polar é paralelo à reta-focal da cônica, como vemos nas figuras acima.

Designamos por ℓ a diretriz associada ao foco F e seja $h = d(F, \ell)$.

Segundo a caracterização de $\mathcal{C}$ dada acima, temos:

$$P = (\rho, \theta) \in \mathcal{C} \iff d(P, F) = e\, d(P, \ell) \iff \rho = e\, d(P, \ell)\,.$$

Das figuras acima, você pode ver que temos dois casos a considerar:

Caso A. Se ℓ não intersecta o eixo-polar, então $d(P, \ell) = h + \rho \cos\theta$.

Neste caso, temos que $P = (\rho, \theta) \in \mathcal{C}$ se, e somente se:

$$\rho = e(h + \rho\cos\theta)\,,\ \text{isto é}\,,\ \rho = \frac{eh}{1 - e\cos\theta}\,.$$

Caso B. Se ℓ intersecta o eixo-polar, então $d(P, \ell) = h - \rho\cos\theta$.

Neste caso, temos que $P = (\rho, \theta) \in \mathcal{C}$ se, e somente se:

$$\rho = e(h - \rho\cos\theta)\,,\ \text{isto é:}\ \rho = \frac{eh}{1 + e\cos\theta}\,.$$

Nessas equações vemos que, se $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{2}$, então $\rho = eh$. Esse valor de ρ é a metade do comprimento da corda da cônica que é paralela à diretriz e contém o foco F. Tal corda é chamada *latus rectum* da cônica. Conseqüentemente, o valor eh que aparece nas equações anteriores corresponde à metade do comprimento do latus rectum da cônica, isto é, ao comprimento do *semi-latus rectum*.

Resumindo as conclusões anteriores, temos:

Equação polar das cônicas.

Seja $\mathcal{C}$ uma cônica com excentricidade $e > 0$, um foco no ponto F e semi-latus rectum de comprimento λ. Com respeito ao sistema polar de coordenadas $O\rho\theta$ com o eixo-polar contido na reta-focal de $\mathcal{C}$ e $O = F$, a equação de $\mathcal{C}$ é:

$$\boxed{\mathcal{C} : \rho = \frac{\lambda}{1 \pm e\,\cos\theta}} \tag{5}$$

A distância do foco F à sua diretriz associada ℓ é $\dfrac{\lambda}{e}$ (Figura 28).

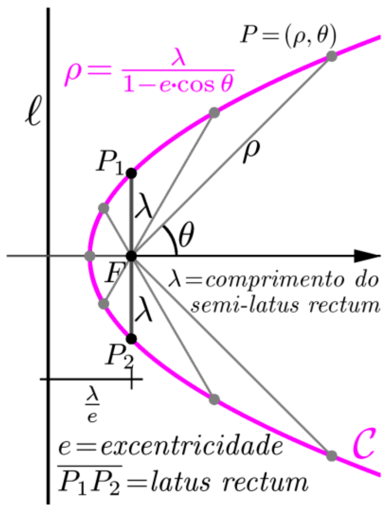

Fig. 28: $\mathcal{C} : \rho = \frac{\lambda}{1-e\cdot\cos\theta}$.

No denominador da equação polar (5), tomamos o sinal positivo $(+)$ se a diretriz ℓ intersecta o eixo-polar, e o sinal negativo $(-)$ se ℓ não intersecta o eixo-polar.

Note que se o eixo-polar for escolhido de modo a estar paralelo à diretriz, ou seja, quando o eixo-polar tem origem em F e é perpendicular à reta-focal, então a equação polar da cônica é dada por:

$$\boxed{\rho = \frac{eh}{1 \pm e \operatorname{sen}\theta} = \frac{\lambda}{1 \pm e \operatorname{sen}\theta}}$$ (Verifique!)

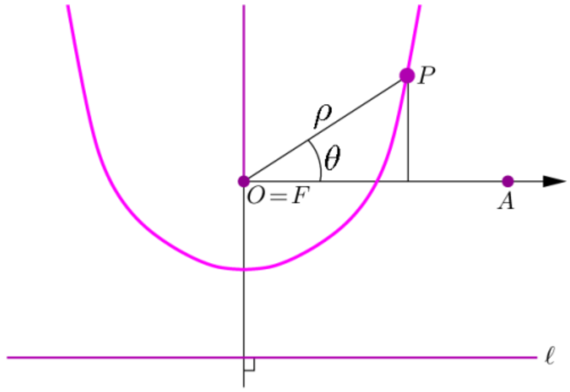

Fig. 29: Eixo-polar OA paralelo à diretriz ℓ

Exemplo 11

Identificar a cônica $\mathcal{C}$ de equação polar $\rho = \dfrac{2}{3 - \cos\theta}$.

Determinar também as coordenadas polares do centro e dos vértices, assim como os comprimentos dos eixos e do latus rectum.

Solução.

Começamos por escrever a equação de $\mathcal{C}$ na forma (5), multiplicando o numerador e o denominador da equação polar por $\frac{1}{3}$:

$$\mathcal{C} : \rho = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}\cos\theta}.$$

A partir dessa equação, obtemos que o comprimento do semi-latus rectum é $\lambda = \frac{2}{3}$ e que a excentricidade de $\mathcal{C}$ é $e = \frac{1}{3}$. Como $e < 1$, $\mathcal{C}$ é uma elipse.

Em particular, o comprimento do latus rectum é $2\lambda = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

Como o eixo-polar está sobre a reta-focal, vamos determinar os vértices, o centro e o outro foco de $\mathcal{C}$ (lembre que um foco é a origem do sistema de coordenadas polares). Como o sinal que aparece no denominador da equação é negativo, a diretriz correspondente ao foco O (origem do sistema polar $O\rho\theta$) não intersecta o eixo-polar. Portanto, estamos na situação da Figura 30.

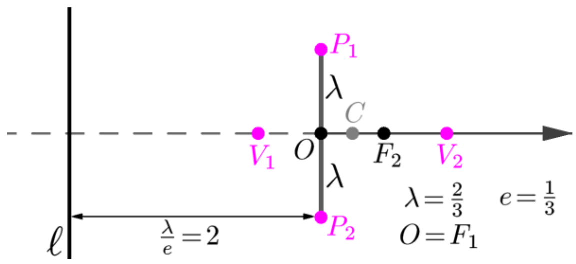

Fig. 30: Posição dos focos, latus rectum e diretriz na cônica $\mathcal{C} : \frac{2}{3 - 2\cos\theta}$.

Fazendo $\theta = 0$ na equação de $\mathcal{C}$, obtemos $\rho = 1$. Logo, segundo o esquema ilustrado na Figura 30, o ponto $V_2 = (1, 0)_{O\rho\theta}$ é um vértice da elipse.

Para obter o outro vértice, fazemos $\theta = \pi$ na equação de $\mathcal{C}$ e obtemos $\rho = \frac{1}{2}$.

Assim, $V_1 = (\frac{1}{2}, \pi)_{O\rho\theta}$ é outro vértice de $\mathcal{C}$.

Agora podemos calcular a distância entre os vértices: $2a = d(V_1, V_2) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, de onde concluímos que $a = \frac{3}{4}$ é a medida do semi-eixo maior da elipse.

Como $e = \dfrac{c}{a}$, obtemos $c = e\,a = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Portanto, o centro C da elipse $\mathcal{C}$ tem coordenadas polares $C = (c, 0)_{O\rho\theta} = (\frac{1}{4}, 0)_{O\rho\theta}$.

Conhecendo o centro C e a distância do centro aos focos $d(C, F_2) = d(C, F_1) = d(C, O) = \frac{1}{4}$, obtemos as coordenadas polares do outro foco:

$$F_2 = (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}, 0)_{O\rho\theta} = (\tfrac{1}{2}, 0)_{O\rho\theta}\,.$$

Finalmente, conhecendo a medida do semi-eixo maior $a = \frac{3}{4}$ e a distância do centro aos focos $c = \frac{1}{4}$, calculamos a medida do semi-eixo menor b, usando a relação $b^2 = a^2 - c^2$:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(\tfrac{3}{4})^2 - (\tfrac{1}{4})^2} = \sqrt{\tfrac{8}{16}} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Logo, a medida do eixo-menor da elipse é $2b = \sqrt{2}$.

Consideremos agora o sistema ortogonal de coordenadas cartesianas OXY, onde O é a origem do sistema polar $O\rho\theta$, o semi-eixo positivo OX coincide com o eixo-polar e o semi-eixo positivo OY é obtido girando de 90°, no sentido anti-horário, o semi-eixo positivo OX.

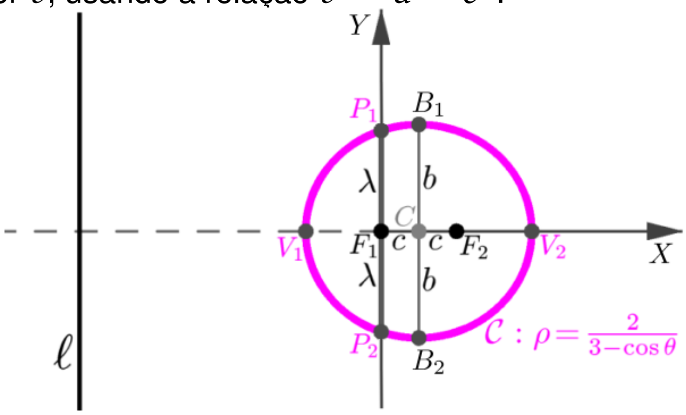

Fig. 31: Elipse $\mathcal{C}$ no sistema $O\rho\theta$.

Sendo $C = \left(\dfrac{1}{4}, 0\right)_{O\rho\theta} = \left(\dfrac{1}{4}, 0\right)_{OXY}$ o centro de $\mathcal{C}$ nas coordenadas x e y, $a = \dfrac{3}{4}$ e $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ as medidas dos semi-eixos, obtemos a equação de $\mathcal{C}$ com no sistema OXY:

$$\boxed{\mathcal{C} : \frac{(x - \frac{1}{4})^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1}$$

e as coordenadas cartesianas e polares dos vértices sobre a reta não-focal:

$$B_1 = (1/4, \sqrt{2}/2)_{OXY} = (3/4, \theta_0)_{O\rho\theta} \text{ e } B_2 = (1/4, -\sqrt{2}/2)_{OXY} = (3/4, -\theta_0)_{O\rho\theta}\,,$$

onde $\operatorname{tg}\theta_0 = 2\sqrt{2}$ e $\theta_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. $\square$

Iremos obter agora as equações polares de algumas curvas planas dadas geometricamente para depois esboçá-las e determinar suas equações cartesianas.

Exemplo 12

Considere o círculo da Figura 32. Sejam OA o diâmetro sobre o eixo$-OX$, AB um segmento tangente ao círculo em A e C o ponto em que o segmento OB intersecta o círculo.

Seja P o ponto sobre o segmento OB tal que $|OP| = |CB|$. O lugar geométrico descrito por tais pontos P é denominado Cissóide de Diocles.

Determine a equação da Cissóide em coordenadas polares e em coordenadas cartesianas.

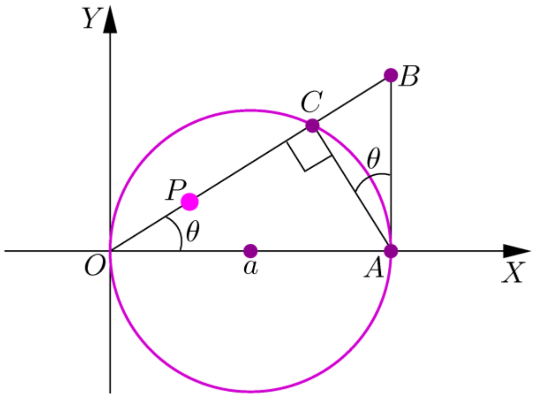

Fig. 32: Ponto P descrevendo a Cissóide de Diocles

Solução.

Seja θ o ângulo que o segmento OB faz com o eixo$-OX$. Como $AB = 2\,a\,\text{tg}\,\theta$ e $\rho = OP = CB = AB\,\text{sen}\,\theta$, temos que:

$$\boxed{\rho = AB\,\text{sen}\,\theta = 2a\,\text{tg}\,\theta\,\text{sen}\,\theta}\,, \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

é a equação polar da curva.

Substituindo

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}\,,\ \text{tg}\,\theta = y/x \quad \text{e} \quad \text{sen}\,\theta = y/\sqrt{x^2+y^2}$$

na equação acima, obtemos que:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+y^2} = 2a\,\frac{y}{x}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} &\iff x^2+y^2 = \frac{2ay^2}{x}\\ &\iff x^3+y^2x = 2ay^2\\ &\iff x^3 = y^2(2a-x)\end{aligned}$$

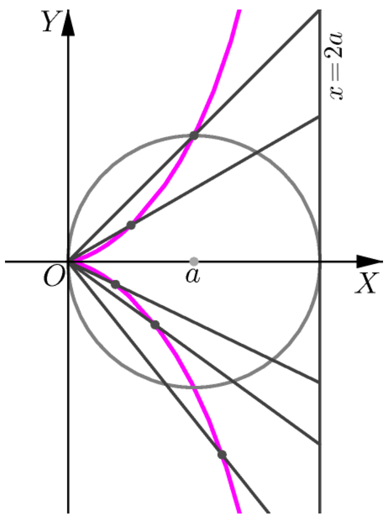

Fig. 33: Cissóide de Diocles

é a equação cartesiana da Cissóide de Diocles.

A curva é, portanto, simétrica em relação ao eixo$-OX$, e sendo $y = \pm\sqrt{\dfrac{x^3}{2a-x}}$, $x \in [0, 2a)$, temos que $\lim\limits_{x\to 2a^-} y = \pm\infty$.

Ou seja, $x = 2a$ é uma assíntota vertical da curva e o seu esboço é mostrado na figura 33.

Observe que, sendo

$$y'(x) = \pm\frac{1}{2}\,\frac{x^{1/2}}{(2a-x)^{3/2}}(6a-2x)\,,$$

então $y'(0) = 0$, ou seja, $y = 0$ é a reta tangente à curva no ponto $(0,0)$. □

Exemplo 13

Na aula 3, vimos que as equações paramétricas da cardióide, ou seja, da epiciclóide obtida com dois círculos de raios iguais a a, são:

$$\begin{cases} x &= 2a\cos t - a\cos 2t \\ y &= 2a\,\text{sen}\, t - a\,\text{sen}\, 2t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Deduzir a equação da cardióide em coordenadas polares e em coordenadas cartesianas.

Solução.

Para obter uma expressão mais simples, transladamos a origem a unidades para a direita ao longo do eixo$-OX$

Neste sistema, as equações paramétricas da cardióide são:

$$\begin{cases} x &= 2a\cos t - a\cos 2t - a \\ y &= 2a\,\text{sen}\, t - a\,\text{sen}\, 2t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

onde t é o ângulo entre o segmento O_1O_2 e o eixo$-OX$ que, neste caso, é igual ao ângulo entre os segmentos O_1O_2 e O_2P, onde O_1 e O_2 são, respectivamente, os centros do círculo fixo e do círculo móvel.

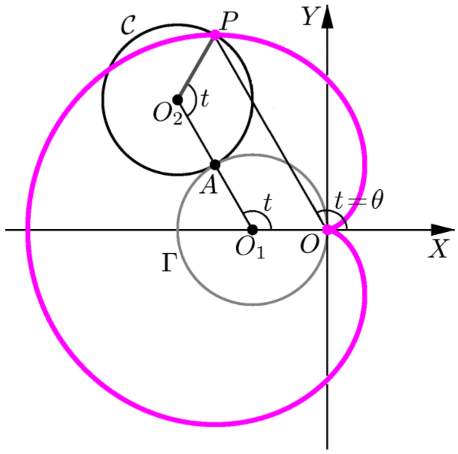

Fig. 34: Cardióide

Além disso, como $|O_1O| = |PO_2| = a$, temos que o ângulo entre o segmento OP e o eixo$-OX$ é igual a t, ou seja, o ângulo t é igual ao ângulo polar θ. Logo, em função do ângulo polar θ, as equações paramétricas da cardióide são:

$$\begin{cases} x &= 2a\cos\theta - a\cos 2\theta - a \\ y &= 2a\,\text{sen}\,\theta - a\,\text{sen}\, 2\theta \end{cases} ; \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Utilizando as identidades trigonométricas,

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$$
$$\text{sen}\, 2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\,\cos\theta,$$

podemos transformar as equações (6) em:

$$\begin{cases} x &= 2a\cos\theta - a(2\cos^2\theta - 1 + 1) = 2a\cos\theta(1-\cos\theta) \\ y &= 2a\,\text{sen}\,\theta(1-\cos\theta) \end{cases} ; \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Elevando estas equações ao quadrado, obtemos:

$$\begin{cases} x^2 &= 4a^2\cos^2\theta(1-\cos\theta)^2 \\ y^2 &= 4a^2\,\text{sen}^2\theta(1-\cos\theta)^2 \end{cases} ; \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

que somadas dão:

$$x^2 + y^2 = 4a^2(1-\cos\theta)^2.$$

Como $\rho^2 = x^2 + y^2$, temos que:

$$\rho^2 = 4a^2(1-\cos\theta)^2\,,$$

ou melhor,

$$\boxed{\rho = 2a(1-\cos\theta)} \qquad (7)$$

é a equação polar da cardióide.

Substituindo $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ na equação (7), obtemos:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2a\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \iff x^2+y^2 = 2a(\sqrt{x^2+y^2}-x)$$

a equação cartesiana da cardióide □

Exemplo 14

Determine as equações cartesianas das curvas abaixo dadas em coordenadas polares e faça um esboço

(a) $\mathcal{C} : \rho\cos\theta = 3\,.$

Solução.
Como $x = \rho\cos\theta$, temos que $\mathcal{C} : x = 3$ é a reta vertical que intersecta o eixo$-OX$ no ponto $(3,0)$. □

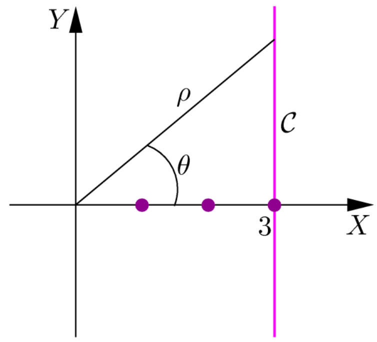

Fig. 35: Curva $\mathcal{C} : \rho\cos\theta = 3$

(b) $\mathcal{C} : \rho = 2b\,\text{sen}\,\theta\,, \quad b > 0\,.$

Solução.
Sendo $\rho = \pm\sqrt{x^2+y^2}$ e $\text{sen}\,\theta = \pm\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \pm\sqrt{x^2+y^2} = \pm\frac{2by}{\sqrt{x^2+y^2}} &\iff x^2+y^2 = 2by \\ &\iff x^2+y^2-2by = 0 \\ &\iff x^2+(y-b)^2 = b^2\,, \end{aligned}$$

a equação cartesiana da curva $\mathcal{C}$, que representa um círculo de raio b e centro $(0,b)$. □

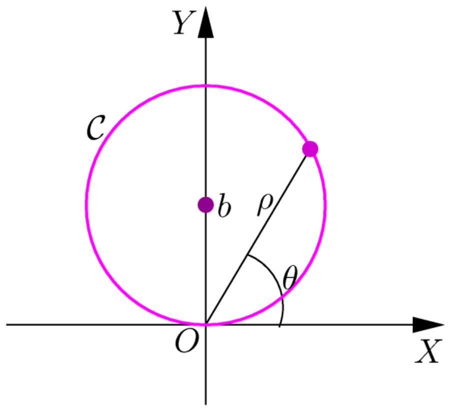

Fig. 36: Curva $\mathcal{C} : \rho = 2b\,\text{sen}\,\theta$, $b > 0$.

(c) $\mathcal{C} : \rho = 2-\cos\theta\,.$

Solução.
Observe que, para esta curva, a variável ρ é sempre positiva, pois $\cos\theta \in [-1,1]$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Assim, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Substituindo ρ e θ na equação polar acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+y^2} = 2-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} &\iff x^2+y^2 = 2\sqrt{x^2+y^2}-x \\ &\iff x^2+y^2+x = 2\sqrt{x^2+y^2} \qquad (8) \end{aligned}$$

a equação cartesiana da curva.

Uma curva $\mathcal{C}$ é *simétrica em relação ao eixo$-OX$* quando $(x, y) \in \mathcal{C}$ se, e só se, $(x, -y) \in \mathcal{C}$ (verifique!).

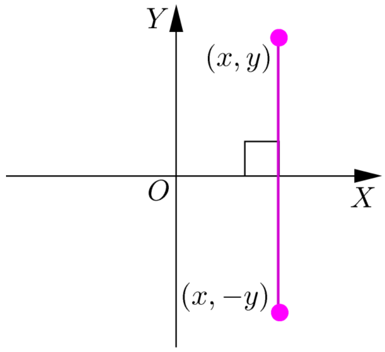

Fig. 37: Simetria em relação ao eixo$-OX$.

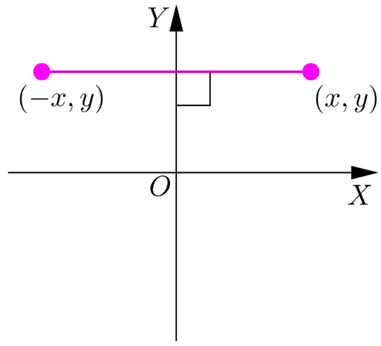

Fig. 38: Simetria em relação ao eixo$-OY$.

Analogamente, uma curva $\mathcal{C}$ é *simétrica em relação ao eixo$-OY$* quando $(x, y) \in \mathcal{C}$ se, e só se, $(-x, y) \in \mathcal{C}$ (verifique!).

Pela equação (8), é fácil ver que esta curva é simétrica em relação ao eixo$-OX$, mas não é simétrica em relação ao eixo$-OY$.

Então, para esboçá-la, vamos variar o ângulo θ apenas no intervalo $[0, \pi]$.

Primeiro observe que não existe θ tal que $\rho = 0$, pois, neste caso, teríamos $\cos\theta = 2$, o que é uma contradição.

Observe que como $\cos\theta$ decresce no intervalo $[0, \pi]$, ρ cresce neste intervalo.

Tomando os pontos em coordenadas polares $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, $P_3 = \left(2, \frac{\pi}{2}\right)$, $P_4 = \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ e $P_5 = (3, \pi)$ pertencentes à curva, podemos esboçar seu traço situado no semi-plano $y \geq 0$.

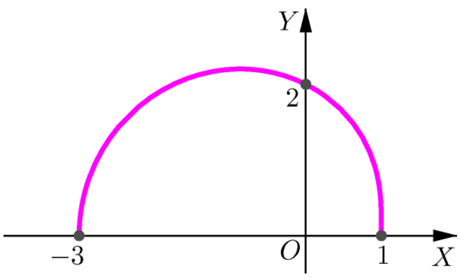

Fig. 39: Parte da curva $\mathcal{C}$ na região $y \geq 0$

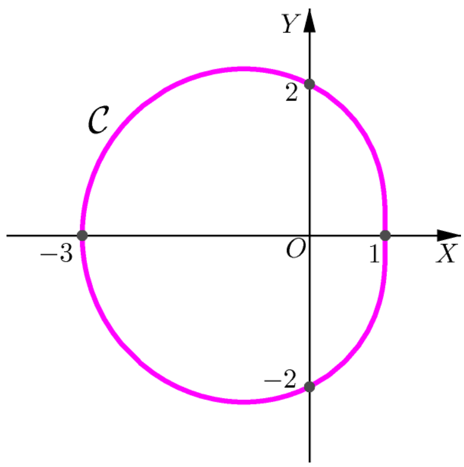

Fig. 40: Curva $\mathcal{C}$

Usando a simetria da curva em relação ao eixo$-OX$, podemos finalmente obter seu traço (ver Fig. 40). $\square$

(d) $\mathcal{C} : \rho = 1 + 2\cos\theta$.

Solução.

Neste exemplo, ρ pode assumir valores negativos e positivos.

Logo $\rho = \pm\sqrt{x^2+y^2}$ e $\cos\theta = \dfrac{\pm x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Substituindo ρ e θ na equação dada, obtemos que:

$$\begin{aligned} \pm\sqrt{x^2+y^2} = 1 \pm \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} &\iff x^2+y^2 = \pm\sqrt{x^2+y^2} + 2x \\ &\iff (x^2+y^2-2x)^2 = x^2+y^2 , \end{aligned}$$

é a equação cartesiana da curva.

É fácil verificar que esta curva é simétrica em relação ao eixo$-OX$, mas não é simétrica em relação ao eixo$-OY$.

Portanto, para esboçá-la, basta variar o parâmetro θ no intervalo $[0, \pi]$.

Temos, para $\theta \in [0, \pi]$, que:

- $\rho = 1 + 2\cos\theta = 0$ se, e só se, $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$, ou seja, $\rho = 0$ se, e só se, $\theta_0 = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$;
- $\rho > 0$ se, e só se, $-\dfrac{1}{2} < \cos\theta \leq 1$, ou seja, se, e só se, $0 \leq \theta < \dfrac{2\pi}{3}$;
- $\rho < 0$ se, e só se, $-1 \leq \cos\theta < -\dfrac{1}{2}$, ou seja, se, e só se, $\dfrac{2\pi}{3} < \theta \leq \pi$.

Tomando os pontos em coordenadas polares $P_1 = (3, 0)$, $P_2 = (2, \pi/3)$, $P_3 = (1, \pi/2)$, $P_4 = (0, 2\pi/3)$ e $P_5 = (-1, \pi)$ da curva, podemos esboçar a parte da curva correspondente ao intervalo $[0, \pi]$ (ver Fig. 41).

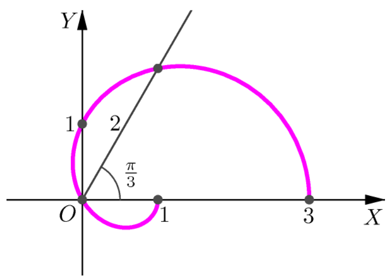

Fig. 41: Curva $\mathcal{C}$ descrita variando θ em $[0, \pi]$

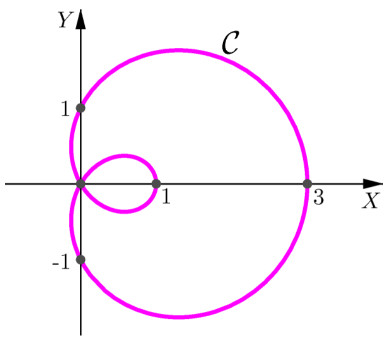

Fig. 42: Curva $\mathcal{C}$

Sendo a curva simétrica em relação ao eixo$-OX$, obtemos o esboço completo da curva $\mathcal{C}$ (ver Fig. 42). □

(e) $\mathcal{C} : \rho^2 = \cos\theta$.

Solução.

Sendo $\rho = \pm\sqrt{x^2+y^2}$ e $\cos\theta = \dfrac{\pm x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, obtemos a equação cartesiana da curva:

$$x^2+y^2 = \frac{\pm x}{\sqrt{x^2+y^2}} \iff (x^2+y^2)^{3/2} = \pm x \iff (x^2+y^2)^3 = x^2 .$$

Como esta curva é simétrica em relação aos eixos OX e OY, basta analizá-la no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Temos que $\rho = 0$ se, e só se, $\cos\theta = 0$, ou seja, $\rho = 0$ se, e só se, $\theta = \frac{\pi}{2}$, para $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Considerando os pontos da curva em coordenadas polares $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = \left(\frac{1}{2^{1/4}}, \frac{\pi}{4}\right)$ e $P_3 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, podemos esboçar seu traço situado no primeiro quadrante (ver Fig. 43).

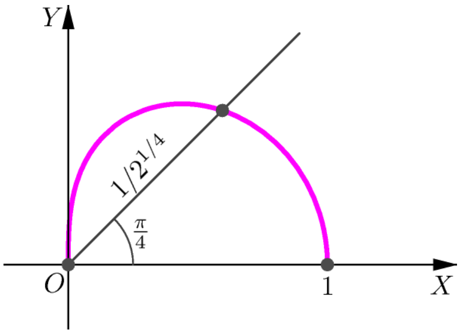

Fig. 43: Curva $\mathcal{C}$ no primeiro quadrante

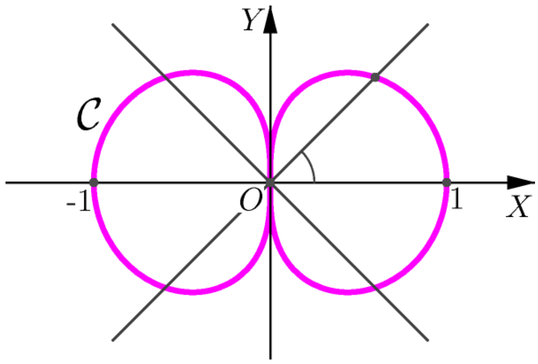

Fig. 44: Curva $\mathcal{C}$

Usando as simetrias em relação aos eixos OX e OY, podemos esboçar a curva $\mathcal{C}$ (ver Fig. 44).

□

(f) $\mathcal{C} : \rho = 2\,\text{sen}^2\,\frac{\theta}{2}$.

Solução.
Usando a relação trigonométrica:

$$2\,\text{sen}^2\,\frac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta\,,$$

obtemos que:

$$\rho = 1 - \cos\theta\,.$$

Logo, pelo exemplo 13, a curva é a cardióide, cuja equação cartesiana é

$$x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

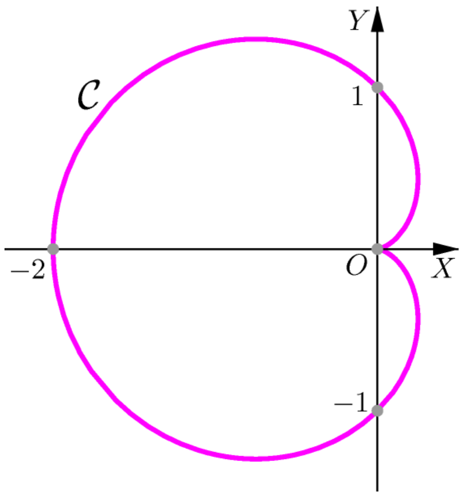

Fig. 45: Curva $\mathcal{C}$, a cardióide

□

(g) $\mathcal{C} : \rho\,\text{tg}\,\theta = 1$.

Solução.
Sendo $\rho = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ e $\text{tg}\,\theta = \frac{y}{x}$, obtemos que:

$$\begin{aligned} \pm\sqrt{x^2 + y^2}\,\frac{y}{x} = 1 \quad &\iff \quad \pm y\sqrt{x^2 + y^2} = x \\ &\iff \quad y^2(x^2 + y^2)^2 = x^2\,, \end{aligned} \tag{9}$$

é a equação cartesiana da curva.

Como, pela equação (9), a curva é simétrica com respeito aos eixos OX e OY, basta analizá-la para θ no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Temos:

- $\rho = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 0$ se, e só se, $\theta = \frac{\pi}{2}$, para $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;
- $\rho = 1$ para $\theta = \frac{\pi}{4}$;
- $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \rho(\theta) = \lim\limits_{\theta\to 0^+} \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = +\infty$;
- $\lim\limits_{\theta\to 0^+} x(\theta) = \lim\limits_{\theta\to 0^+} \rho(\theta)\cos\theta = \lim\limits_{\theta\to 0^+} \dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} = +\infty$;
- $\lim\limits_{\theta\to 0^+} y(\theta) = \lim\limits_{\theta\to 0^+} \rho(\theta)\operatorname{sen}\theta = \lim\limits_{\theta\to 0^+} \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\operatorname{sen}\theta = \lim\limits_{\theta\to 0^+} \cos\theta = 1$.

Pelo obtido acima, vemos que:

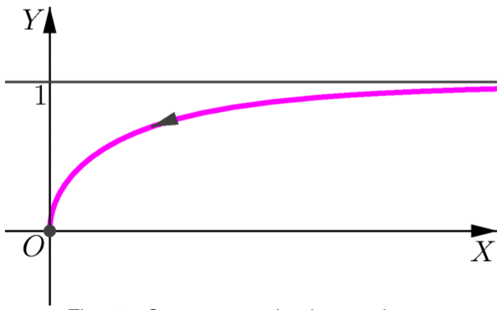

Fig. 46: Curva $\mathcal{C}$ no primeiro quadrante

é o esboço do traço da curva que se situa no primeiro quadrante.

Então, pela simetria da curva em relação aos eixos OX e OY, temos que o traço da curva é o mostrado abaixo.

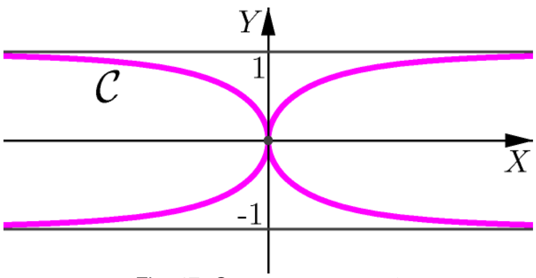

Fig. 47: Curva $\mathcal{C} : \rho\ \operatorname{tg}\theta = 1$ □

(h) $\mathcal{C} : \rho = \cos 2\theta$.

Solução.

Como $\rho = \pm\sqrt{x^2+y^2}$ e $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, obtemos que:

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \iff \pm(x^2+y^2)^{3/2} = x^2-y^2$$
$$\iff (x^2+y^2)^3 = (x^2-y^2)^2 ,$$

é a equação cartesiana da curva, que é simétrica em relação aos eixos OX e OY e às retas

$y = x$ e $y = -x$.

Então basta analisar a curva no intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Temos que:

- $\rho > 0$ para $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right)$;
- $\rho = \cos 2\theta = \cos \dfrac{\pi}{2} = 0$ para $\theta = \dfrac{\pi}{4}$;
- $\rho = \cos 2\theta = \cos 0 = 1$ para $\theta = 0$.

Logo,

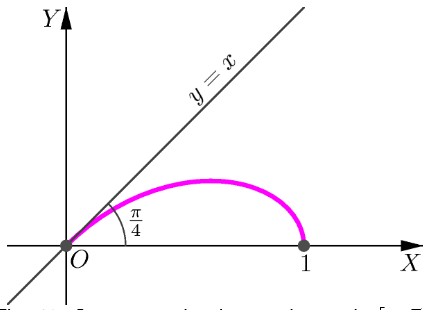

Fig. 48: Curva $\mathcal{C}$ variando θ no intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$

é um esboço da curva para θ variando no intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Usando as simetrias em relação aos eixos OX e OY e em relação à reta $y = x$, obtemos o esboço completo da curva (figura abaixo).

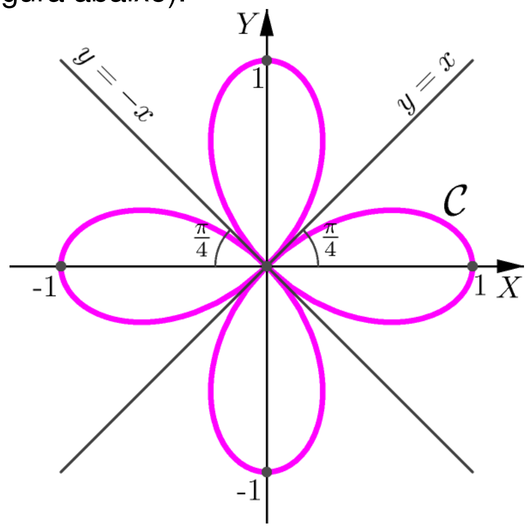

Fig. 49: Curva $\mathcal{C}$

□

(i) $\mathcal{C} : \rho = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$.

Solução.

Sendo $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta$, obtemos, substituindo $\rho = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\theta = \dfrac{\pm x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ e $\text{sen}\,\theta = \dfrac{\pm y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ na equação polar $\rho\cos\theta = \cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta$, que:

$$x = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \iff x(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$$

é a equação cartesiana da curva.

Logo, como a curva é simétrica em relação ao eixo$-OX$, basta analisar a curva em coordenadas polares $\rho = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$ no intervalo $[0, \pi]$

Temos:

- $\rho = 1$ para $\theta = 0$;
- $\rho = 0$ para $\theta = \dfrac{\pi}{4}$;
- $\rho > 0$ para $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right)$;
- $\rho < 0$ para $\theta \in \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$;
- $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} \rho(\theta) = -\infty$;
- $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} x(\theta) = \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} \rho \cos \theta = \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} \cos 2\theta = -1$;
- $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} y(\theta) = \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} \rho\, \text{sen}\, \theta = \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\text{sen}\, \theta}{\cos \theta} \cos 2\theta = -\infty$;
- $x(\theta) > y(\theta)$ para $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$;
- $\rho > 0$ para $\theta \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$;
- $\rho = 0$ para $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$;
- $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^+} \rho(\theta) = +\infty$;
- $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^+} x(\theta) = \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^+} \cos 2\theta = -1$;
- $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^+} y(\theta) = \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\text{sen}\, \theta}{\cos \theta} \cos 2\theta = +\infty$;
- $\rho < 0$ para $\theta \in \left(\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right)$;
- $\rho = -1$ para $\theta = \pi$;
- $-x(\theta) < y(\theta)$ para $\theta \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

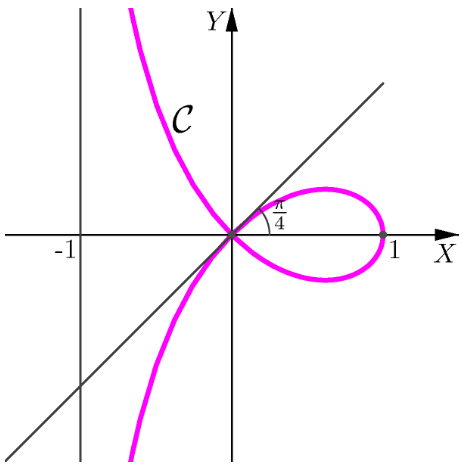

Fig. 50: Curva $\mathcal{C}$ no intervalo $[0, \pi]$

Na figura 50 mostramos o esboço da curva no intervalo $[0, \pi]$.
Como o esboço já é simétrico com respeito ao eixo$-OX$, este é o traço da curva completa. $\square$

(j) $\mathcal{C} : \rho = 1 + \operatorname{sen} 2\theta$.

Solução.
Pela relação trigonométrica,

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\,,$$

obtemos que

$$\rho = 1 + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,.$$

Além disso, como $\rho \geq 0$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$, temos que

$$\sqrt{x^2+y^2} = 1 + \frac{2xy}{x^2+y^2} \iff (x^2+y^2)^{3/2} = x^2+y^2+2xy = (x+y)^2 \tag{10}$$

é a equação cartesiana da curva.

Por (10), é fácil verificar que a curva $\mathcal{C}$ é simétrica em relação à reta $y = x$ (isto é, $(x, y) \in \mathcal{C} \iff (y, x) \in \mathcal{C}$) e à reta $y = -x$ (isto é, $(x, y) \in \mathcal{C} \iff (-y, -x) \in \mathcal{C}$) Logo, basta analisar a curva $\rho = 1 + \operatorname{sen} 2\theta$ para θ no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Temos: $\rho = 0$ para $\theta = -\frac{\pi}{4}$; $\rho = 1$ para $\theta = 0$; $\rho = 2$ para $\theta = \frac{\pi}{4}$, e $\rho > 0$ para $\theta \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

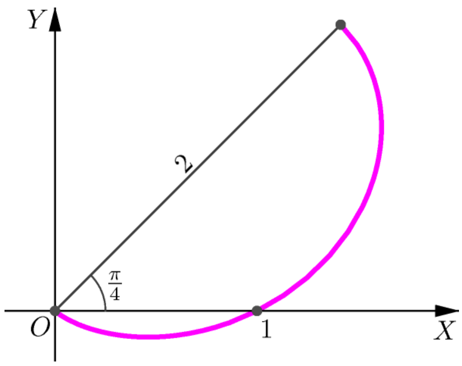

Fig. 51: Curva $\mathcal{C}$ no intervalo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

Na figura 51 mostramos o esboço da curva no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Pelas simetrias da curva, é fácil ver que o esboço de $\mathcal{C}$ é o mostrado na figura 52.

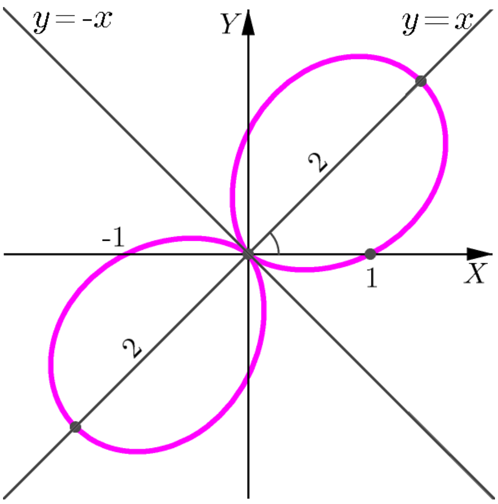

Fig. 52: Curva $\mathcal{C} : \rho = 1 + \operatorname{sen} 2\theta$

□

(k) $\mathcal{C} : \rho = \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$.

Solução.

Sendo $2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta$, temos que $2\rho^2 = 1 - \cos\theta$.

Substituindo $\rho^2 = x^2 + y^2$ e $\cos\theta = \dfrac{\pm x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ nessa equação, obtemos que:

$$2(x^2+y^2) = 1 \mp \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \iff 2(x^2+y^2)^{3/2} = \sqrt{x^2+y^2} \mp x$$

$$\iff \left(2(x^2+y^2)^{3/2} - (x^2+y^2)^{1/2}\right)^2 = x^2 \tag{11}$$

é a equação cartesiana da curva.

Logo a curva é simétrica em relação aos eixos OX e OY.

Mas, como a função $\theta \longmapsto \operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}$ é periódica de período 4π, devemos analisar a curva $\rho = \operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}$ no intervalo $[0, \pi]$.

Temos: $\rho = 0$ para $\theta = 0$; $\rho > 0$ em $(0, \pi]$; $\rho = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ para $\theta = \dfrac{\pi}{2}$; $\rho = 1$ para $\theta = \pi$.

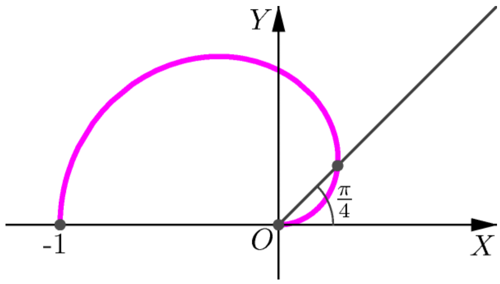

Fig. 53: Curva $\mathcal{C}$ no intervalo $[0, \pi]$

Na figura 53 mostramos o esboço da curva no intervalo $[0, \pi]$.

Usando as simetrias, obtemos o traço da curva, mostrado na figura abaixo.

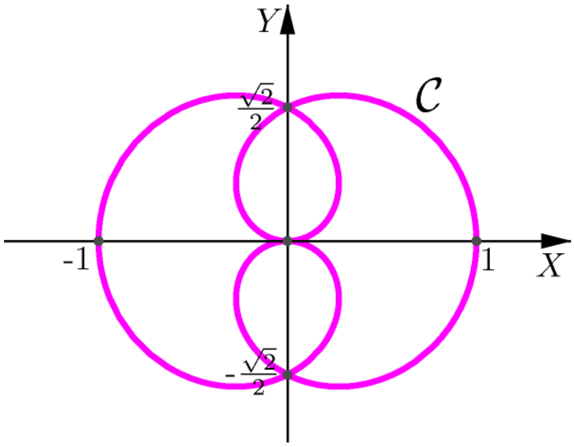

Fig. 54: Curva $\mathcal{C}$

□

(l) $\mathcal{C} : \rho = \operatorname{sen} 3\theta$.

Solução.

Sendo

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 3\theta &= \operatorname{sen}(\theta + 2\theta) = \operatorname{sen}\theta\cos 2\theta + \cos\theta\operatorname{sen} 2\theta \\
&= \operatorname{sen}\theta(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + 2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta = 3\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta - \operatorname{sen}^3\theta \\
&= \operatorname{sen}\theta(3\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta),
\end{aligned}$$

obtemos que:

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = \frac{\pm y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{3x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \iff (x^2+y^2)^2 = y(3x^2-y^2)$$

é a equação cartesiana da curva.

Portanto, ela é simétrica em relação ao eixo$-OY$, mas não é simétrica em relação ao eixo$-OX$.

Em vez de usar as simetrias da curva, vamos analisá-la num ciclo completo, isto é, variando θ no intervalo $[0, 2\pi]$.

- $\rho = 0 \iff \text{sen}\, 3\theta = 0 \iff 3\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi \iff \theta = 0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \pi, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}, 2\pi$;
- $\rho = 1 \iff \text{sen}\, 3\theta = 1 \iff 3\theta = \dfrac{\pi}{2}, 2\pi + \dfrac{\pi}{2}, 4\pi + \dfrac{\pi}{2} \iff \theta = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{9\pi}{6}$;
- $\rho = -1 \iff \text{sen}\, 3\theta = -1 \iff 3\theta = \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi + \dfrac{3\pi}{2}, 4\pi + \dfrac{3\pi}{2} \iff \theta = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}$;
- $\rho > 0$ em $\left(0, \dfrac{\pi}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right) \cup \left(\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right)$;
- $\rho < 0$ em $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\pi, \dfrac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$.

Usando as informações acima, vemos que o traço da curva é o mostrado na figura 55. $\square$

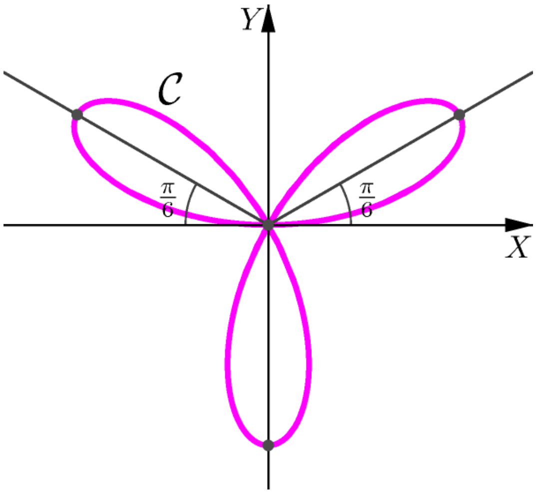

Fig. 55: Curva $\mathcal{C}$

Agora, vamos apresentar alguns exemplos que nos mostram como podemos determinar regiões do plano usando coordenadas polares, considerando sempre $\rho \geq 0$.

Exemplo 15

Faça um esboço da região $\mathcal{R}$ do plano dada pelos seguintes sistemas de desigualdades:

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \dfrac{2}{\cos\theta} \\ -\dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq 0 \end{cases} \quad e \quad \mathcal{R}_2 : \begin{cases} 2\,\text{sen}\,\theta \leq \rho \leq \dfrac{2}{\cos\theta} \\ -\dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4} \end{cases},$$

onde (ρ, θ) são as coordenadas polares de um ponto da região $\mathcal{R}$.

Solução.

Primeiro analisaremos as curvas que delimitam a região:

(I) $\rho = \dfrac{2}{\cos\theta} \iff \rho\cos\theta = 2 \iff x = 2$, que é uma reta vertical.

(II) $\rho = 2\,\text{sen}\,\theta \iff \pm\sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{\pm 2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \iff x^2+y^2 = 2y \iff x^2+(y-1)^2 = 1$, que é o círculo de centro $(0,1)$ e raio 1.

(III) $\theta = \dfrac{\pi}{4} \iff \dfrac{y}{x} = \text{tg}\,\theta = 1 \iff y = x$, que é a bissetriz dos primeiro e terceiro quadrantes.

(IV) $\theta = -\dfrac{\pi}{4} \iff \dfrac{y}{x} = \text{tg}\,\theta = -1 \iff y = -x$, que é a bissetriz dos segundo e quarto quadrantes.

Então

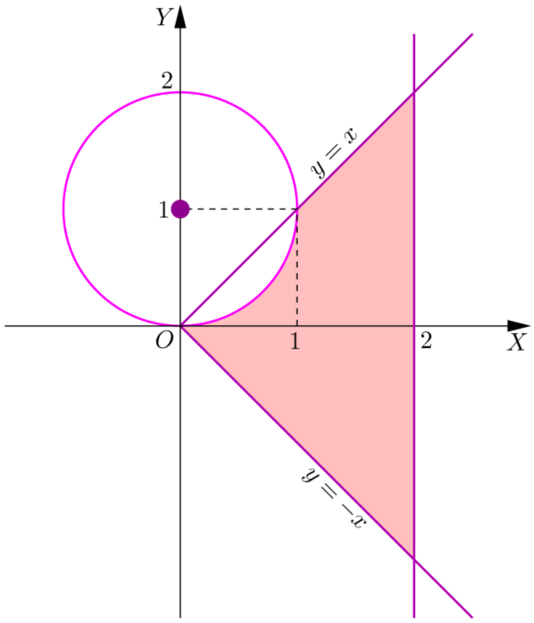

Fig. 56: $\mathcal{R}$ é a região sombreada

é o esboço da região no sistema de eixos OXY e

$$\mathcal{R}: \begin{cases} x^2+y^2-2y \geq 0 \\ x \leq 2 \\ x-y \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases}$$

é a região dada em coordenadas cartesianas.

Como a interseção do círculo $x^2+y^2=2y$ com a reta $y=x$ consiste dos pontos $(0,0)$ e $(1,1)$, e na equação $x^2+y^2=2y$, com $y \in [0,1]$, temos $y = 1-\sqrt{1-x^2}$, $x \in [0,1]$, a região $\mathcal{R}$ pode ser descrita também na forma $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, onde:

$$\mathcal{R}_1: \begin{cases} -x \leq y \leq 1-\sqrt{1-x^2} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{R}_2: \begin{cases} -x \leq y \leq x \\ 1 \leq x \leq 2\,. \end{cases} \qquad \square$$

Exemplo 16

Descreva as regiões esboçadas abaixo por meio de um sistema de desigualdades da forma

$$\begin{cases} \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta) \\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \end{cases}.$$

(a)

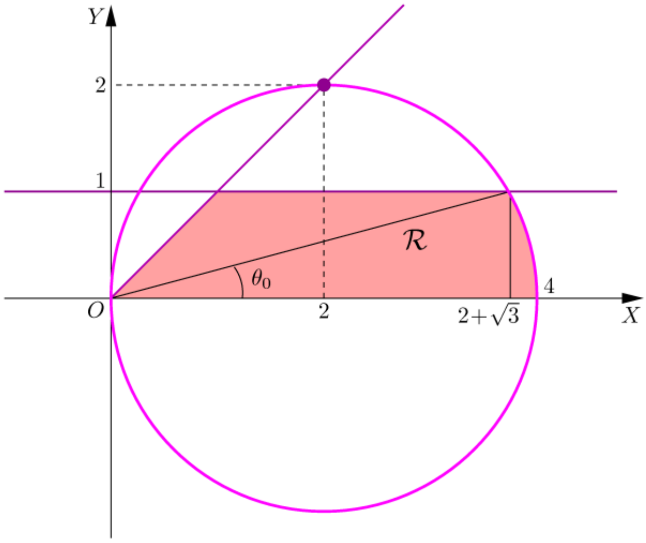

Fig. 57: Região $\mathcal{R}$

Solução.

Primeiro vamos determinar as equações polares das curvas $\mathcal{C}_1 : (x-2)^2+y^2 = 4\,,\quad \mathcal{C}_2 : y = 1\,,$ $\mathcal{C}_3 : x - y = 0$ e $\mathcal{C}_4 : y = 0$ que delimitam a região $\mathcal{R}$.

(I) $(x-2)^2+y^2 = 4 \iff x^2-4x+4+y^2 = 4 \iff x^2+y^2 = 4x \iff \rho^2 = 4\rho\cos\theta \iff \rho = 4\cos\theta\,.$

(II) $y = 1 \iff \rho\,\text{sen}\,\theta = 1 \iff \rho = \dfrac{1}{\text{sen}\,\theta}\,.$

(III) $x - y = 0 \iff x = y \iff \text{tg}\,\theta = 1 \iff \theta = \dfrac{\pi}{4}\,.$

(IV) $y = 0 \iff \rho\,\text{sen}\,\theta = 0 \iff \text{sen}\,\theta = 0 \iff \theta = 0\,.$

Por um cálculo simples, obtemos que $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 = \{(1,1)\}$; $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{(2-\sqrt{3},1),(2+\sqrt{3},1)\}$; $y = \pm\sqrt{4x-x^2}$ ou $x = 2 \pm \sqrt{4-y^2}$ para $(x,y) \in \mathcal{C}_1$.

Logo,

$$\mathcal{R} : \begin{cases} 0 \le \rho \le 4\cos\theta \\ 0 \le \theta \le \theta_0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} 0 \le \rho \le 1/\text{sen}\,\theta \\ \theta_0 \le \theta \le \pi/4 \end{cases}$$

é a região dada em coordenadas polares, onde $\text{tg}\,\theta_0 = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$, $\theta_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, e

$$\mathcal{R} : \begin{cases} 0 \le y \le x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \bigcup \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 1 \le x \le 2+\sqrt{3} \end{cases} \bigcup \begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{4x-x^2} \\ 2+\sqrt{3} \le x \le 4 \end{cases}$$

ou, simplesmente,

$$\mathcal{R} : \begin{cases} y \le x \le 2+\sqrt{4-y^2} \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

é a região dada em coordenadas cartesianas. □

(b)

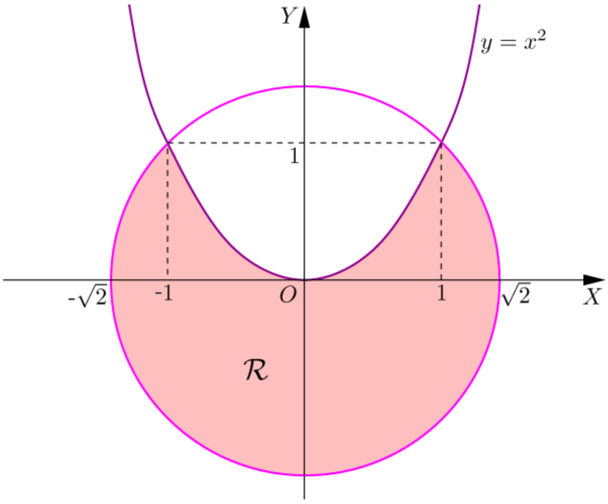

Fig. 58: Região $\mathcal{R}$

Solução.
As curvas que delimitam a região são $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 = 2$ e $\mathcal{C}_2 : y = x^2$, que em coordenadas polares são dadas por: $\mathcal{C}_1 : \rho = \sqrt{2}$ e $\mathcal{C}_2 : \rho$ sen $\theta = \rho^2 \cos^2\theta$, ou seja, $\mathcal{C}_2 : \rho = \operatorname{tg}\theta \sec\theta$.

Como $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{(1,1),(-1,1)\}$, temos que o ângulo polar θ varia no intervalo $\left[-\pi - \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right] = \left[-\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Logo,

$$\mathcal{R} : \begin{cases} \operatorname{tg}\theta \sec\theta \le \rho \le \sqrt{2} \\ -\dfrac{5\pi}{4} \le \theta \le -\pi \end{cases} \cup \begin{cases} 0 \le \rho \le \sqrt{2} \\ -\pi \le \theta \le 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \operatorname{tg}\theta \sec\theta \le \rho \le \sqrt{2} \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

é a região dada em coordenadas polares, e

$$\mathcal{R} : \begin{cases} -\sqrt{2 - x^2} \le y \le x^2 \\ -1 \le x \le 1 \end{cases} \cup \begin{cases} -\sqrt{2 - x^2} \le y \le \sqrt{2 - x^2} \\ -\sqrt{2} \le x \le -1 \end{cases} \cup \begin{cases} -\sqrt{2 - x^2} \le y \le \sqrt{2 - x^2} \\ 1 \le x \le \sqrt{2} \end{cases}$$

é a região dada em coordenadas cartesianas. □

Exemplo 17

Descreva a região $\mathcal{R}$ do plano interior a ambas as curvas: $\mathcal{C}_1 : \rho = 4\sqrt{3}\cos\theta$ e $\mathcal{C}_2 : \rho = 4\,\text{sen}\,\theta$.

Solução.
As curvas em coordenadas cartesianas são dadas por:

• $\mathcal{C}_1 : \rho = 4\sqrt{3}\cos\theta \iff \pm\sqrt{x^2+y^2} = 4\sqrt{3}\left(\dfrac{\pm x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \iff x^2 + y^2 = 4\sqrt{3}\,x \iff (x - 2\sqrt{3})^2 + y^2 = 12$, que é o círculo de centro $(2\sqrt{3}, 0)$ e raio $2\sqrt{3}$.

• $\mathcal{C}_2 : \rho = 4\,\text{sen}\,\theta \iff \pm\sqrt{x^2+y^2} = 4\left(\dfrac{\pm y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \iff x^2 + y^2 = 4y \iff x^2 + (y-2)^2 = 4$, que é o círculo de centro $(0,2)$ e raio 2.

Assim,

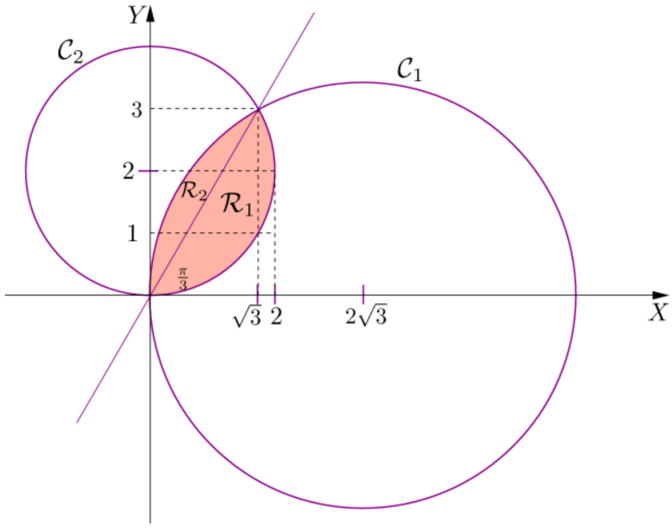

Fig. 59: Região $\mathcal{R}$

é um esboço da região no sistema de coordenadas OXY.

Temos que

$$\begin{aligned}
(x,y)\in\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2 &\iff x^2+y^2=4\sqrt{3}\,x \quad \text{e} \quad x^2+y^2=4y\\
&\iff y=\sqrt{3}x \quad \text{e} \quad x^2+y^2=4y\\
&\iff y=\sqrt{3}x \quad \text{e} \quad x^2+3x^2=4\sqrt{3}x\\
&\iff y=\sqrt{3}x \quad \text{e} \quad 4x^2=4\sqrt{3}\,x\\
&\iff x=0 \quad \text{e} \quad y=0 \quad \text{ou} \quad x=\sqrt{3} \quad \text{e} \quad y=3\,.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2=\left\{(0,0),\left(\sqrt{3},3\right)\right\}$.

Como o ângulo θ_0 que o segmento OP_0, $P_0=\left(\sqrt{3},3\right)$, faz com o eixo$-OX$ é $\frac{\pi}{3}$, pois $\operatorname{tg}\theta_0=\frac{y}{x}=\sqrt{3}$, temos que a região em coordenadas polares é $\mathcal{R}=\mathcal{R}_1\cup\mathcal{R}_2$, onde:

$$\mathcal{R}_1:\begin{cases}0\leq\rho\leq 4\operatorname{sen}\theta\\ 0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{3}\end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{R}_2:\begin{cases}0\leq\rho\leq 4\sqrt{3}\cos\theta\\ \dfrac{\pi}{3}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\,,\end{cases}$$

e, em coordenadas cartesianas,

$$\mathcal{R}:\begin{cases}2\sqrt{3}-\sqrt{12-y^2}\;\leq\; x\;\leq\;\sqrt{4-(y-2)^2}\\ \qquad\qquad 0\;\leq\; y\;\leq\; 3\,.\end{cases}$$

□

Exemplo 18

Considere a região $\mathcal{R}$ do plano dada pelo sistema de inequações:

$$\mathcal{R}:\begin{cases}\dfrac{x^2}{12}\;\leq\; y\;\leq\;\dfrac{1}{2}\sqrt{16-x^2}\\ \quad 0\;\leq\; x\;\leq\; 2\sqrt{3}\,.\end{cases}$$

(a) *Faça um esboço detalhado da região $\mathcal{R}$.*

(b) *Descreva a região por meio de um sistema de inequações da forma:*

$$\mathcal{R}: \begin{cases} \rho_1(\theta) & \leq & \rho & \leq & \rho_2(\theta) \\ \theta_1 & \leq & \theta & \leq & \theta_2\,, \end{cases}$$

onde (ρ, θ) são as coordenadas polares de um ponto do plano.

Solução.

(a) As curvas que delimitam a região $\mathcal{R}$ são:

- as retas verticais $x = 0$ e $x = 2\sqrt{3}$;
- a parábola $\mathcal{C}_1 : x^2 = 12y$ de vértice na origem e reta-focal igual ao eixo$-OY$, voltada para cima;
- a parte $\mathcal{C}_2$, situada no semi-plano $y \geq 0$, da elipse:

$$\mathcal{C}_2 : 2y = \sqrt{16 - x^2} \quad \Longrightarrow \quad 4y^2 = 16 - x^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 4y^2 = 16 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1\,,$$

com centro $C = (0, 0)$, vértices $(4, 0)$, $(-4, 0)$, $(0, 2)$ e $(0, -2)$ e reta-focal igual ao eixo$-OX$.

Observe que $\left(2\sqrt{3}, 1\right) \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. Portanto, o esboço da região $\mathcal{R}$ é:

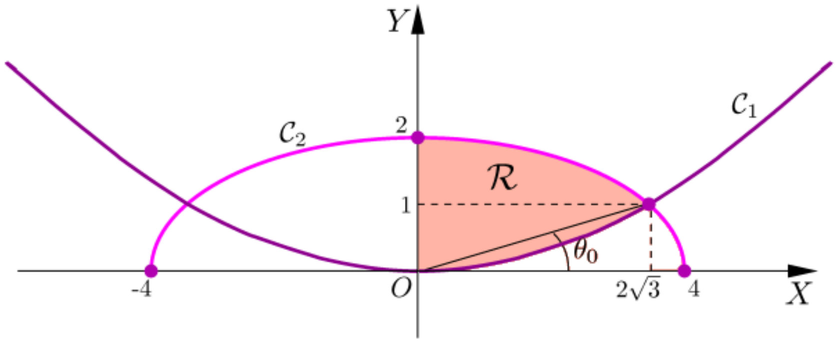

Fig. 60: Região $\mathcal{R}$

(b) As curvas $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ em coordenadas polares são dadas por

- $12y = x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 12\rho \operatorname{sen}\theta = \rho^2 \cos^2\theta \quad \Longleftrightarrow \quad \rho = 12\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} = 12 \operatorname{tg}\theta \sec\theta\,;$
- $x^2 + 4y^2 = 16 \quad \Longleftrightarrow \quad \rho^2(\cos^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta) = 16 \quad \Longleftrightarrow \quad \rho^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta) = 16 \quad \Longleftrightarrow$
$\rho = \dfrac{4}{\sqrt{1 + 3\operatorname{sen}^2\theta}}\,;$

Seja $\theta_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ tal que $\operatorname{tg}\theta_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Então $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, onde:

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 12 \operatorname{tg}\theta \sec\theta \\ 0 \leq \theta \leq \theta_0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{R}_2 : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \dfrac{4}{\sqrt{1 + 3\operatorname{sen}^2\theta}} \\ \theta_0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\,. \end{cases}$$

□

Exemplo 19

Considere a região $\mathcal{R}$ dada pelo sistema de inequações:

$$\mathcal{R}: \begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4 \\ x - y \geq 0 \\ y \leq 2 \end{cases}.$$

Faça um esboço da região e descreva-a nas seguintes formas:

$$\mathcal{R}: \begin{cases} y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \\ x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases},$$

onde x e y são as coordenadas cartesianas de um ponto de $\mathcal{R}$, e

$$\mathcal{R}: \begin{cases} \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta) \\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \end{cases},$$

onde ρ e θ são as coordenadas polares de um ponto da região.

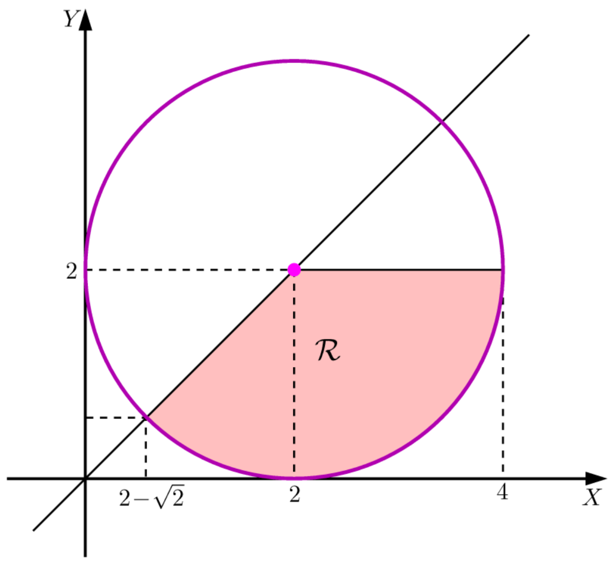

Fig. 61: Região $\mathcal{R}$

Solução.

É fácil ver que o esboço da região é o mostrado na figura 61.

A região é delimitada pelas retas $r_1 : y = x$, $r_2 : y = 2$, e pelo círculo $\mathcal{C} : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ de centro $(2, 2)$ e raio 2.

Sendo

$$y = 2 - \sqrt{4 - (x-2)^2} = 2 - \sqrt{4x - x^2},$$

para todo $(x, y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{R}$, e $r_1 \cap \mathcal{C} = \left\{(2-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}), (2+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})\right\}$, pois:

$$\begin{aligned} (x, y) \in r \cap \mathcal{C} &\iff y = x \quad \text{e} \quad (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ &\iff y = x \quad \text{e} \quad (x-2)^2 + (x-2)^2 = 4 \\ &\iff y = x \quad \text{e} \quad (x-2)^2 = 2 \\ &\iff y = x \quad \text{e} \quad x = 2 \pm \sqrt{2}, \end{aligned}$$

vemos que a região pode ser descrita na forma $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, onde:

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} 2 - \sqrt{4x - x^2} \leq y \leq x \\ 2 - \sqrt{2} \leq x \leq 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_2 : \begin{cases} 2 - \sqrt{4x - x^2} \leq y \leq 2 \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases}.$$

As curvas $\mathcal{C}$, r_1 e r_2 são dadas, em coordenadas polares, por:

- $r_1 : y = x \iff r_1 : \rho \operatorname{sen}\theta = \rho\cos\theta \iff r_1 : \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = 1 \iff r_1 : \theta = \dfrac{\pi}{4}$;
- $r_1 : y = 2 \iff r_2 : \rho = \dfrac{2}{\operatorname{sen}\theta} = 2\operatorname{cossec}\theta$;

- $$\begin{aligned}
\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 &\iff \mathcal{C} : \rho^2 - 4\rho(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) + 4 = 0 \\
&\iff \mathcal{C} : \rho^2 - 4\sqrt{2}\,\rho\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}}\right) + 4 = 0 \\
&\iff \mathcal{C} : \rho^2 - 4\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\rho + 4 = 0 \\
&\iff \mathcal{C} : \rho = \frac{1}{2}\left(4\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \pm \sqrt{32\cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - 16}\right) \\
&\iff \mathcal{C} : \rho = 2\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \pm \sqrt{8\left(1 - \operatorname{sen}^2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right) - 4} \\
&\iff \mathcal{C} : \rho = 2\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \pm \sqrt{4 - 8\operatorname{sen}^2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} \\
&\iff \mathcal{C} : \rho = 2\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \pm 2\sqrt{1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}\,.
\end{aligned}$$

Da equação acima, que relaciona as coordenadas polares ρ e θ de um ponto de $\mathcal{C}$, obtemos que:

- $$\begin{aligned}
1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 0 &\iff \operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \theta - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} \\
&\iff \theta = 0 \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) > 0 &\iff \left|\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right| < \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \theta - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \\
&\iff \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Observe que as retas $\theta = 0$ ($\iff y = 0$) e $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ($\iff x = 0$) tangenciam o círculo $\mathcal{C}$ nos pontos $(2,0)_{OXY}$ e $(0,2)_{OXY}$, respectivamente.

Logo, a equação polar do arco $\mathcal{C}_1$ de $\mathcal{C}$, que liga os pontos $(0,2)$ e $(2,0)$ e contém o ponto $(2-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$, é dada por:

$$\mathcal{C}_1 : \rho_1(\theta) = 2\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - 2\sqrt{1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

e a equação polar do arco $\mathcal{C}_2$ de $\mathcal{C}$, que liga os pontos $(0,2)$ e $(2,0)$ e não contém o ponto $(2-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$, é dada por:

$$\mathcal{C}_2 : \rho_2(\theta) = 2\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Assim, em coordenadas polares, a região $\mathcal{R}$ é a união das regiões $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$,

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta) \\ 0 \leq \theta \leq \theta_0 \end{cases} \quad , \qquad \mathcal{R}_2 : \begin{cases} \rho_1(\theta) \leq \rho \leq 2\,\text{cossec}\,\theta \\ \theta_0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

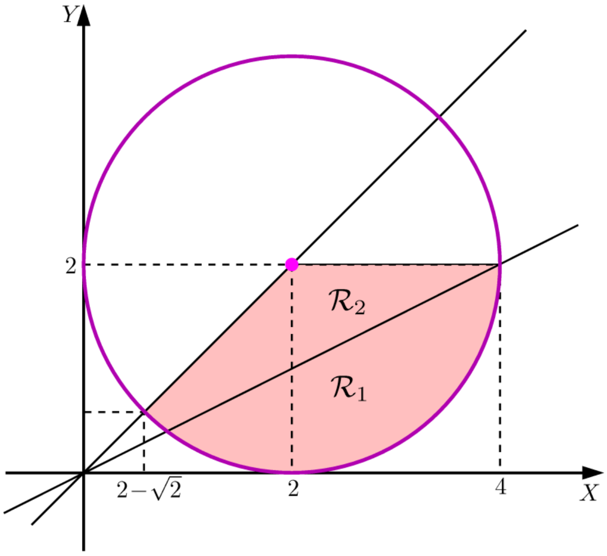

Fig. 62: Região $\mathcal{R}$

onde $\text{tg}\,\theta_0 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$, $\theta_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. $\square$