Aula 5

Esferas

Iniciaremos o nosso estudo sobre superfícies com a esfera, que já nos é familiar.

A esfera S de centro no ponto A e raio igual a $R > 0$, como já foi definida anteriormente, é o conjunto dos pontos do espaço que estão a distância R do ponto A, ou seja,

$$S = \{P \mid d(P, A) = R\}.$$

Dado um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, vimos que

$$S : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

é a equação cartesiana da esfera S de centro no ponto $A = (a, b, c)$ e raio R.

1. Posição relativa entre esferas

Já provamos que se π é um plano e S é uma esfera, então a interseção de S com π pode ser o conjunto vazio, um ponto ou um círculo.

Vamos provar agora, usando os recursos da Geometria Analítica, que a interseção de duas esferas distintas também só pode ser o conjunto vazio, um ponto ou um círculo.

Proposição 1

Sejam S_1, S_2 *esferas centradas em* A_1, A_2, *e de raios* $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, *respectivamente, e seja* $L = d(A_1, A_2)$. *Então:*

(a) $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ *se, e somente se,* $L > R_1 + R_2$ *ou* $R_2 > R_1 + L$ *ou* $R_1 > R_2 + L$.

(b) $S_1 \cap S_2$ *é um único ponto se, e somente se,*

- $R_1 + R_2 = L$ *ou* • $R_1 + L = R_2$ *e* $L > 0$ *ou* • $R_2 + L = R_1$ *e* $L > 0$.

(c) $S_1 \cap S_2$ *é um círculo se, e somente se,* $L < R_1 + R_2$, $R_2 < R_1 + L$ *e* $R_1 < R_2 + L$.

(d) $S_1 = S_2$ *se, e somente se,* $L = 0$ *e* $R_1 = R_2$.

Prova.

Seja $OXYZ$ um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, com origem $O = A_1$ e $A_2 = (0,0,L)$, $L \geq 0$, isto é, o semi-eixo positivo OZ tem a mesma direção e o mesmo sentido do vetor $\overrightarrow{A_1A_2}$. Em relação a esse sistema de coordenadas, as equações de S_1 e S_2 são:

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2 \quad \text{e} \quad S_2 : x^2 + y^2 + (z-L)^2 = R_2^2 .$$

Começamos assumindo que $L > 0$.

Temos que $P = (x,y,z) \in S_1 \cap S_2$ se, e somente se, as coordenadas de P satisfazem as equações de S_1 e S_2, simultaneamente.

Substituindo

$$x^2 + y^2 = R_1^2 - z^2 . \tag{1}$$

na equação de S_2, obtemos:

$$R_1^2 - z^2 + (z-L)^2 = R_2^2 .$$

Ou seja, se $P = (x,y,z) \in S_1 \cap S_2$, então:

$$z = z_0 = \frac{L^2 + R_1^2 - R_2^2}{2L} . \tag{2}$$

No segundo membro da equação (1), temos as seguintes possibilidades:

$$R_1^2 - z_0^2 = 0 , \quad R_1^2 - z_0^2 < 0 \quad \text{ou} \quad R_1^2 - z_0^2 > 0 .$$

• A condição $R_1^2 - z_0^2 = 0$ equivale a $|z_0| = R_1$.

Neste caso, temos $x^2 + y^2 = 0 \iff x = 0$ e $y = 0$. Ou seja, se $R_1^2 - z_0^2 = 0$, então $P = (0,0,z_0)$, com $z_0 = R_1$ ou $z_0 = -R_1$.

Usando a equação (2), determinamos qual dessas duas possibilidades para a coordenada z_0 do ponto P é a correta. De fato, $z_0 = R_1$, quando $L^2 + R_1^2 > R_2^2$, e $z_0 = -R_1$, quando $L^2 + R_1^2 < R_2^2$.

Portanto, a condição $R_1^2 - z_0^2 = 0$ é satisfeita se, e somente se, $S_1 \cap S_2$ consiste apenas de um ponto.

• A condição $R_1^2 - z_0^2 < 0$ equivale a $|z_0| > R_1$.

Neste caso, temos $x^2 + y^2 < 0$. Assim, não existem valores x e y que satisfaçam a equação (1), ou seja, a condição $R_1^2 - z_0^2 < 0$ equivale a $S_1 \cap S_2 = \varnothing$.

• A condição $R_1^2 - z_0^2 > 0$ equivale a $|z_0| < R_1$.

Neste caso, a equação (1) é a equação de um círculo contido no plano

$$z = z_0 = \frac{L^2 + R_1^2 - R_2^2}{2L} ,$$

com centro no ponto $(0,0,z_0)$ e raio $r = \sqrt{R_1^2 - z_0^2}$.

De fato, lembre que um ponto $P = (x,y,z_0)$ no plano $z = z_0$ é um ponto do círculo de centro $(0,0,z_0)$ e raio r se, e somente se, $d(P,(0,0,z_0)) = r$.

Isto é, se, e somente se,

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z_0-z_0)^2}=r\,.$$

Tomando quadrados em ambos os lados desta equação, obtemos $x^2+y^2=r^2$, que é exatamente a equação (1).

Portanto, a condição $R_1^2-z_0^2>0$, equivale a dizer que $S_1\cap S_2$ é um círculo.

Resumindo, temos as seguintes possibilidades:

- $S_1\cap S_2$ consiste apenas de um ponto $\Longleftrightarrow R_1=|z_0|\,;$
- $S_1\cap S_2=\varnothing \Longleftrightarrow R_1>|z_0|\,;$
- $S_1\cap S_2$ é um círculo $\Longleftrightarrow R_1<|z_0|\,,$

onde $z_0=\dfrac{L^2+R_1^2-R_2^2}{2L}$.

Vejamos o que essas condições representam em termos de relações entre os raios e a distância entre os centros.

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$\begin{aligned}
& x^2+y^2=R_1^2-\frac{(L^2+R_1^2-R_2^2)^2}{4L^2}=\frac{4R_1^2L^2-(L^2+R_1^2-R_2^2)^2}{4L^2}\\
\Longleftrightarrow\;& x^2+y^2=\frac{\big(2R_1L-(L^2+R_1^2-R_2^2)\big)\,\big(2R_1L+(L^2+R_1^2-R_2^2)\big)}{4L^2}\\
\Longleftrightarrow\;& x^2+y^2=\frac{\big(R_2^2-(L^2-2R_1L+R_1^2)\big)\,\big((L^2+2R_1L+R_1^2)-R_2^2\big)}{4L^2}\\
\Longleftrightarrow\;& x^2+y^2=\frac{\big(R_2^2-(L-R_1)^2\big)\,\big((L+R_1)^2-R_2^2\big)}{4L^2}\\
\Longleftrightarrow\;& x^2+y^2=\frac{(R_2+L-R_1)(R_2+R_1-L)(R_1+L-R_2)(R_1+R_2+L)}{4L^2}\,.
\end{aligned}$$

Logo $S_1\cap S_2$ consiste de um único ponto P se, e somente se,

$$R_1=R_2+L \quad\text{ou}\quad L=R_1+R_2 \quad\text{ou}\quad R_2=R_1+L\,,$$

pois $R_1+R_2+L>0$.

É fácil ver que

$$\begin{aligned}
& P=A_1+\frac{R_1}{L}\overrightarrow{A_1A_2}\,,\ \text{se } L=R_1+R_2,\\
& P=A_1+\frac{R_1}{L}\overrightarrow{A_1A_2}\,,\ \text{se } R_1=L+R_2,\\
\text{e}\quad & P=A_1-\frac{R_1}{L}\overrightarrow{A_1A_2}\,,\ \text{se } R_2=L+R_1\,.
\end{aligned}$$

Neste caso, dizemos que S_1 e S_2 são *tangentes* no ponto P, e que o plano perpendicular ao vetor $\overrightarrow{A_1A_2}$ que passa por P é o *plano tangente* a S_1 e S_2 no ponto P.

As três situações são mostradas nas Figuras 1, 2 e 3.

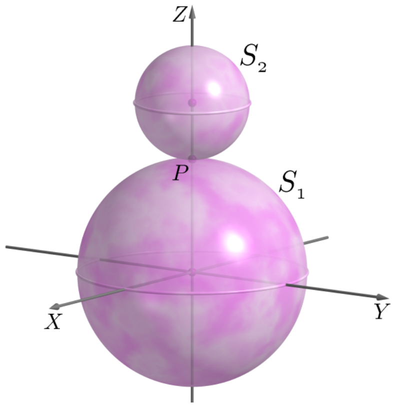


Fig. 1: $L = R_1 + R_2$.

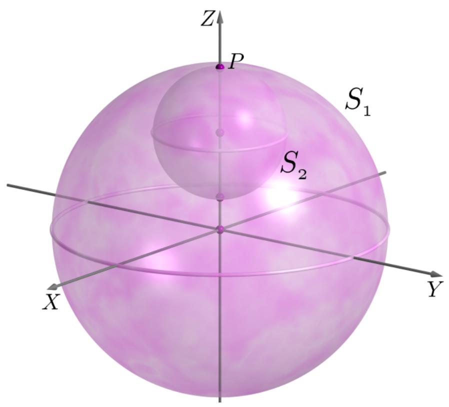


Fig. 2: $R_1 = L + R_2$.

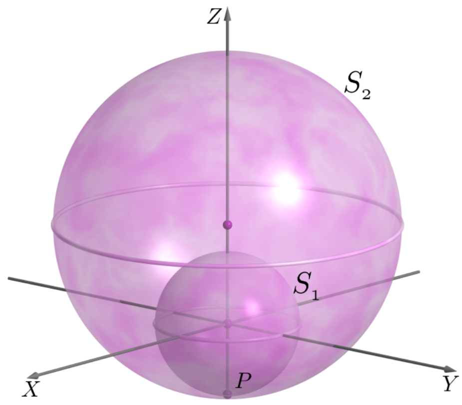


Fig. 3: $R_2 = L + R_1$.

Por outro lado, como $L > 0$, se um dos números R_2+L-R_1, R_2+R_1-L ou R_1+L-R_2 é negativo, então os outros dois são positivos.

Logo $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ se, e somente se, $R_2 + L < R_1$ ou $R_1 + R_2 < L$ ou $R_1 + L < R_2$.

Nas Figuras 4, 5 e 6 mostramos essas três possibilidades.

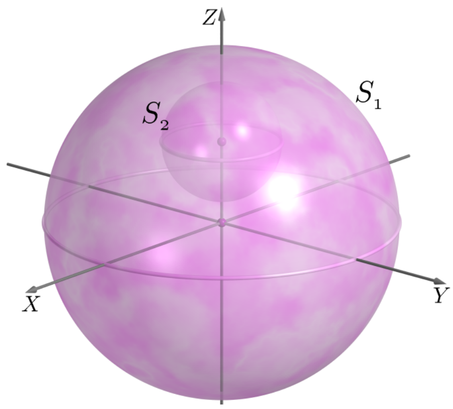


Fig. 4: $R_2 + L < R_1$.

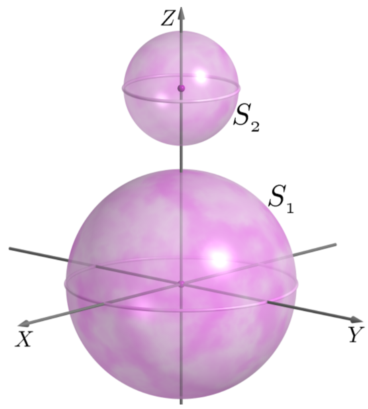


Fig. 5: $R_1 + R_2 < L$.

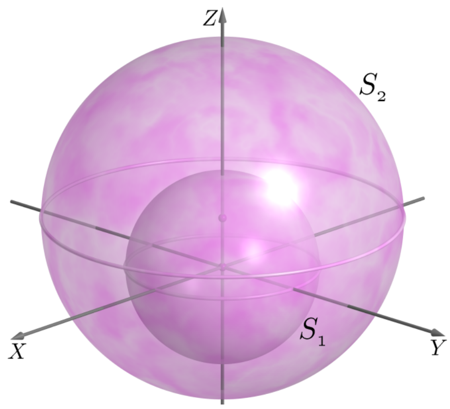


Fig. 6: $R_1 + L < R_2$.

Finalmente, $\mathcal{C} = S_1 \cap S_2$ é um círculo se, e só se,

$$R_1 + R_2 > L\,, \quad R_2 + L > R_1 \quad \text{e} \quad R_1 + L > R_2.$$

Neste caso, o círculo $\mathcal{C}$ tem centro no ponto

$$C = \left(0, 0, \frac{L^2 + R_1^2 - R_2^2}{2L}\right),$$

ou seja,

$$C = A_1 + \gamma\overrightarrow{A_1A_2}\,,$$

onde $\gamma = \dfrac{L^2 + R_1^2 - R_2^2}{2L^2}$; seu raio é

$$r = \frac{\sqrt{4R_1^2L^2 - (L^2 + R_1^2 - R_2^2)^2}}{2L},$$

e está contido no plano

$$\pi : z = \frac{L^2 + R_1^2 - R_2^2}{2L},$$

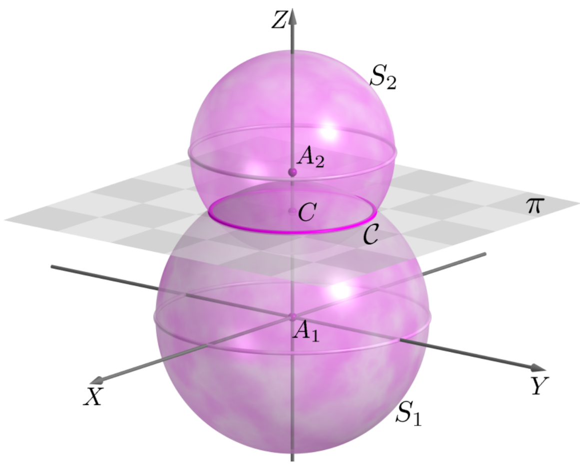


Fig. 7: $L > R_1$ e $L > R_2$.

paralelo ao plano cartesiano Π_{XY}, ou seja, perpendicular à reta que contém os centros das esferas, como mostramos na Figura 7.

No caso em que $L = 0$, isto é, $A_1 = A_2$, note que $S_1 = S_2$ se, e somente se, $R_1 = R_2$, e $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ se, e somente se, $R_1 > R_2$ ou $R_2 > R_1$. ■

Foi provado, na proposição acima, que se $R_1 < R_2 + L$, $R_2 < R_1 + L$ e $L < R_1 + R_2$, então $S_1 \cap S_2 = \mathcal{C}$ é um círculo. Um ponto $Q = (x, y, z)$ pertence a $\mathcal{C}$ se, e só se, satisfaz o sistema de equações

$$\begin{cases} S_1 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 - 2a_1x - 2b_1y - 2c_1z + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - R_1^2 = 0 \\ S_2 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 - 2a_2x - 2b_2y - 2c_2z + a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - R_2^2 = 0\,. \end{cases}$$

Portanto, subtraindo as equações acima, todo ponto Q do círculo pertence ao plano:

$$\pi : (2a_1 - 2a_2)x + (2b_1 - 2b_2)y + (2c_1 - 2c_2)z + a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - a_1^2 - b_1^2 - c_1^2 + R_1^2 - R_2^2 = 0\,,$$

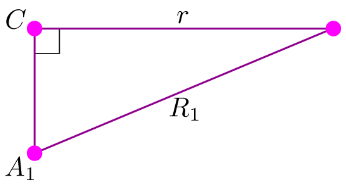
onde $A_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e R_1, $A_2 = (a_2, b_2, c_2)$ e R_2 são os centros e os raios das esferas S_1 e S_2, respectivamente.

Pela demonstração acima, o centro C do círculo $\mathcal{C}$ pertence ao plano π e à reta

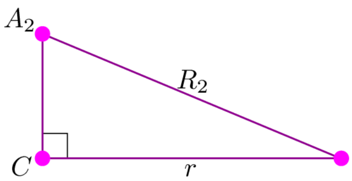
$$\ell : \{A_1 + t\overrightarrow{A_1A_2} \mid t \in \mathbb{R}\},$$

perpendicular ao plano π. Logo $\{C\} = r \cap \pi$.

Uma vez encontrado o centro C, achamos o raio r do círculo por uma das relações abaixo:



$$r = \sqrt{R_1^2 - d(C, A_1)^2}$$



$$r = \sqrt{R_2^2 - d(C, A_2)^2}$$

já que CA_1 e CA_2 são segmentos perpendiculares ao plano π que contém o círculo $\mathcal{C}$.

Exemplo 1

Sejam S_1 e S_2 as esferas abaixo:

$$S_1 : (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \qquad e \qquad S_2 : (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$$

(a) *Mostre que $S_1 \cap S_2$ é um círculo $\mathcal{C}$.*

(b) *Determine o centro e o raio do círculo $\mathcal{C}$, e o plano no qual ele está contido.*

Solução.

(a) Pelas equações acima, S_1 é uma esfera de centro no ponto $A_1 = (1, 0, 1)$ e raio $R_1 = 1$, e S_2 é uma esfera de centro no ponto $A_2 = (2, 1, 0)$ e raio $R_2 = 1$.

Como $L = d(A_1, A_2) = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$, temos que $L < R_1 + R_2$, $R_2 < R_1 + L$ e $R_1 < R_2 + L$. Logo, pela proposição anterior, $S_1 \cap S_2$ é um círculo $\mathcal{C}$.

Além disso, como $L > R_1$ e $L > R_2$, A_1 está no exterior de S_2 e A_2 está no exterior de S_1.

(b) Um ponto (x, y, z) pertence ao círculo $\mathcal{C}$ se, e só se, satisfaz o sistema:

$$\begin{cases} S_1 : (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \\ S_2 : (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1\,, \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4 = 0\,. \end{cases}$$

Subtraindo as duas equações acima, obtemos que (x, y, z) pertence ao plano:

$$\pi : 2x + 2y - 2z - 3 = 0\,.$$

Logo o círculo $\mathcal{C}$ está contido nesse plano. O centro de $\mathcal{C}$ é o ponto de interseção da reta $\ell = \{A_1 + t\overrightarrow{A_1A_2} \mid t \in \mathbb{R}\}$ com o plano π, ou seja, $C = (1, 0, 1) + t(1, 1, -1) = (1 + t, t, 1 - t)$ e

$$2(1 + t) + 2t - 2(1 - t) = 3.$$

Portanto, $t = \dfrac{1}{2}$ e $C = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

O raio r do círculo $\mathcal{C}$ é dado por:

$$r = \sqrt{R_1^2 - d(C, A_1)^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\,,$$

já que

$$d(C, A_1) = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,. \quad \square$$

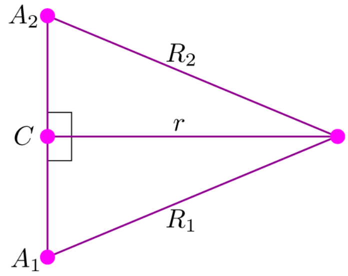


Fig. 8: Cálculo de r

Exemplo 2

Sejam S_1 e S_2 as esferas abaixo

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\,, \qquad S_2 : x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1\,.$$

(a) *Mostre que $\mathcal{C} = S_1 \cap S_2$ é um círculo.*

(b) *Determine o centro e o raio do círculo $\mathcal{C}$, e o plano no qual ele está contido.*

(c) *Parametrize o círculo $\mathcal{C}$.*

Solução.

(a) Pelas equações acima, S_1 é uma esfera de centro no ponto $A_1 = (0, 0, 0)$ e raio $R_1 = 2$, e S_2 é uma esfera de centro no ponto $A_2 = (0, 1, 1)$ e raio $R_2 = 1$. Como $L = d(A_1, A_2) = \sqrt{2}$, temos que $L < R_1 + R_2$, $R_2 < L + R_1$ e $R_1 < L + R_2$.

Logo, pela proposição 1, $\mathcal{C} = S_1 \cap S_2$ é um círculo. Sendo $L < R_1$ e $L > R_2$, A_2 está no interior de S_1 e A_1 está no exterior de S_2.

(b) Um ponto (x, y, z) pertence ao círculo $\mathcal{C}$ se, e só se, satisfaz o sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = -1\,. \end{cases}$$

Subtraindo as duas equações acima, obtemos que (x, y, z) pertence ao plano

$$\pi : -2y - 2z + 5 = 0\,.$$

O centro C do círculo é o ponto de interseção do plano π com a reta

$$\ell : \{A_1 + t\overrightarrow{A_1A_2} \,|\, t \in \mathbb{R}\} = \{(0,t,t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Logo $C = (0,t,t)$, com $-2t - 2t + 5 = 0$,

ou seja, $t = \dfrac{5}{4}$ e $C = \left(0, \dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{4}\right)$.

Como $d(C, A_1) = \dfrac{5\sqrt{2}}{4}$, o raio de $\mathcal{C}$ é:

$$r = \sqrt{R_1^2 - d(C,A_1)^2} = \sqrt{4 - \frac{25}{8}} = \sqrt{\frac{7}{8}}\,.$$

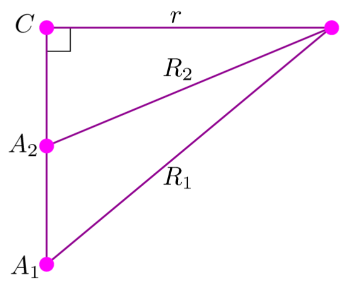


Fig. 9: $A_2 \in \overline{A_1 C}$

(c) O círculo $\mathcal{C}$ tem raio $r = \sqrt{\dfrac{7}{8}}$ e centro no ponto $P = \left(0, \dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{4}\right)$, e está contido no plano

$$\pi : 2y + 2z = 5\,.$$

Por uma translação e uma rotação do sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, obtemos um novo sistema de eixos ortogonais $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}}\,\overline{\overline{Z}}$, onde $\overline{O} = C$ e os semi-eixos positivos $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$, $\overline{O}\,\overline{\overline{Y}}$ e $\overline{O}\,\overline{\overline{Z}}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido dos vetores ortonormais:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_1} &= (1,0,0),\\
\overrightarrow{v_2} &= \overrightarrow{v_3} \times \overrightarrow{v_1} = \begin{vmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\
\overrightarrow{v_3} &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \perp \pi.
\end{aligned}$$

Neste nosso sistema $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}}\,\overline{\overline{Z}}$, o círculo $\mathcal{C}$ está contido no plano $\pi : \overline{\overline{z}} = 0$, tem centro na origem $\overline{O}$ e raio $r = \sqrt{\dfrac{7}{8}}$, ou seja,

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \overline{\overline{x}}^2 + \overline{\overline{y}}^2 = 7/8 \\ \overline{\overline{z}} = 0\,. \end{cases}$$

Como $(x,y,z) = \overline{\overline{x}}\overrightarrow{v_1} + \overline{\overline{y}}\overrightarrow{v_2} + \overline{\overline{z}}\overrightarrow{v_3} + C$, e

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \overline{\overline{x}}(t) = \sqrt{\dfrac{7}{8}}\cos t \\[2ex] \overline{\overline{y}}(t) = \sqrt{\dfrac{7}{8}}\,\text{sen}\, t\,; \qquad t \in \mathbb{R}\,, \\[2ex] \overline{\overline{z}}(t) = 0 \end{cases}$$

é uma parametrização nas coordenadas $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{y}}$, $\overline{\overline{z}}$, temos que:

$$\mathcal{C} : (x(t), y(t), z(t)) = \sqrt{\frac{7}{8}}\cos t\,(1,0,0) + \sqrt{\frac{7}{8}}\,\text{sen}\, t\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(0, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right), \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

ou seja,

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x(t) = \sqrt{\dfrac{7}{8}}\cos t \\ y(t) = \dfrac{\sqrt{7}}{4}\,\text{sen}\, t + \dfrac{5}{4} \\ z(t) = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}\,\text{sen}\, t + \dfrac{5}{4} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização de $\mathcal{C}$ nas coordenadas x, y e z. □

Exemplo 3

Sejam S_1 e S_2 as esferas

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 7$$

e

$$S_2 : x^2 + y^2 + \left(z - \sqrt{2}\right)^2 = 1\,.$$

(a) *Mostre que S_1 e S_2 são tangentes.*

(b) *Determine o ponto P de tangência de S_1 e S_2 , e o plano π tangente a S_1 e S_2 neste ponto P.*

Solução.

(a) Completando os quadrados na equação de S_1, temos que:

$$S_1 : (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) + z^2 = 7 + 1 + 1 = 9\,,$$

e daí:

$$S_1 : (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 3^2\,.$$

Logo S_1 é uma esfera de raio $R_1 = 3$ centrada no ponto $A_1 = (1,-1,0)$. Como S_2 é uma esfera de raio $R_2 = 1$ centrada no ponto $A_2 = (0,0,\sqrt{2})$, temos que:

$$d(A_1, A_2) = \sqrt{1+1+2} = 2 \qquad \text{e} \qquad R_1 = 3 = 1 + 2 = R_2 + d(A_1, A_2).$$

Então, pela proposição 1, S_1 e S_2 são tangentes.

(b) Como o centro A_2 de S_2 está contido no interior da esfera S_1 (por quê?), o ponto P de tangência entre as esferas é o ponto onde a semi-reta r de origem A_1, que contém A_2, corta a esfera S_1.

Logo existe $t \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned} P &= A_1 + t\overrightarrow{A_1A_2} = (1,-1,0) + t(-1,1,\sqrt{2}) \\ &= \left(1-t, -1+t, \sqrt{2}t\right)\,, \end{aligned}$$

e

$$(1-t-1)^2 + (-1+t+1)^2 + 2t^2 = 9\,.$$

Resolvendo a equação acima, obtemos que $4t^2 = 9$. Então $t = \dfrac{3}{2}$, pois $t \geq 0$, e

$$P = \left(1 - \frac{3}{2}, -1 + \frac{3}{2}, 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

é o ponto de tangência entre S_1 e S_2. Observe que a semi-reta r corta a esfera S_2 em dois pontos: $P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ e $Q = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

O plano π tangente a S_1 e S_2 no ponto P é o plano que passa por P e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{A_1A_2}$, ou seja,

$$\pi : -x + y + \sqrt{2}z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{6}{2} = \frac{8}{2} = 4\,. \quad \square$$

2. Determinação de uma esfera

Provaremos nesta seção alguns resultados que nos permitem determinar uma esfera a partir de pontos e/ou círculos nela contidos.

Proposição 2

Dados quatro pontos A, B, C e D não-coplanares, existe uma única esfera S que os contêm.

Prova.

Como A, B, C e D são pontos não coplanares, temos que:

$$\left\langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right\rangle \neq 0\,.$$

Sabemos que um ponto P é eqüidistante dos pontos A e B se, e só se, P pertence ao plano π_1 que passa pelo ponto médio $M_1 = \frac{A+B}{2}$ do segmento AB e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB}$, ou seja,

$$d(P, A) = d(P, B) \iff \left\langle \overrightarrow{M_1P}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = 0\,.$$

Analogamente, um ponto P é eqüidistante dos pontos A e C se, e só se, P pertence ao plano π_2 que passa pelo ponto médio $M_2 = \frac{A+C}{2}$ do segmento AC e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AC}$, ou seja,

$$d(P, A) = d(P, C) \iff \left\langle \overrightarrow{M_2P}, \overrightarrow{AC} \right\rangle = 0\,.$$

Como $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \neq 0$, pois, caso contrário, A, B e C seriam colineares ($\Longrightarrow$ A, B, C e D seriam coplanares), vemos que $r = \pi_1 \cap \pi_2$ é uma reta paralela ao vetor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, formada pelos pontos eqüidistantes dos pontos A, B e C, isto é,

$$r = \{P \mid d(P, A) = d(P, B) = d(P, C)\}\,.$$

Seja, agora, π_3 o conjunto dos pontos eqüidistantes dos pontos A e D. Então π_3 é o plano perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AD}$ que passa pelo ponto médio $M_3 = \dfrac{A+D}{2}$ do segmento AD.

Observe que o vetor paralelo à reta r, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, não é perpendicular ao vetor normal, $\overrightarrow{AD}$, do plano π_3, ou seja, r_3 não é paralela nem está contida no plano π_3. Assim, $r \cap \pi_3$ consiste de um único ponto L.

Este ponto L é o único ponto eqüidistante de A, B, C e D, ou seja,

$$d(L, A) = d(L, B) = d(L, C) = d(L, D)\,.$$

Portanto, L é o centro e $d(L, A)$ é o raio da única esfera que passa pelos pontos A, B, C e D. ■

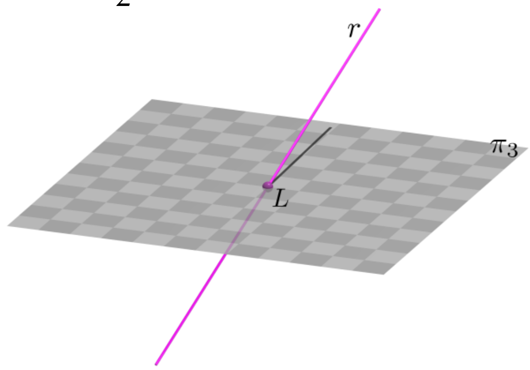


Fig. 10: $r \cap \pi_3 = \{L\}$

Exemplo 4

Verifique que os pontos $A = (1, 2, 2)$*,* $B = (3, 4, 1)$*,* $C = (0, 1, 1)$ *e* $D = (-1, 3, 0)$ *não são coplanares e determine a equação da única esfera* S *que passa por esses pontos.*

Solução.

• Sendo $\overrightarrow{AB} = (2, 2, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, -1, -1)$ e $\overrightarrow{AD} = (-2, 1, -2)$, temos que:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-3, 3, 0) \parallel (1, -1, 0)$$

e, portanto,

$$\left\langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right\rangle = \langle (-3, 3, 0), (-2, 1, -2) \rangle = 9 \neq 0\,.$$

Logo os pontos A, B, C e D não são coplanares.

Pela proposição 2, o centro da esfera S que passa pelos pontos A, B, C e D é o ponto de interseção da reta $r = \pi_1 \cap \pi_2$ com o plano π_3, onde:

$$\pi_1 : 2x + 2y - z = \frac{17}{2}\,, \quad \pi_2 : x + y + z = \frac{7}{2}\,, \quad \pi_3 : 2x - y + 2z = -\frac{1}{2}$$

são os planos perpendiculares aos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ que passam pelos pontos médios $M_1 = \dfrac{A+B}{2} = (2, 3, 3/2)$, $M_2 = \dfrac{A+C}{2} = (1/2, 3/2, 3/2)$, $M_3 = (0, 5/2, 1)$ dos segmentos AB, AC e AD, respectivamente.

Fazendo $x = 0$ no sistema

$$r = \pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} 2x + 2y - z = \dfrac{17}{2} \\ x + y + z = \dfrac{7}{2}\,, \end{cases}$$

obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 2y - z = \dfrac{17}{2} \\ y + z = \dfrac{7}{2}, \end{cases}$$

cuja solução é o ponto $Q = (0, 4, -1/2)$.

Então,

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \\ z = -1/2 \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

é a equação paramétrica da reta r paralela ao vetor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ que passa pelo ponto Q.

Seja L o centro da esfera S. Como $\{L\} = r \cap \pi_3$, temos que $L = (t, 4 - t, -1/2)$ e

$$\begin{aligned} 2t - (4 - t) + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} &\iff 2t + t - 4 - 1 = -\frac{1}{2} \\ &\iff 3t = -\frac{1}{2} + 5 = \frac{9}{2} \iff t = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Assim, $L = \left(\frac{3}{2}, 4 - \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ é o centro,

$$R = d(L, A) = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 2\right)^2 + \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{27}}{2}$$

é o raio e

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$$

é a equação da única esfera que passa pelos pontos A, B, C e D. $\square$

Uma equação de grau dois nas variáveis x, y e z:

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0}$$

representa uma esfera se, e só se,

$$\boxed{(G^2 + H^2 + I^2) - 4J > 0}$$

De fato, completando o quadrado:

$$\begin{aligned} &(x^2 + Gx) + (y^2 + Hy) + (z^2 + Iz) = -J \\ \iff &\left(x + \frac{G}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{H}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{I}{2}\right)^2 = \frac{G^2 + H^2 + I^2}{4} - J, \end{aligned}$$

obtemos que esta equação representa uma esfera se, e só se, $(G^2 + H^2 + I^2) - 4J > 0$.

Neste caso, $A = \left(-\frac{G}{2}, -\frac{H}{2}, -\frac{I}{2}\right)$ é o centro e $R = \dfrac{\sqrt{(G^2 + H^2 + I^2) - 4J}}{2}$ é o raio da esfera.

Proposição 3

Considere duas esferas

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 + G_1x + H_1y + I_1z + J_1 = 0 \quad \textit{e} \quad S_2 : x^2 + y^2 + z^2 + G_2x + H_2y + I_2z + J_2 = 0$$

cuja interseção é um círculo $\mathcal{C} = S_1 \cap S_2$*. Então* S *é uma esfera que contém o círculo* $\mathcal{C}$ *se, e só se, sua equação é da forma*

$$x^2 + y^2 + z^2 + ((1-k)G_1 + kG_2)x + ((1-k)H_1 + kH_2)y + ((1-k)I_1 + kI_2)z + (1-k)J_1 + kJ_2 = 0\,,$$

para algum $k \in \mathbb{R}$*.*

Prova.

Se (x, y, z) é um ponto pertencente ao círculo $\mathcal{C} = S_1 \cap S_2$, então:

$$x^2 + y^2 + z^2 + G_1x + H_1y + I_1z + J_1 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 + z^2 + G_2x + H_2y + I_2z + J_2 = 0\,.$$

Subtraindo as equações acima, obtemos que:

$$(G_1 - G_2)x + (H_1 - H_2)y + (I_1 - I_2)z + J_1 - J_2 = 0\,. \tag{3}$$

Logo o círculo $\mathcal{C}$ está contido no plano

$$\pi : (G_1 - G_2)x + (H_1 - H_2)y + (I_1 - I_2)z + J_1 - J_2 = 0\,,$$

cujo vetor normal é $\overrightarrow{v} = (G_1 - G_2, H_1 - H_2, I_1 - I_2) \neq (0, 0, 0)$.

Além disso, como $\mathcal{C} = S_1 \cap \pi = S_2 \cap \pi$, já sabemos que o centro C' de $\mathcal{C}$ pertence à reta r normal ao plano π que passa pelos centros $C_1 = -\frac{1}{2}(G_1, H_1, I_1)$ e $C_2 = -\frac{1}{2}(G_2, H_2, I_2)$ das esferas S_1 e S_2, respectivamente:

$$r : \begin{cases} x = -\frac{1}{2}G_1 + t(G_1 - G_2) \\ y = -\frac{1}{2}H_1 + t(H_1 - H_2)\;; \qquad t \in \mathbb{R}\,. \\ z = -\frac{1}{2}I_1 + t(I_1 - I_2) \end{cases}$$

Seja

$$S : x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

uma esfera que contém o círculo $\mathcal{C}$.

Se $S \neq S_1$, temos, pelo mesmo raciocínio feito anteriormente, que o círculo $\mathcal{C}$ está contido no plano:

$$\pi' : (G_1 - G)x + (H_1 - H)y + (I_1 - I)z + J_1 - J = 0\,.$$

Como $\pi' = \pi$, já que apenas um plano contém todos os pontos de um círculo, existe $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ (lembre que $S \neq S_1$) tal que:

$$\begin{aligned}
G_1 - G = k(G_1 - G_2) &\iff G = (1-k)G_1 + kG_2 \\
H_1 - H = k(H_1 - H_2) &\iff H = (1-k)H_1 + kH_2 \\
I_1 - I = k(I_1 - I_2) &\iff I = (1-k)I_1 + kI_2 \\
J_1 - J = k(J_1 - J_2) &\iff J = (1-k)J_1 + kJ_2\,.
\end{aligned}$$

Logo,

$$S : x^2 + y^2 + z^2 + ((1-k)G_1 + kG_2)x + ((1-k)H_1 + kH_2)y$$
$$+((1-k)I_1 + kI_2)z + ((1-k)J_1 + kJ_2) = 0\,.$$

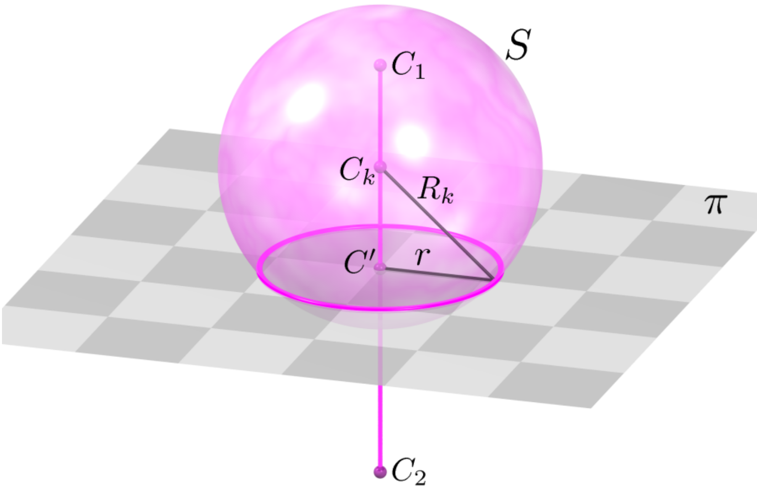


Fig. 11: Esfera de centro C_k e raio R_k

Reciprocamente, para todo $k \in \mathbb{R}$, seja S uma esfera (Figura 11) de centro

$$\begin{aligned} C_k &= -\frac{1}{2}((1-k)G_1 + kG_2, (1-k)H_1 + kH_2, (1-k)I_1 + kI_2) \\ &= -\frac{1}{2}(G_1, H_1, I_1) + \frac{k}{2}(G_1 - G_2, H_1 - H_2, I_1 - I_2)\,. \end{aligned}$$

Para que esta esfera contenha o círculo $\mathcal{C}$ de centro C' e raio r é necessário e suficiente que seu raio R_k seja igual a $\sqrt{r^2 + d(C', C_k)^2}$, já que C' e C_k pertencem à reta r perpendicular a π que passa por C_1.

Logo, pelo visto acima, a equação desta esfera S é:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ((1-k)G_1 + kG_2)x + ((1-k)H_1 + kH_2)y + ((1-k)I_1 + kI_2)z + ((1-k)J_1 + kJ_2) = 0\,.$$

Observe que:

$$R_k^2 = -((1-k)J_1 + kJ_2) + \frac{1}{4}\left(((1-k)G_1 + kG_2)^2 + ((1-k)H_1 + kH_2)^2 + ((1-k)I_1 + kI_2)^2\right)\,.$$

Provamos, então, que a equação

$$x^2 + y^2 + z^2 + ((1-k)G_1 + kG_2)x + ((1-k)H_1 + kH_2)y + ((1-k)I_1 + kI_2)z + (1-k)J_1 + kJ_2 = 0$$

representa uma esfera que contém o círculo $\mathcal{C} = S_1 \cap S_2$, para todo $k \in \mathbb{R}$. ■

Exemplo 5

Determine a equação da esfera que contém o ponto $P_0 = (-2, 4, 0)$ *e o círculo* $\mathcal{C} = S_1 \cap S_2$*, onde* S_1 *e* S_2 *são as esferas:*

$$\begin{aligned} S_1 &: \ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 2 = 0 \\ S_2 &: \ x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z + 10 = 0\,. \end{aligned}$$

Verifique antes que as esferas S_1 *e* S_2 *realmente se intersectam ao longo de um círculo.*

Solução.
Completando os quadrados:

- $(x^2-2x)+(y^2+2y)+(z^2-4z)=-2 \iff (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=-2+1+1+4=4\,.$
- $(x^2-4x)+(y^2-2y)+(z^2-6z)=-10 \iff (x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=-10+4+1+9=4\,,$

obtemos que $C_1=(1,-1,2)$, $R_1=2$ e $C_2=(2,1,3)$, $R_2=2$ são os centros e os raios das esferas S_1 e S_2, respectivamente.

Então $L=d(C_1,C_2)=\|(1,2,1)\|=\sqrt{6}$. Como $L=\sqrt{6}<2+2=R_1+R_2$, $R_2=2<2+\sqrt{6}=R_1+L$ e $R_1=2<2+\sqrt{6}=R_2+L$, temos, pela proposição 1, que $S_1\cap S_2$ é, de fato, um círculo.

Pela proposição 3, existe $k\in\mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} S \;:\; & x^2+y^2+z^2+((1-k)(-2)+k(-4))x+((1-k)(2)+k(-2))y \\ & +((1-k)(-4)+k(-6))z+(1-k)(2)+k(10)=0\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$S: x^2+y^2+z^2-2(k+1)x+2(1-2k)y-2(2+k)z+2+8k=0\,.$$

Além disso, como $P_0=(-2,4,0)\in S$, temos:

$$\begin{aligned} & 4+16+0-2(k+1)(-2)+2(1-2k)4-2(2+k)\cdot 0+2+8k=0 \\ \iff\; & 4k-16k+8k+4+16+4+8+2=0 \iff -4k=-34 \iff k=\frac{17}{2}\,. \end{aligned}$$

Logo, a equação da esfera é dada por:

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+z^2+\left(-2\cdot\frac{17}{2}-2\right)x+\left(2-4\cdot\frac{17}{2}\right)y \\ & +\left(-4-2\cdot\frac{17}{2}\right)z+2+8\cdot\frac{17}{2}=0\,, \\ \iff\; & x^2+y^2+z^2-19x-32y-21z+70=0\,, \\ \iff\; & \left(x-\frac{19}{2}\right)^2+(y-16)^2+\left(z-\frac{21}{2}\right)^2=-70+\frac{19^2}{4}+16^2+\frac{21^2}{4} \\ & =\frac{-280+361+4\cdot 256+441}{4}=\frac{1053}{2}\,. \end{aligned}$$

Assim, a esfera que passa pelo ponto P_0 e contém o círculo $\mathcal{C}$ é a esfera de raio $\sqrt{\dfrac{1053}{2}}$ centrada no ponto $\left(\dfrac{19}{2},16,\dfrac{21}{2}\right)$. □

Exemplo 6

Considere a esfera $S: x^2+y^2+z^2-2x+3y-6z-5=0$ *e o plano* $\pi: 5x+2y-z=3$.

(a) *Mostre que* $S\cap\pi$ *é um círculo* $\mathcal{C}$ *e determine seu centro e seu raio.*

Solução.

Completando os quadrados:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-2x+3y-6z-5=0 &\iff (x^2-2x)+(y^2+3y)+(z^2-6z)=5\\ &\iff (x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+(z-3)^2=5+1+\frac{9}{4}+9=\frac{69}{4}\,, \end{aligned}$$

obtemos que S é a esfera de centro $C=\left(1,-\frac{3}{2},3\right)$ e raio $R=\sqrt{\frac{69}{4}}$.

Sendo

$$d(C,\pi)=\frac{|5-3-3-3|}{\sqrt{25+4+1}}=\frac{4}{\sqrt{30}}<\frac{\sqrt{69}}{2}=R\,,$$

temos que $S\cap\pi$ é um círculo $\mathcal{C}$ de raio

$$r=\sqrt{R^2-d(C,\pi)^2}=\sqrt{\frac{69}{4}-\frac{16}{30}}=\sqrt{\frac{69\times 15-16\times 2}{60}}=\sqrt{\frac{1003}{60}}\,.$$

Seja ℓ a reta perpendicular ao plano π, ou seja, paralela ao vetor $(5,2,-1)$, que passa pelo centro $C=\left(1,-\frac{3}{2},3\right)$ de S:

$$\ell:\begin{cases} x=1+5t\\ y=-\frac{3}{2}+2t\,; \quad t\in\mathbb{R}\,.\\ z=3-t \end{cases}$$

Como o centro C' do círculo $\mathcal{C}$ é o ponto onde a reta r intersecta o plano π, temos que $C'=\left(1+5t,-\frac{3}{2}+2t,3-t\right)$ e

$$\begin{aligned} 5(1+5t)+2\left(-\frac{3}{2}+2t\right)-(3-t)=3 &\iff 30t=4\\ &\iff t=\frac{2}{15}\,. \end{aligned}$$

Assim,

$$C'=\left(1+5\,\frac{2}{15}\,,\,-\frac{3}{2}+2\,\frac{2}{15}\,,\,3-\frac{2}{15}\right)=\left(\frac{25}{15}\,,\,-\frac{37}{30}\,,\,\frac{43}{15}\right)$$

é o centro do círculo $\mathcal{C}=\pi\cap S$. $\square$

(b) *Determine a equação da esfera S' que contém o círculo $\mathcal{C}=\pi\cap S$ e o ponto $A=(2,-1,1)$.*

Solução.

Seja $S':x^2+y^2+z^2+Gx+Hy+Iz+J=0$ a equação da esfera que contém o círculo $\mathcal{C}$ e o ponto A.

Como $\mathcal{C}$ está contido em S e S', ou seja, $\mathcal{C}=S\cap S'$, temos que $(x,y,z)\in\mathcal{C}$ se, e só se,

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2+Gx+Hy+Iz+J=0\\ x^2+y^2+z^2-2x+3y-6z-5=0\,. \end{aligned}$$

Subtraindo as equações acima, vemos que se $(x, y, z) \in \mathcal{C}$, então (x, y, z) pertence ao plano

$$\pi' : (G+2)x + (H-3)y + (I+6)z + J + 5 = 0\,.$$

Como $\mathcal{C} \subset \pi : 5x + 2y - z = 3$, temos que $\pi' = \pi$. Portanto, existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que:

$$G+2 = 5\lambda\,,\; H-3 = 2\lambda\,,\; I+6 = -\lambda\,,\; J+5 = -3\lambda\,,$$

ou seja,

$$S : x^2 + y^2 + z^2 + (5\lambda - 2)x + (2\lambda + 3)y + (-\lambda - 6)z - 3\lambda - 5 = 0\,.$$

Além disso, como o ponto $A = (2, -1, 1) \in S'$, temos:

$$\begin{aligned} & 4 + 1 + 1 + (5\lambda - 2)\cdot 2 - (2\lambda + 3) - (\lambda + 6) - 3\lambda - 5 = 0 \\ \Longleftrightarrow\; & 6 + 10\lambda - 4 - 2\lambda - 3 - \lambda - 6 - 3\lambda - 5 = 0 \\ \Longleftrightarrow\; & 4\lambda - 12 = 0 \;\Longleftrightarrow\; \lambda = 3\,. \end{aligned}$$

Assim,

$$S : x^2 + y^2 + z^2 + 13x + 9y - 9z - 14 = 0\,.$$

Completando os quadrados:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{13}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{9}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{9}{2}\right)^2 &= 14 + \frac{169}{4} + \frac{81}{4} + \frac{81}{4} \\ &= \frac{56 + 169 + 162}{4} = \frac{387}{4}\,. \end{aligned}$$

obtemos que S' é a esfera de centro $C' = \left(-\frac{13}{2}, -\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ e raio $R = \frac{\sqrt{387}}{2}$. $\square$

3. Distância entre subconjuntos do espaço

Já vimos anteriormente como se determina a distância de um ponto a um plano, entre dois planos, de uma reta a um plano, de um ponto a uma reta e entre duas retas.

Como nestes casos, definimos a distância, $d(X, Y)$, entre os subconjuntos X e Y do espaço, como sendo a menor distância entre um ponto de X e um ponto de Y, isto é,

$$\boxed{d(X, Y) = \min\{\, d(P, Q) \mid P \in X \text{ e } Q \in Y \,\}}$$

Vamos agora estudar o caso em que um dos conjuntos, X, é um ponto, um plano ou uma esfera e o outro conjunto, Y, é uma esfera.

Proposição 4

Sejam P um ponto e S uma esfera de centro A e raio $R > 0$. Então

$$\boxed{d(P, S) = |\, R - d(P, A) \,|}$$

e o ponto $Q_0 \in S$ que realiza esta distância é o ponto de interseção de S com a semi-reta de origem A que contém o ponto P.

Prova.
Seja $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais com origem no ponto A, tal que o ponto P pertence ao semi-eixo positivo OZ, isto é, $P = (0, 0, c)$, para algum $c \geq 0$.

Neste sistema de coordenadas, a esfera S é dada por:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

Seja $Q = (x, y, z)$ um ponto de S. Então:

$$d(Q, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - c)^2} = \sqrt{R^2 + c^2 - 2zc}\,.$$

Como $c \geq 0$ e $z \leq R$, pois $Q \in S$, temos que:

$$R^2 + c^2 - 2zc \geq R^2 + c^2 - 2Rc = |R - c|^2\,.$$

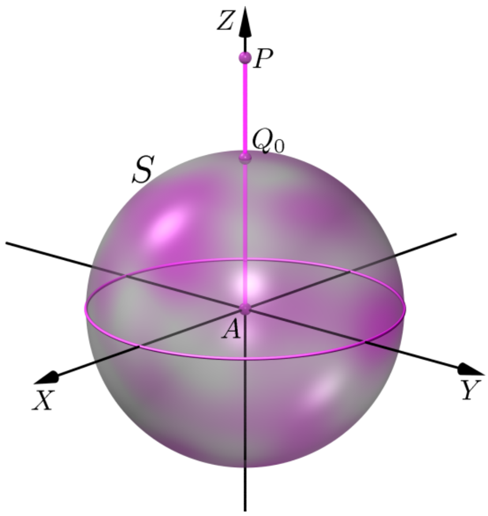


Fig. 12: $d(P, S) = d(A, P) - R$

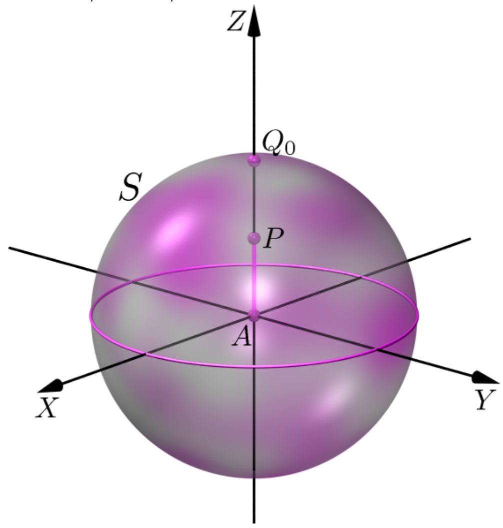


Fig. 13: $d(P, S) = R - d(A, P)$

Além disso, $Q_0 = (0, 0, R) \in S$ e $d(Q_0, P) = \sqrt{(R - c)^2} = |R - c| = |R - d(A, P)|$.

Portanto, $d(Q, P) \geq d(Q_0, P)$, para qualquer ponto $Q \in S$.

Com isto provamos que

$$d(P, S) = d(P, Q_0) = |\,R - d(P, A)\,|\ ,$$

e que o ponto $Q_0 \in S$, que realiza a distância, é o ponto de S que pertence à semi-reta de origem A que contém o ponto P. ■

Exemplo 7

Calcule a distância entre o ponto $A = (1, -1, 3)$ *e a esfera* $S : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 10z = 62$*, e determine o ponto* C *pertencente a* S *que realiza esta distância.*

Solução.
Completando os quadrados na equação da esfera, obtemos que S é dada por:

$$S : (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 5)^2 = 62 + 9 + 4 + 25 = 100 = 10^2\,,$$

ou seja, S é a esfera de centro $B = (3, -2, 5)$ e raio 10. Logo, pela proposição 4,

$$d(A, S) = |\,10 - d(A, B)\,| = \left|\,10 - \sqrt{4 + 1 + 4}\,\right| = 7.$$

Como $d(A,B) = 3 < 10 = R$, o ponto A pertence ao interior da esfera. Vamos agora achar o ponto $C \in S$ que realiza a distância. Para isto, seja r a semi-reta de origem B que contém o ponto A. Temos que:

$$P \in r \iff P = B + t\overrightarrow{BA}\,;\ t \geq 0 \iff P = (3,-2,5) + t(-2,1,-2);\ t \geq 0\,.$$

Já que $\{C\} = S \cap r$, existe um único $t_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \geq 0$, tal que:

$$C = (3 - 2t_0, -2 + t_0, 5 - 2t_0)\,,$$

e

$$d(C,B)^2 = (3 - 2t_0 - 3)^2 + (-2 + t_0 + 2)^2 + (5 - 2t_0 - 5)^2 = 100\,.$$

Resolvendo a equação acima, obtemos que $t_0 = \dfrac{10}{3}$ e, portanto,

$$C = \left(3 - \frac{20}{3}, -2 + \frac{10}{3}, 5 - \frac{20}{3}\right) = \left(-\frac{11}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right). \ \square$$

Exemplo 8

Calcule a distância da esfera $S : (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 1$ *à reta*

$$r : \begin{cases} x = t + 3 \\ y = t + 4\,; \\ z = t + 5 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Determine também os pontos $P_0 \in r$ *e* $Q_0 \in S$ *tais que*

$$d(r,S) = \min\{d(P,Q)\,|\,P \in r \ \textit{e}\ Q \in S\} = d(P_0,Q_0).$$

Solução.

Vamos primeiro calcular a distância do centro $A = (2,1,3)$ da esfera à reta r.

Sabemos que um ponto $P_0 = (t+3, t+4, t+5) \in r$ realiza esta distância se, e só se,

$$\left\langle \overrightarrow{AP_0}\,, (1,1,1) \right\rangle = 0\,,$$

onde $(1,1,1)$ é um vetor paralelo à reta r.

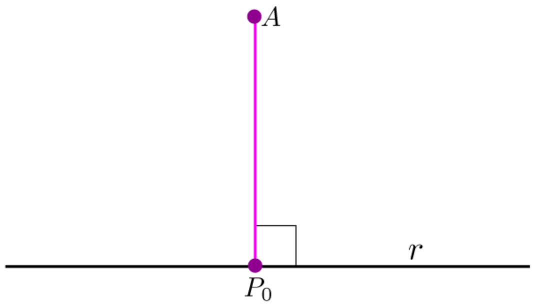


Fig. 14: $d(A,r) = d(A,P_0)$

Como

$$\begin{aligned} & \left\langle \overrightarrow{AP_0}\,, (1,1,1) \right\rangle = 0 \\ \iff & \langle (t+1, t+3, t+2), (1,1,1) \rangle = 0 \\ \iff & t + 1 + t + 3 + t + 2 = 0 \\ \iff & 3t = -6 \iff t = -2\,, \end{aligned}$$

obtemos que $P_0 = (1,2,3)$ e $d(A,r) = d(A,P_0) = \|\overrightarrow{AP_0}\| = \|(-1,1,0)\| = \sqrt{2}$.

Observe que, sendo

$$d(A,P) \geq d(A,P_0) = \sqrt{2} > 1 = R,$$

para todo ponto $P \in r$, onde $R = 1$ é o raio da esfera, então a reta r não intersecta a esfera S, isto é, todos os pontos da reta são exteriores à esfera.

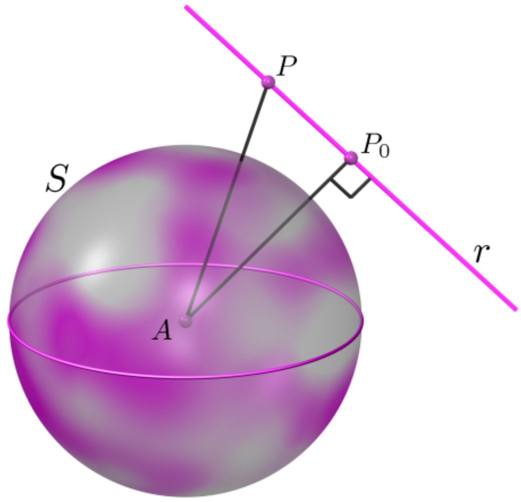


Fig. 15: $d(A,P) \geq d(A,P_0)$

Pela proposição 4,

$$d(P,S) = d(P,A) - R = d(P,A) - 1,$$

para todo $P \in r$.

Logo,

$$d(P,Q) \geq d(P,S) = d(P,A) - R \geq d(P_0,A) - R = d(P_0,S) = d(P_0,Q_0), \tag{4}$$

para todo $P \in r$ e todo $Q \in S$, onde Q_0 é o ponto onde a semi-reta

$$\left\{A + t\overrightarrow{AP_0} \mid t \geq 0\right\} = \{(2,1,3) + t(-1,1,0) \mid t \geq 0\} = \{(2-t, 1+t, 3) \mid t \geq 0\}$$

intersecta a esfera S.

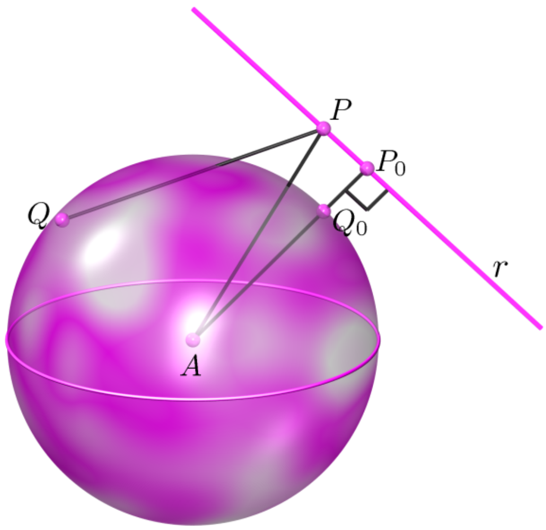


Fig. 16: $d(r,S) = d(P_0,S) = d(P_0,Q_0)$

Então $Q_0 = (2-t, 1+t, 3)$, $t \geq 0$, e

$$(2-t-2)^2 + (1+t-1)^2 + (3-3)^2 = 1 \iff 2t^2 = 1\,,\ t \geq 0 \iff t = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Ou seja, $Q_0 = \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 3\right)$.

Assim, por (4),

$$d(r, S) = d(P_0, Q_0) = \sqrt{2} - 1\,,$$

onde $P_0 = (1, 2, 3)$ e $Q_0 = \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 3\right)$. □

Proposição 5

Sejam π um plano e S uma esfera de centro A e raio $R > 0$. Então:

(a) $d(\pi, S) = 0$ *se* $d(A, \pi) \leq R$.

(b) $d(\pi, S) = d(A, \pi) - R$ *se* $d(A, \pi) > R$. *Neste caso,* $\pi \cap S = \varnothing$ *e os pontos* $Q_0 \in S$ *e* $P_0 \in \pi$ *que realizam a distância, isto é,* $d(Q_0, P_0) = d(S, \pi)$*, são os pontos de interseção de* S *e* π *respectivamente, com a semi-reta de origem* A *que intersecta* π *perpendicularmente.*

Prova.

Sabemos que $\pi \cap S \neq \varnothing$ se, e só se, $d(A, \pi) \leq R$. Logo $d(\pi, S) = 0$ se $d(A, \pi) \leq R$, pois neste caso π e S possuem pelo menos um ponto em comum.

Vamos calcular agora $d(\pi, S)$ quando $\pi \cap S = \varnothing$. Para isto, escolhemos um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no qual $\pi_{xy} = \pi$ e o centro A da esfera está sobre o semi-eixo positivo OZ, isto é, $A = (0, 0, c)$, $c > 0$. Neste sistema de coordenadas, a equação da esfera é:

$$S : x^2 + y^2 + (z - c)^2 = R^2\,. \tag{5}$$

Como $d(A, \pi) = c > R$, pois $\pi \cap S = \varnothing$, temos que:

$$2zc = x^2 + y^2 + z^2 + c^2 - R^2 > 0\,,$$

Logo $z > 0$ para qualquer ponto $(x, y, z) \in S$.

Sejam $Q = (x, y, z)$ um ponto de S e $P = (x', y', 0)$ um ponto de π. Então $d(P, Q) \geq d(Q, \pi)$, pois $d(Q, \pi) = \min\{d(Q, P') \mid P' \in \pi\}$.

Observe que, neste sistema de coordenadas, $d(Q, \pi) = z$, já que $z > 0$ e $\pi : z = 0$.

Então,

$$d(P, Q) \geq z\,, \tag{6}$$

para todo $P \in \pi$ e todo $Q = (x, y, z) \in S$.

Além disso, se $(x, y, z) \in S$ temos, por (5), que:

$$(z - c)^2 \leq R^2\,,$$

ou seja,

$$c - R \leq z \leq c + R\,. \tag{7}$$

Logo, por (6) e (7), $d(P, Q) \geq c - R$ para todo $P \in \pi$ e todo $Q \in S$.

Como $Q_0 = (0, 0, c - R) \in S$, $d(Q_0, \pi) = c - R$ e existe $P_0 \in \pi$ tal que $d(Q_0, \pi) = d(P_0, Q_0)$, concluímos que

$$d(P,Q) \geq d(P_0,Q_0)\,,$$

para todo $P \in \pi$ e todo $Q \in S$. Portanto,

$$d(\pi,S) = d(P_0,Q_0) = c - R = d(A,\pi) - R\,.$$

O ponto $P_0 \in \pi$ tal que

$$d(P_0,Q_0) = d(Q_0,\pi)$$

é o ponto onde a reta r normal a π que passa por Q_0 corta o plano π. Como o ponto A pertence ao eixo $-OZ$ e a reta r, nesse sistema de coordenadas, é o eixo$-OZ$, vemos que r é a reta perpendicular a π que passa pelo centro A da esfera e P_0, Q_0 são os pontos de interseção de S e π, respectivamente, com a semi-reta de origem A que intersecta π perpendicularmente. ■

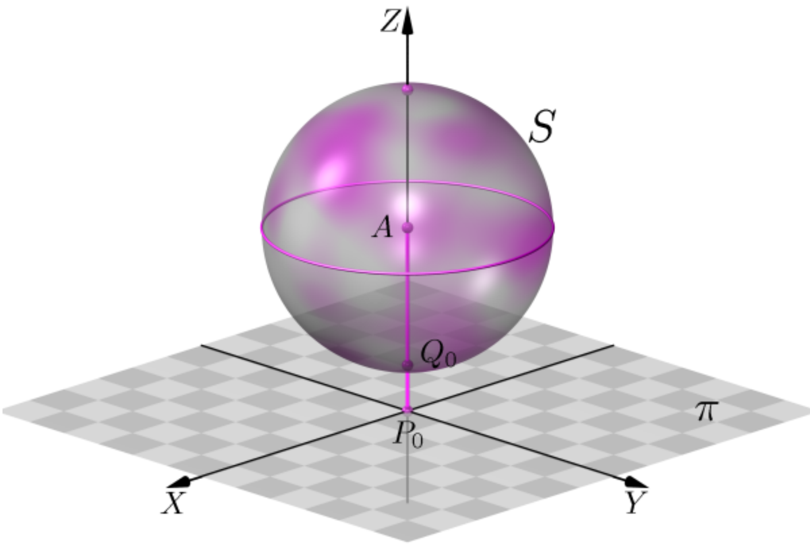


Fig. 17: $d(\pi,S) = d(P_0\,,Q_0\,)$

Observação 1

Podemos provar também que:

$$d(\pi,S) = d(P_0,Q_0) = d(Q_0,\pi) = \min\{d(Q,\pi)\,|\,Q \in S\}\,.$$

De fato, para todo $Q \in S$ existe $P \in \pi$ tal que $d(Q,\pi) = d(Q,P)$. Como $d(P,Q) \geq d(P_0,Q_0)$, temos que $d(Q,\pi) \geq d(Q_0,\pi)$, para todo $Q \in S$.

Logo,

$$d(Q_0,\pi) = \min\{d(Q,\pi)\,|\,Q \in S\}\,.$$

Exemplo 9

Ache sobre a esfera

$$S : (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 1\,,$$

o ponto Q_0 *mais próximo do plano* $\pi : 3x - 4z + 19 = 0$*, e calcule a distância deste ponto ao plano. Determine também o ponto* $P_0 \in \pi$ *tal que* $d(\pi,S) = d(P_0,Q_0)$.

Solução.

Pela equação acima, S tem raio $R = 1$ e centro no ponto $A = (1,-2,3)$. Logo,

$$d(A,\pi) = \frac{|3 \times 1 - 4 \times 3 + 19|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} = 2\,.$$

Já que $d(A,\pi) > R$, temos, pela proposição 5, que:

$$d(\pi,S) = d(A,\pi) - R = 1.$$

Além disto, sabemos que o ponto $Q_0 \in S$ e o ponto $P_0 \in \pi$ tais que $d(\pi, S) = d(P_0, Q_0)$ são os pontos de interseção de S e π, respectivamente, com a semi-reta r normal a π de origem no ponto A que corta o plano π.

Como o vetor $v = (3, 0, -4)$ é perpendicular a π, a semi-reta r é o conjunto de todos os pontos da forma $A + tv$, com $t \leq 0$, pois o ponto $P_0 = A - \frac{2}{5}v = \left(-\frac{1}{5}, -2, \frac{23}{5}\right)$ pertence ao plano π (faça as contas!).

Assim, se o ponto Q_0 tem coordenadas x, y e z, existe $t_0 \leq 0$ tal que $x = 1 + 3t_0$, $y = -2$, $z = 3 - 4t_0$ e

$$(1 + 3t_0 - 1)^2 + (-2 + 2)^2 + (3 - 4t_0 - 3)^2 = 1 .$$

Resolvendo esta equação, obtemos que $t_0 = -\frac{1}{5}$ e $Q_0 = \left(\frac{2}{5}, -2, \frac{19}{5}\right)$.

Logo P_0 e Q_0 são os pontos de π e S, respectivamente, que realizam a distância entre π e S, isto é,

$$d(\pi, S) = d(P_0, Q_0) .$$

Além disso, pela observação acima,

$$\min\{d(Q, \pi) \mid Q \in S\} = d(Q_0, \pi) = d(P_0, Q_0) = \sqrt{\frac{9}{25} + 0 + \frac{16}{25}} = 1 . \quad \square$$

Proposição 6

Sejam S_1 uma esfera de centro no ponto A_1 e raio $R_1 > 0$, e S_2 uma esfera de centro no ponto A_2 e raio $R_2 > 0$. Se $L = d(A_1, A_2)$, então:

(a) $d(S_1, S_2) = 0$ *se* $L \leq R_1 + R_2$, $R_2 \leq R_1 + L$ *e* $R_1 \leq R_2 + L$. *Neste caso,* $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$.

(b) $d(S_1, S_2) = L - (R_1 + R_2)$ *se* $L > R_1 + R_2$. *Neste caso, os pontos* $P_1 \in S_1$ *e* $P_2 \in S_2$ *que realizam a distância são os pontos de interseção do segmento* A_1A_2 *com as esferas* S_1 *e* S_2*, respectivamente.*

(c) $d(S_1, S_2) = R_2 - (R_1 + L)$ *se* $R_2 > R_1 + L$. *Neste caso, os pontos* $P_1 \in S_1$, $P_2 \in S_2$ *tais que* $d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2)$ *são os pontos onde a semi-reta* $\{A_1 + t\overrightarrow{A_1A_2} \mid t \leq 0\}$ *de origem* A_1 *paralela ao vetor* $\overrightarrow{A_1A_2}$ *que não contém* A_2 *corta as esferas* S_1 *e* S_2*, respectivamente.*

(d) $d(S_1, S_2) = R_1 - (R_2 + L)$ *se* $R_1 > R_2 + L$. *Neste caso, os pontos* $P_1 \in S_1$, $P_2 \in S_2$ *que realizam a distância são os pontos onde a semi-reta* $\{A_2 + t\overrightarrow{A_2A_1} \mid t \leq 0\}$ *de origem* A_2 *paralela ao vetor* $\overrightarrow{A_2A_1}$ *que não contém* A_1 *corta as esferas* S_1 *e* S_2*, respectivamente.*

Prova.
(a) Pela proposição 1, temos que $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ se, e só se, $L \leq R_1 + R_2$, $R_2 \leq R_1 + L$ e $R_1 \leq R_2 + L$. Logo, neste caso, $d(S_1, S_2) = 0$.

(b), **(c)** e **(d)** Seja $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais com origem no centro A_1 da esfera S_1

tal que A_2 pertence ao semi-eixo positivo OZ, isto é, $A_2 = (0, 0, L)$, $L \geq 0$. Neste sistema de coordenadas, as equações das esferas S_1 e S_2 são dadas por:

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2 \qquad \text{e} \qquad S_2 : x^2 + y^2 + (z - L)^2 = R_2^2 .$$

Sejam $P = (x, y, z) \in S_1$ e $Q = (x', y', z') \in S_2$. Logo:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} = \sqrt{R_1^2 + (x'^2 + y'^2 + z'^2) - 2(xx' + yy' + zz')}\,,$$

pois $x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2$.

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (lembre-se da definição de produto interno):

$$|\,xx' + yy' + zz'\,| \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = R_1\,\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,,$$

obtemos que:

$$d(P, Q) \geq \sqrt{R_1^2 + (x'^2 + y'^2 + z'^2) - 2R_1\,\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}\,,$$

ou seja,

$$d(P, Q) \geq \left|\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \;-\; R_1\right| . \qquad (8)$$

Como $L - R_2 \leq z' \leq L + R_2$ e $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2z'L - L^2 + R_2^2$, já que $x'^2 + y'^2 + (z' - L)^2 = R_2^2$, temos que:

$$\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{2z'L - L^2 + R_2^2} \geq \sqrt{2(L - R_2)L - L^2 + R_2^2} = |L - R_2| .$$

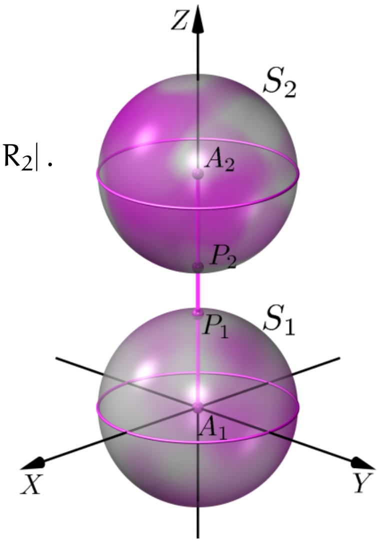


Fig. 18: Caso $L > R_1 + R_2$

• Se $L > R_1 + R_2$,

$$d(P, Q) \geq \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} - R_1 > L - R_2 - R_1\,,$$

pois $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \geq L - R_2 > R_1$.

Além disso, os pontos $P_1 = (0, 0, R_1) \in S_1$ e $P_2 = (0, 0, L - R_2) \in S_2$ são tais que $d(P_1, P_2) = L - R_2 - R_1$.

Logo $d(S_1, S_2) = L - R_1 - R_2 = d(P_1, P_2)$, onde P_1 e P_2 são os pontos de interseção de S_1 e S_2 com o segmento A_1A_2, respectivamente.

• Se $R_2 > L + R_1$,

$$d(P, Q) \geq \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} - R_1 \geq R_2 - L - R_1\,,$$

pois $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \geq R_2 - L > R_1$.

Além disto, como os pontos $P_1 = (0, 0, -R_1) \in S_1$ e $P_2 = (0, 0, L - R_2) \in S_2$ são tais que $d(P_1, P_2) = R_2 - L - R_1$, temos que

$$d(S_1, S_2) = R_2 - L - R_1 = d(P_1, P_2)\,,$$

onde P_1 e P_2 são os pontos de interseção da semi-reta de origem A_1 paralela ao vetor $\overrightarrow{A_1A_2}$, que não contém A_2, com as esferas S_1 e S_2, respectivamente.

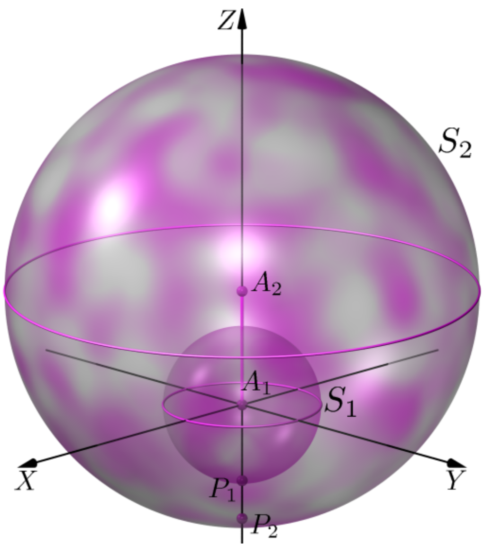


Fig. 19: Caso $R_2 > L + R_1$

• Se $R_1 > L + R_2$, então, por (8),

$$d(P, Q) \geq R_1 - \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \geq R_1 - L - R_2 \,,$$

já que $z' \leq L + R_2$, e portanto,

$$\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{2z'L - L^2 + R_2^2} \leq \sqrt{2(L + R_2)L - L^2 + R_2^2} = L + R_2 < R_1 \,.$$

Como os pontos $P_1 = (0, 0, R_1) \in S_1$ e $P_2 = (0, 0, L + R_2) \in S_2$ são tais que $d(P_1, P_2) = R_1 - L - R_2$, temos que $d(S_1, S_2) = R_1 - L - R_2 = d(P_1, P_2)$, onde P_1, P_2 são os pontos onde a semi-reta de origem A_2 paralela ao vetor $\overrightarrow{A_2A_1}$, que não contém A_1, corta as esferas S_1 e S_2, respectivamente. ■

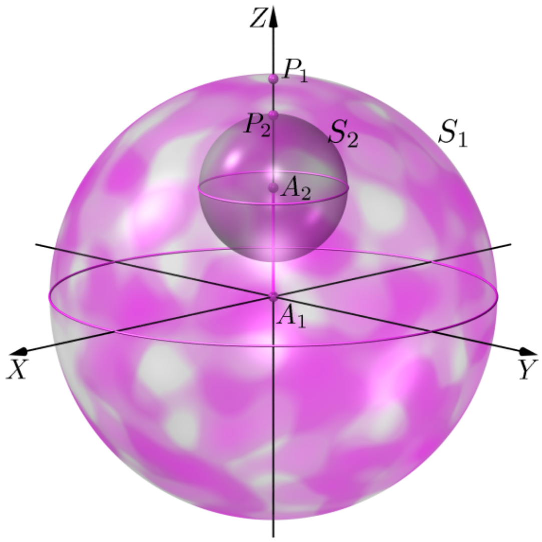


Fig. 20: Caso $R_1 > L + R_2$

Exemplo 10

Determine a distância entre as esferas S_1 e S_2 abaixo e os pontos de S_1 e S_2 que realizam esta distância, onde

$$S_1 : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1 \,, \quad e \quad S_2 : (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9 \,.$$

Solução.

Pelas equações acima, S_1 é uma esfera de raio $R_1 = 1$ centrada no ponto $A_1 = (2, 1, 1)$, e S_2 é a esfera de raio $R_2 = 3$ centrada no ponto $A_2 = (1, 0, 1)$.

Como $d(A_1, A_2) = L = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, temos que $R_2 > R_1 + L$. Logo S_1 está contida no interior de S_2 e, pela proposição acima, $d(S_1, S_2) = 3 - 1 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$.

Seja r a semi-reta de origem A_1 paralela ao vetor $\overrightarrow{A_1A_2}$ que não contém A_2. Então $P \in r$ se, e só se, $P = A_1 + t\overrightarrow{A_1A_2}$, $t \leq 0$, ou seja, $P = (2-t, 1-t, 1)$, $t \leq 0$. Pela proposição anterior sabemos que $d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2)$, onde $S_1 \cap r = \{P_1\}$ e $S_2 \cap r = \{P_2\}$. Mas $P_1 \in S_1 \cap r$ se, e só se, existe $t_1 \leq 0$ tal que $P_1 = (2 - t_1, 1 - t_1, 1)$ e

$$(2 - t_1 - 2)^2 + (1 - t_1 - 1)^2 + (1-1)^2 = 1\,.$$

Resolvendo a equação, obtemos $t_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e, portanto, $P_1 = \left(2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$.

Seja $\{P_2\} = S_2 \cap r$. Então existe $t_2 \leq 0$ tal que $P_2 = (2 - t_2, 1 - t_2, 1)$ e

$$(2 - t_2 - 1)^2 + (1 - t_2)^2 + (1-1)^2 = 9\,.$$

Logo $(t_2 - 1)^2 = \dfrac{9}{2}$ e $t_2 \leq 0$, isto é, $t_2 = 1 - \dfrac{3}{\sqrt{2}}$. Assim, $P_2 = \left(1 + \dfrac{3}{\sqrt{2}}, \dfrac{3}{\sqrt{2}}, 1\right)$. □