Aula 6

Superfícies Cilíndricas

Sejam γ uma curva contida num plano π do espaço e $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ um vetor não-paralelo ao plano π. A *superfície cilíndrica* S de *diretriz* γ e *geratrizes* paralelas ao vetor $\overrightarrow{v}$ é o conjunto:

$$\boxed{S = \left\{ P + t\overrightarrow{v} \,\middle|\, P \in \gamma \text{ e } t \in \mathbb{R} \right\}}$$

Ou seja, a superfície S é gerada por todas as retas paralelas ao vetor $\overrightarrow{v}$ que intersectam o plano π num ponto da curva γ.

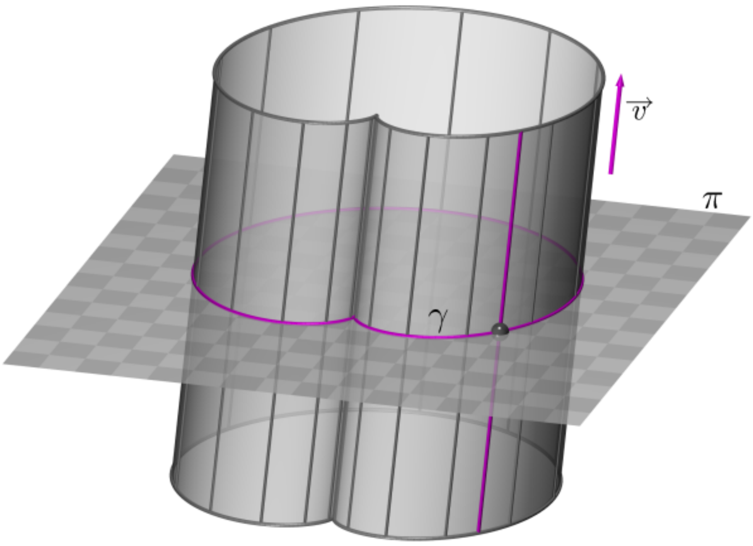

Fig. 1: Superfície cilíndrica S

Veremos, por meio de exemplos, como determinar as equações cartesianas e paramétricas de uma superfície cilíndrica, conhecendo-se, respectivamente, as equações cartesianas e paramétricas de sua curva diretriz.

Exemplo 1

Em cada um dos itens abaixo são dados a equação da diretriz γ e a direção $\overrightarrow{v}$ das geratrizes de uma superfície cilíndrica S. Determine as equações paramétrica e cartesiana de tais superfícies e faça um esboço.

(a) $\gamma : \begin{cases} y^2 + x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$; $\overrightarrow{v} = (2, 0, 1)$.

Solução.

A curva γ é uma parábola de vértice $V = (1, 0, 0)$ e reta focal igual ao eixo$-OX$ contida no plano $z = 0$.

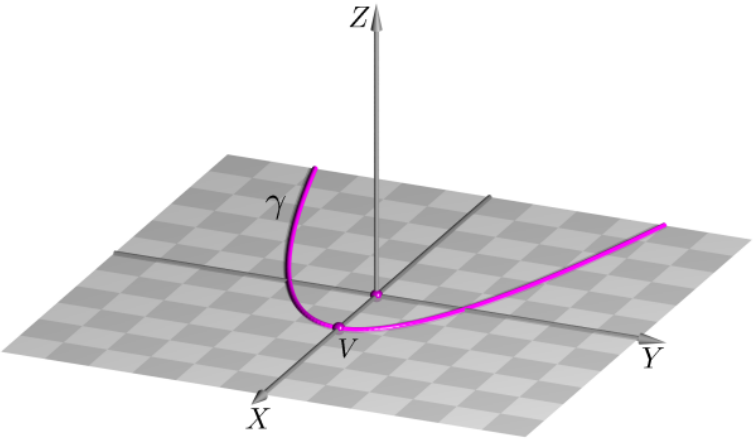

Fig. 2: Parábola γ

Como

$$\gamma : \begin{cases} x(s) = 1 - s^2 \\ y(s) = s \\ z(s) = 0 \end{cases} \quad ; \quad s \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização da curva γ, temos que:

$$S = \left\{ \, (1 - s^2, s, 0) + t(2, 0, 1) \, \middle| \, s, t \in \mathbb{R} \right\} ,$$

ou seja,

$$\begin{cases} x(s,t) = 1 - s^2 + 2t \\ y(s,t) = s \\ z(s,t) = t \end{cases} \quad ; \quad s, t \in \mathbb{R}$$

é uma parametrização da superfície cilíndrica S.

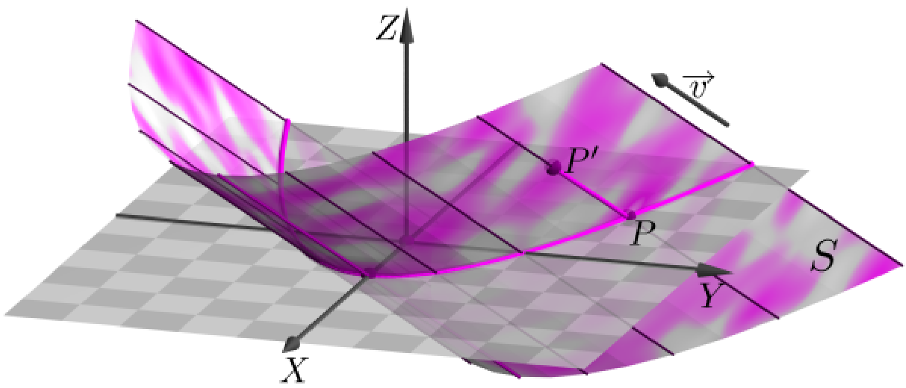

Fig. 3: Superfície cilíndrica S

Pela definição de S*, um ponto* $P = (x, y, z)$ *pertence a* S *se, e só se, existe um único ponto* $P' = (x', y', z') \in \gamma$ *e um único número real* t *tais que* $P = P' + t\overrightarrow{v}$ *(*$\Longleftrightarrow \overrightarrow{P'P} = t\overrightarrow{v}$*).*

Assim:

$$\begin{cases} x - x' = 2t \\ y - y' = 0 \\ z - z' = t \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} y'^2 + x' = 1 \\ z' = 0\,. \end{cases}$$

Logo $t = z$*,* $y' = y$*,* $x' = x - 2t = x - 2z$ *e, portanto,*

$$y^2 + x - 2z = 1$$

é a equação cartesiana da superfície S*.* $\square$

(b) $\gamma : \begin{cases} 4x^2 + z^2 + 4z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad ; \quad \overrightarrow{v} = (4, 1, 0)\,.$

Solução.

Completando o quadrado:

$$4x^2 + (z^2 + 4z) = 0 \Longleftrightarrow 4x^2 + (z+2)^2 = 4 \Longleftrightarrow x^2 + \frac{(z+2)^2}{4} = 1\,,$$

obtemos que γ *é uma elipse contida no plano* $y = 0$ *e centrada no ponto* $(0, 0, -2)$*, cuja reta focal é o eixo*$-OZ$*.*

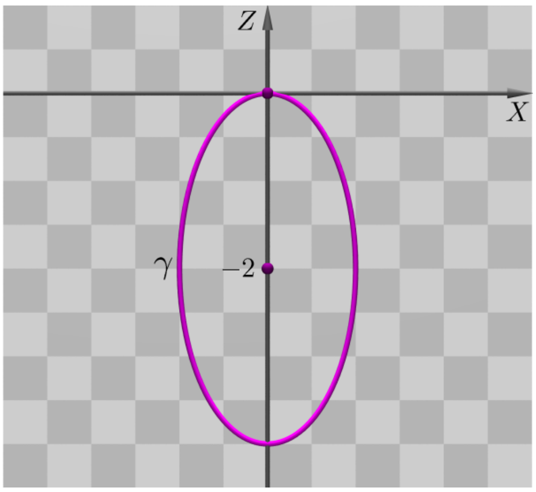

Fig. 4: Elipse γ

Como

$$\gamma : \begin{cases} x(s) = \cos s \\ y(s) = 0 \\ z(s) = 2\,\text{sen}\, s - 2 \end{cases} \quad ; \quad s \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização da diretriz e $S = \{\, \gamma(s) + t\overrightarrow{v} \mid s, t \in \mathbb{R} \,\}$*, temos que:*

$$S : \begin{cases} x(s,t) = \cos s + 4t \\ y(s,t) = t \\ z(s,t) = 2\,\text{sen}\, s - 2 \end{cases} \quad ; \quad s, t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização da superfície S.

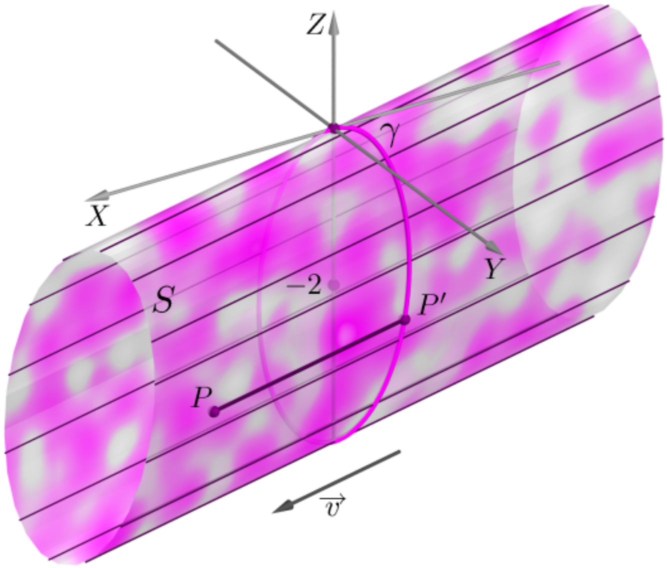

Fig. 5: Superfície cilíndrica S

Dado um ponto $P = (x, y, z)$ *sabemos, pela definição de superfície cilíndrica, que* $P \in S$ *se, e só se, existe um único ponto* $P' = (x', y', z') \in \gamma$ *e um único número real* t *tais que* $\overrightarrow{P'P} = t\overrightarrow{v}$. *Ou seja:*

$$\begin{cases} x - x' = 4t \\ y - y' = t \\ z - z' = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} 4x'^2 + z'^2 + 4z' = 0 \\ y' = 0\,. \end{cases}$$

Logo $t = y$, $z' = z$, $x' = x - 4t = x - 4y$, *e, portanto,*

$$(x - 4y)^2 + z^2 + 4z = 0 \Longleftrightarrow x^2 + 16y^2 + z^2 - 8xy + 4z = 0$$

é a equação cartesiana da superfície S. □

(c) $\gamma : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \quad ; \quad \overrightarrow{v} = (1, 3, 1)\,.$

Solução.

Como $\pi_1 : x + y + z = 1$ *e* $\pi_2 : x + 2y + z = 0$ *são planos perpendiculares aos vetores* $\overrightarrow{u_1} = (1, 1, 1)$ *e* $\overrightarrow{u_2} = (1, 2, 1)$, *respectivamente, temos que* $\gamma = \pi_1 \cap \pi_2$ *é uma reta paralela ao vetor*

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 0, 1)\,.$$

Fazendo $z = 0$ *no sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 0\,, \end{cases}$$

obtemos o sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = 0\,, \end{cases}$$

cuja solução é $A = (2, -1, 0)$

Logo $\gamma = \{\, A + s\overrightarrow{u} \mid s \in \mathbb{R} \,\}$*, ou seja,*

$$\gamma : \begin{cases} x(s) = 2 - s \\ y(s) = -1 \\ z(s) = s \end{cases} \quad ; \quad s \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização da reta γ *paralela ao vetor* $\overrightarrow{u}$ *que passa pelo ponto* A*.*

Assim, $S = \{\, A + s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v} \mid s, t \in \mathbb{R} \,\}$ *é o plano paralelo aos vetores* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *que passa pelo ponto* A *e*

$$S : \begin{cases} x(s,t) = 2 - s + t \\ y(s,t) = -1 + 3t \\ z(s,t) = s + t \end{cases} \quad ; \quad s, t \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização de S*.*

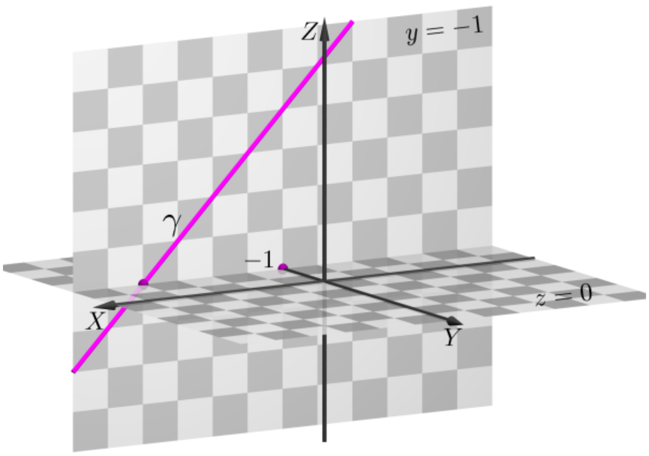

Fig. 6: Diretriz γ

Além disso, $P = (x, y, z) \in S$ *se, e só se, existe um único* $P' = (x', y', z') \in \gamma$ *e um único número real* $t \in \mathbb{R}$ *tais que* $\overrightarrow{P'P} = t\overrightarrow{v}$*, ou seja,*

$$\begin{cases} x - x' = t \\ y - y' = 3t \\ z - z' = t \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x' + y' + z' = 1 \\ x' + 2y' + z' = 0\,. \end{cases}$$

Logo, sendo:

$$x + y + z = x' + t + y' + 3t + z' + t = x' + y' + z' + 5t = 1 + 5t \Longleftrightarrow t = \frac{x+y+z-1}{5},$$

temos que:

$$\begin{aligned} x' &= x - t = x - \frac{x+y+z-1}{5} = \frac{4x - y - z + 1}{5} \\ y' &= y - 3t = y - 3\left(\frac{x+y+z-1}{5}\right) = \frac{-3x + 2y - 3z + 3}{5} \\ z' &= z - t = z - \frac{x+y+z-1}{5} = \frac{-x - y + 4z + 1}{5}. \end{aligned}$$

Portanto, substituindo x', y' *e* z' *na equação* $x' + 2y' + z' = 0$, *obtemos que:*

$$\begin{aligned} & \frac{4x - y - z + 1}{5} + 2\,\frac{-3x + 2y - 3z + 3}{5} + \frac{-x - y + 4z + 1}{5} = 0 \\ \Longleftrightarrow\; & 4x - y - z + 1 - 6x + 4y - 6z + 6 - x - y + 4z + 1 = 0 \\ \Longleftrightarrow\; & -3x + 2y - 3z = -8 \end{aligned}$$

é a equação cartesiana da superfície S, *plano que passa pelo ponto* $A = (2, -1, 0)$ *e é perpendicular ao vetor* $\overrightarrow{w} = (-3, 2, -3)$.

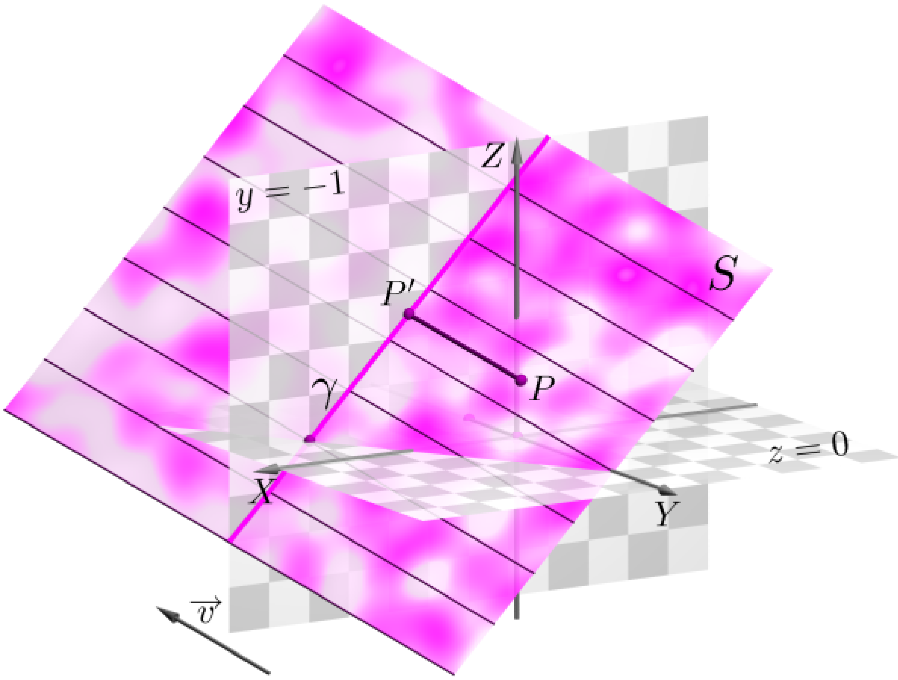

Fig. 7: A superfície cilíndrica S é um plano

A equação cartesiana de S *pode ser obtida apenas observando-se que* S *é um plano perpendicular ao vetor*

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-3, 2, -3)$$

que passa pelo ponto $A = (2, -1, 0)$. $\square$

(d) $\gamma : \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x+y=1 \end{cases}$; $\overrightarrow{v} = (1,1,1)$.

Solução.

A curva γ *é a interseção da esfera* $S' : x^2+y^2+z^2=1$ *de centro* $C=(0,0,0)$ *e raio* $R=1$ *com o plano* $\pi : x+y=1$ *perpendicular ao vetor* $\overrightarrow{u}=(1,1,0)$.

Como

$$d(C,\pi) = \frac{|0+0-1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1,$$

temos que $\gamma = S' \cap \pi$ *é um círculo contido no plano* π *de raio* $r = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *e centro* C', *onde* C' *é o ponto de interseção do plano* π *com a reta*

$$\ell : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} ; \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

que passa pelo centro C *de* S' *e é perpendicular ao plano* π.

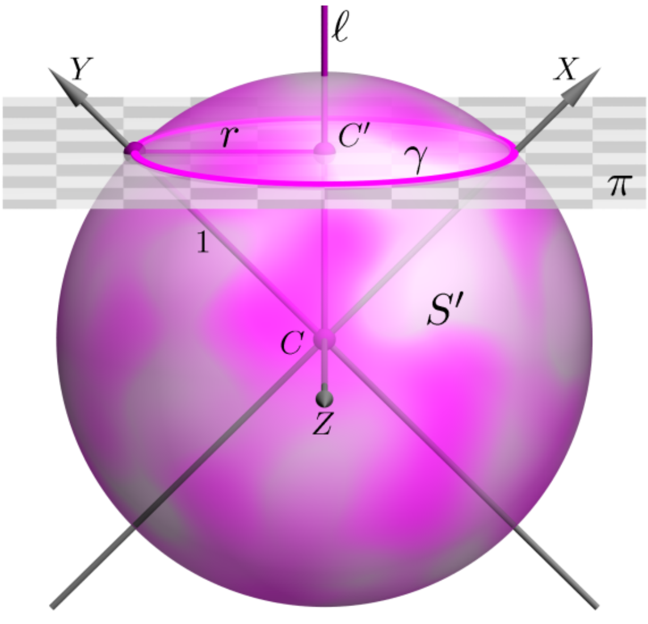

Fig. 8: Diretriz γ

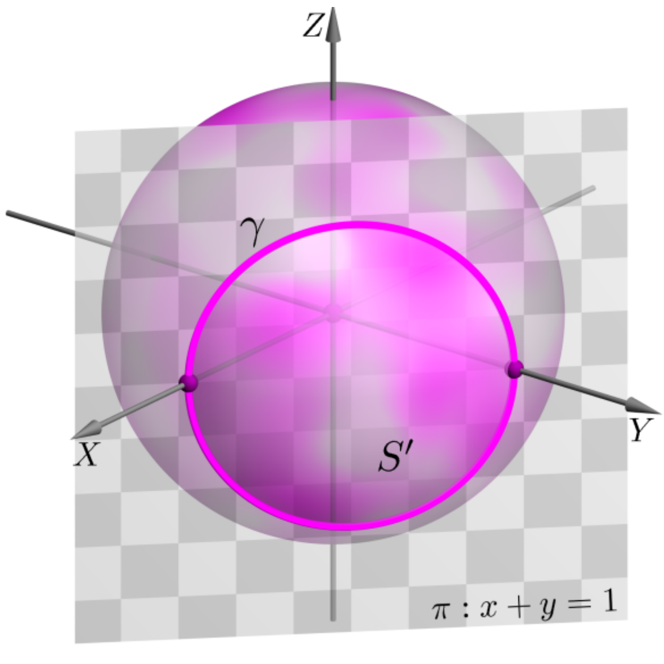

Fig. 9: Diretriz γ *na vista usual*

Logo, se $C'=(\lambda,\lambda,0)$, *então* $\lambda+\lambda=2\lambda=1$, *ou seja,* $\lambda=\frac{1}{2}$ *e* $C'=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$.

Por uma translação e uma rotação do sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, *obtemos um novo sistema de eixos ortogonais* $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}}\,\overline{\overline{Z}}$, *onde* $\overline{O}=C'$ *e os semi-eixos positivos* $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$, $\overline{O}\,\overline{\overline{Y}}$ *e* $\overline{O}\,\overline{\overline{Z}}$ *tem a mesma direção e o mesmo sentido, respectivamente, dos vetores* $\overrightarrow{v_1}=(0,0,1)$, $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_3}\times\overrightarrow{v_1} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ *e* $\overrightarrow{v_3}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\perp\pi$.

Nas coordenadas $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{y}}$ *e* $\overline{\overline{z}}$, *o círculo* γ *está contido no plano* $\overline{\overline{z}} = 0$, *tem centro na origem e raio* $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, *ou seja,*

$$\gamma : \begin{cases} \overline{\overline{x}}^2 + \overline{\overline{y}}^2 = \dfrac{1}{2} \\ \overline{\overline{z}} = 0\,. \end{cases}$$

Como

$$(x, y, z) = \overline{\overline{x}}\overrightarrow{v_1} + \overline{\overline{y}}\overrightarrow{v_2} + \overline{\overline{z}}\overrightarrow{v_3} + C'\,,$$

e

$$\gamma : \begin{cases} \overline{\overline{x}}(s) = \dfrac{\cos s}{\sqrt{2}} \\ \overline{\overline{y}}(s) = \dfrac{\operatorname{sen} s}{\sqrt{2}} \\ \overline{\overline{z}}(s) = 0 \end{cases}$$

é uma parametrização de γ *nas coordenadas* $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{y}}$ *e* $\overline{\overline{z}}$, *temos que:*

$$\gamma : \begin{cases} x(s) = \dfrac{\operatorname{sen} s}{2} + \dfrac{1}{2} \\ y(s) = -\dfrac{\operatorname{sen} s}{2} + \dfrac{1}{2} \\ z(s) = \dfrac{\cos s}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

é uma parametrização de γ *no sistema* $OXYZ$. *Portanto,*

$$S = \left\{ \gamma(s) + t\overrightarrow{v} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\},$$

ou seja,

$$S : \begin{cases} x(s,t) = \dfrac{\operatorname{sen} s}{2} + \dfrac{1}{2} + t \\ y(s,t) = -\dfrac{\operatorname{sen} s}{2} + \dfrac{1}{2} + t\,; \quad s, t \in \mathbb{R}\,, \\ z(s,t) = \dfrac{\cos s}{\sqrt{2}} + t \end{cases}$$

é uma parametrização da superfície S.

Determinemos agora a equação cartesiana de S.

Um ponto $P = (x, y, z)$ *pertence a* S *se, e só se, existe um único* $P' = (x', y', z') \in \gamma$ *e um único* $t \in \mathbb{R}$ *tais que* $\overrightarrow{P'P} = t\overrightarrow{v}$, *isto é,*

$$\begin{cases} x - x' = t \\ y - y' = t \\ z - z' = t \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \\ x' + y' = 1\,. \end{cases}$$

Então, como

$$x + y = x' + t + y' + t = x' + y' + 2t = 1 + 2t \Longrightarrow t = \frac{x+y-1}{2},$$

temos que:

$$\begin{aligned} x' &= x - t = x - \frac{x+y-1}{2} = \frac{x-y+1}{2}, \\ y' &= y - t = y - \frac{x+y-1}{2} = \frac{-x+y+1}{2}, \\ z' &= z - t = z - \frac{x+y-1}{2} = \frac{-x-y+2z+1}{2}. \end{aligned}$$

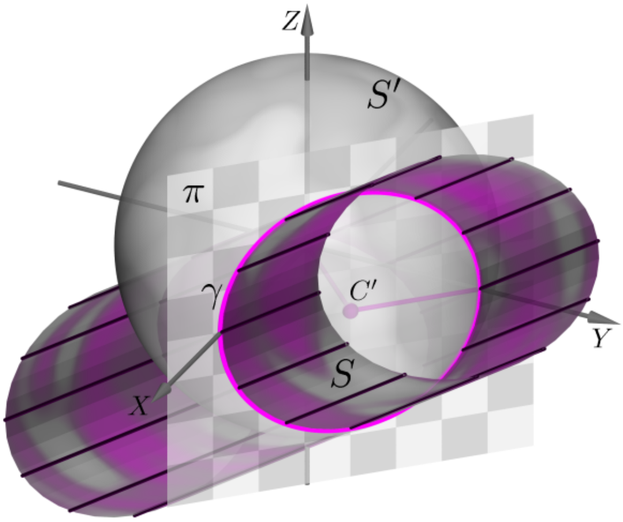

Fig. 10: Esboço da superfície S

Logo, substituindo x', y' e z' na equação $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$, obtemos que:

$$\begin{aligned} & \frac{(x-y+1)^2}{4} + \frac{(-x+y+1)^2}{4} + \frac{(-x-y+2z+1)^2}{4} = 1 \\ \Longleftrightarrow\ & 2x^2 + 2y^2 - 4xy + 2 + x^2 + y^2 + 2xy + 4z^2 + 4z + 1 - 2(x+y)(2z+1) = 4 \\ \Longleftrightarrow\ & 3x^2 + 3y^2 - 2xy + 4z^2 + 4z - 4xz - 2x - 4yz - 2y = 1 \\ \Longleftrightarrow\ & 3x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy - 4xz - 4yz - 2x - 2y + 4z - 1 = 0 \end{aligned}$$

é a equação cartesiana da superfície S. □

Exemplo 2

Em cada um dos itens abaixo, mostre que a equação dada representa uma superfície cilíndrica, determinando uma diretriz e a direção de suas geratrizes. Parametrize essas superfícies e faça um esboço.

(a) $S : y^2 = 4x$.

Solução.

Como estamos no espaço, a equação acima significa que:

$$S = \{ (x,y,z) \mid y^2 = 4x \}.$$

Ou seja, $(x, y, 0) \in S$ se, e só se, $(x, y, t) \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Logo a superfície S é uma superfície cilíndrica com geratrizes paralelas ao vetor $\overrightarrow{v} = (0, 0, 1)$ (paralelas ao eixo$-OZ$) e diretriz

$$\gamma : \begin{cases} y^2 = 4x \\ z = 0\,, \end{cases}$$

que é uma parábola no plano $z = 0$ com vértice na origem e reta focal igual ao eixo$-OX$.

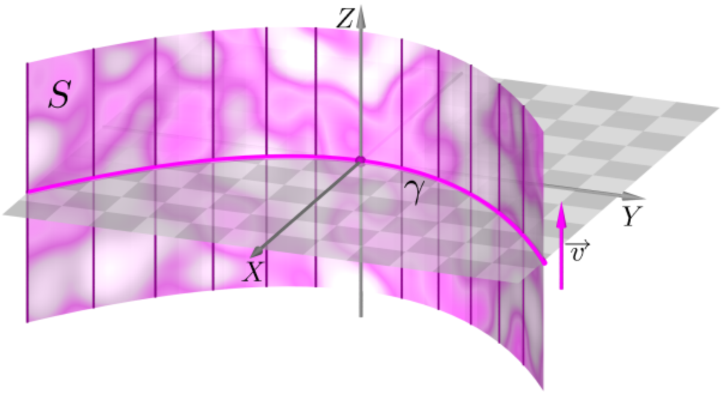

Fig. 11: Esboço da superfície S

Sendo

$$\gamma : \begin{cases} x(s) = \dfrac{s^2}{4} \\ y(s) = s \\ z(s) = 0 \end{cases} \quad ; \quad s \in \mathbb{R}\,,$$

uma parametrização de γ, obtemos que:

$$S : \begin{cases} x(s,t) = \dfrac{s^2}{4} \\ y(s,t) = s \\ z(s,t) = t \end{cases} \quad ; \quad s, t \in \mathbb{R}$$

é uma parametrização da superfície S. $\square$

(b) $S : y^2 + z^2 = 9$

Solução.

Como

$$S = \left\{ (x, y, z) \,|\, y^2 + z^2 = 9 \right\}\,,$$

é fácil ver que S é uma superfície cilíndrica tal que o círculo

$$\gamma : \begin{cases} y^2 + z^2 = 9 \\ x = 0 \end{cases}$$

é uma de suas diretrizes e o vetor $\overrightarrow{v} = (1, 0, 0)$ é a direção de suas geratrizes.

Assim, sendo

$$\gamma : \begin{cases} x(s) = 0 \\ y(s) = 3\cos s \\ z(s) = 3\,\text{sen}\, s \end{cases} \quad ; \quad s \in \mathbb{R},$$

uma parametrização de γ, obtemos que:

$$S : \begin{cases} x(s,t) = t \\ y(s,t) = 3\cos s \\ z(s,t) = 3\,\text{sen}\, s \end{cases} \quad ; \quad s,t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização da superfície S. $\square$

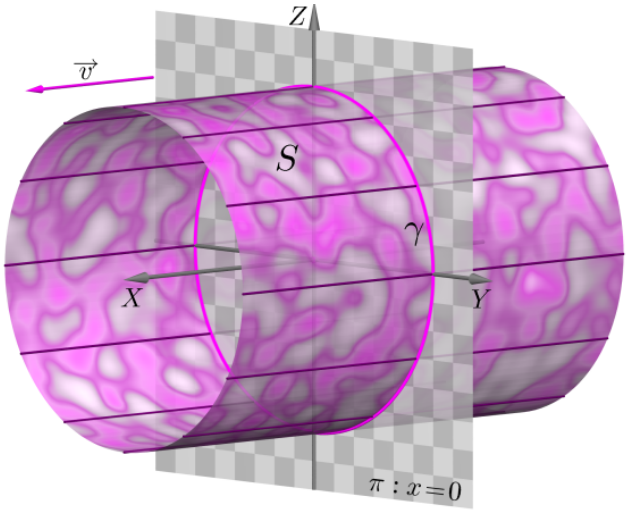

Fig. 12: Esboço da superfície S

(c) $S : y^2 = x^3$.

Solução.
Sendo

$$S = \{ \, (x,y,z) \mid y^2 = x^3 \, \} \,,$$

vemos que S é uma superfície cilíndrica tal que

$$\gamma : \begin{cases} y^2 = x^3 \\ z = 0 \end{cases}$$

é uma de suas diretrizes e $\overrightarrow{v} = (0,0,1)$ (paralelo ao eixo$-OZ$) é a direção de suas geratrizes.

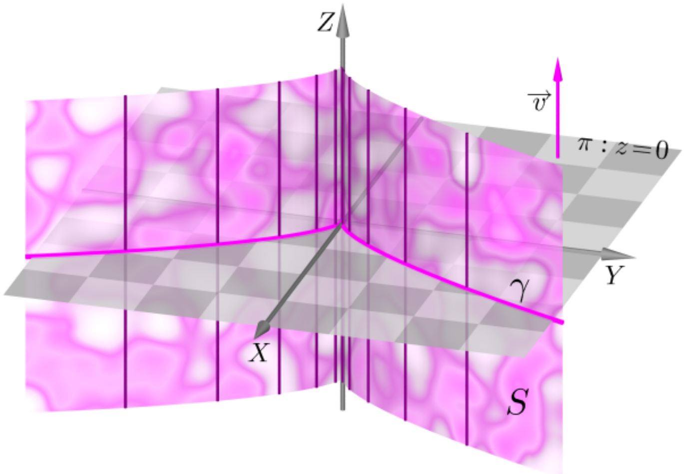

Fig. 13: Esboço da superfície S

Logo, como

$$\gamma : \begin{cases} x(s) = s^2 \\ y(s) = s^3 \\ z(s) = 0 \end{cases} \quad ; \quad s \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização de γ, temos que

$$S : \begin{cases} x(s,t) = s^2 \\ y(s,t) = s^3 \\ z(s,t) = t \end{cases} \quad ; \quad s,t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização da superfície S. $\square$

Antes de continuarmos com os nossos exemplos, faremos a seguinte observação:

Observação 1

Seja π um plano paralelo a um dos planos coordenados OXY, OYZ e OXZ.

Se $\pi : z = k$ é paralelo ao plano OXY, temos que o vetor $\overrightarrow{v} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ é paralelo a este plano se, e só se, $\langle (a, b, c), (0, 0, 1) \rangle = c = 0$, pois $(0, 0, 1)$ é o vetor normal a π.

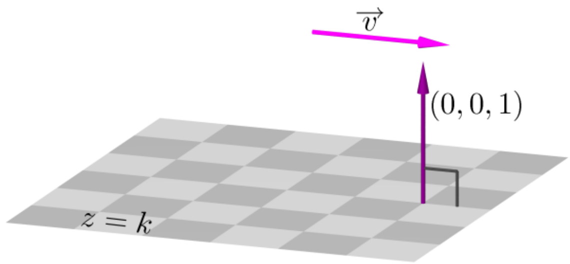

Fig. 14: Vetor paralelo ao plano $z = k$

Analogamente, se $\pi : x = k$ é paralelo ao plano OYZ, então o vetor $\overrightarrow{v} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ é paralelo a π se, e só se, $a = 0$, e se $\pi : y = k$ é paralelo ao plano OXZ, então o vetor $\overrightarrow{v} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ é paralelo a π se, e só se, $b = 0$.

Seja S uma superfície cilíndrica cujas geratrizes são paralelas ao vetor $\overrightarrow{v} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Pelo visto acima, pelo menos um dos planos $x = 0$, $y = 0$ ou $z = 0$ não é paralelo ao vetor $\overrightarrow{v}$. Portanto, a interseção deste plano com a superfície nos dá uma diretriz desta superfície cilíndrica. $\square$

Vamos continuar com os exemplos.

(d) $S : 17x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xy - 6xz - 2 = 0\,.$

Solução.

Seja $\pi_k : x = k$, $k \in \mathbb{R}$, a família de planos paralelos ao plano OYZ e seja $\mathcal{C}_k$, $k \in \mathbb{R}$, a família de curvas dada por:

$$\mathcal{C}_k = S \cap \pi_k : \begin{cases} 2y^2 + z^2 - 8ky - 6kz + 17k^2 - 2 = 0 \\ x = k \end{cases}$$

$$\iff \quad \mathcal{C}_k : \begin{cases} 2(y^2 - 4ky) + (z^2 - 6kz) = 2 - 17k^2 \\ x = k \end{cases}$$

$$\iff \quad \mathcal{C}_k : \begin{cases} 2(y - 2k)^2 + (z - 3k)^2 = 2 - 17k^2 + 8k^2 + 9k^2 = 2 \\ x = k \end{cases}$$

$$\iff \quad \mathcal{C}_k : \begin{cases} (y - 2k)^2 + \dfrac{(z - 3k)^2}{2} = 1 \\ x = k\,. \end{cases}$$

Sendo as curvas $\mathcal{C}_k$ elipses contidas nos planos $x = k$ cujos centros $C_k = (k, 2k, 3k) = k(1, 2, 3)$ pertencem à reta $r = \{(0, 0, 0) + t(1, 2, 3); t \in \mathbb{R}\}$, é fácil ver que S é uma superfície cilíndrica de geratrizes paralelas ao vetor $\overrightarrow{v} = (1, 2, 3)$ e que tem a elipse

$$\gamma : \begin{cases} y^2 + \dfrac{z^2}{2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

como uma de suas diretrizes.

De fato, seja S' a superfície cilíndrica tal que $\overrightarrow{v} = (1,2,3)$ é a direção de suas geratrizes e

$$\gamma : \begin{cases} y^2 + \dfrac{z^2}{2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

é uma de suas geratrizes.

Então $P = (x, y, z) \in S'$ se, e só se, existe um único ponto $P' = (x', y', z') \in \gamma$ e um único número real $t \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{P'P} = t\overrightarrow{v}$, ou seja:

$$\begin{cases} x - x' = t \\ y - y' = 2t \\ z - z' = 3t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2y'^2 + z'^2 = 2 \\ x' = 0 \end{cases}$$

Logo $t = x$, $y' = y - 2t = y - 2x$, $z' = z - 3t = z - 3x$ e, portanto,

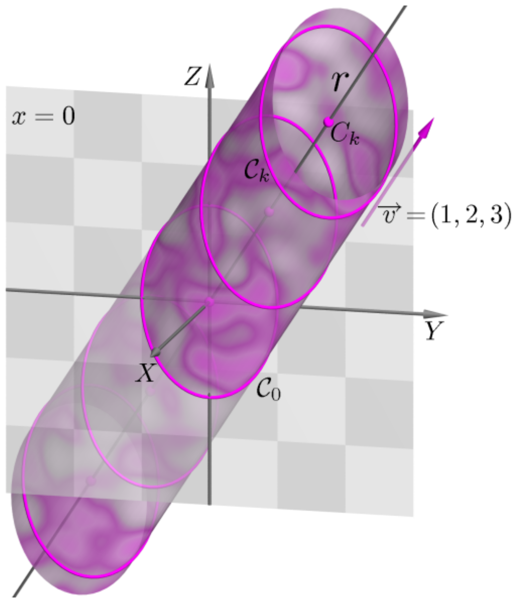

Fig. 15: Esboço da superfície S e de algumas curvas $\mathcal{C}_k$

$$S' : 2(y - 2x)^2 + (z - 3x)^2 = 2 \iff S' : 2(y^2 - 4xy + 4x^2) + (z^2 - 6xz + 9x^2) = 2$$
$$\iff S' : 17x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xy - 6xz - 2 = 0\,.$$

Ou seja, realmente $S' = S$, como queríamos verificar.

Por outro lado, como

$$\gamma : \begin{cases} x(s) = 0 \\ y(s) = \cos s \\ z(s) = \sqrt{2}\,\text{sen}\, s \end{cases} \quad ; \quad s \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização da diretriz e $S = \left\{ \gamma(s) + t\overrightarrow{v} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$, temos que:

$$S : \begin{cases} x(s,t) = t \\ y(s,t) = \cos s + 2t \\ z(s,t) = \sqrt{2}\,\text{sen}\, s + 3t \end{cases} \quad ; \quad s, t \in \mathbb{R}\,.$$

é uma parametrização da superfície. □

(e) $S : xz + 2yz = 1$

Solução.

Fazendo a interseção da superfície S com a família de planos $\pi_k : x = k$, obtemos a família de curvas

$$\gamma_k = S \cap \pi_k : \begin{cases} kz + 2yz = 1 \\ x = k\,, \end{cases}$$

que são cônicas com $A_k = 0$, $B_k = 2$, $C_k = 0$, $D_k = 0$, $E_k = k$ e $F_k = -1$, onde

$$\gamma_k : \begin{cases} A_k y^2 + B_k yz + C_k z^2 + D_k y + E_k z + F_k = 0 \\ x = k\,. \end{cases}$$

Como $A_k = C_k$, sabemos que, após girarmos os eixos OY e OZ de um ângulo de 45^{O}no sentido positivo, obtemos um novo sistema de eixos $O\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$, no qual:

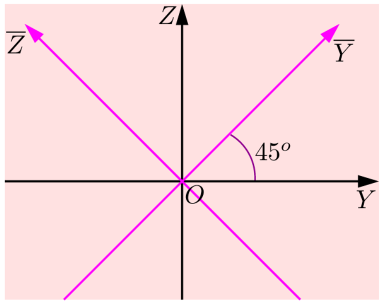

Fig. 16: Rotação de 45^o no plano YZ

$$\begin{cases} x = \overline{x} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(\overline{y} - \overline{z}) \\ z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(\overline{y} + \overline{z}) \end{cases} \qquad (1) \qquad\qquad \begin{cases} \overline{x} = x \\ \overline{y} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(y + z) \\ \overline{z} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-y + z)\,. \end{cases} \qquad (2)$$

e

$$\gamma_k : \begin{cases} \overline{A_k}\overline{y}^2 + \overline{C_k}\overline{z}^2 + \overline{D_k}\overline{y} + \overline{E_k}\overline{z} - 1 = 0 \\ \overline{x} = k\,, \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \overline{A}_k & 0 \\ 0 & \overline{C}_k \end{pmatrix} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \overline{D}_k \\ \overline{E}_k \end{pmatrix} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\,k \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\,k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \gamma_k \;:\; \begin{cases} \overline{y}^2 - \overline{z}^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}k\overline{y} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}k\overline{z} - 1 = 0 \\ \overline{x} = k \end{cases} \\ \iff\; & \gamma_k \;:\; \begin{cases} \left(\overline{y}^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}k\overline{y}\right) - \left(\overline{z}^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}k\overline{z}\right) = 1 \\ \overline{x} = k \end{cases} \\ \iff\; & \gamma_k \;:\; \begin{cases} \left(\overline{y} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}k\right)^2 - \left(\overline{z} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}k\overline{z}\right)^2 = 1 + \dfrac{2k^2}{16} - \dfrac{2k^2}{16} = 1 \\ \overline{x} = k\,, \end{cases} \end{aligned}$$

ou seja, γ_k é uma hipérbole contida no plano $\overline{x} = k$ de centro no ponto $\overline{\mathcal{C}}_k = \left(k, -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\,k, \dfrac{\sqrt{2}}{4}\,k\right)$.

Assim, a curva

$$\gamma_k : \begin{cases} kz + 2yz = 1 \\ x = k \end{cases}$$

é uma hipérbole contida no plano $x = k$ e com centro no ponto $\mathcal{C}_k = \left(k, -\frac{k}{2}, 0\right)$, pois, por (1), as coordenadas x, y e z do centro são:

$$\begin{aligned} x &= \overline{x} = k \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{y} - \overline{z}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}k - \frac{\sqrt{2}}{4}k\right) = -\frac{k}{2} \\ z &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{y} + \overline{z}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}k + \frac{\sqrt{2}}{4}k\right) = 0\,. \end{aligned}$$

Então, como os centros das hipérboles γ_k pertencem à reta

$$r = \{\, t(2,-1,0) \mid t \in \mathbb{R} \,\},$$

é fácil verificar (verifique!) que S é uma superfície cilíndrica com geratrizes paralelas ao vetor

$$\overrightarrow{v} = (2,-1,0),$$

sendo a hipérbole:

$$\gamma_0 : \begin{cases} 2yz = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

uma de suas diretrizes.

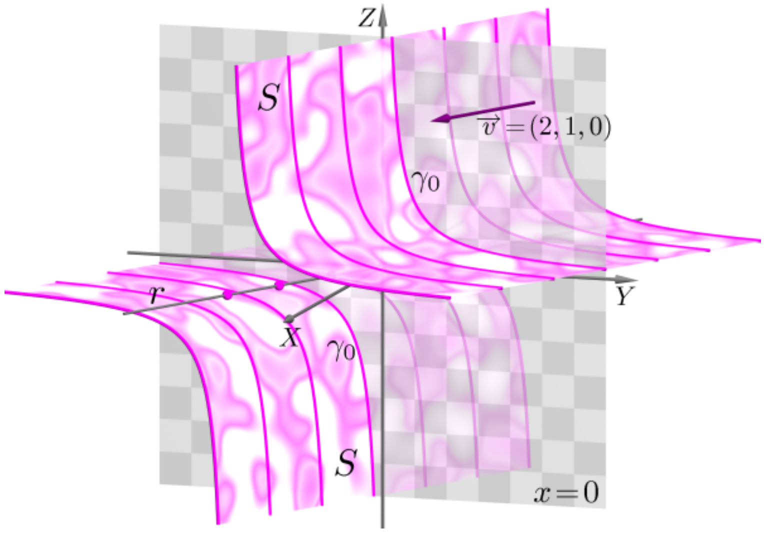

Fig. 17: Superfície S e curvas $\gamma_k = S \cap \{x = k\}$, sendo $\gamma_0 = \mathcal{C}_0$

Para parametrizarmos a superfície S, devemos primeiro parametrizar a diretriz

$$\overline{\gamma}_0 : \begin{cases} \overline{y}^2 - \overline{z}^2 = 1 \\ \overline{x} = 0\,, \end{cases}$$

nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$ e $\overline{z}$.

Sendo

$$\overline{\gamma}_0 : \begin{cases} \overline{x}(s) = 0 \\ \overline{y}(s) = \pm\cosh s \\ \overline{z}(s) = \operatorname{senh} s \end{cases} ; \quad s \in \mathbb{R}\,,$$

uma parametrização de $\overline{\gamma}_0$, temos, por (1), que

$$\gamma_0 : \begin{cases} x(s) = \overline{x}(s) = 0 \\ y(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{y}(s) - \overline{z}(s)) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\pm\cosh s - \operatorname{senh} s) \\ z(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{y}(s) + \overline{z}(s)) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\pm\cosh s + \operatorname{senh} s) \end{cases} ; \quad s \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização da diretriz nas coordenadas x, y e z.

Logo,
$$S:\begin{cases} x(s,t)=2t\\ y(s,t)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\pm\cosh s-\operatorname{senh} s)-t\,; \quad s,t\in\mathbb{R}\,,\\ z(s,t)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\pm\cosh s+\operatorname{senh} s)\end{cases}$$

é uma parametrização de $S=\{\,\gamma_0(s)+t(2,-1,0)\mid s,t\in\mathbb{R}\}$. □

(f) $S: x\,e^y=e^z$.

Solução.
Fazendo a interseção da superfície S com os planos $\pi_k: y=k$, $k\in\mathbb{R}$, paralelos ao plano OXZ, obtemos a família de curvas:

$$\gamma_k=S\cap\pi_k:\begin{cases} x=e^{z-k}\\ y=k\,.\end{cases}$$

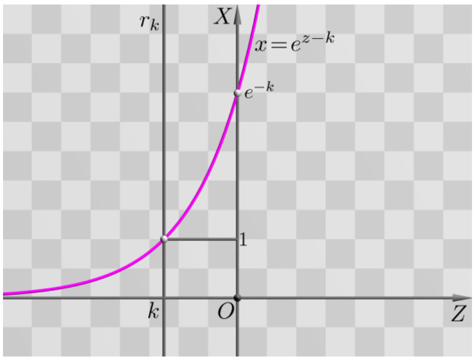

Fig. 18: $y=k<0$

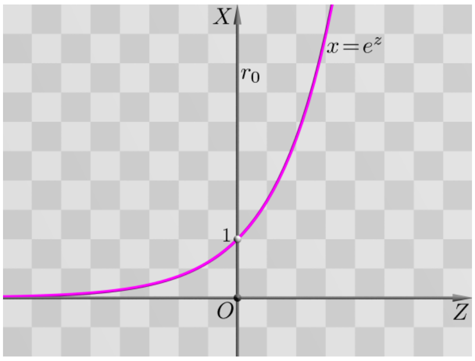

Fig. 19: $y=k=0$

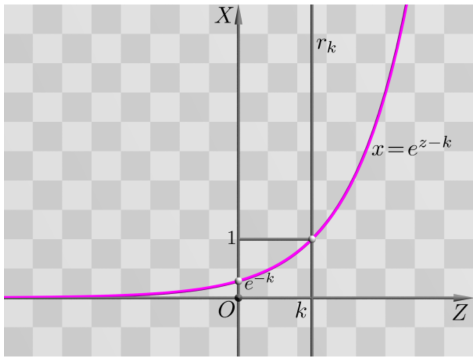

Fig. 20: $y=k>0$

Como o ponto $(1,k,k)$ pertence à curva γ_k, $k\in\mathbb{R}$, e esses pontos pertencem à reta $r=\{\,(1,0,0)+t(0,1,1)\mid t\in\mathbb{R}\}$ paralela ao vetor $\overrightarrow{v}=(0,1,1)$, podemos intuir que $\overrightarrow{v}$ é a direção das geratrizes de S e

$$\gamma_0:\begin{cases} x=e^z\\ y=0\end{cases}$$

é uma de suas diretrizes.

De fato, seja S' a superfície cilíndrica com diretriz γ_0 e geratrizes paralelas ao vetor $\overrightarrow{v}$.

Então $P=(x,y,z)\in S'$ se, e só se, existe um único $P'=(x',y',z')\in\gamma_0$ e um único $t\in\mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{P'P}=t\overrightarrow{v}$, isto é:

$$\begin{cases} x-x'=0\\ y-y'=t\\ z-z'=t\end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x'=e^{z'}\\ y'=0\,.\end{cases}$$

Logo $x'=x$, $t=y$, $z'=z-t=z-y$ e, portanto,
$$x=e^{z-y}\iff e^y x=e^z$$

é a equação cartesiana da superfície S'.

Provamos assim que $S = S'$, ou seja, que S é uma superfície cilíndrica com diretriz γ_0 e geratrizes paralelas ao vetor $\overrightarrow{v}$.

Sendo

$$\gamma : \begin{cases} x(s) = e^s \\ y(s) = 0 \\ z(s) = s \end{cases} ; \quad s \in \mathbb{R},$$

uma parametrização de γ, obtemos que:

$$S : \begin{cases} x(s,t) = e^s \\ y(s,t) = t \\ z(s,t) = s + t \end{cases} ; \quad s,t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização da superfície S. $\square$

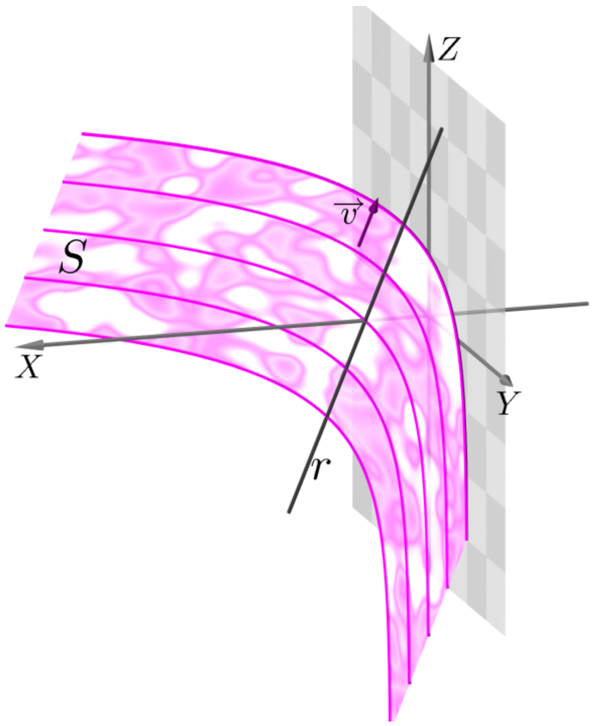

Fig. 21: Superfície S

Exemplo 3

Seja $\mathcal{C}$ o círculo contido no plano $\pi : x - y + 2z = 0$, centrado na origem $C = (0,0,0)$ e de raio $R = 3$.

(a) *Dê a equação cartesiana e as equações paramétricas da superfície cilíndrica S cuja diretriz é o círculo $\mathcal{C}$ e as geratrizes são perpendiculares ao plano π.*

(b) *Verifique que a diretriz $\mathcal{E} = S \cap \pi'$ de S é uma elipse, e determine o seu centro e a sua reta focal, onde π' é o plano $z = 0$.*

Solução.

(a) Por uma rotação dos eixos coordenados OX, OY e OZ, obtemos um novo sistema de eixos ortogonais $O\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$, no qual os semi-eixos positivos $O\overline{X}$, $O\overline{Y}$ e $O\overline{Z}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido dos vetores $\overrightarrow{v}_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{v}_3 \times \overrightarrow{v}_1 = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{12}}, \dfrac{2}{\sqrt{12}}, \dfrac{2}{\sqrt{12}}\right) = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e $\overrightarrow{v}_3 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$, respectivamente.

Neste novo sistema, o círculo $\mathcal{C}$ tem centro na origem e raio 3 e está contido no plano $\overline{z} = 0$, ou seja,

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \overline{x}^2 + \overline{y}^2 = 9 \\ \overline{z} = 0\,. \end{cases}$$

Como

$$(x,y,z) = \overline{x}\overrightarrow{v_1} + \overline{y}\overrightarrow{v_2} + \overline{z}\overrightarrow{v_3},$$

e

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \overline{x}(s) = 3\cos s \\ \overline{y}(s) = 3\cos s \quad ; \quad s \in \mathbb{R}\,, \\ \overline{z}(s) = 0 \end{cases}$$

é uma parametrização de $\mathcal{C}$ nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, obtemos que:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x(s) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos s - \dfrac{3}{\sqrt{3}}\,\text{sen}\, s \\ y(s) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos s + \dfrac{3}{\sqrt{3}}\,\text{sen}\, s \; ; \quad s \in \mathbb{R}\,, \\ z(s) = \dfrac{3}{\sqrt{3}}\,\text{sen}\, s \end{cases}$$

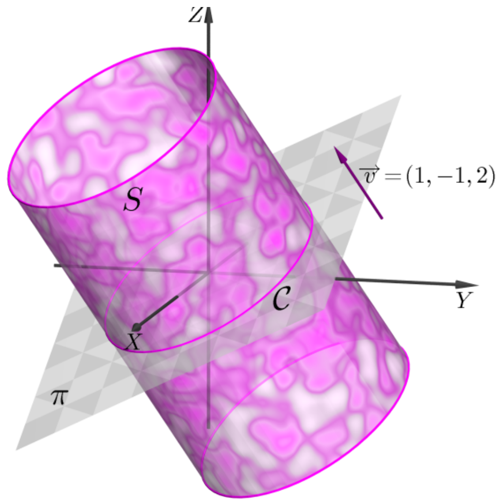

Fig. 22: Superfície cilíndrica S

é uma parametrização de $\mathcal{C}$ nas coordenadas x, y e z.

Então $S = \{\, (x(s), y(s), z(s)) + t(1, -1, 2) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$, isto é,

$$S : \begin{cases} x(s,t) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos s - \dfrac{3}{\sqrt{3}}\,\text{sen}\, s + t \\ y(s,t) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos s + \dfrac{3}{\sqrt{3}}\,\text{sen}\, s - t \; ; \quad s, t \in \mathbb{R}\,, \\ z(s,t) = \dfrac{3}{\sqrt{3}}\,\text{sen}\, s + 2t \end{cases}$$

é uma parametrização de S, onde $\overrightarrow{v} = (1, -1, 2)$ é um vetor normal ao plano π.

Para obtermos a equação cartesiana de S observe que:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x - y + 2z = 0\,. \end{cases}$$

Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a S se, e só se, existe um único ponto $P' = (x', y', z') \in \mathcal{C}$ e um único número real $t \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{P'P} = t\overrightarrow{v}$, ou seja:

$$\begin{cases} x - x' = t \\ y - y' = -t \\ z - z' = 2t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x'^2 + y'^2 + z'^2 = 9 \\ x' - y' + 2z' = 0\,. \end{cases}$$

Assim:

$$x - y + 2z = x' - y' + 2z' + t + t + 4t = 6t\,, \quad \text{isto é,} \quad t = \frac{x - y + 2z}{6}\,;$$

$$\begin{aligned} x' &= x - t = x - \frac{x - y + 2z}{6} = \frac{5x + y - 2z}{6}\,; \\ y' &= y + t = y + \frac{x - y + 2z}{6} = \frac{x + 5y + 2z}{6}\,; \\ z' &= z - 2t = z - 2\,\frac{x - y + 2z}{6} = \frac{-2x + 2y + 2z}{6}\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$(5x + y - 2z)^2 + (x + 5y + 2z)^2 + (-2x + 2y + 2z)^2 = 36 \times 9$$
$$\iff \quad 5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 2xy - 4xz + 4yz - 54 = 0 \qquad (3)$$

é a equação cartesiana da superfície cilíndrica S. $\square$

Solução.

(b) De fato $\mathcal{E} = S \cap \pi'$ é uma diretriz da superfície S, pois a direção das geratrizes $\overrightarrow{v} = (1, -1, 2)$ não é paralela ao plano $\pi' : z = 0$, já que $\langle (1, -1, 2), (0, 0, 1) \rangle = 2 \neq 0$.

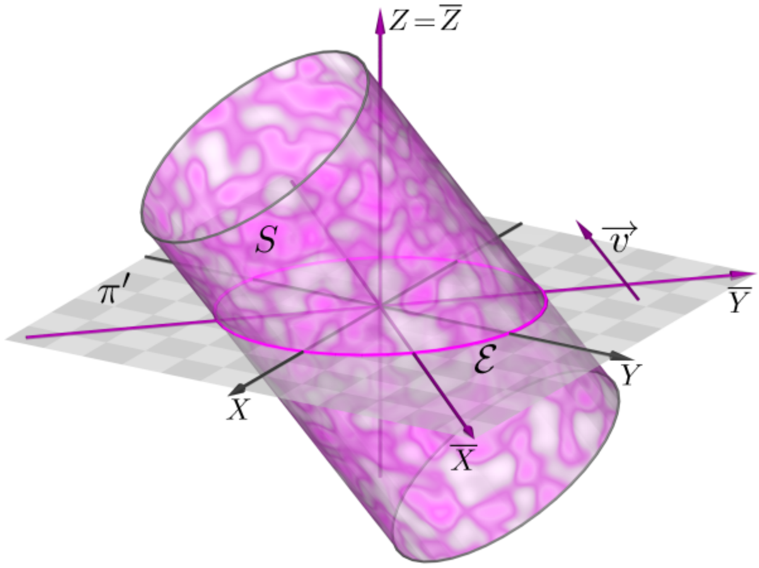

Fig. 23: Interseção $\mathcal{E} = S \cap \pi'$ e eixos $O\overline{X}$ e $O\overline{Y}$ obtidos dos eixos OX e OY, respectivamente, por uma rotação de 45^o

Fazendo $z = 0$ na equação (3), obtemos que:

$$\mathcal{E} : \begin{cases} 5x^2 + 2xy + 5y^2 - 54 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Como, na cônica acima, $A = C = 5$, $B = 2$, $D = E = 0$ e $F = -54$ obtemos, após girarmos os eixos OX e OY de 45^o no sentido positivo, um novo sistema de eixos ortogonais $O\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$, no qual a elipse se escreve na forma:

$$\mathcal{E} : \begin{cases} \overline{A}\overline{x}^2 + \overline{C}\overline{y}^2 + \overline{D}\overline{x} + \overline{E}\overline{y} - 54 = 0 \\ z = 0\,, \end{cases}$$

onde:

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \overline{D} \\ \overline{E} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ou seja,

$$\mathcal{E} : \begin{cases} 6\overline{x}^2 + 4\overline{y}^2 = 54 \\ \overline{z} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\overline{x}^2}{9} + \dfrac{\overline{y}^2}{27/2} = 1 \\ \overline{z} = 0 \end{cases} .$$

Provamos, assim, que $\mathcal{E}$ é uma elipse centrada na origem cuja reta-focal é $r = \{\,(t, -t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\,\}$, pois a reta focal é paralela ao eixo$-O\overline{Y}$. □

Definição 1

A superfície cilíndrica S circunscrita à esfera S_0 com geratrizes paralelas à reta r é a superfície gerada por todas as retas paralelas à reta r que intersectam a esfera S_0 em apenas um ponto, ou seja, que são tangentes à esfera S_0.

Exemplo 4

Determine a equação cartesiana da superfície cilíndrica S circunscrita à esfera

$$S_0 : (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 4\,,$$

cujas geratrizes são paralelas à reta

$$r : \begin{cases} x = t - 3 \\ y = t + 7 \\ z = -2t + 5 \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Solução.

Seja $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto pertencente à esfera S_0 e seja

$$r_0 : \begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + t \\ z = z_0 - 2t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

a reta paralela à reta r que passa por P_0.

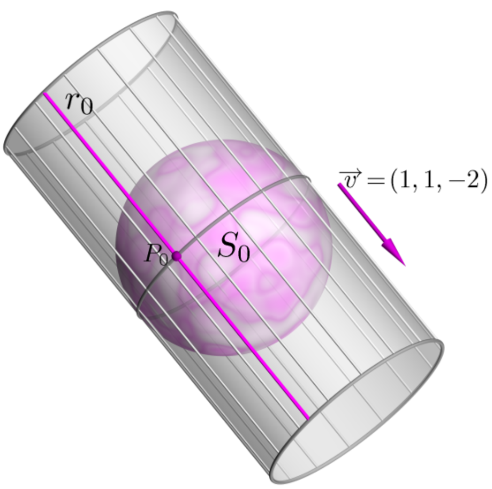

Fig. 24: Superfície cilíndrica S circunscrita à esfera S_0

Então $r_0 \cap S_0 = \{P_0\}$ se, e só se, a equação do segundo grau na variável t:

$$
\begin{aligned}
& (x_0 + t - 2)^2 + (y_0 + t - 1)^2 + (z_0 - 2t - 3)^2 = 9 \\
\iff\ & (x_0 - 2)^2 + 2t(x_0 - 2) + t^2 + (y_0 - 1)^2 + 2t(y_0 - 1) + t^2 + (z_0 - 3)^2 - 4t(z_0 - 3) + 4t^2 = 9 \\
\iff\ & 6t^2 + 2t((x_0 - 2) + (y_0 - 1) - 2(z_0 - 3)) = 0\,, \\
\iff\ & 2t(3t + (x_0 - 2) + (y_0 - 1) - 2(z_0 - 3)) = 0
\end{aligned}
$$

possui apenas a solução $t = 0$ (note que $(x_0 - 2)^2 + (y_0 - 1)^2 + (z_0 - 3)^2 = 9$, pois $p_0 \in S_0$).
Para que isto ocorra devemos ter:

$$(x_0 - 2) + (y_0 - 1) - 2(z_0 - 3) = 0\,.$$

Ou seja, $r_0 \cap S_0 = \{P_0\}$ se, e só se, P_0 pertence ao plano

$$\pi : (x - 2) + (y - 1) - 2(z - 3) = 0\,,$$

perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v} = (1, 1, -2)$ (paralelo às geratrizes) que passa pelo centro $A = (2, 1, 3)$ da esfera.

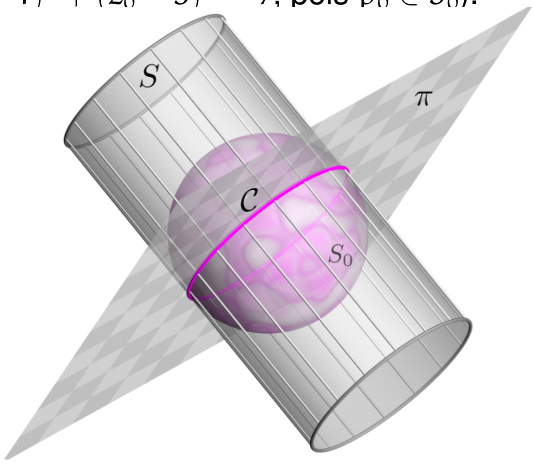

Fig. 25: $\pi \cap S = \mathcal{C}$

Provamos assim que o círculo

$$\mathcal{C} : \begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9 \\ x + y - 2z = -3 \end{cases}$$

é uma diretriz da superfície cilíndrica S.

Então $P = (x, y, z) \in S$ se, e só se, existe um único ponto $P' = (x', y', z') \in \mathcal{C}$ e um único número real $t \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{P'P} = t\overrightarrow{v}$, ou seja,

$$\begin{cases} x - x' = t \\ y - y' = t \\ z - z' = -2t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} (x' - 2)^2 + (y' - 1)^2 + (z' - 3)^2 = 9 \\ x' + y' - 2z' = -3\,. \end{cases}$$

Logo: $x + y - 2z = x' + y' - 2z' + t + t + 4t = -3 + 6t$, isto é, $t = \dfrac{x + y - 2z + 3}{6}$;

$$
\begin{aligned}
x' &= x - t = x - \frac{x + y - 2z + 3}{6} = \frac{5x - y + 2z - 3}{6}\,; \\
y' &= y - t = y - \frac{x + y - 2z + 3}{6} = \frac{-x + 5y + 2z - 3}{6}\,; \\
z' &= z + 2t = z + 2\frac{x + y - 2z + 3}{6} = \frac{2x + 2y + 2z + 6}{6}\,.
\end{aligned}
$$

Finalmente, substituindo as expressões acima na equação $(x' - 2)^2 + (y' - 1)^2 + (z' - 3)^2 = 9$, obtemos que

$$
\begin{aligned}
& (5x - y + 2z - 3 - 12)^2 + (-x + 5y + 2z - 3 - 6)^2 + (2x + 2y + 2z + 6 - 18)^2 = 36 \times 9 \\
\iff\ & 15x^2 + 15y^2 + 6z^2 - 6xy + 12xz + 12yz - 95x - 54y - 54z + 63 = 0
\end{aligned}
$$

é a equação cartesiana do cilindro S. $\square$

Definição 2

Dizemos que um cilindro S com geratrizes paralelas ao vetor $\overrightarrow{v} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ é um cilindro circular reto *quando a diretriz $\mathcal{C} = S \cap \pi_d$ é um círculo, onde $\pi_d : ax + by + cz = d$ é um plano perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v}$.*

Neste caso, para todo $k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_k = S \cap \pi_k$ é um círculo de raio R e centro num ponto C_k da reta paralela ao vetor $\overrightarrow{v}$ que passa por C, onde $\pi_k : ax + by + cz = k$ é um plano perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v}$, C é o centro e R o raio do círculo $\mathcal{C} = \pi_d \cap S$. A reta r que passa pelos centros C_k (paralela ao vetor $\overrightarrow{v}$) é chamada eixo do cilindro.

De fato, se $C = (x_0, y_0, z_0)$ é o centro de $\mathcal{C} = \pi_d \cap S$, então:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \\ ax + by + cz = d\,. \end{cases}$$

Então um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a $\pi_k \cap S = \mathcal{C}_k$ se, e só se, existe um único ponto $P' = (x', y', z') \in \mathcal{C} = \pi_d \cap S$ e um único $t \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{P'P} = t\overrightarrow{v}$, ou seja:

$$\begin{cases} x - x' = at \\ x - y' = bt \\ z - z' = ct \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} (x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z' - z_0)^2 = R^2 \\ ax' + by' + cz' = d. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & a(x - x') + b(y - y') + c(z - z') = (a^2 + b^2 + c^2)t \\ \iff \quad & (ax + by + cz) - (ax' + by' + cz') = (a^2 + b^2 + c^2)t \\ \iff \quad & k - d = (a^2 + b^2 + c^2)t \\ \iff \quad & t = \frac{k - d}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

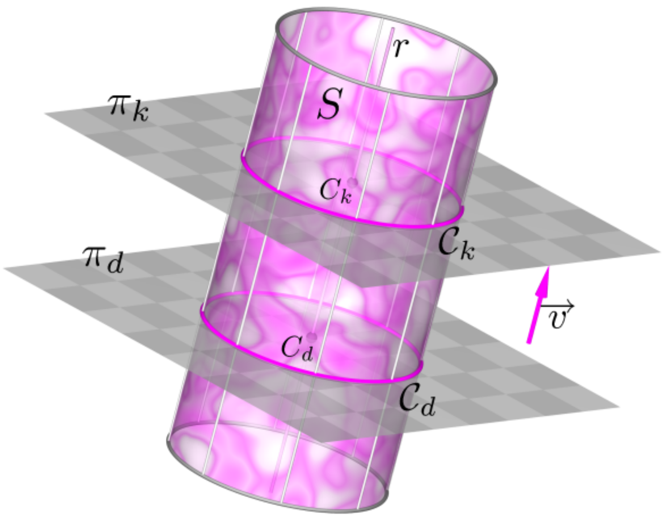

Fig. 26: $\mathcal{C}_k = \pi_k \cap S$

Provamos, então, que $\mathcal{C}_k = \pi_k \cap S$ consiste de todos os pontos da forma:

$$P = P' + \frac{k-d}{a^2+b^2+c^2}\overrightarrow{v} = P' + \frac{k-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\overrightarrow{v_0},$$

com $P' \in \pi_d \cap S = \mathcal{C}$, onde $\overrightarrow{v_0} = \dfrac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ é o vetor unitário na direção e sentido do vetor $\overrightarrow{v}$. Lembre que $d(\pi_d, \pi_k) = \dfrac{|k-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Como $(x'-x_0)^2 + (y'-y_0)^2 + (z'-z_0)^2 = R^2$ e $x' = x - at$, $y' = y - bt$, $z' = z - ct$, temos que:

$$(x-(at+x_0))^2 + (y-(bt+y_0))^2 + (z-(ct+z_0))^2 = R^2.$$

Portanto,

$$\pi_k \cap S : \begin{cases} (x-(at+x_0))^2 + (y-(bt+y_0))^2 + (z-(ct+z_0))^2 = R^2 \\ ax+by+cz = k, \end{cases}$$

é um círculo de centro $C_k = (at+x_0, bt+y_0, ct+z_0)$ e raio R contido no plano π_k, onde $t = \dfrac{k-d}{a^2+b^2+c^2}$. $\square$

Exemplo 5

Determine as equações paramétricas do cilindro circular reto S que passa pelo ponto $A = (1,3,2)$, sabendo-se que ele tem por eixo a reta:

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t+1 \\ z = t+4 \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Solução.

• As geratrizes do cilindro S são paralelas ao vetor $\overrightarrow{v} = (2,3,1) \parallel r$ e o círculo $\mathcal{C} = \pi \cap S$ é uma diretriz, onde π é o plano $2x+3y+z = 2\times 1 + 3\times 3 + 2 = 13$ que passa pelo ponto $A \in S$ e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v}$.

Seja $C = (2t, 3t+1, t+4)$ o centro do círculo $\mathcal{C}$. Como $C \in \pi$, temos:

$$2\times 2t + 3\times(3t+1) + t + 4 = 13$$
$$\iff 14t = 13 - 7 = 6 \iff t = \frac{3}{7}.$$

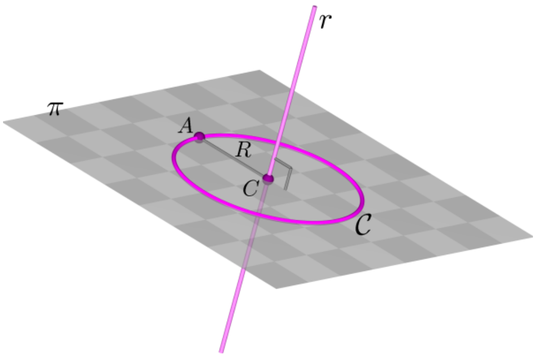

Fig. 27: Geratriz $\mathcal{C} \subset \pi$ e reta r eixo de S

Portanto,

$$C = \left(\frac{6}{7}, \frac{9}{7}+1, \frac{3}{7}+4\right) = \left(\frac{6}{7}, \frac{16}{7}, \frac{31}{7}\right)$$

é o centro do círculo $\mathcal{C}$,

$$R = d(A,C) = \sqrt{\left(1-\frac{6}{7}\right)^2 + \left(3-\frac{16}{7}\right)^2 + \left(2-\frac{31}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{49}+\frac{25}{49}+\frac{289}{49}} = \frac{\sqrt{315}}{7}$$

é o seu raio e

$$\mathcal{C} = \pi \cap S : \begin{cases} \left(x - \frac{6}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{16}{7}\right)^2 + \left(z - \frac{31}{7}\right) = \frac{315}{49} \\ 2x + 3y + z = 13 \,. \end{cases}$$

Por uma translação e uma rotação do sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, obtemos um novo sistema de eixos ortogonais $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}}\,\overline{\overline{Z}}$, onde $\overline{O} = C$ e os semi-eixos positivos $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$, $\overline{O}\,\overline{\overline{Y}}$ e $\overline{O}\,\overline{\overline{Z}}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido dos vetores

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_1} &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\,,\, 0\,,\, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right), \\ \overrightarrow{v_2} &= \overrightarrow{v_3} \times \overrightarrow{v_1} = \begin{vmatrix} 2/\sqrt{14} & 3/\sqrt{14} & 1/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \end{vmatrix} = \left(-\frac{6}{\sqrt{70}}\,,\, \frac{5}{\sqrt{70}}\,,\, -\frac{3}{\sqrt{70}}\right), \\ \overrightarrow{v_3} &= \left(\frac{2}{\sqrt{14}}\,,\, \frac{3}{\sqrt{14}}\,,\, \frac{1}{\sqrt{14}}\right), \end{aligned}$$

respectivamente.

Neste novo sistema, o círculo $\mathcal{C}$ tem raio $\frac{\sqrt{315}}{7}$, centro na origem e está contido no plano $\overline{\overline{z}} = 0$, ou seja:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \overline{\overline{x}}^2 + \overline{\overline{y}}^2 = \frac{315}{49} = \frac{45}{7} \\ \overline{\overline{z}} = 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \overline{\overline{x}}(s) = \sqrt{\frac{45}{7}}\ \cos s \\ \overline{\overline{y}}(s) = \sqrt{\frac{45}{7}}\ \text{sen}\, s \\ \overline{\overline{z}}(s) = 0 \end{cases} \quad ; \quad s \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização de $\mathcal{C}$ nas coordenadas $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{y}}$, $\overline{\overline{z}}$. Como

$$(x, y, z) = \overline{\overline{x}}\,\overrightarrow{v_1} + \overline{\overline{y}}\,\overrightarrow{v_2} + \overline{\overline{z}}\,\overrightarrow{v_3} + C\,,$$

obtemos que:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x(s) = \sqrt{\frac{45}{35}}\ \cos s - \frac{6}{7}\sqrt{\frac{45}{10}}\ \text{sen}\, s + \frac{6}{7} \\ y(s) = \frac{5}{7}\sqrt{\frac{9}{10}}\ \text{sen}\, s + \frac{16}{7} \\ z(s) = -2\sqrt{\frac{45}{35}}\ \cos s - \frac{3}{7}\sqrt{\frac{45}{10}}\ \text{sen}\, s + \frac{31}{7} \end{cases} \quad ; \quad s \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização de $\mathcal{C}$ no sistema $OXYZ$.

Logo,

$$S = \{\, (x(s), y(s), z(s)) + t(2,3,1) \mid s, t \in \mathbb{R} \,\}\,,$$

isto é,

$$\mathcal{S}:\begin{cases} x(s,t)=\sqrt{\frac{9}{7}}\cos s-\frac{6}{7}\sqrt{\frac{9}{2}}\,\text{sen}\, s+\frac{6}{7}+2t\\ y(s,t)=\frac{5}{7}\sqrt{\frac{9}{10}}\,\text{sen}\, s+\frac{16}{7}+3t\\ z(s,t)=-2\sqrt{\frac{9}{7}}\cos s-\frac{3}{7}\sqrt{\frac{9}{2}}\,\text{sen}\, s+\frac{31}{7}+t\end{cases}\quad ;\quad s,t\in\mathbb{R},$$

é uma parametrização do cilindro circular reto $\mathcal{S}$. □

Antes de prosseguirmos com nosso estudo de superfícies especiais, veremos, através de exemplos, como esboçar uma superfície, conhecendo-se algumas de suas seções planas.

Exemplo 6

Corte cada uma das superfícies abaixo pelos planos z =constante e classifique a família de curvas encontradas. Determine também a interseção das superfícies com o plano $x=0$. A partir destas informações, faça um esboço da superfície.

(a) $S: 4x^2+4(y-\sqrt{z})^2=z$.

Solução.

Primeiro observe que S está contida no semi-plano $z\geq 0$. Fazendo $z=k$, $k\geq 0$, na equação acima, obtemos:

$$4x^2+4(y-\sqrt{k})^2=k\iff x^2+(y-\sqrt{k})^2=\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^2.$$

Se $k=0$, temos que $x^2+y^2=0$ ($\iff x=y=0$). Logo $S\cap\{z=0\}=\{(0,0,0)\}$.

Se $k>0$, a equação

$$x^2+(y-\sqrt{k})^2=\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^2$$

representa um círculo, contido no plano $\pi_k: z=k$, de centro $C_k=(0,\sqrt{k},k)$ e raio $r_k=\frac{\sqrt{k}}{2}$.

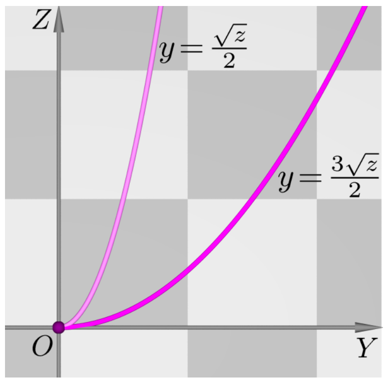

Fig. 28: Curvas $y=\frac{3\sqrt{z}}{2}$ e $y=\frac{\sqrt{z}}{2}$

Fazendo agora $x=0$ na equação da superfície, obtemos:

$$4(y-\sqrt{z})^2=z\iff 2(y-\sqrt{z})=\pm\sqrt{z}\iff (y-\sqrt{z})=\pm\frac{\sqrt{z}}{2}$$
$$\iff y=\sqrt{z}-\frac{\sqrt{z}}{2}=\frac{\sqrt{z}}{2}\quad\text{ou}\quad y=\sqrt{z}+\frac{\sqrt{z}}{2}=\frac{3\sqrt{z}}{2},$$

duas curvas no plano YZ (Figura 28). Além disso, observe que os centros C_k dos círculos pertencem à curva $\begin{cases} y=\sqrt{z}\\ x=0,\end{cases}$ e que, para cada $k>0$, os pontos $A_k=\left(0,\frac{\sqrt{k}}{2},k\right)$ e $B_k=\left(0,\frac{3\sqrt{k}}{2},k\right)$ são as extremidades do diâmetro do círculo $\mathcal{C}_k$ contido no plano $x=0$ (plano YZ).

Juntando as informações acima, podemos esboçar a superfície.

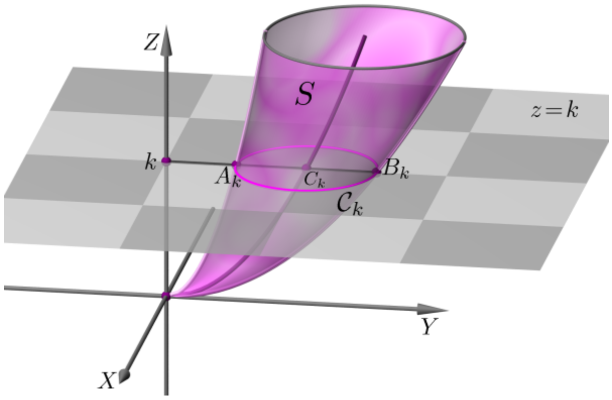

Fig. 29: Superfície S

Sendo

$$S \cap \pi_k : \begin{cases} x^2 + (y - \sqrt{k})^2 = \left(\dfrac{\sqrt{k}}{2}\right)^2 \\ z = k \end{cases}$$

um círculo de centro $(0, \sqrt{k}, k)$ e raio $\dfrac{\sqrt{k}}{2}$, $k \geq 0$, podemos parametrizar a superfície da seguinte maneira:

$$S : \begin{cases} x(s,t) = \dfrac{\sqrt{t}}{2} \cos s \\ y(s,t) = \dfrac{\sqrt{t}}{2} \operatorname{sen} s + \sqrt{t} \\ z(s,t) = t \end{cases} \quad ; \quad t \in [0, \infty), \quad s \in \mathbb{R}. \ \square$$

(b) $S : x^2 + (y - z^{1/3})^2 = z^{2/3}$.

Solução.

Fazendo $z = k$, $k \in \mathbb{R}$, na equação acima, obtemos a família de curvas:

$$\mathcal{C}_k : x^2 + (y - k^{1/3})^2 = k^{2/3}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

A curva $\mathcal{C}_k$ é o círculo de centro $C_k = (0, k^{1/3}, k)$ e raio $r_k = |k|^{1/3}$, contido no plano $z = k$, se $k \neq 0$. Além disso, $S \cap \{z = 0\} = \{(0,0,0)\}$, se $k = 0$.

A interseção da superfície S com o plano $x = 0$ é dada pelas curvas

$$\begin{aligned} & (y - z^{1/3})^2 = z^{2/3} \iff |y - z^{1/3}| = |z|^{1/3} \\ \iff & \ y - z^{1/3} = |z|^{1/3} \quad \text{ou} \quad y - z^{1/3} = -|z|^{1/3} \\ \iff & \ y = z^{1/3} + |z|^{1/3} \quad \text{ou} \quad y = z^{1/3} - |z|^{1/3} \end{aligned}$$

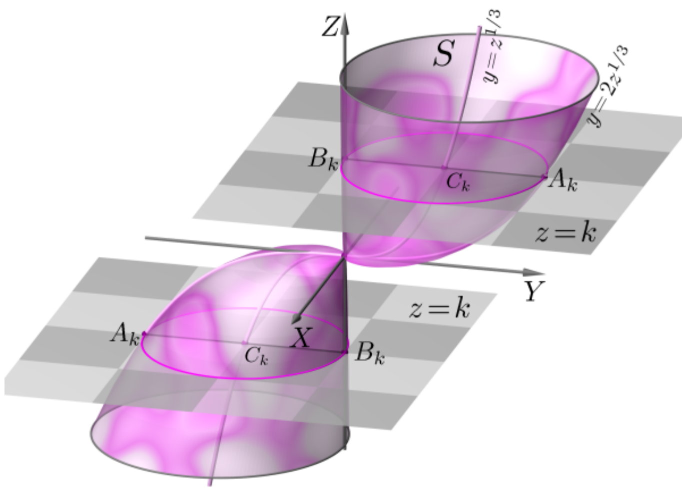

Fig. 30: Superfície S

Como os centros $C_k = (0, k^{1/3}, k)$ pertencem à curva $\begin{cases} y = z^{1/3} \\ x = 0 \end{cases}$;

$$y = z^{1/3} + |z|^{1/3} = \begin{cases} z^{1/3} + z^{1/3} = 2z^{1/3}, & \text{se } z \geq 0 \\ z^{1/3} - z^{1/3} = 0, & \text{se } z \leq 0 \end{cases}$$

e

$$y = z^{1/3} - |z|^{1/3} = \begin{cases} z^{1/3} - z^{1/3} = 0, & \text{se } z \geq 0 \\ z^{1/3} - (-z)^{1/3} = 2z^{1/3}, & \text{se } z \leq 0 \end{cases},$$

temos que, para todo $k \in \mathbb{R}$, $A_k = (0, 2k^{1/3}, k)$ e $B_k = (0, 0, k)$ são as extremidades do diâmetro do círculo $\mathcal{C}_k$ contido no plano $x = 0$.

Com as informações acima, podemos fazer um esboço da superfície S (ver Figura 30), e parametrizá-la da seguinte maneira:

$$S : \begin{cases} x(s,t) = |t|^{1/3} \cos s \\ y(s,t) = |t|^{1/3} \operatorname{sen} s + t^{1/3} \\ z(s,t) = t \end{cases} ; \quad s, t \in \mathbb{R}. \; \square$$

(c) $S : (x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2)^2 = 4a^2(b^2 - z^2)$, onde $a > b > 0$.

Solução.

Primeiro observe que se $(x, y, z) \in S$ então $b^2 - z^2 \geq 0$, ou seja, $|z| \leq b$, já que

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2)^2 \geq 0.$$

Além disso, se $|z| \leq b$:

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2 = \pm 2a\sqrt{b^2 - z^2} \\ \iff \quad & x^2 + y^2 = a^2 + (b^2 - z^2) \pm 2a\sqrt{b^2 - z^2} \\ \iff \quad & x^2 + y^2 = \left(a + \sqrt{b^2 - z^2}\right)^2 \text{ ou } x^2 + y^2 = \left(a - \sqrt{b^2 - z^2}\right)^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Então, se $|k| < b$,

$$S \cap \{z = k\} = \mathcal{C}_{1k} \cup \mathcal{C}_{2k},$$

onde:

$$\mathcal{C}_{1k} : \begin{cases} x^2 + y^2 = (a + \sqrt{b^2 - k^2})^2 \\ z = k \end{cases}$$

é um círculo de centro $\mathcal{C}_{1k} = (0, 0, k)$ e raio $r_{1k} = a + \sqrt{b^2 - k^2}$, e

$$\mathcal{C}_{2k} : \begin{cases} x^2 + y^2 = (a - \sqrt{b^2 - k^2})^2 \\ z = k \end{cases}$$

é um círculo de centro $C_{2k} = (0, 0, k)$ e raio $r_{2k} = a - \sqrt{b^2 - k^2}$, contidos no plano $z = k$. Observe que $a - \sqrt{b^2 - k^2} > 0$, pois $a > b$ por hipótese.

Se $k = b$, $S \cap \{z = b\} : \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = b \end{cases}$ é o círculo de centro $C_b = (0, 0, b)$ e raio $r_b = a$, contido no plano $z = b$.

E se $k = -b$, $S \cap \{z = -b\} : \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = -b \end{cases}$ é o círculo de centro $C_{-b} = (0, 0, -b)$ e raio $r_b = a$, contido no plano $z = -b$.

Vamos determinar agora a seção plana $S \cap \{x = 0\}$. Por (4), temos:

$$\begin{cases} y^2 = (a + \sqrt{b^2 - z^2})^2 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y^2 = (a - \sqrt{b^2 - z^2})^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = a + \sqrt{b^2 - z^2} \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = -a - \sqrt{b^2 - z^2} \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = a - \sqrt{b^2 - z^2} \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = -a + \sqrt{b^2 - z^2} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y - a = \pm\sqrt{b^2 - z^2} \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y + a = \pm\sqrt{b^2 - z^2} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (y - a)^2 = b^2 - z^2 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} (y + a)^2 = b^2 - z^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (y - a)^2 + z^2 = b^2 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} (y + a)^2 + z^2 = b^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Ou seja, $S \cap \{x = 0\} = \beta_1 \cup \beta_2$, onde β_1 é o círculo de centro $(0, a, 0)$ e raio b, e β_2 é o círculo de centro $(0, -a, 0)$ e raio b.

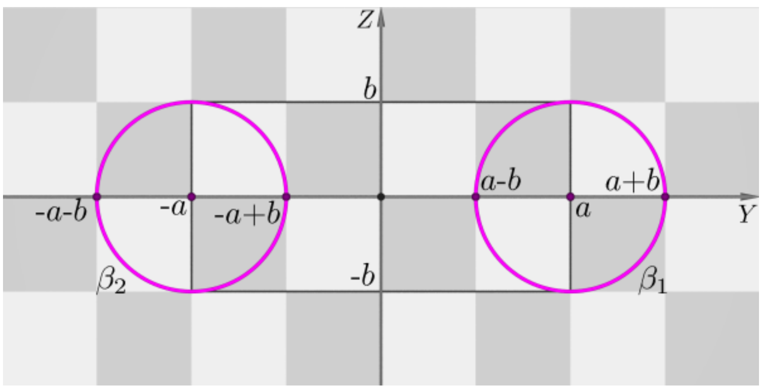

Fig. 31: Círculos β_1 e β_2

Assim, para cada k, com $|k| < b$: os pontos $A_k = (0, -(a + \sqrt{b^2 - k^2}), k)$ e $B_k = (0, a + \sqrt{b^2 - k^2}, k)$, pertencentes aos círculos β_2 e β_1 respectivamente, são as extremidades do diâmetro, contido no plano $x = 0$, do círculo $\mathcal{C}_{1k}$ (de centro $(0, 0, k)$ e raio $a + \sqrt{b^2 - k^2}$);

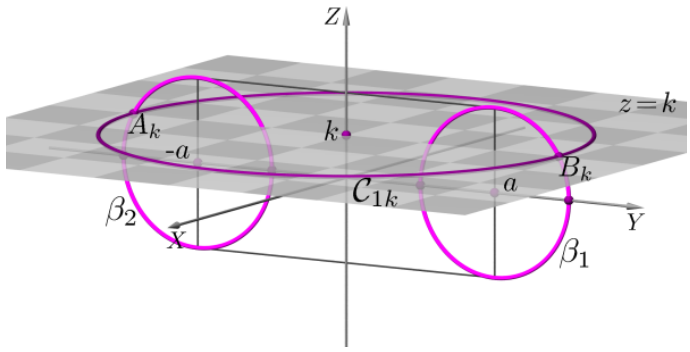

Fig. 32: Círculos β_1, β_2 e $\mathcal{C}_{1k}$

e o diâmetro, contido no plano $x = 0$, do círculo $\mathcal{C}_{2k}$ (de centro $(0, 0, k)$ e raio $a - \sqrt{b^2 - k^2}$) tem por extremidades os pontos $C_k = (0, -(a-\sqrt{b^2 - k^2}, k)$ e $D_k = (0, a-\sqrt{b^2 - k^2}, k)$, pertencentes aos círculos β_2 e β_1, respectivamente.

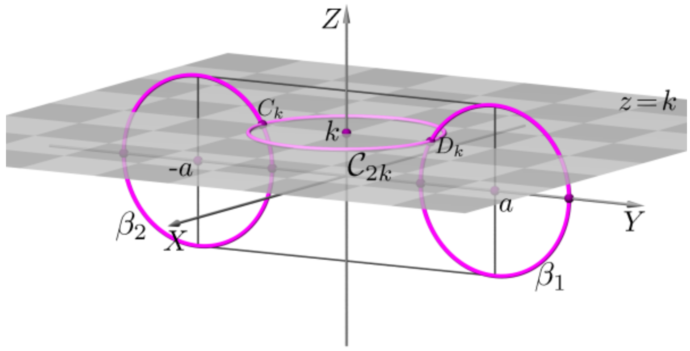

Fig. 33: Círculos β_1, β_2 e $\mathcal{C}_{2k}$

Para $k = b$, o diâmetro, contido no plano $x = 0$, do círculo $\mathcal{C}_b : \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = b \end{cases}$ tem extremidades nos pontos $(0, -a, b)$ e $(0, a, b)$, pertencentes aos círculos β_2 e β_1, respectivamente, e para $k = -b$, o diâmetro, contido no plano $x = 0$, do círculo $\mathcal{C}_{-b} : \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = -b \end{cases}$ tem extremidades nos pontos $(0, -a, -b)$ e $(0, a, -b)$ pertencentes aos círculos β_2 e β_1 respectivamente.

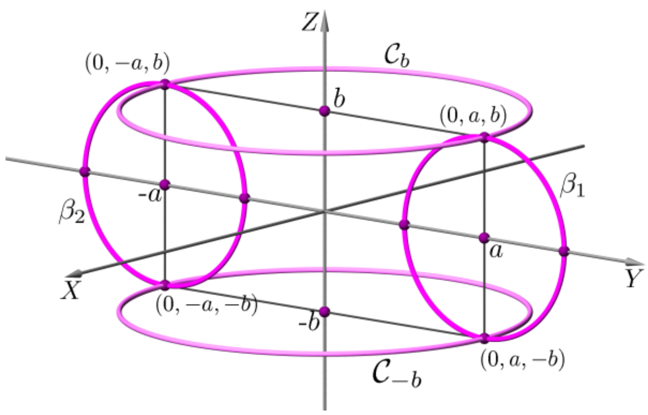

Fig. 34: Círculos β_1, β_2, $\mathcal{C}_b$ e $\mathcal{C}_{-b}$

Juntando as informações acima, podemos esboçar a superfície:

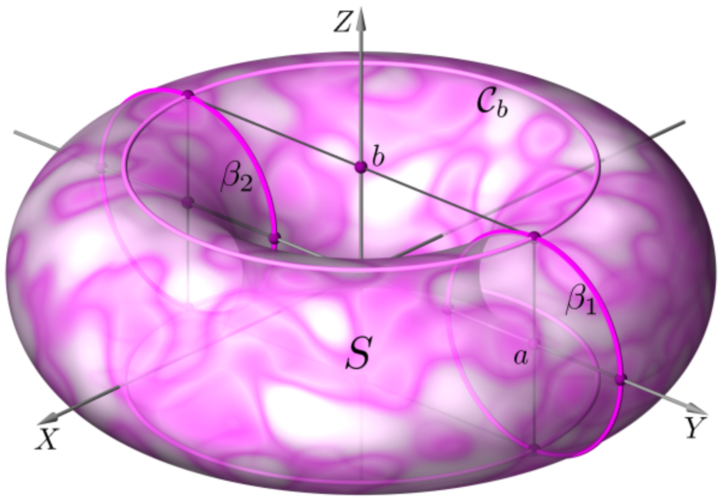

Fig. 35: Superfície S, um toro de revolução

e parametrizá-la:

$$S : \begin{cases} x(k,s) = \left(a \pm \sqrt{b^2 - k^2}\right) \cos s \\ y(k,s) = \left(a \pm \sqrt{b^2 - k^2}\right) \operatorname{sen} s \\ z(k,s) = k \end{cases} ; \quad k \in [-b, b]\,,\ s \in \mathbb{R}\,.$$

A superfície S é um *toro de revolução*, obtido, como veremos depois, pela rotação do círculo

$$\beta_1 : \begin{cases} (y-a)^2 + z^2 = b^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

em torno do eixo$-OZ$. □

Exemplo 7

A partir das informações abaixo, determine as equações cartesianas e paramétricas da superfície S tal que:

(a) *Para cada $k \in \mathbb{R}$, a interseção de S com o plano $y = k$ é o círculo de raio 1 e centro no ponto $(0, k, 1)$.*

Solução.

Como, para cada $k \in \mathbb{R}$,

$$S \cap \{y = k\} : \begin{cases} x^2 + (z-1)^2 = 1 \\ y = k \end{cases} ,$$

temos que $x^2 + (z-1)^2 = 1$ é a equação cartesiana de S, que é um cilindro de diretriz $\gamma : \begin{cases} x^2 + (z-1)^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ e geratrizes paralelas ao vetor $\overrightarrow{v} = (0, 1, 0)$ (paralelo ao eixo$-OY$).

As equações paramétricas de γ são:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \operatorname{sen} t + 1 \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

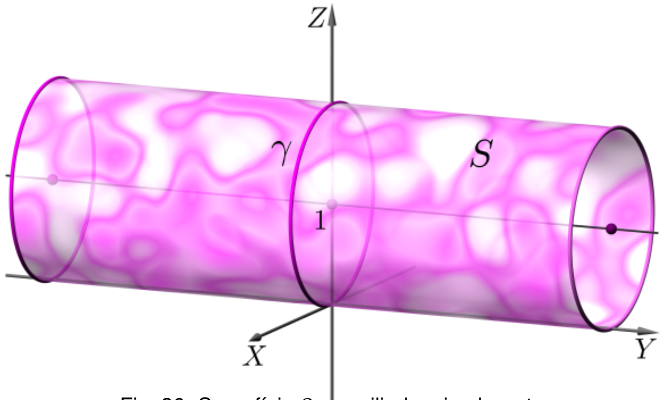

Fig. 36: Superfície S, um cilindro circular reto

Portanto, como $S = \{\, \gamma(t) + s\overrightarrow{v} \mid s, t \in \mathbb{R} \,\}$,

$$S : \begin{cases} x(s,t) = \cos t \\ y(s,t) = s \\ z(s,t) = \operatorname{sen} t + 1 \end{cases} \quad ; \quad s, t \in \mathbb{R}\,,$$

são as equações paramétricas do cilindro S. $\square$

(b) *Para cada* $k \in [-1, 1]$*, a interseção de* S *com o plano* $z = k$ *são os círculos de centro no ponto* $(0, 0, k)$ *e raios* $1 + \sqrt{1 - k^2}$ *e* $1 - \sqrt{1 - k^2}$*, respectivamente.*

Solução.

Para cada $k \in [-1, 1]$, temos que:

$$S \cap \{z = k\} : \begin{cases} x^2 + y^2 = \left(1 + \sqrt{1 - k^2}\right)^2 \\ z = k \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = \left(1 - \sqrt{1 - k^2}\right)^2 \\ z = k\,. \end{cases}$$

Logo, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence à superfície S se, e só se:

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 = 1 + (1 - z^2) \pm 2\sqrt{1 - z^2} \\ \iff\ & x^2 + y^2 + z^2 - 2 = \pm 2\sqrt{1 - z^2} \\ \iff\ & (x^2 + y^2 + z^2 - 2)^2 = 4(1 - z^2) \\ \iff\ & (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4(x^2 + y^2 + z^2) + 4 = 4 - 4z^2 \\ \iff\ & (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4 + 4 - 4z^2 \\ \iff\ & (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(x^2 + y^2)\,, \end{aligned}$$

que é a equação cartesiana de S.

O esboço da superfície S se faz de modo análogo ao exemplo anterior fazendo $a = b = 1$.

(Atenção: S não é um toro de revolução, pois $a = b$).

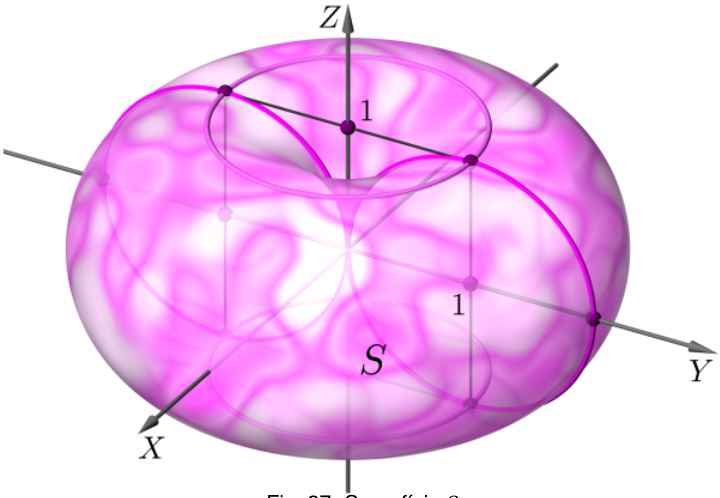

Fig. 37: Superfície S

Usando $k \in [-1, 1]$ como parâmetro, vemos que:

$$S : \begin{cases} x(t,k) = \left(1 \pm \sqrt{1-k^2}\right)\cos t \\ y(t,k) = \left(1 \pm \sqrt{1-k^2}\right)\operatorname{sen} t \\ z(t,k) = k \end{cases} , \quad k \in [-1, 1]\,,\; t \in \mathbb{R}\,,$$

é uma maneira de parametrizarmos a superfície S. $\square$