Aula 7

Superfícies Cônicas

Sejam γ uma curva contida num plano π do espaço e V um ponto não pertencente a π. A *superfície cônica* S de *diretriz* γ e *vértice* V é a superfície gerada por todas as retas que passam por V e por algum ponto de γ. Ou seja,

$$\boxed{S = \left\{ V + t\overrightarrow{VP} \,\middle|\, P \in \gamma \text{ e } t \in \mathbb{R} \right\}}$$

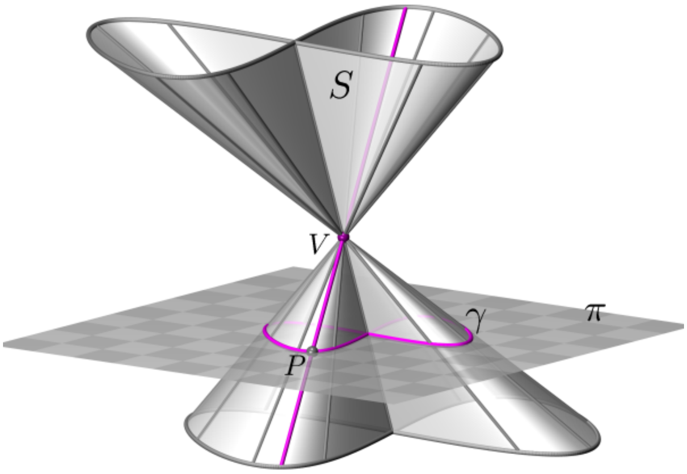

Fig. 1: Superfície cônica S

As retas $S = \left\{ V + t\overrightarrow{VP} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$, com $P \in \gamma$, são as *geratrizes* da superfície cônica S.

Exemplo 1

Sejam $V = (x_0, y_0, z_0)$ *um ponto do espaço e* a*,* b*,* c *constantes reais positivas.*

A superfície S*, chamada* cone elíptico reto de eixo paralelo ao eixo$-OZ$*, dada por:*

$$S : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \frac{(z-z_0)^2}{c^2}\,,$$

é uma superfície cônica de vértice $V = (x_0, y_0, z_0)$ *e diretriz*

$$\gamma : \begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \\ z = z_0 + c\,. \end{cases}$$

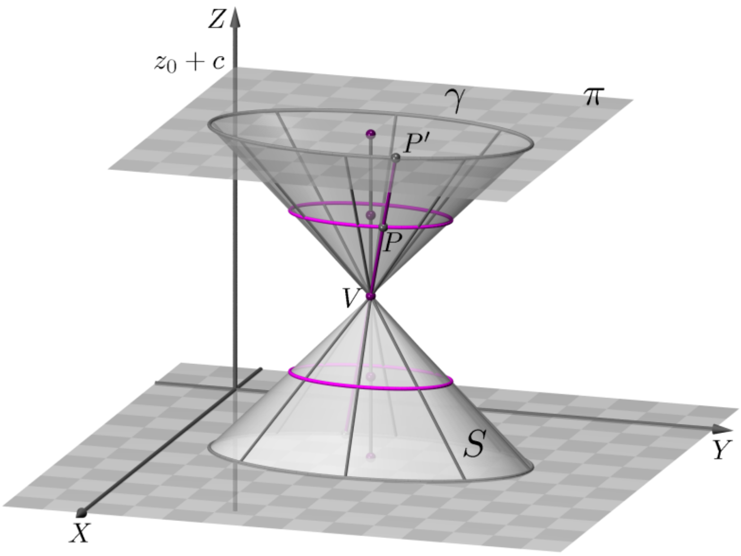

Fig. 2: Superfície cônica S

Solução.

De fato, seja $\overline{S}$ a superfície cônica de diretriz γ e vértice V. Pela definição, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a $\overline{S}$ se, e só se, existem um ponto $P' = (x', y', z') \in \gamma$ e um número real t tais que:

$$\overrightarrow{VP} = t\,\overrightarrow{VP'}\,. \tag{1}$$

Ou seja:

$$\begin{cases} x - x_0 = t(x' - x_0) \\ y - y_0 = t(y' - y_0) \\ z - z_0 = t(z' - z_0) \end{cases} \quad (2) \qquad , \qquad \begin{cases} \dfrac{(x'-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y'-y_0)^2}{b^2} = 1 \\ z' = z_0 + c \end{cases} \quad (3)$$

Logo, como $c = z' - z_0$ e $z - z_0 = t(z' - z_0)$, temos que

$$t = \frac{z - z_0}{c}\,. \tag{4}$$

Observe, por (1) e (4), que:

$$P = V \iff t = 0 \iff z = z_0\,. \tag{5}$$

Assim, o vértice V é o único ponto de $\overline{S}$ com terceira coordenada igual a z_0.

Se $z \neq z_0$, temos, por (2), que:

$$\begin{aligned} x' - x_0 &= \frac{x - x_0}{t} = \frac{c(x - x_0)}{z - z_0} \\ y' - y_0 &= \frac{y - y_0}{t} = \frac{c(y - y_0)}{z - z_0}\,, \end{aligned}$$

e por (3), que:

$$\frac{c^2(x-x_0)^2}{a^2(z-z_0)^2} + \frac{c^2(y-y_0)^2}{b^2(z-z_0)^2} = 1 \iff \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \frac{(z-z_0)^2}{c^2}\,.$$

Provamos, então, que um ponto $P=(x,y,z)$, com $z\neq z_0$, pertence a $\overline{S}$ se, e só se, satisfaz a equação:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\frac{(z-z_0)^2}{c^2}\,. \tag{6}$$

Além disso:

(a) se $P=(x,y,z)\in\overline{S}$ e $z=z_0$, então, por (5), $P=V=(x_0,y_0,z_0)$, que satisfaz a equação (6).

(b) se $P=(x,y,z_0)$ satisfaz a equação (6), então:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=0\,,$$

ou seja, $x=x_0$ e $y=y_0$ e, portanto, $P=(x_0,y_0,z_0)=V$.

Logo a superfície cônica $\overline{S}$ de diretriz γ e vértice V realmente coincide com a superfície S.

• O eixo do cone elíptico S é a reta $\left\{(x_0,y_0,z_0)+t(0,0,1)\,\middle|\,t\in\mathbb{R}\right\}$ paralela ao eixo$-OZ$, que contém os centros das elipses:

$$S\cap\{z=k\}:\begin{cases}\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=\dfrac{(k-z_0)^2}{c^2}\\ z=k\,,\end{cases}$$

onde $k\in\mathbb{R}-\{z_0\}$.

No caso em que $a=b$, dizemos que S é um cone circular reto de eixo paralelo ao eixo$-OZ$. □

Observação 1

As superfícies dadas pelas equações:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\frac{(y-y_0)^2}{b^2}$$

e

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\frac{(x-x_0)^2}{a^2}$$

são, respectivamente, os cones elípticos retos de eixos paralelos aos eixos OY e OX de vértice $V=(x_0,y_0,z_0)$ que têm, respectivamente, as elipses

$$\begin{cases}\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}=1\\ y=y_0+b\end{cases}$$

e

$$\begin{cases}\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}+\dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}=1\\ x=x_0+a\end{cases}$$

como uma de suas diretrizes.

Exemplo 2

Faça um esboço da região delimitada pelas superfícies $x^2+y^2-4z^2=0$, $z=0$ *e* $z=2$.

Solução.

A superfície $S_1 : x^2 + y^2 = 4z^2 \iff S_1 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = z^2$ é um cone circular reto de eixo$-OZ$ e vértice $V = (0, 0, 0)$, que tem o círculo

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4(2)^2 = 4^2 \\ z = 2 \end{cases}$$

como uma de suas diretrizes.

Assim, o esboço da região é o mostrado na figura 3 ao lado. □

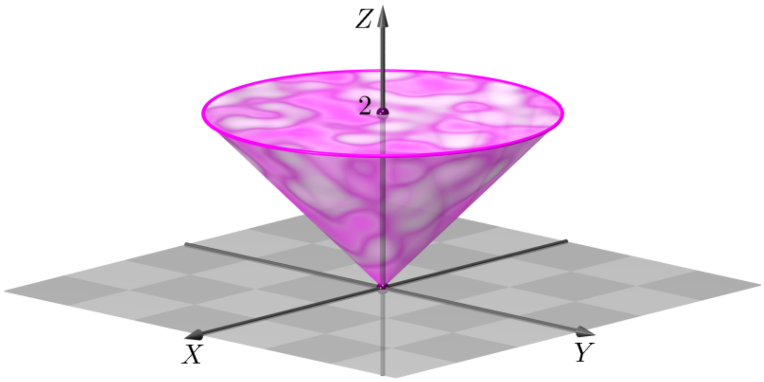

Fig. 3: Região delimitada pelas superfícies $x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$, $z = 0$ e $z = 2$

Exemplo 3

Descreva a família de superfícies cônicas representadas pela equação:

$$S_\theta : x^2 + y^2 = (\text{tg}\,\theta)^2 z^2 \,,$$

onde o parâmetro θ *pode assumir todos os valores no intervalo* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Solução.

Para todo $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, a superfície S_θ é um cone circular reto de eixo$-OZ$ e vértice $V = (0, 0, 0)$ na origem, sendo o círculo

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = \text{cotg}\,\theta \end{cases}$$

uma de suas diretrizes.

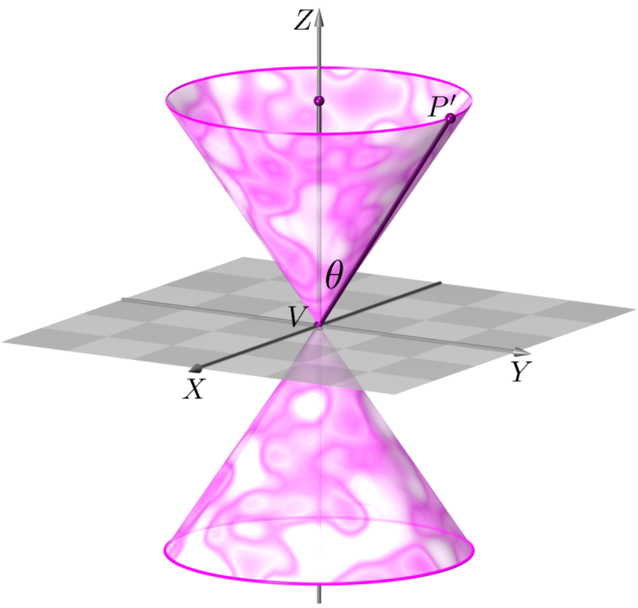

Fig. 4: Superfície S_θ

As geratrizes do cone S_θ são as retas

$$r_\varphi = \left\{ V + t\,\overrightarrow{VP'} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\},$$

onde $P' = (\cos\varphi, \text{sen}\,\varphi, \text{cotg}\,\theta)$ é um ponto de γ, com $\varphi \in [0, 2\pi)$.

O vetor $\overrightarrow{VP'} = \overrightarrow{OP'}$ paralelo à reta r_φ faz um ângulo constante igual a θ com o eixo$-OZ$, pois:

$$\frac{\left\langle \overrightarrow{OP'}, (0,0,1) \right\rangle}{\|\overrightarrow{OP'}\|\,\|(0,0,1)\|} = \frac{\text{cotg}\,\theta}{\sqrt{1+\text{cotg}^2\theta}} = \frac{\text{cotg}\,\theta}{\text{cossec}\,\theta} = \cos\theta\,.$$

Observe que se:

- $\theta = 0$, então $S_0 : x^2 + y^2 = 0$, ou seja, $S_0 = \{(0,0,z)\,|\, z \in \mathbb{R}\}$ é o eixo$-OZ$.
- $\theta = \frac{\pi}{2}$, então $S_{\frac{\pi}{2}} : \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta}(x^2+y^2) = z^2 \iff S_{\frac{\pi}{2}} : z^2 = 0 \iff S_{\frac{\pi}{2}} : z = 0$ é o plano XY. □

Exemplo 4

Seja S um cone circular reto com vértice na origem que contém o ponto $A = \left(1, -\sqrt{2}, 1\right)$. Se o eixo$-OY$ é o eixo do cone, determine sua equação.

Solução.
A equação geral de um cone circular reto S de vértice na origem e eixo$-OY$ é:

$$S : x^2 + z^2 = (\text{tg}\,\theta)^2 y^2\,,$$

onde $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Como $A \in S$, temos que

$$1 + 1 = (\text{tg}\,\theta)^2 \cdot 2 \iff (\text{tg}\,\theta)^2 = \frac{2}{2} = 1 \iff \theta = \frac{\pi}{4}\,.$$

Assim, $S : x^2 + y^2 = z^2$ e o seu esboço é o mostrado na figura abaixo.

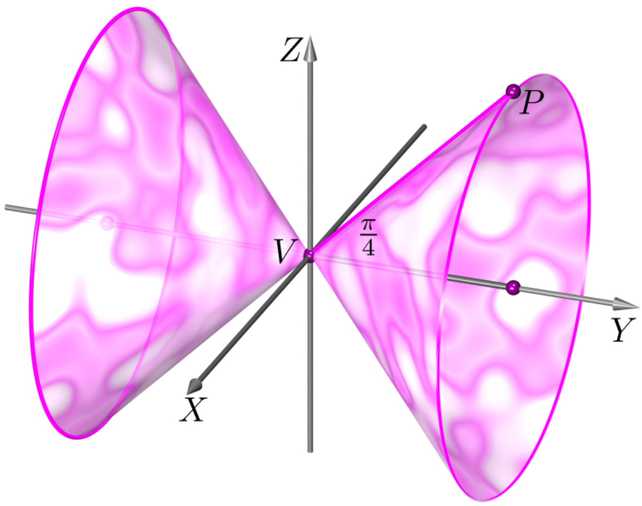

Fig. 5: Superfície S_θ, o ângulo entre a reta VP e o eixo$-OY$ é de $\frac{\pi}{4}$ □

Exemplo 5

Faça um esboço da região dada pelo sistema de inequações:

(a) $\mathcal{R} : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \leq z^2 \\ -1 \leq z \leq 2\,. \end{cases}$

Solução.

Vamos primeiro determinar as superfícies que delimitam a região $\mathcal{R}$:

- $S_1 : x^2 + y^2 = 1$ é o cilindro circular reto de eixo$-OZ$ e diretriz $\beta_0 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0\,. \end{cases}$

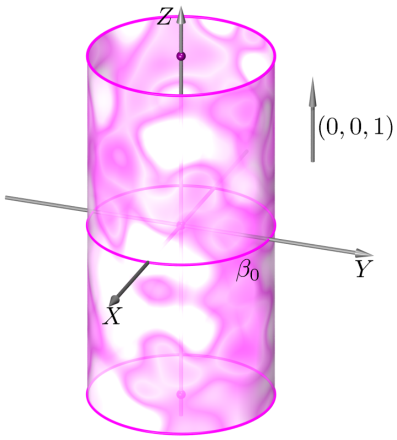

Fig. 6: Superfície S_1

A região $\mathcal{R}_1 : x^2 + y^2 \leq 1$ é formada pelos pontos interiores ou sobre o cilindro S_1.

- $S_2 : x^2 + y^2 = z^2$ é o cone circular reto de eixo$-OZ$ e vértice na origem que tem o círculo $\gamma_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ como uma de suas diretrizes.

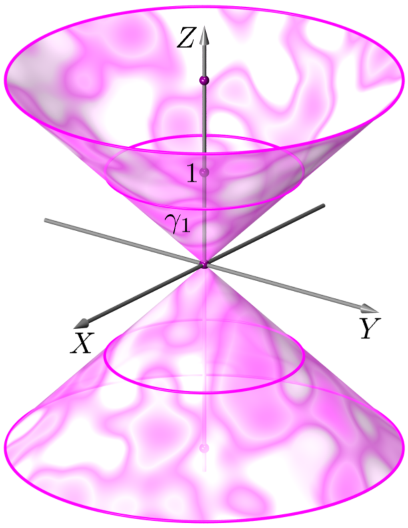

Fig. 7: Superfície S_2

A região $\mathcal{R}_2 : x^2 + y^2 \leq z^2$ consiste dos pontos interiores ou sobre o cone S_2.

• $S_3 : -1$ e $S_4 : z = 2$ são dois planos paralelos ao plano XY, e $\mathcal{R}_3 : -1 \leq z \leq 2$ é a região do espaço delimitada por esses planos.

Um ponto (x, y, z) pertence a $S_1 \cap S_2$ se, e só se, $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z^2 = 1\,, \end{cases}$ ou seja,

$S_1 \cap S_2 = \gamma_1 \cup \gamma_{-1}$, onde

$$\gamma_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad , \quad \gamma_{-1} : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

são dois círculos de raio 1.

Observe também que $\beta_2 = S_1 \cap S_4 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ é um círculo de raio 1 e $\gamma_2 = S_2 \cap S_4 :$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 \end{cases}$ é um círculo de raio 2.

Assim,

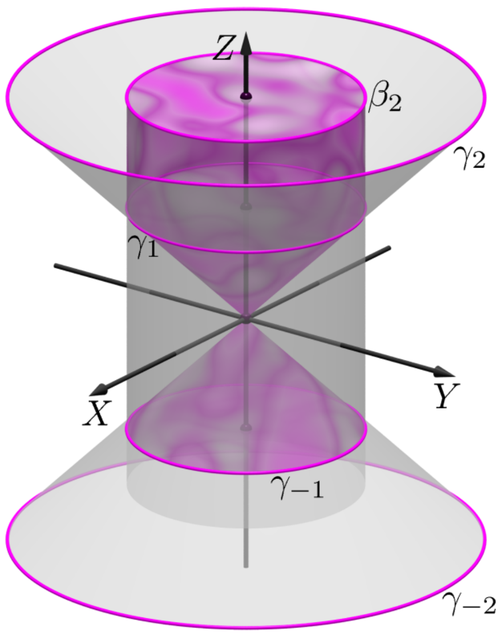

Fig. 8: Região $\mathcal{R}$

é o esboço da região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3$. □

(b) $\mathcal{R} : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x^2 + y^2 \geq (z-1)^2 \\ 0 \leq z \leq 2\,. \end{cases}$

Solução.

As superfícies que delimitam a região $\mathcal{R}$:

- $S_1 : x^2 + y^2 = 4$ é o cilindro circular reto de eixo$-OZ$ que tem o círculo de raio 2

$$\beta_0 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

como uma de suas diretrizes.

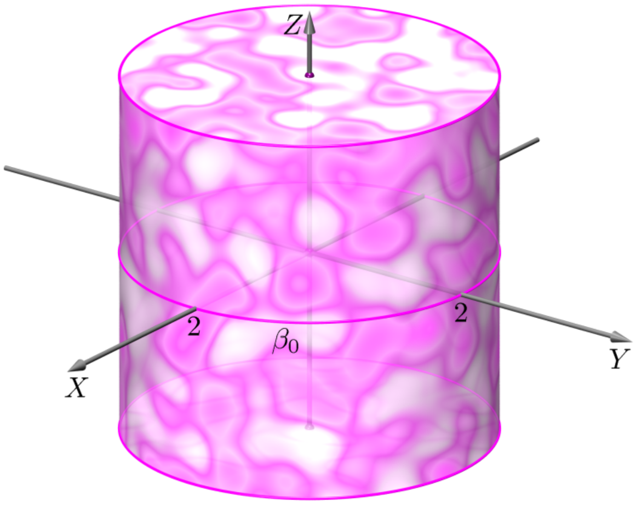

Fig. 9: Região $\mathcal{R}_1$

A região $\mathcal{R}_1 : x^2 + y^2 \leq 4$ é formada pelos pontos interiores ou sobre o cilindro S_1.

- $S_2 : x^2 + y^2 = (z-1)^2$ é o cone circular reto de eixo$-OZ$, vértice $V = (0, 0, 1)$ e diretriz

$$\gamma_0 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0\,. \end{cases}$$

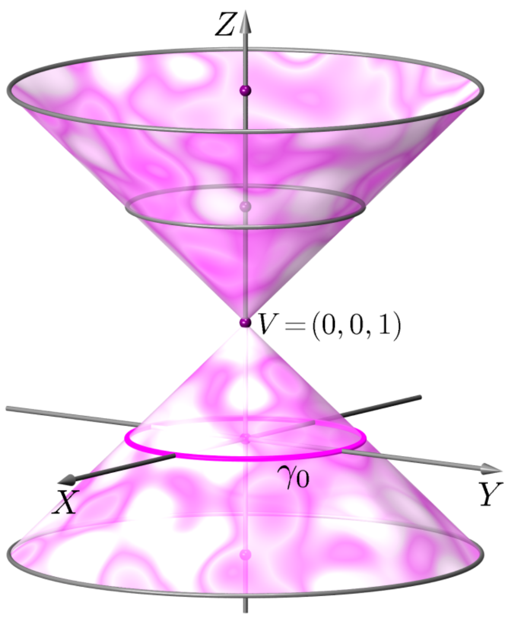

Fig. 10: Superfície S_2

A região $\mathcal{R}_2 : x^2 + y^2 \geq (z-1)^2$ é o conjunto dos pontos exteriores ou sobre o cone S_2.

- $S_3 : z = 0$ e $S_4 : z = 2$ são planos paralelos ao plano XY, e $\mathcal{R}_3 : 0 \leq z \leq 2$ é a região do espaço situada entre ou sobre estes dois planos.

Observe que um ponto (x, y, z) pertence a $S_1 \cap S_2$ se, e só se,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = (z-1)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (z-1)^2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 1 \pm 2\,, \end{cases}$$

ou seja, $S_1 \cap S_2 = \gamma_{-1} \cup \gamma_3$, onde γ_{-1} e γ_2 são os círculos de raio 2:

$$\gamma_{-1} : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = -1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \gamma_3 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 3\,. \end{cases}$$

Além disso,

$$\gamma_0 = S_2 \cap S_3 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad , \qquad \gamma_2 = S_2 \cap S_4 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

são círculos de raio 1, e $\beta_0 = S_1 \cap S_3 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 \end{cases}$, $\beta_2 = S_1 \cap S_4 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 \end{cases}$ são círculos de raio 2. O esboço da região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3$ é o mostrado na figura 12. $\square$

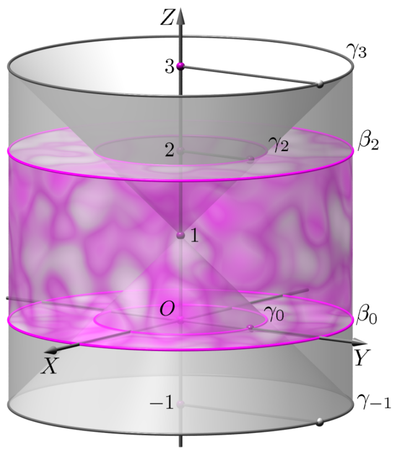

Fig. 11: Curvas de interseção γ_{-1}, γ_0, γ_3, β_0 e β_2

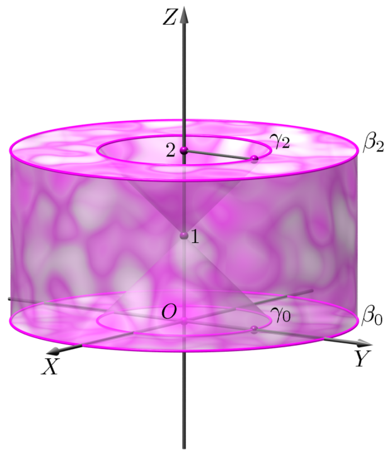

Fig. 12: Região $\mathcal{R}$

Definição 1

Dizemos que uma superfície cônica S *é um* cone circular reto *cujo eixo é uma reta* r *paralela ao vetor*

$$\overrightarrow{v} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)\,,$$

se o vértice V *pertence à reta* r *e as curvas* $\gamma_d : S \cap \pi_d$ *são círculos centrados num ponto da reta* r*, onde* $\pi_d : ax + by + cz = d$ *são os planos perpendiculares à reta* r *que não passam pelo vértice* V*.*

Os círculos γ_d *são* diretrizes *do cone circular reto* S*.*

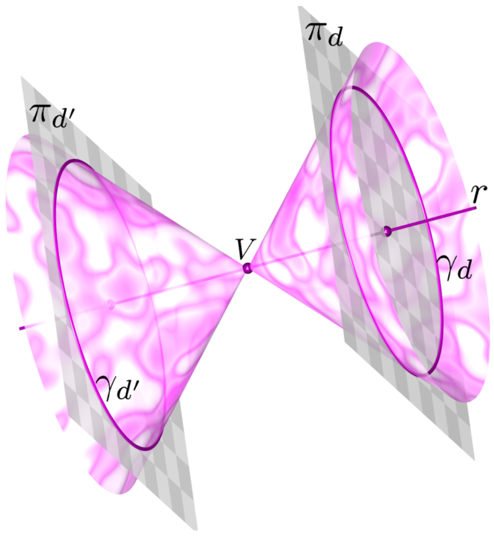

Fig. 13: Diretrizes do cone S

Exemplo 6

A reta $r : \begin{cases} x = t+1 \\ y = -t+2 \\ z = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, *é o eixo de um cone circular reto* S *cujo vértice se acha sobre o plano* XZ*.*

Determine a equação cartesiana e as equações paramétricas de S*, sabendo-se que o ponto* $A = (0, 1, 3)$ *pertence ao cone.*

Solução.

O vértice $V = (t+1, -t+2, 2t)$ pertence ao eixo do cone. Além disso, como V pertence ao plano XZ, temos que $y = -t+2 = 0$, ou seja, $t = 2$ e, portanto, $V = (3, 0, 4)$.

Seja $\pi : x - y + 2z = 5$ o plano perpendicular à reta r que passa pelo ponto $A = (0, 1, 3)$.

Sendo S um cilindro circular reto, sabemos que $\pi \cap S = \gamma$ é um círculo de centro B e raio $R = d(A, B)$, onde $\{B\} = \pi \cap r$. Assim, $B = (t+1, -t+2, 2t)$ e $(t+1) - (-t+2) + 2(2t) = 5$. Isto é, $t = 1$.

Logo, $B = (1+1, -1+2, 2 \cdot 1) = (2, 1, 2)$ é o centro e $R = d(A, B) = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5}$ é o raio do círculo γ, que é uma das diretrizes do cone circular reto S de eixo r.

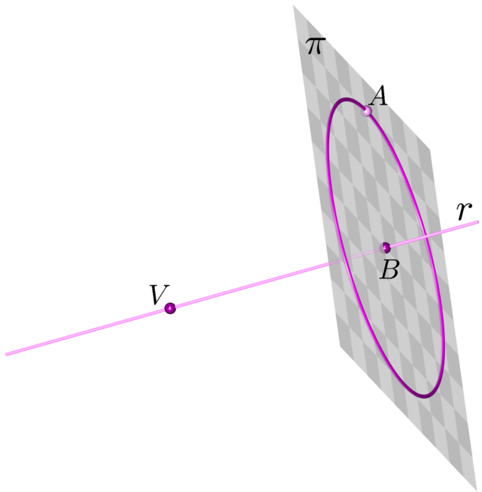

Fig. 14: Plano π e reta r

Para parametrizarmos o cone S, devemos primeiro parametrizar a diretriz γ.

Seja $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}}\,\overline{\overline{Z}}$ o sistema de eixos ortogonais no qual $\overline{O} = B$ e os eixos $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$, $\overline{O}\,\overline{\overline{Y}}$, $\overline{O}\,\overline{\overline{Z}}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido, respectivamente, dos vetores:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_1} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) ; \\ \overrightarrow{v_2} &= \overrightarrow{v_3} \times \overrightarrow{v_1} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{2}{\sqrt{12}}, \frac{2}{\sqrt{12}}, \frac{2}{\sqrt{12}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) ; \\ \text{e} \quad \overrightarrow{v_3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \perp \pi . \end{aligned}$$

Neste sistema de coordenadas, o plano π é o plano $\overline{\overline{z}} = 0$ e o círculo γ tem centro na origem e raio $\sqrt{5}$, ou seja,

$$\gamma : \begin{cases} \overline{\overline{x}}^2 + \overline{\overline{y}}^2 = 5 \\ \overline{\overline{z}} = 0 . \end{cases}$$

Como

$$\gamma : \begin{cases} \overline{\overline{x}} = \sqrt{5} \cos s \\ \overline{\overline{y}} = \sqrt{5} \operatorname{sen} s \quad ; \quad s \in \mathbb{R} , \\ \overline{\overline{z}} = 0 . \end{cases}$$

é uma parametrização da diretriz γ nas coordenadas $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{y}}$, $\overline{\overline{z}}$, e

$$(x,y,z) = \overline{\overline{x}}\,\overrightarrow{v}'_1 + \overline{\overline{y}}\,\overrightarrow{v}'_2 + \overline{\overline{z}}\,\overrightarrow{v}'_3 + B\,,$$

temos:

$$\gamma(s) = \sqrt{5}\cos s\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + \sqrt{5}\,\text{sen}\, s\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (2,1,2)\,,\quad s\in\mathbb{R}\,,$$

ou seja,

$$\gamma : \begin{cases} x(s) = \sqrt{\dfrac{5}{2}}\cos s - \sqrt{\dfrac{5}{3}}\,\text{sen}\, s + 2 \\ y(s) = \sqrt{\dfrac{5}{2}}\cos s + \sqrt{\dfrac{5}{3}}\,\text{sen}\, s + 1 \\ z(s) = \sqrt{\dfrac{5}{3}}\,\text{sen}\, s + 2 \end{cases}$$

é uma parametrização de γ nas coordenadas x, y e z.

Sendo $S = \left\{V + t\,\overrightarrow{VP'}\,\middle|\,P' \in \gamma \text{ e } t\in\mathbb{R}\right\}$, obtemos:

$$S = \left\{(3,0,4) + t\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\cos s - \sqrt{\frac{5}{3}}\,\text{sen}\, s - 1, \sqrt{\frac{5}{2}}\cos s + \sqrt{\frac{5}{3}}\,\text{sen}\, s + 1, \sqrt{\frac{5}{3}}\,\text{sen}\, s - 2\right)\,\middle|\, s,t\in\mathbb{R}\right\}.$$

Isto é,

$$S : \begin{cases} x(s,t) = 3 + \sqrt{\dfrac{5}{2}}\,t\cos s - \sqrt{\dfrac{5}{3}}\,t\,\text{sen}\, s - t \\ y(s,t) = \sqrt{\dfrac{5}{2}}\,t\cos s + \sqrt{\dfrac{5}{3}}\,t\,\text{sen}\, s + t \\ z(s,t) = 4 + \sqrt{\dfrac{5}{3}}\,t\,\text{sen}\, s - 2t \end{cases} \quad ;\quad s,t\in\mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização do cone circular S.

Vamos agora determinar a equação cartesiana da superfície S.

A interseção da esfera $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 5$, de centro B e raio $\sqrt{5}$, com o plano π é o círculo γ, ou seja, a diretriz γ pode ser vista da seguinte forma:

$$\gamma : \begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 5 \\ x - y + 2z = 5\,. \end{cases}$$

Pela definição, um ponto $P = (x,y,z)$ pertence à superfície cônica S se, e só se, existem um ponto $P' = (x',y',z')$ em γ e um número real t tais que:

$$\overrightarrow{VP} = t\,\overrightarrow{VP'}\,. \tag{7}$$

Assim,

$$\begin{cases} x - 3 = t(x'-3) \\ y = ty' \\ z - 4 = t(z'-4) \end{cases} \quad (8) \qquad , \qquad \begin{cases} (x'-2)^2 + (y'-1)^2 + (z'-2)^2 = 5 \\ x' - y' + 2z' = 5\,. \end{cases} \quad (9)$$

Por (8) e (9), temos:

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 3 + tx' - 3t - ty' + 8 + 2tz' - 8t \\ &= t(x' - y' + 2z') + 11 - 11t = 5t + 11 - 11t \\ &= -6t + 11 \\ \iff \quad & t = \frac{11 - x + y - 2z}{6}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Observe, por (7) e (10), que se $P = (x, y, z)$ pertence a S, então:

$$P = V \iff t = 0 \iff x - y + 2z = 11\,. \tag{11}$$

Se $x - y + 2z \neq 11$, por (8):

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x-3}{t} + 3 = \frac{6(x-3)}{11 - x + y - 2z} + 3 = \frac{6x - 18 + 33 - 3x + 3y - 6z}{11 - x + y - 2z} = \frac{3x + 3y - 6z + 15}{11 - x + y - 2z}\,, \\ y' &= \frac{y}{t} = \frac{6y}{11 - x + y - 2z}\,, \\ z' &= \frac{z-4}{t} + 4 = \frac{6(z-4)}{11 - x + y - 2z} + 4 = \frac{6z - 24 + 44 - 4x + 4y - 8z}{11 - x + y - 2z} = \frac{-4x + 4y - 2z + 20}{11 - x + y - 2z}\,. \end{aligned}$$

Logo, por (9), um ponto $P = (x, y, z)$, com $x - y + 2z \neq 11$, pertence à superfície S se, e só se,

$$\left(\frac{3x + 3y - 6z + 15}{11 - x + y - 2z} - 2\right)^2 + \left(\frac{6y}{11 - x + y - 2z} - 1\right)^2 + \left(\frac{-4x + 4y - 2z + 20}{11 - x + y - 2z} - 2\right)^2 = 5$$

$$\begin{aligned} \iff \quad & (3x + 3y - 6z + 15 - 22 + 2x - 2y + 4z)^2 + (6y - 11 + x - y + 2z)^2 \\ & + (-4x + 4y - 2z + 20 - 22 + 2x - 2y + 4z)^2 = 5(11 - x + y - 2z)^2 \qquad (12) \\ \iff \quad & (5x + y - 2z - 7)^2 + (x + 5y + 2z - 11)^2 + (-2x + 2y + 2z - 2)^2 \\ & = 5(11 - x + y - 2z)^2 \qquad (13) \\ \iff \quad & 25x^2 + 25y^2 - 8z^2 + 22xy - 44xz + 44yz + 26x - 242y + 196z + 174 = 0\,. \qquad (14) \end{aligned}$$

Além disso:

- se $P = (x, y, z)$ pertence a S e $x - y + 2z = 11$, então, por (11), $P = V = (3, 0, 4)$, que satisfaz a equação (14), pois, por (13), $(5 \times 3 - 2 \times 4 - 7)^2 + (3 + 2 \times 4 - 11)^2 + (-2 \times 3 + 2 \times 4 - 2)^2 = 0$.
- se $P = (x, y, z)$ satisfaz a equação (14) e $x - y + 2z = 11$, então, por (12):

$$(3x + 3y - 6z + 15)^2 + (6y)^2 + (-4x + 4y - 2z + 20)^2 = 0$$

$$\iff \quad y = 0\,, \quad 3x + 3y - 6z + 15 = 0\,, \quad -4x + 4y - 2z + 20 = 0$$

$$\iff \quad y = 0 \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3x - 6z = -15 \\ -4x - 2z = -20 \end{cases} \quad \iff \quad y = 0 \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3x - 6z = -15 \\ -12x - 6z = -60 \end{cases}$$

$$\iff y=0\,,\quad -15x=-45 \quad \text{e} \quad z=\frac{3x+15}{6}=\frac{x+5}{2}$$
$$\iff y=0\,,\quad x=3\,,\quad \text{e} \quad z=\frac{3+5}{2}=4$$
$$\iff P=(3,0,4)=V.$$

Provamos, assim, que um ponto $P=(x,y,z)$ pertence a S se, e só se, satisfaz a equação (14), ou seja, a equação (14) é a equação cartesiana da superfície cônica S. □

Exemplo 7

Seja S a superfície cônica de vértice $V=(0,4,0)$ que tem a curva

$$\gamma : \begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ y-z=0 \end{cases}$$

como uma de suas diretrizes.

Mostre, sem determinar a equação da superfície, que o ponto $P=(2,0,4)$ pertence a S.

Solução.

Seja r a reta que passa pelo vértice $V=(0,4,0)$ e pelo ponto $P=(2,0,4)$. Então, como o vetor $\overrightarrow{VP}=(2,-4,4)\parallel(1,-2,2)$ é paralelo à reta r, temos que:

$$r=\left\{\,(t,-2t+4,2t)\,\middle|\,t\in\mathbb{R}\,\right\}.$$

Mostraremos agora que r contém um ponto P' de $\gamma=S_0\cap\pi$, onde S_0 é a esfera $x^2+y^2+z^2=9$ e π é o plano $y-z=0$.

De fato, um ponto P' pertence a $r\cap\pi$ se, e só se, $-2t+4-2t=0 \iff t=1 \iff P'=(1,2,2)$.

Além disso, como $P'\in S_0$, pois $1+4+4=9$, o ponto P' pertence a γ.

Provamos, então, que a reta r está contida em S, pois $P'\in\gamma\cap r$ e $V\in r$. Portanto, em particular, $P\in S$. □

Exemplo 8

Determine uma diretriz da superfície cônica S de vértice no ponto $V=(3,1,0)$, cujas geratrizes são as retas tangentes à esfera $S_0: x^2+y^2+(z-1)^2=2$ que passam por V.

Solução.

A esfera S_0 tem centro no ponto $C=(0,0,1)$ e raio $R=\sqrt{2}$.

Seja

$$r_v : \begin{cases} x=at+3 \\ y=bt+1 \\ z=ct \end{cases} ; \quad t\in\mathbb{R},$$

uma reta que passa pelo vértice V e é tangente à esfera S_0, onde $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ é um vetor unitário paralelo à reta.

Então, como $S_0 \cap r_v$ consiste de um único ponto, a equação de grau 2 na variável t,

$$\begin{aligned} & (at+3)^2 + (bt+1)^2 + (ct-1)^2 = 2 \\ \Longleftrightarrow \quad & a^2t^2 + 6at + 9 + b^2t^2 + 2bt + 1 + c^2t^2 - 2ct + 1 = 2 \\ \Longleftrightarrow \quad & (a^2+b^2+c^2)t^2 + (6a+2b-2c)t + 9 = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & t^2 + (6a+2b-2c)t + 9 = 0 \qquad (15) \end{aligned}$$

possui apenas uma solução, ou seja, seu discriminante é igual a zero:

$$\begin{aligned} \Delta = (6a+2b-2c)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0 \quad & \Longleftrightarrow \quad 6a+2b-2c = \pm 2 \times 3 \\ & \Longleftrightarrow \quad 3a + b - c = \pm 3\,. \end{aligned}$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$3a + b - c = -3\,, \qquad (16)$$

pois se $\overrightarrow{v}$ é um vetor unitário paralelo á reta r, então $-\overrightarrow{v}$ também o é.

A equação (16) nos diz que o ângulo entre o vetor $\overrightarrow{VC} = (-3, -1, 1)$ e os vetores paralelos às retas tangentes a S_0 que passam pelo vértice é constante, pois:

$$\cos\theta = \frac{\left\langle \overrightarrow{VC}, (a,b,c) \right\rangle}{\|\overrightarrow{VC}\| \, \|(a,b,c)\|} = \frac{-3a-b+c}{\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}}\,, \qquad (17)$$

onde $\theta = \angle(\overrightarrow{VC}, \overrightarrow{v})$.

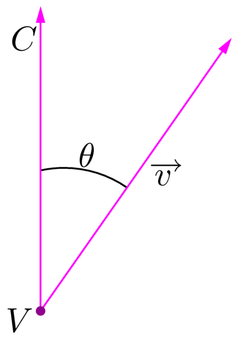

Fig. 15: $\theta = \angle(\overrightarrow{VC}, \overrightarrow{v})$

Por (15) e (16), $t = \dfrac{-(6a+2b-2c)}{2} = -3a - b + c = 3$.

Logo $P_{\overrightarrow{v}} = 3(a,b,c) + (3,1,0) \in S$ é o ponto onde a reta $r_{\overrightarrow{v}}$ tangencia a esfera S_0.

Observe que os pontos $P_{\overrightarrow{v}}$ pertencem ao plano $\pi : 3x + y - z = 1$, pois:

$$3(3a+3) + (3b+1) - 3c = 3(3a+b-c) + 9 + 1 = -9 + 10 = 1.$$

Portanto, $S_0 \cap S \subset S_0 \cap \pi$.

Reciprocamente, se $P = (x_0, y_0, z_0) \in S_0 \cap \pi$, então $(a,b,c) = \left(\dfrac{x_0-3}{3}, \dfrac{y_0-1}{3}, \dfrac{z_0}{3} \right)$ é um vetor unitário, pois:

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= \frac{(x_0-3)^2 + (y_0-1)^2 + z_0^2}{9} = \frac{(x_0-3)^2 + (y_0-1)^2 + (z_0-1+1)^2}{9} \\ &= \frac{x_0^2 - 6x_0 + 9 + y_0^2 - 2y_0 + 1 + (z_0-1)^2 + 2(z_0-1) + 1}{9} \\ &= \frac{x_0^2 + y_0^2 + (z_0-1)^2 - 2(3x_0 + y_0 - z_0) + 9}{9} = \frac{2-2+9}{9} = 1\,, \end{aligned}$$

já que $x_0^2+y_0^2+(z_0-1)^2=2$ e $3x_0+y_0-z_0=1$. Além disso, a reta $r=\{(a,b,c)t+(3,1,0)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$, que passa pelo vértice V, tangencia a esfera S_0 em $P=(x_0,y_0,z_0)=3(a,b,c)+(3,1,0)$, pois, como

$$3a+b-c=\frac{3x_0-9+y_0-1-z_0}{3}=\frac{3x_0+y_0-z_0-10}{3}=\frac{1-10}{3}=-3\,,$$

temos que:

$$\begin{aligned}
&(at+3)^2+(bt+1)^2+(ct-1)^2=2\\
\iff\ &(a^2+b^2+c^2)t^2+2t(3a+b-c)+11=2\\
\iff\ &t^2-6t+9=0\iff t=3\,.
\end{aligned}$$

Provamos, então, que $P=(x_0,y_0,z_0)\in S$ e, portanto, $S_0\cap\pi\subset S_0\cap S$.

Assim, $\gamma=\pi\cap S_0:\begin{cases}x^2+y^2+(z-1)^2=2\\3x+y-z=1\end{cases}$ é uma diretriz da superfície cônica S.

Observe que a interseção da reta $\ell=\left\{C+\overrightarrow{CV}\,t\;\middle|\;t\in\mathbb{R}\right\}=\{(3t,t,-t+1)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$, perpendicular a π que passa por C, com o plano π é o ponto $C'=C+\dfrac{R^2}{\|\overrightarrow{CV}\|^2}\overrightarrow{CV}$, pois

$$3(3t)+t+t-1=1\iff 11t=2\iff t=\frac{2}{11}=\frac{R^2}{\|\overrightarrow{CV}\|^2}\,,$$

já que $\|\overrightarrow{CV}\|=\|(3,1,-1)\|=\sqrt{11}$. □

Observação 2

Em geral, podemos provar que uma diretriz γ da superfície cônica S de vértice V cujas geratrizes são tangentes à esfera S_0 é o círculo dado pela interseção de S_0 com o plano π perpendicular ao vetor $\overrightarrow{CV}$ que passa pelo ponto C' dado por:

$$C'=C+\frac{R^2}{\|\overrightarrow{CV}\|^2}\overrightarrow{CV}\,.$$

Além disso, as geratrizes fazem um ângulo constante θ com o vetor $\overrightarrow{VC}$, onde

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{\|\overrightarrow{VC}\|^2-R^2}}{\|\overrightarrow{VC}\|}\,.$$

No exemplo anterior,

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{11-2}}{\sqrt{11}}=\frac{3}{\sqrt{11}}\,,$$

como já havíamos calculado (veja (17)).

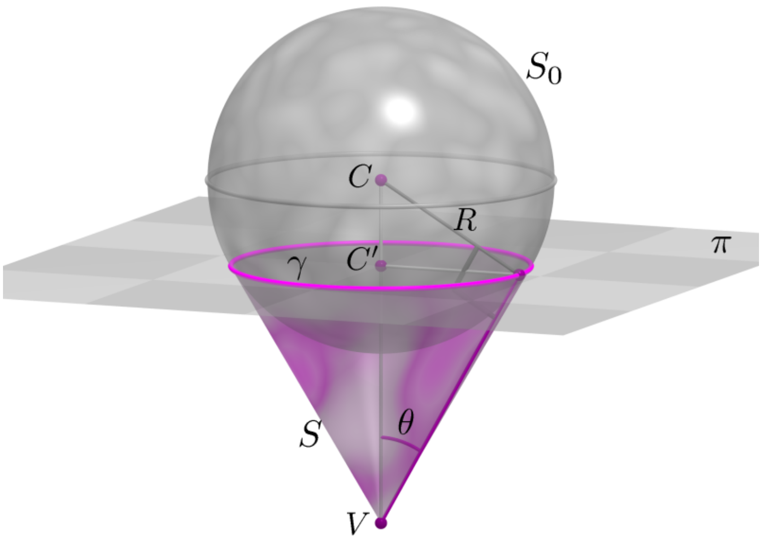

Fig. 16: S tangente à esfera S_0

Exemplo 9

Em cada um dos itens abaixo, são dados uma diretriz γ e o vértice V de uma superfície cônica S. Determine a equação cartesiana de S. A equação obtida descreve apenas S ou algo mais que S? Caso seja algo mais que S, dê uma diretriz da superfície S' dada pela equação obtida. Parametrize também as superfícies S e S'.

(a) $\gamma : \begin{cases} 4x^2 + z^2 = 4 \\ y = 1 \end{cases}$; $V = (0,0,0)$.

Solução.

A diretriz $\gamma : \begin{cases} x^2 + \dfrac{z^2}{4} = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ é uma elipse centrada no ponto $(0,1,0)$ cujo eixo-focal é a reta $\{(0,1,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ paralela ao eixo$-OZ$.

Pela definição de superfície cônica, $P = (x,y,z) \in S$ se, e só se, existe $P' = (x',y',z') \in \gamma$ e um número real t tais que $\overrightarrow{VP} = t\overrightarrow{VP'}$. Ou seja:

$$\begin{cases} x = tx' \\ y = ty' \\ z = tz' \end{cases} \qquad (18) \qquad , \qquad \begin{cases} 4x'^2 + z'^2 = 4 \\ y' = 1 \end{cases} \qquad (19)$$

Assim, $t = y$.

Observe que se $P = (x,y,z) \in S$, então:

$$P = V \iff t = 0 \iff y = 0\,. \qquad (20)$$

Se $t = y \neq 0$, temos, por (18), que:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{t} = \frac{x}{y} \\ z' &= \frac{z}{t} = \frac{z}{y}\,, \end{aligned}$$

e, por (19), que:

$$4\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{z}{y}\right)^2 = 1 \iff 4x^2 + z^2 = y^2\,. \qquad (21)$$

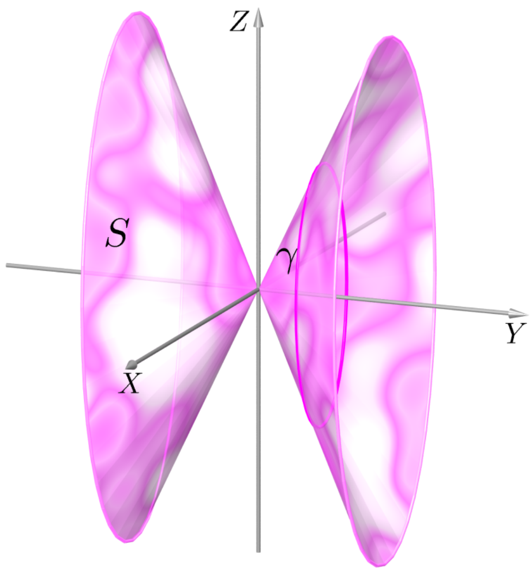

Fig. 17: Superfície S

Provamos que se $y \neq 0$, então $P = (x,y,z) \in S$ se, e só se, as coordenadas x, y e z de P satisfazem a equação (21).

Vamos analisar os pontos com segunda coordenada nula, isto é, $y = 0$.

- Por (20), $P = (x,0,z) \in S$ se, e só se, $P = V = (0,0,0)$, que satisfaz a equação (21).
- Um ponto $P = (x,0,z)$ satisfaz a equação (21) se, e só se, $4x^2 + z^2 = 0$, ou seja, se, e só se, $x = z = 0$ ($\iff P = (0,0,0) = V$).

Logo um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a S se, e só se, satisfaz a equação

$$4x^2 + z^2 = y^2 ,$$

que é, portanto, sua equação cartesiana.

Para parametrizarmos a superfície S, devemos primeiro parametrizar a diretriz γ.

Sendo

$$\gamma : \begin{cases} x(s) = \cos s \\ y(s) = 1 \\ z(s) = 2 \,\text{sen}\, s \end{cases} \quad ; \quad s \in \mathbb{R} ,$$

uma parametrização de γ, vemos que:

$$S = \{V + t\overrightarrow{VP'} \,|\, P' \in \gamma \,,\ t \in \mathbb{R}\} = \{(x(s), y(s), z(s))t \,|\, s, t \in \mathbb{R}\} ,$$

ou seja,

$$S : \begin{cases} x(s,t) = t\cos s \\ y(s,t) = t \\ z(s,t) = 2t \,\text{sen}\, s \end{cases} \quad ; \quad s, t \in \mathbb{R} ,$$

é uma parametrização da superfície cônica S. □

(b) $\gamma : \begin{cases} x^2 = y - 1 \\ z = 1 \end{cases}$ e $V = (0, 1, 0)$.

Solução.

A curva γ é uma parábola de vértice $V_0 = (0, 1, 1)$ e reta-focal $= \{(0, t, 1) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ paralela ao eixo$-OY$, contida no plano $z = 1$.

Sabemos que um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a S se, e só se, existe $P' = (x', y', z') \in \gamma$ e um número real t, tais que:

$$\overrightarrow{VP} = t\overrightarrow{VP'} . \tag{22}$$

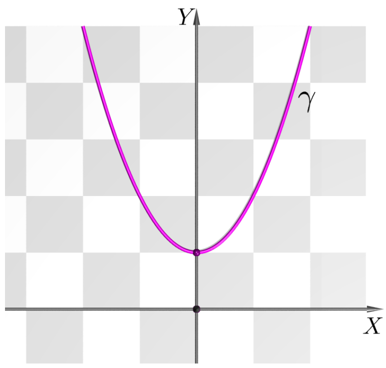

Fig. 18: Curva γ

Ou seja,

$$\begin{cases} x = tx' \\ y - 1 = t(y' - 1) \\ z = tz' \end{cases} \quad (23) \qquad , \qquad \begin{cases} x'^2 = y' - 1 \\ z' = 1 \end{cases} \quad (24)$$

Assim, $t = z$. Observe, por (22), que se $P = (x, y, z) \in S$, então:

$$P = V \iff t = 0 \iff z = 0 . \tag{25}$$

Suponha que $z \neq 0$. Então, por (23),

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{t} = \frac{x}{z} \\ y' &= \frac{y-1}{t} + 1 = \frac{y-1}{z} + 1 = \frac{y+z-1}{z}\,, \end{aligned}$$

e, portanto, por (24),

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{z^2} = \frac{y+z-1}{z} - 1 = \frac{y-1}{z} &\iff x^2 = z(y-1) = yz - z \\ &\iff x^2 - yz + z = 0\,. \end{aligned} \tag{26}$$

Provamos, assim, que se $z \neq 0$, então um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a S se, e só se, suas coordenadas x, y e z satisfazem a equação:

$$x^2 - yz + z = 0\,.$$

Vamos verificar o que acontece quando $z = 0$.

• Por (25), um ponto $P = (x, y, 0)$ pertence a S se, e só se, $P = (0, 1, 0) = V$, que satifaz a equação (26).

• Por (26), um ponto $P = (x, y, 0)$ satisfaz a equação (26) se, e só se, $x^2 = 0$, ou seja, se, e só se, P pertence ao eixo$-OY = \{(0, y, 0) \,|\, y \in \mathbb{R}\}$.

Logo

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 - yz + z = 0\right\} - \left\{(0, y, 0) \,\middle|\, y \in \mathbb{R} - \{1\}\right\}\,.$$

Como

$$\gamma : \begin{cases} x(s) = s \\ y(s) = s^2 + 1 \\ z(s) = 1 \end{cases}$$

é uma parametrização de γ, e

$$\begin{aligned} S &= \left\{V + t\overrightarrow{VP'} \,\middle|\, P' \in \gamma \text{ e } t \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{(0, 1, 0) + t(s, s^2, 1) \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned},$$

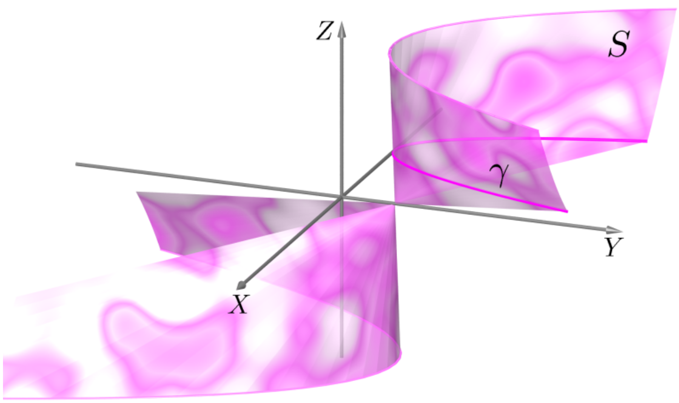

Fig. 19: Superfície S

obtemos a seguinte parametrização de S:

$$S : \begin{cases} x(s, t) = ts \\ y(s, t) = 1 + ts^2 \\ z(s, t) = t \end{cases} \quad ; \quad s, t \in \mathbb{R}\,.$$

Vamos verificar agora que a equação $x^2 - yz + z = 0$ representa também uma superfície cônica S', cuja diretriz γ' não é a parábola γ e, sim, uma elipse.

Seja $O\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$ o sistema de eixos ortogonais obtido girando os eixos OY e OZ de um ângulo de 45^o, no sentido positivo, mantendo-se o eixo$-OX$ fixo.

Então, como

$$\begin{cases} x = \overline{x} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overline{y} - \overline{z}) \\ z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overline{y} + \overline{z}) \end{cases} \quad (27) \qquad , \qquad \begin{cases} \overline{x} = x \\ \overline{y} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(y + z) \\ \overline{z} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-y + z) \end{cases} \quad (28),$$

a equação (26), nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, é dada por:

$$\begin{aligned}
& \overline{x}^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{y} - \overline{z})(\overline{y} + \overline{z}) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{y} + \overline{z}) = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \overline{x}^2 - \frac{1}{2}(\overline{y}^2 - \overline{z}^2) + \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{z} = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \overline{x}^2 - \frac{1}{2}(\overline{y}^2 - \sqrt{2}\,\overline{y}) + \frac{1}{2}(\overline{z}^2 + \sqrt{2}\,\overline{z}) = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \overline{x}^2 - \frac{1}{2}\left(\overline{y} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\overline{z} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \overline{x}^2 + \frac{\left(\overline{z} + \sqrt{2}/2\right)^2}{2} = \frac{\left(\overline{y} - \sqrt{2}/2\right)^2}{2},
\end{aligned}$$

que representa um cone elíptico reto de eixo $\overline{r} = \left\{\left(0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right) + (0, t, 0) \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}$ paralelo ao eixo$-O\overline{Y}$, vértice $\overline{V}' = \left(0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)$, e diretriz

$$\overline{\beta} : \begin{cases} \overline{x}^2 + \dfrac{\left(\overline{z} + \sqrt{2}/2\right)^2}{2} = 1 \\ \overline{y} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$.

Assim, por (27) e (28),

$$V' = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = (0, 1, 0) = V$$

é o vértice,

$$\begin{aligned}
r &= \left\{\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{\left(0, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}t\right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{(0, 1 + s, s) \,\middle|\, s \in \mathbb{R}\right\},
\end{aligned}$$

é o eixo, e

$$\beta : \begin{cases} x^2 + \dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-y+z) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} = 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}(y+z) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \beta : \begin{cases} 4x^2 + (-y+z+1)^2 = 4 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

é uma diretriz da superfície cônica S' nas coordenadas x, y, z.

Para fazer um esboço da superfície S', observe que a interseção de $\overline{\beta}$ com o plano $\overline{x} = 0$ são os vértices $\overline{A}_1 = \left(0, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\overline{A}_2 = \left(0, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ da elipse $\overline{\beta}$, que, nas coordenadas x, y, z são dados por:

$$A_1 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = (0,1,2)$$

e

$$A_2 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\right) = (0,3,0).$$

Para parametrizarmos a superfície S', devemos primeiro parametrizar a diretriz nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$.

Como

$$\overline{\beta} : \begin{cases} \overline{x}(s) = \cos s \\ \overline{y}(s) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ \overline{z}(s) = \sqrt{2}\,\text{sen}\, s - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad ; \quad s \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, temos, por (27), que:

$$\beta : \begin{cases} x(s) = \overline{x}(s) = \cos(s) \\ y(s) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overline{y}(s) - \overline{z}(s)) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\,\text{sen}\, s + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 - \text{sen}\, s \\ z(s) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overline{y}(s) + \overline{z}(s)) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\,\text{sen}\, s - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \text{sen}\, s \end{cases} \quad ; \quad s \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização da diretriz β nas coordenadas x, y, z.

Logo,

$$S' = \left\{ V + t\overrightarrow{VP'} \,\middle|\, P' \in \gamma \text{ e } t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (0,1,0) + t(\cos s, 1 - \text{sen}\, s, 1 + \text{sen}\, s) \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\},$$

ou seja,

$$S' : \begin{cases} x(s,t) = t\cos s \\ y(s,t) = 1 + t - t\,\text{sen}\, s \\ z(s,t) = t + t\,\text{sen}\, s \end{cases} \quad ; \quad s,t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização da superfície cônica S', cuja equação cartesiana é

$$x^2 - yz + z = 0$$

e cujo esboço é o mostrado na figura abaixo.

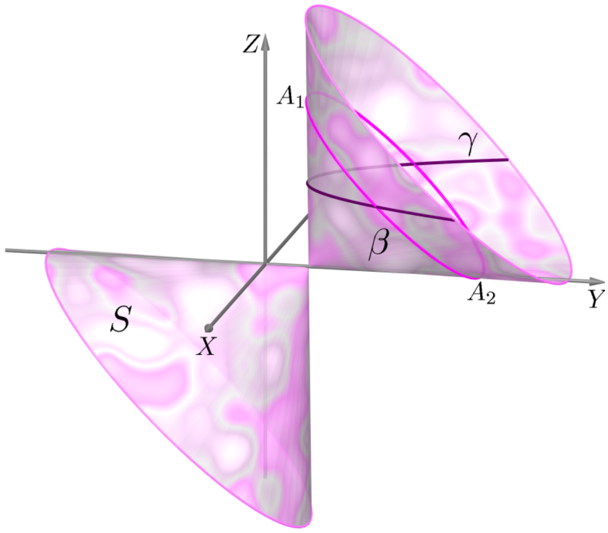

Fig. 20: Superfície $S' : x^2 - yz + z = 0$ $\square$

(c) $\gamma : \begin{cases} yz = 1 \\ x = 1 \end{cases}$ e $V = (0, 0, 0)$.

Solução.

Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a S se, e só se, existe um ponto $P' = (x', y', z')$ pertencente a γ e um número real t, tais que:

$$\overrightarrow{VP} = t\overrightarrow{VP'}\,. \tag{29}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} x = tx' \\ y = ty' \\ z = tz' \end{cases} \quad (30) \qquad , \qquad \begin{cases} y'z' = 1 \\ x' = 1 \end{cases} \quad (31)$$

Logo $t = x$. Observe que se $P = (x, y, z)$ pertence a S, então, por (29),

$$P = V \Longleftrightarrow t = 0 \Longleftrightarrow x = 0\,. \tag{32}$$

Se $x \neq 0$, temos, por (30), que:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{t} = \frac{y}{x} \\ z' &= \frac{z}{t} = \frac{z}{x}\,, \end{aligned}$$

e portanto, por (31):

$$\frac{yz}{x^2} = 1 \Longleftrightarrow yz = x^2\,. \tag{33}$$

Provamos, assim, que um ponto $P = (x, y, z)$, com $x \neq 0$, pertence a S se, e só se, suas coordenadas x, y e z satisfazem a equação (33).

Além disso:

- $P = (0, y, z) \in S \iff P = (0, 0, 0) = V$, que satisfaz a equação (31).
- $P = (0, y, z)$ satisfaz a equação (33) se, e só se, $yz = 0$, ou seja, se, e só se,
$$P \in \{(0, 0, z) \,|\, z \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y, 0) \,|\, y \in \mathbb{R}\}.$$

Logo,
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, yz = x^2\} - \left(\{(0, 0, z) \,|\, z \in \mathbb{R} - \{0\}\} \cup \{(0, y, 0) \,|\, y \in \mathbb{R} - \{0\}\}\right)$$

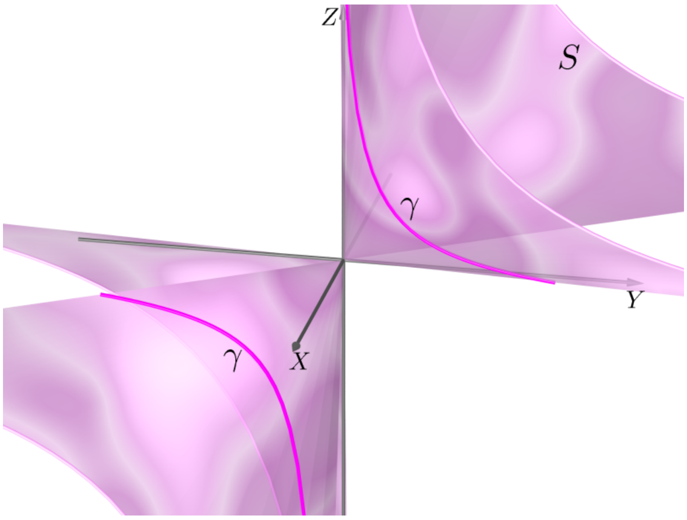

Fig. 21: Superfície S

Sendo
$$\gamma : \begin{cases} x(s) = 1 \\ y(s) = s \\ z(s) = 1/s \end{cases} ; \quad s \in \mathbb{R} - \{0\},$$

uma parametrização da diretriz γ, e
$$S = \left\{V + t\overrightarrow{VP'} \,\middle|\, P' \in \gamma \text{ e } t \in \mathbb{R}\right\} = \{t(1, s, 1/s) \,|\, t \in \mathbb{R} \text{ e } s \in \mathbb{R} - \{0\}\},$$

temos que:
$$S : \begin{cases} x(s, t) = t \\ y(s, t) = ts \\ z(s, t) = t/s \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R} \text{ e } s \in \mathbb{R} - \{0\},$$

é uma parametrização da superfície cônica S.

Seja S' a superfície cuja equação cartesiana é $x^2 = yz$, ou seja,
$$S' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 = yz\}.$$

Por uma rotação de um ângulo de 45^o, no sentido positivo, dos eixos OY e OZ, mantendo-se o eixo$-OX$ fixo, obtemos um novo sistema de eixos ortogonais $O\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$, no qual:

$$\begin{cases} x = \overline{x} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overline{y} - \overline{z}) \\ z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overline{y} + \overline{z}) \end{cases} \quad (34) \qquad , \qquad \begin{cases} \overline{x} = x \\ \overline{y} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(y + z) \\ \overline{z} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-y + z)\,. \end{cases} \quad (35)$$

Assim, nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, a equação da superfície S' é dada por:

$$\overline{x}^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{y} - \overline{z})(\overline{y} + \overline{z}) \iff \overline{x}^2 = \frac{1}{2}(\overline{y}^2 - \overline{z}^2) \iff \overline{x}^2 + \frac{\overline{z}^2}{2} = \frac{1}{2}\,\overline{y}^2\,,$$

que representa um cone elíptico reto de eixo $\overline{r} = \{(0, t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$, paralelo ao eixo$-O\overline{Y}$, vértice $\overline{V}' = (0, 0, 0)$ e diretriz

$$\overline{\beta} : \begin{cases} \overline{x}^2 + \dfrac{\overline{z}^2}{2} = 1 \\ \overline{y} = \sqrt{2}\,, \end{cases}$$

nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$.

Assim, por (34) e (35),

$$V' = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}(0 - 0), \frac{\sqrt{2}}{2}(0 + 0)\right) = (0, 0, 0) = V$$

é o vértice,

$$r = \left\{ \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}(t - 0), \frac{\sqrt{2}}{2}(t + 0)\right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \{(0, s, s) \mid s \in \mathbb{R}\}$$

é o eixo, e

$$\beta : \begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{4}(-y + z)^2 = 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}(y + z) = \sqrt{2} \end{cases} \iff \beta : \begin{cases} 4x^2 + (-y + z)^2 = 4 \\ y + z = 2\,, \end{cases}$$

é uma diretriz da superfície cônica S' nas coordenadas x, y, z.

Para esboçar a superfície S', observe que a interseção da elipse $\overline{\beta}$ com o plano $\overline{x} = 0$ são os vértices $\overline{A}_1 = (0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $\overline{A}_2 = (0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ que, nas coordenadas x, y, z, são dados por:

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2}), \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} - \sqrt{2})\right) \\ &= (0, 2, 0) \\ A_2 &= \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} - \sqrt{2}), \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2})\right) \\ &= (0, 0, 2)\,. \end{aligned}$$

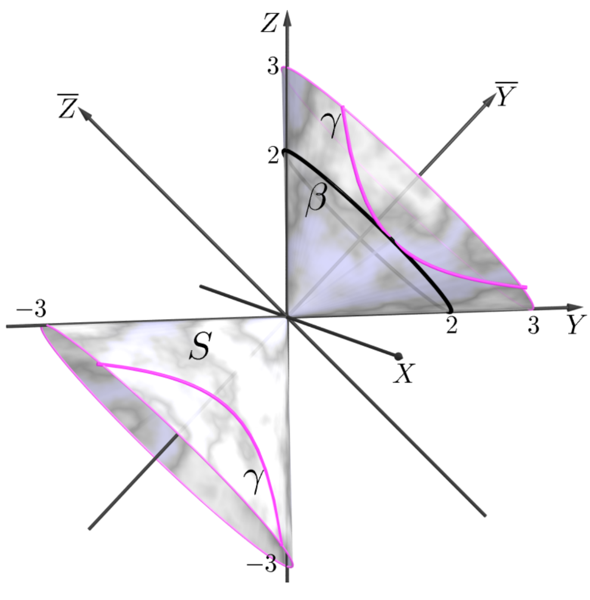

Fig. 22: Superfície S

Sendo

$$\overline{\beta}:\begin{cases}\overline{x}(s)=\cos s\\ \overline{y}(s)=\sqrt{2}\\ \overline{z}(s)=\sqrt{2}\,\text{sen}\, s\end{cases}\quad ;\quad s\in\mathbb{R}$$

uma parametrização da diretriz nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, temos, por (34), que

$$\beta:\begin{cases}x(s)=\cos s\\ y(s)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{y}(s)-\overline{z}(s))=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,\text{sen}\, s)=1-\text{sen}\, s\\ z(s)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{y}(s)+\overline{z}(s))=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\text{sen}\, s)=1+\text{sen}\, s\end{cases}$$

é uma parametrização de β nas coordenadas x, y e z.

Logo,

$$S'=\left\{V+t\overrightarrow{VP'}\,\middle|\,P'\in\gamma' \text{ e } t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t(\cos s,1-\text{sen}\, s,1+\text{sen}\, s)\,\middle|\,t,s\in\mathbb{R}\right\},$$

ou seja,

$$S':\begin{cases}x(s,t)=t\cos s\\ y(s,t)=t-t\,\text{sen}\, s\\ z(s,t)=t+t\,\text{sen}\, s\end{cases}\quad ;\quad s,t\in\mathbb{R},$$

é uma parametrização da superfície S'. □

Exemplo 10

Em cada um dos itens abaixo, mostre que a equação dada representa uma superfície cônica, determinando seu vértice e uma de suas diretrizes. Faça um esboço.

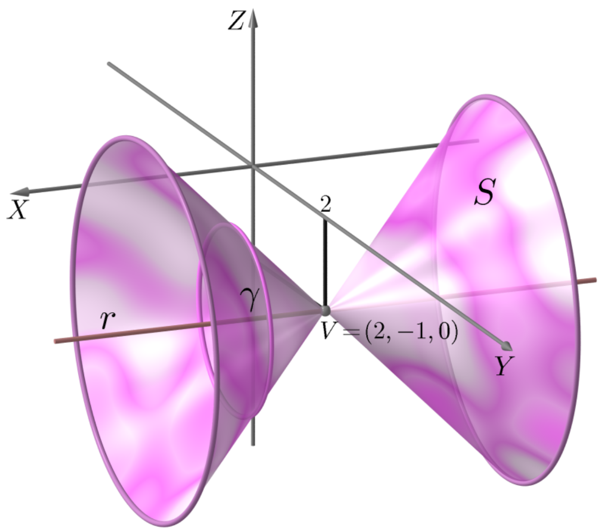

Fig. 23: Superfície S

(a) $S:-x^2+y^2+z^2-4y+2z+5=0$.

Solução.

Completando os quadrados:

$$\begin{aligned}&-x^2+y^2+z^2-4y+2z=-5\\ \iff\ &-x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=-5+4+1=0\\ \iff\ &(y-2)^2+(z+1)^2=x^2,\end{aligned}$$

vemos que S é um cone circular reto de vértice no ponto $V=(0,2,-1)$, sendo o círculo

$$\gamma:\begin{cases}(y-2)^2+(z+1)^2=1\\ x=1\end{cases}$$

uma de suas diretrizes, e a reta

$$r = \{(0, 2, -1) + (t, 0, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

o seu eixo. □

(b) $S : 2x^2 - y^2 - 2\sqrt{3}\, yz + z^2 = 0$.

Solução.

Sendo $A = -1$, $B = -2\sqrt{3}$, $C = 1$, $D = E = F = 0$ na equação

$$Ay^2 + Byz + Cz^2 + Dy + Ez + F = -y^2 - 2\sqrt{3}\, yz + z^2\,,$$

sabemos que, ao girarmos os eixos OY e OZ de um ângulo θ, no sentido positivo, tal que:

$$\text{tg}(2\theta) = \frac{B}{A-C} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} \iff \cos 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1+(\tan 2\theta)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\iff \begin{cases} \cos\theta = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+1/2}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\[2ex] \text{sen}\,\theta = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-1/2}{2}} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \theta = 30^o\,,$$

mantendo o eixo$-OX$ fixo, obtemos um novo sistema de eixos ortogonais $O\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$, para o qual:

$$\begin{cases} x = \overline{x} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{y} - \dfrac{1}{2}\overline{z} \\ z = \dfrac{1}{2}\overline{y} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{z} \end{cases} \quad (36) \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \overline{x} = x \\ \overline{y} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + \dfrac{1}{2}z \\ \overline{z} = -\dfrac{1}{2}y + \dfrac{\sqrt{3}}{2}z\,. \end{cases} \quad (37)$$

Nesse sistema de eixos, a equação

$$2x^2 - y^2 - 2\sqrt{3}yz + z^2 = 0$$

escreve-se na forma

$$2\overline{x}^2 + \overline{A}\overline{y}^2 + \overline{C}\overline{z}^2 + \overline{D}\overline{y} + \overline{E}\overline{z} = 0\,,$$

onde:

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & -2 \\ -2 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} \overline{D} \\ \overline{E} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$2\overline{x}^2 - 2\overline{y}^2 + 2\overline{z}^2 = 0 \Longleftrightarrow \overline{x}^2 + \overline{z}^2 = \overline{y}^2$$

é a equação da superfície S nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$ e $\overline{z}$, que representa um cone circular reto de vértice $\overline{V} = (0,0,0)$, eixo $= \{(0,t,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ e diretriz:

$$\overline{\gamma} : \begin{cases} \overline{x}^2 + \overline{z}^2 = 1 \\ \overline{y} = 1\,. \end{cases}$$

Logo S é uma superfície cônica de vértice V na origem, eixo

$$r = \left\{ \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}t, \frac{1}{2}t\right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ e } y = \sqrt{3}\,z \right\},$$

e diretriz

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + \frac{1}{4}(-y + \sqrt{3}z)^2 = 1 \\ \sqrt{3}y + z = 2\,. \end{cases}$$

Observe que as extremidades do diâmetro, contido no plano YZ, do círculo γ, nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, são os pontos

$$\overline{A}_1 = (0,1,1) \quad \text{e} \quad \overline{A}_2 = (0,1,-1)\,,$$

que, nas coordenadas x, y, z, são:

$$A_1 = \left(0, \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \text{ e } A_2 = \left(0, \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)\,. \quad \square$$

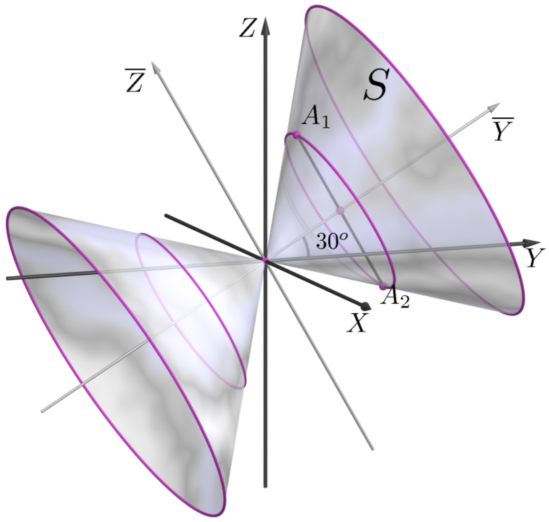

Fig. 24: Superfície S

Exemplo 11

Seja $\mathcal{H}$ a hipérbole contida no plano $\pi : 2x - y + 3z = 1$ com um dos vértices no ponto $V = (0,2,1)$, um dos focos no ponto $F = (1,1,0)$, sendo $P = (-5,-2,3)$ um dos pontos de sua reta não-focal.

(a) *Determine o centro, o outro vértice, o outro vértice imaginário e as equações paramétricas da reta-focal e da reta não-focal da hipérbole $\mathcal{H}$*

Solução.

Sendo $\overrightarrow{FV} = (-1,1,1)$, temos que:

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

é uma parametrização da reta-focal r.

Seja r' a reta não-focal de $\mathcal{H}$. Como $r' \subset \pi$ e $r' \perp r$, temos que $r' \perp \overrightarrow{v} = (2,-1,3)$ $(\perp \pi)$ e $r' \perp \overrightarrow{FV} = (-1,1,1)$.

Então

$$r' \parallel \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{FV} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-4,-5,1)\,.$$

Portanto, como $P = (-5,-2,3) \in r'$,

$$r' : \begin{cases} x = -5-4s \\ y = -2-5s \quad ; \quad s \in \mathbb{R}\,, \\ z = 3+s \end{cases}$$

é uma parametrização da reta não-focal.

O centro C da hipérbole é o ponto de interseção das retas r e r'.

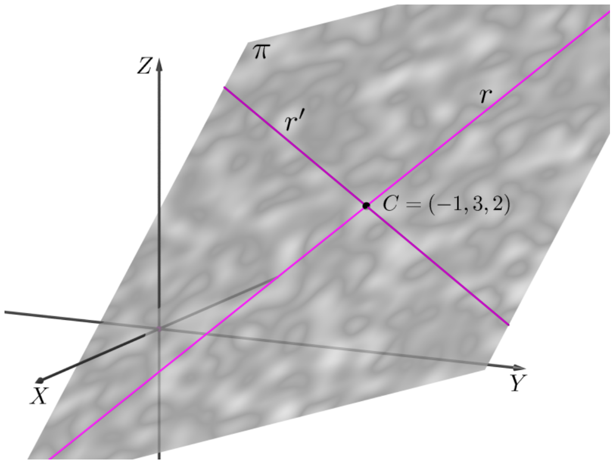

Fig. 25: Plano π e retas r e r'

Logo $C = (1-t, 1+t, t) = (-5-4s, -2-5s, 3+s)$, para algum $t \in \mathbb{R}$ e para algum $s \in \mathbb{R}$.

Ou seja,

$$\begin{cases} 1-t = -5-4s \\ 1+t = -2-5s \\ t = 3+s \end{cases}$$

Somando as duas primeiras equações, obtemos que $2 = -7-9s \iff s = -1$. Portanto, $t = -3-5s = -3+5 = 2$.

Observe que os valores $t = 2$ e $s = -1$ também satisfazem a terceira equação $t = 3+s$.

Logo $C = (1-2, 1+2, 2) = (-1,3,2)$ é o centro da hipérbole $\mathcal{H}$.

Como os vetores $\overrightarrow{VC} = (-1,1,1)$ e $\overrightarrow{FC} = (-2,2,2)$ são múltiplos positivos, os pontos C, F e V se posicionam da seguinte maneira na reta-focal r:

Fig. 26: Posicão de C, F e V na reta r

Sejam F' o outro foco e V' o outro vértice.

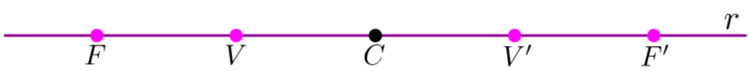

Fig. 27: Posicão de C, F, F', V, V' na reta r

Sendo $\overrightarrow{CV'} = -\overrightarrow{CV}$ e $\overrightarrow{CF'} = -\overrightarrow{CF}$, temos que:

$$\begin{aligned} V' &= C - \overrightarrow{CV} = C + \overrightarrow{VC} = (-1,3,2) + (-1,1,1) = (-2,4,3)\,, \\ \text{e} \qquad F' &= C - \overrightarrow{CF} = C + \overrightarrow{FC} = (-1,3,2) + (-2,2,2) = (-3,5,4)\,. \end{aligned}$$

Além disso, como $a = \|\overrightarrow{CV}\| = \sqrt{3}$, $c = \|\overrightarrow{CF}\| = 2\sqrt{3}$ e $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 3$, e os vértices imaginários $B = (-4s-1, -5s+3, s+2)$ pertencem à reta não-focal r', temos que:

$$\|\overrightarrow{CB}\|^2 = b^2 = 9 \iff 16s^2 + 25s^2 + s^2 = 9$$
$$\iff s = \pm\frac{3}{\sqrt{42}}\,.$$

Portanto, $B = \left(-\frac{12}{\sqrt{42}} - 1, -\frac{15}{\sqrt{42}} + 3, \frac{3}{\sqrt{42}} + 2\right)$ e $B' = \left(\frac{12}{\sqrt{42}} - 1, \frac{15}{\sqrt{42}} + 3, -\frac{3}{\sqrt{42}} + 2\right)$ são os vértices imaginários da hipérbole $\mathcal{H}$. □

(b) *Parametrize a hipérbole $\mathcal{H}$ e suas assíntotas.*

Solução.
Para parametrizarmos a hipérbole $\mathcal{H}$ devemos fazer uma translação e uma rotação do sistema de eixos ortogonais $OXYZ$.

Seja $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}}\,\overline{\overline{Z}}$ o novo sistema de eixos, onde $\overline{O} = C = (-1, 3, 2)$ e os semi-eixos positivos $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$, $\overline{O}\,\overline{\overline{Y}}$ e $\overline{O}\,\overline{\overline{Z}}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido, respectivamente, dos vetores:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_1} &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\
\overrightarrow{v_2} &= \overrightarrow{v_3} \times \overrightarrow{v_1} = \begin{vmatrix} 2/\sqrt{14} & -1/\sqrt{14} & 3/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{vmatrix} = \left(\frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}, -\frac{1}{\sqrt{42}}\right)\\
\overrightarrow{v_3} &= \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right),
\end{aligned}$$

onde $\overrightarrow{v_1}$ é um vetor unitário paralelo à reta-focal e $\overrightarrow{v_3}$ é um vetor unitário normal ao plano π.

Sabemos que neste sistema de coordenadas, a hipérbole $\mathcal{H}$ está contida no plano $\pi : \overline{\overline{z}} = 0$, tem centro na origem, reta-focal=eixo$-\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$, $a = \sqrt{3}$, $b = 3$ e $c = 2\sqrt{3}$, ou seja,

$$\mathcal{H} : \begin{cases} \dfrac{\overline{\overline{x}}^2}{3} - \dfrac{\overline{\overline{y}}^2}{9} = 1 \\ \overline{\overline{z}} = 0\,. \end{cases}$$

Logo, como

$$\mathcal{H} : \begin{cases} \overline{\overline{x}} = \pm\sqrt{3}\cosh s \\ \overline{\overline{y}} = 3\,\text{senh}\, s \\ \overline{\overline{z}} = 0 \end{cases} \quad ; \quad s \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização de $\mathcal{H}$ nas coordenadas $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{y}}$, $\overline{\overline{z}}$, e

$$(x, y, z) = \overline{\overline{x}}\,\overrightarrow{v_1} + \overline{\overline{y}}\,\overrightarrow{v_2} + \overline{\overline{z}}\,\overrightarrow{v_3} + C\,, \tag{38}$$

temos que

$$(x(s), y(s), z(s)) = \pm\sqrt{3}\cosh s \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 3\,\text{senh}\, s \left(\frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}, -\frac{1}{\sqrt{42}}\right) + (-1, 3, 2)\,,$$

isto é,

$$\mathcal{H}: \begin{cases} x(s) = \pm\cosh s + \dfrac{12}{\sqrt{42}}\,\text{senh}\, s - 1 \\ y(s) = \mp\cosh s + \dfrac{15}{\sqrt{42}}\,\text{senh}\, s + 3 \\ z(s) = \mp\cosh s - \dfrac{3}{\sqrt{42}}\,\text{senh}\, s + 2 \end{cases} ; \quad s \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização de $\mathcal{H}$ nas coordenadas x, y, z.

Além disso, sendo

$$r^{\pm}: \begin{cases} \overline{\overline{y}} = \pm\dfrac{3}{\sqrt{3}}\overline{\overline{x}} \\ \overline{\overline{z}} = 0 \end{cases} \iff r^{\pm}: \begin{cases} \overline{\overline{y}} = \pm\sqrt{3}\,\overline{\overline{x}} \\ \overline{\overline{z}} = 0 \end{cases} \iff r^{\pm}: \begin{cases} \overline{\overline{x}}(t) = t \\ \overline{\overline{y}}(t) = \pm\sqrt{3}\,t \\ \overline{\overline{z}}(t) = 0 \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R},$$

as assíntotas de $\mathcal{H}$ nas coordenadas $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{y}}$, $\overline{\overline{z}}$, temos, por (38), que:

$$\begin{aligned} (x(t), y(t), z(t)) &= t\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \pm \sqrt{3}\,t\left(\frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}, -\frac{1}{\sqrt{42}}\right) + (-1,3,2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(t \pm \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{14}}t, -t \pm \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{14}}t, -t \mp \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{14}}t\right) + (-1,3,2), \end{aligned}$$

ou melhor,

$$r^{+}: \begin{cases} x(t) = \left(1 + \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{14}}\right)t - 1 \\ y(t) = \left(-1 + \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{14}}\right)t + 3 \\ z(t) = \left(-1 - \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{14}}\right)t + 2 \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad r^{-}: \begin{cases} x(t) = \left(1 - \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{14}}\right)t - 1 \\ y(t) = \left(-1 - \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{14}}\right)t + 3 \\ z(t) = \left(-1 + \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{14}}\right)t + 2 \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R},$$

são parametrizações das assíntotas r^{+} e r^{-} de $\mathcal{H}$ nas coordenadas x, y e z. $\square$

(c) *Determine as equações paramétricas da superfície cônica S com vértice $V = (1,2,0)$, que possui a hipérbole $\mathcal{H}$ como uma de suas diretrizes.*

Solução.

Por definição, $S = \left\{ V + t\overrightarrow{VP} \;\middle|\; P \in \mathcal{H} \text{ e } t \in \mathbb{R} \right\}$.

Logo, todo ponto P pertencente a S é da forma

$$(1,2,0) + t\left(\pm\cosh s + \frac{12}{\sqrt{42}}\,\text{senh}\, s - 2, \mp\cosh s + \frac{15}{\sqrt{42}}\,\text{senh}\, s + 1, \mp\cosh s - \frac{3}{\sqrt{42}}\,\text{senh}\, s + 2\right),$$

com s, $t \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$S : \begin{cases} x(s,t) = 1 \pm t\cosh s + \dfrac{12}{\sqrt{42}}\,t\,\text{senh}\,s - 2t \\ y(s,t) = 2 \mp t\cosh s + \dfrac{15}{\sqrt{42}}\,t\,\text{senh}\,s + t \\ z(s,t) = \mp t\cosh s - \dfrac{3}{\sqrt{42}}\,t\,\text{senh}\,s + 2t \end{cases} \quad ; \quad s,t \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização da superfície cônica S de vértice V e diretriz $\mathcal{H}$. □

Exemplo 12

Seja $\mathcal{E}$ a elipse contida no plano $\pi : x - y + 2z = 0$ que tem centro $C = (1,-1,-1)$, um dos vértices sobre a reta-focal no ponto $A = (5,-1,-3)$ e excentricidade $e = \dfrac{1}{2}$.

Determine a equação cartesiana da superfície cônica S cuja diretriz é a elipse $\mathcal{E}$ e cujo vértice é o ponto $V = (0,1,2)$.

Solução.

Como $\overrightarrow{CA} = (4,0,-2)$, temos que $a = d(C,A) = \|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}\,.$

Além disso, como $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2}$ e $a^2 = b^2 + c^2$, obtemos que $c = \sqrt{5}$ e $b = \sqrt{20-5} = \sqrt{15}\,.$

Seja $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}}\,\overline{\overline{Z}}$ um sistema de eixos ortogonais, no qual $\overline{O} = C$ e os semi-eixos positivos $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$, $\overline{O}\,\overline{\overline{Y}}$ e $\overline{O}\,\overline{\overline{Z}}$ tem a mesma direção e o mesmo sentido, respectivamente, dos vetores:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_1} &= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ \overrightarrow{v_2} &= \overrightarrow{v_3} \times \overrightarrow{v_1} = \begin{vmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}\right) \\ \overrightarrow{v_3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\,, \end{aligned}$$

onde $\overrightarrow{v_1}$ é um vetor unitário paralelo à reta-focal e $\overrightarrow{v_3}$ é um vetor unitário normal ao plano π.

Neste sistema de eixos,

$$(x,y,z) = \overline{\overline{x}}\,\overrightarrow{v_1} + \overline{\overline{y}}\,\overrightarrow{v_2} + \overline{\overline{z}}\,\overrightarrow{v_3} + C\,, \tag{39}$$

e

$$\overline{\overline{\mathcal{E}}} : \begin{cases} \dfrac{\overline{\overline{x}}^2}{20} + \dfrac{\overline{\overline{y}}^2}{15} = 1 \\ \overline{\overline{z}} = 0 \end{cases} \iff \overline{\overline{\mathcal{E}}} : \begin{cases} 3\overline{\overline{x}}^2 + 4\overline{\overline{y}}^2 = 60 \\ \overline{\overline{z}} = 0 \end{cases} \tag{40}$$

Por (39), as coordenadas $\overline{\overline{x}}\,, \overline{\overline{y}}\,, \overline{\overline{z}}$ do vértice $V = (x,y,z) = (0,1,2)$ são:

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{x}} &= \left\langle \overrightarrow{CV}, \overrightarrow{v_1} \right\rangle = \left\langle (-1,2,3), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \right\rangle = -\frac{5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}\,,\\
\overline{\overline{y}} &= \left\langle \overrightarrow{CV}, \overrightarrow{v_2} \right\rangle = \left\langle (-1,2,3), \left(-\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}\right) \right\rangle = \frac{1-10-6}{\sqrt{30}} = -\frac{15}{\sqrt{30}} = -\frac{\sqrt{30}}{2}\,,\\
\overline{\overline{z}} &= \left\langle \overrightarrow{CV}, \overrightarrow{v_3} \right\rangle = \left\langle (-1,2,3), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \right\rangle = \frac{-1-2+6}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\,.
\end{aligned}$$

Logo, nas coordenadas $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{y}}$, $\overline{\overline{z}}$, S é uma superfície cônica com vértice $V = \left(-\sqrt{5}, -\frac{\sqrt{30}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, sendo a elipse

$$\overline{\overline{\mathcal{E}}} : \begin{cases} 3\overline{\overline{x}} + 4\overline{\overline{y}}^2 = 60 \\ \overline{\overline{z}} = 0 \end{cases}$$

uma de suas diretrizes.

Pela definição, um ponto $P = (\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}, \overline{\overline{z}})$ pertence a S se, e só se, existe um ponto $P' = \left(\overline{\overline{x}}', \overline{\overline{y}}', \overline{\overline{z}}'\right)$ em $\overline{\overline{\mathcal{E}}}$ e um número real t, tais que:

$$\overrightarrow{VP} = t\overrightarrow{VP'}\,.$$

Ou seja,

$$\begin{cases} \overline{\overline{x}} + \sqrt{5} = t(\overline{\overline{x}}' + \sqrt{5}) \\ \overline{\overline{y}} + \dfrac{\sqrt{30}}{2} = t\left(\overline{\overline{y}}' + \dfrac{\sqrt{30}}{2}\right) \\ \overline{\overline{z}} - \dfrac{\sqrt{6}}{2} = t\left(\overline{\overline{z}}' - \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right) \end{cases} \quad (41) \qquad \begin{cases} 3(\overline{\overline{x}}')^2 + 4(\overline{\overline{y}}')^2 = 60 \\ \overline{\overline{z}}' = 0 \end{cases} \quad (42)$$

Então, $t = -\frac{2}{\sqrt{6}}\left(\overline{\overline{z}} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

Observe que

$$P = V \iff t = 0 \iff \overline{\overline{z}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \tag{43}$$

Logo, se $\overline{\overline{z}} \neq \frac{\sqrt{6}}{2}$,

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{x}}' &= \frac{\overline{\overline{x}} + \sqrt{5}}{t} - \sqrt{5} = -\frac{\sqrt{6}}{2}\,\frac{\overline{\overline{x}} + \sqrt{5}}{\overline{\overline{z}} - \frac{\sqrt{6}}{2}} - \sqrt{5}\\
&= \frac{-\frac{\sqrt{6}}{2}\overline{\overline{x}} - \frac{\sqrt{30}}{2} - \sqrt{5}\,\overline{\overline{z}} + \frac{\sqrt{30}}{2}}{\overline{\overline{z}} - \frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{6}}{2}\overline{\overline{x}} - \sqrt{5}\,\overline{\overline{z}}}{\overline{\overline{z}} - \frac{\sqrt{6}}{2}}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{y}}' &= \frac{\overline{\overline{y}}+\frac{\sqrt{30}}{2}}{t}-\frac{\sqrt{30}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}\,\frac{\overline{\overline{y}}+\frac{\sqrt{30}}{2}}{\overline{\overline{z}}-\frac{\sqrt{6}}{2}}-\frac{\sqrt{30}}{2}\\
&= \frac{-\frac{\sqrt{6}}{2}\overline{\overline{y}}-\frac{\sqrt{180}}{4}-\frac{\sqrt{30}}{2}\overline{\overline{z}}+\frac{\sqrt{180}}{4}}{\overline{\overline{z}}-\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{6}}{2}\overline{\overline{y}}-\frac{\sqrt{30}}{2}\overline{\overline{z}}}{\overline{\overline{z}}-\frac{\sqrt{6}}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Portanto, por (42), um ponto $P=(\overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}},\overline{\overline{z}})$, com $\overline{\overline{z}}\neq\frac{\sqrt{6}}{2}$, pertence a S se, e só se:

$$3\frac{\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\overline{\overline{x}}-\sqrt{5}\,\overline{\overline{z}}\right)^2}{\left(\overline{\overline{z}}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}+4\frac{\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\overline{\overline{y}}-\frac{\sqrt{30}}{2}\overline{\overline{z}}\right)^2}{\left(\overline{\overline{z}}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=60$$

$$\iff 3\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\overline{\overline{x}}+\sqrt{5}\,\overline{\overline{z}}\right)^2+4\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\overline{\overline{y}}+\frac{\sqrt{30}}{2}\overline{\overline{z}}\right)^2=60\left(\overline{\overline{z}}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2. \qquad (44)$$

Observe que:

- se $P=(\overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}},\overline{\overline{z}})\in S$ e $\overline{\overline{z}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ então , por (43), $P=V=\left(-\sqrt{5},-\frac{\sqrt{30}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, que satisfaz a equação (44).
- se $P=\left(\overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ satisfaz a equação (44), então:

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{6}}{2}\overline{\overline{x}}+\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{6}}{2}=0\\ \frac{\sqrt{6}}{2}\overline{\overline{y}}+\frac{\sqrt{30}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}=0\end{cases}\iff\begin{cases}\overline{\overline{x}}=-\sqrt{5}\\ \overline{\overline{y}}=-\frac{\sqrt{30}}{2}\end{cases}$$

ou seja, $P=V$.

Assim,

$$3\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\overline{\overline{x}}+\sqrt{5}\,\overline{\overline{z}}\right)^2+4\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\overline{\overline{y}}+\frac{\sqrt{30}}{2}\overline{\overline{z}}\right)=60\left(\overline{\overline{z}}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$$

é a equação cartesiana da superfície cônica S nas coordenadas $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{y}}$, $\overline{\overline{z}}$.

Como, por (39):

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{x}} &= \langle (x,y,z)-(1,-1,-1),\overrightarrow{v_1}\rangle = \left\langle (x-1,y+1,z+1),\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\rangle = \frac{2x-z-3}{\sqrt{5}};\\
\overline{\overline{y}} &= \langle (x,y,z)-(1,-1,-1),\overrightarrow{v_2}\rangle = \left\langle (x-1,y+1,z+1),\left(-\frac{1}{\sqrt{30}},-\frac{5}{\sqrt{30}},-\frac{2}{\sqrt{30}}\right)\right\rangle\\
&= \frac{-x-5y-2z-6}{\sqrt{30}};\\
\overline{\overline{z}} &= \langle (x,y,z)-(1,-1,-1),\overrightarrow{v_3}\rangle = \left\langle (x-1,y+1,z+1),\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\rangle = \frac{x-y+2z}{\sqrt{6}};
\end{aligned}$$

temos, por (44), que:

$$
\begin{aligned}
&3\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\,\frac{2x-z-3}{\sqrt{5}}+\sqrt{5}\,\frac{x-y+2z}{\sqrt{6}}\right)^2+4\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\,\frac{x+5y+2z+6}{\sqrt{30}}+\frac{\sqrt{30}}{2}\,\frac{x-y+2z}{\sqrt{6}}\right)^2\\
&=60\left(\frac{x-y+2z}{\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2\\
\iff\ &\frac{3}{30}\,(3(2x-z-3)+5(x-y+2z))^2+\frac{4\times 6}{30\times 4}\,(-(x+5y+2z+6)+5(x-y+2z))^2\\
&=\frac{60}{6\times 4}\,(2(x-y+2z)-6)^2\\
\iff\ &\frac{1}{10}\,(11x-5y+7z-9)^2+\frac{1}{5}\,(4x-10y+8z-6)^2=\frac{5}{2}\,(2x-2y+4z-6)^2\\
\iff\ &(11x-5y+7z-9)^2+2\,(4x-10y+8z-6)^2=25\,(2x-2y+4z-6)^2
\end{aligned}
$$

é a equação cartesiana da superfície S nas coordenadas x, y, z. $\square$

Exemplo 13

Determine as equações cartesianas das superfícies que descrevem os lugares geométricos abaixo e faça um esboço.

(a) *Lugar geométrico de um ponto que se move de maneira que sua distância ao plano XY é sempre igual à metade do quadrado de sua distância ao eixo$-$OY.*

Solução.

Seja $P=(x,y,z)$ um ponto do espaço. Como o plano XY é o plano $z=0$ e o ponto $P'=(0,y,0)$ do eixo$-$OY é tal que:

$$\overrightarrow{P'P}=(x,y,z)-(0,y,0)=(x,0,z)$$

é perpendicular ao eixo$-$OY ($\parallel (0,1,0)$), temos que:

$$d(P,\pi)=|z| \qquad \text{e} \qquad d(P,\text{eixo}-OY)=\left\|\overrightarrow{P'P}\right\|=\sqrt{x^2+z^2}\,.$$

Logo um ponto $P=(x,y,z)$ pertence a S se, e só se,

$$|z|=\frac{1}{2}(x^2+z^2)\iff x^2+z^2-2|z|=0\,.$$

Observe que se $z\geq 0$, então

$$x^2+z^2-2z=0\iff x^2+(z-1)^2=1\,,$$

e se $z\leq 0$, então

$$x^2+z^2+2z=0\iff x^2+(z+1)^2=1\,.$$

Note também que se $x^2+(z-1)^2=1$, então $(z-1)^2\leq 1$, ou seja, $0\leq z\leq 2$, e se $x^2+(z+1)^2=1$, então $(z+1)^2\leq 1$, isto é, $-2\leq z\leq 0$.

Assim, $S=S_1\cup S_2$, onde $S_1: x^2+(z-1)^2=1$ é o cilindro circular reto de raio 1 cujo eixo é a reta

$$r_1=\{(0,0,1)+t(0,1,0)\mid t\in\mathbb{R}\}$$

paralela ao eixo$-OY$ que passa pelo ponto $(0,0,1)$, e $S_2 : x^2 + (z+1)^2 = 1$ é o cilindro circular reto de raio 1 cujo eixo é a reta

$$r_2 = \{(0,0,-1) + t(0,1,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

paralela ao eixo$-OY$ que passa pelo ponto $(0,-1,0)$. Ver figura 28. □

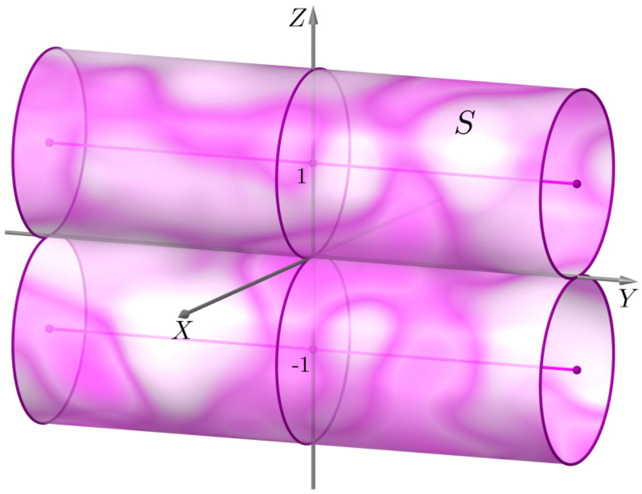

Fig. 28: Superfície S união de dois cilindros

(b) *Lugar geométrico dos pontos do espaço cuja distância ao plano $\pi : y = 0$ é inversamente proporcional à sua distância ao eixo$-OY$.*

Solução.

Seja $k > 0$ tal que

$$S = \left\{ P \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, d(P,\pi) = \frac{k}{d(P, \text{eixo} - OY)} \right\}$$

Então um ponto $P = (x,y,z)$ pertence a S se, e só se,

$$|y| = \frac{k}{\sqrt{x^2+z^2}} \iff y^2(x^2+z^2) = k^2\,. \tag{45}$$

Para fazer um esboço de S, devemos conhecer as seções planas $S \cap \{y = c\}$, $c \in \mathbb{R}$, e a seção plana $S \cap \{x = 0\}$.

Temos que:

$$\gamma_c = S \cap \{y = c\} : \begin{cases} x^2 + z^2 = \left(\dfrac{k}{c}\right)^2 \\ y = c \end{cases}$$

é um círculo de centro $(0,c,0)$ e raio $\dfrac{k}{|c|}$, contido no plano $y = c$, se $c \neq 0$, e $S \cap \{y = 0\} = \varnothing$.

Note que o raio $\dfrac{k}{|c|}$ tende a zero quando c tende a $\pm\infty$, e tende a $+\infty$ quando c tende a zero pela direita ou pela esquerda, ou seja,

$$\lim_{c \to \pm\infty} \frac{k}{|c|} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{c \to 0^\pm} \frac{k}{|c|} = +\infty$$

Fazendo $x = 0$ na equação (45), obtemos que:

$$S \cap \{x = 0\} = \begin{cases} y^2z^2 = k^2 \\ k = 0 \end{cases} = \gamma_k \cup \gamma_{-k}\,,$$

onde

$$\gamma_k : \begin{cases} yz = k \\ x = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \gamma_k : \begin{cases} yz = -k \\ x = 0 \end{cases}$$

são duas hipérboles com centro na origem cujas assíntotas são os eixos OY e OZ

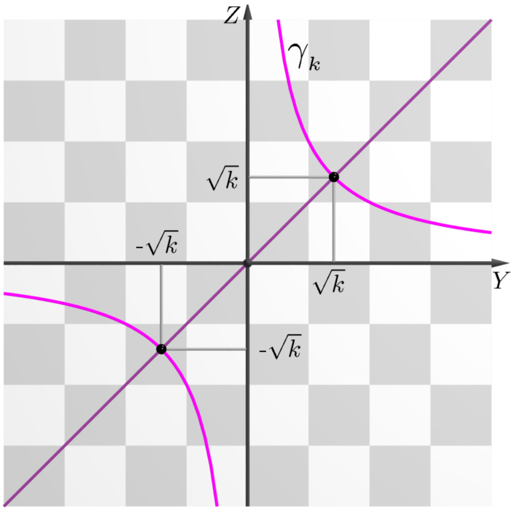

Fig. 29: Hipérbole γ_k (aqui tomamos $k = 2$)

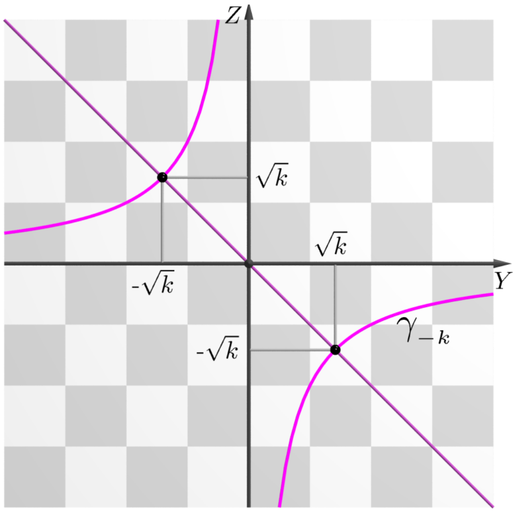

Fig. 30: Hipérbole γ_{-k} (aqui tomamos $k = 2$)

A reta-focal de γ_k é a reta $\{(0, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ e os pontos $\left(0, \sqrt{k}, \sqrt{k}\right)$ e $\left(0, -\sqrt{k}, -\sqrt{k}\right)$ são seus vértices, e a reta-focal de γ_{-k} é a reta $\{(0, t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ e os pontos $\left(0, \sqrt{k}, -\sqrt{k}\right)$ e $\left(0, -\sqrt{k}, \sqrt{k}\right)$ são seus vértices (verifique fazendo uma rotação de 45^o nos eixos OY e OZ).

Juntando as informações acima, podemos fazer um esboço de S. Veja a figura 31.

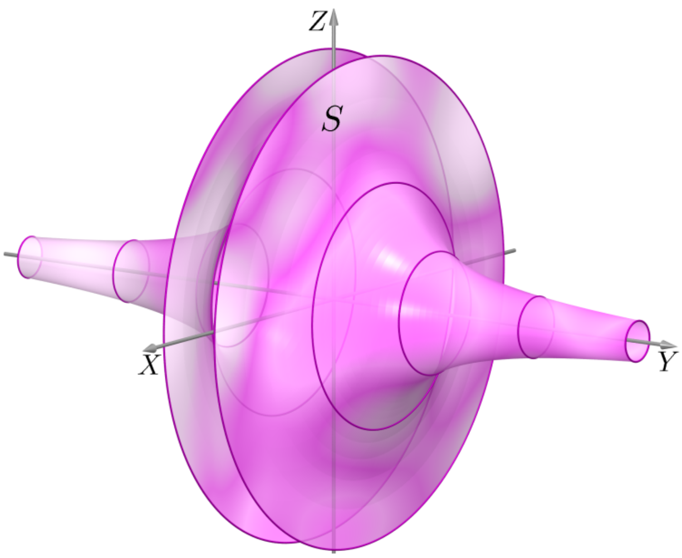

Fig. 31: Superfície S gerada com $k = 2$ $\square$

(c) *Lugar geométrico dos pontos do espaço cuja distância ao plano $\pi : y = 0$ é diretamente proporcional à sua distância ao eixo$-OY$.*

Solução.
Seja $k > 0$ tal que

$$S = \left\{ P \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, d(P,\pi) = k\, d(P, \text{eixo} - OY) \right\}.$$

Então um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a S se, e só se,

$$|y| = k\sqrt{x^2+z^2} \iff y^2 = k^2(x^2+z^2) \iff x^2+z^2 = \frac{1}{k^2}y^2,$$

que representa um cone circular reto cujo eixo é o eixo$-OY$ e cujas geratrizes fazem um ângulo θ com o seu eixo, onde tg $\theta = \dfrac{1}{k}$.

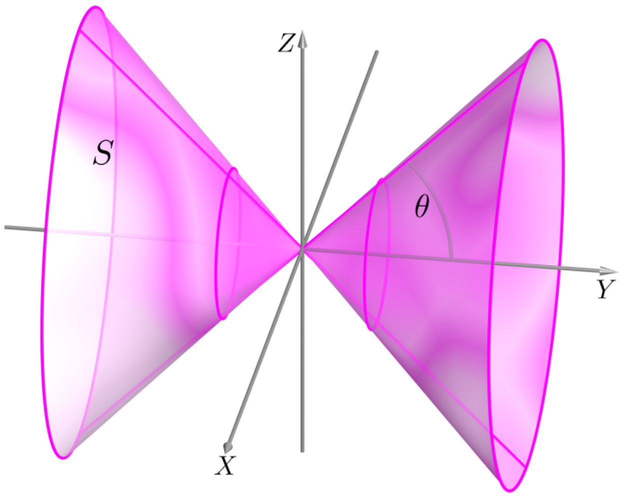

Fig. 32: Superfície S, tg $\theta = 1/k$ □

(d) *Lugar geométrico de um ponto que se move de maneira que sua distância ao eixo$-OY$ é sempre igual à sua distância ao plano $\pi : x - z = 1$.*

Solução.
Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a S se, e só se,

$$\begin{aligned} d(P,\pi) = d(P, \text{eixo} - OY) &\iff \frac{|x-z-1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{x^2+z^2} \\ &\iff (x-z-1)^2 = 2(x^2+z^2) \\ &\iff x^2 - 2xz + z^2 - 2x + 2z + 1 = 2x^2 + 2z^2 \\ &\iff x^2 + 2xz + z^2 + 2x - 2z - 1 = 0\,. \end{aligned} \tag{46}$$

Como a equação (46) não depende da variável y, S é um cilindro com geratrizes paralelas ao vetor $\overrightarrow{v} = (0, 1, 0)$, sendo a cônica

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + 2xz + z^2 + 2x - 2z - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

uma de suas diretrizes.

Sendo $A = C = 1$, $B = 2$, $D = 2$, $E = -2$ e $F = -1$ na cônica acima, sabemos que ao girarmos os eixos OX e OZ de um ângulo de 45^o no sentido positivo, mantendo-se o eixo$-OY$ fixo, obtemos um novo sistema de eixos ortogonais $O\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$, no qual

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} - \overline{z}) \\ y = \overline{y} \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} + \overline{z}) \end{cases}, \qquad \begin{cases} \overline{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + z) \\ \overline{y} = y \\ \overline{z} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + z) \end{cases},$$

e

$$\overline{\gamma} : \begin{cases} \overline{A}\,\overline{x}^2 + \overline{C}\,\overline{z}^2 + \overline{D}\,\overline{x} + \overline{E}\,\overline{z} - 1 = 0 \\ \overline{y} = 0 \end{cases},$$

onde:

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \overline{D} \\ \overline{E} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Assim, a curva

$$\overline{\gamma} : \begin{cases} 2\overline{x}^2 - 2\sqrt{2}\overline{z} = 1 \\ \overline{y} = 0 \end{cases} \iff \overline{\gamma} : \begin{cases} 2\overline{x}^2 = 2\sqrt{2}\overline{z} + 1 = 2\sqrt{2}\left(\overline{z} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \\ \overline{y} = 0 \end{cases} \iff \overline{\gamma} : \begin{cases} \overline{x}^2 = \sqrt{2}\left(\overline{z} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \\ \overline{y} = 0 \end{cases},$$

representa uma parábola contida no plano $\overline{y} = 0$, de vértice $\overline{V} = \left(0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ e reta-focal igual ao eixo$-O\,\overline{Z} = \{(0,0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Logo γ é uma parábola contida no plano $y = 0$, de vértice no ponto

$$\begin{aligned} V &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(0 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right), 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\left(0 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}\right), \end{aligned}$$

sendo $\{(-t, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ a sua reta-focal.

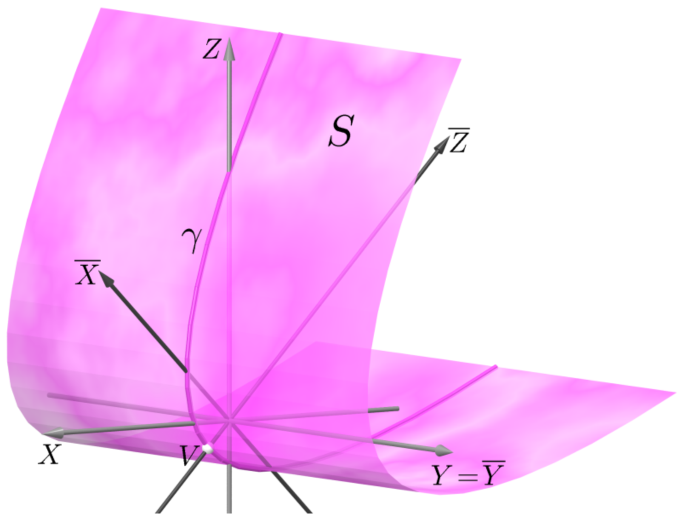

Fig. 33: Superfície S e diretriz γ

A superfície S é, portanto, um cilindro parabólico com geratrizes paralelas ao eixo$-OY$ (veja a figura 28). □