Aula 8

Superfícies Regradas

Dizemos que uma superfície S é *regrada* quando por todo ponto P pertencente a S passa pelo menos uma reta r_P inteiramente contida em S.

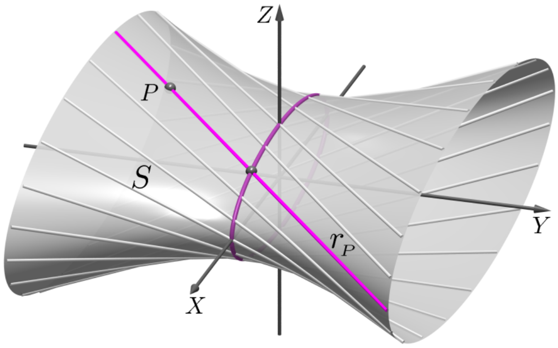

Fig. 1: Superfície regrada S, $P \in S$ e $r_P \subset S$ é uma reta que passa por P

Observação 1

• Toda superfície cilíndrica é uma superfície regrada gerada por uma família de retas paralelas.

Reciprocamente, toda superfície regrada S gerada por uma família de retas paralelas ao vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ é uma superfície cilíndrica.

De fato, basta tomar como diretriz a curva $S \cap \pi$, onde π é um plano perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v}$, e geratrizes paralelas ao vetor $\overrightarrow{v}$.

• Toda superfície cônica é uma superfície regrada gerada por uma família de retas concorrentes. Mas nem toda superfície regrada gerada por uma família de retas concorrentes é uma superfície cônica.

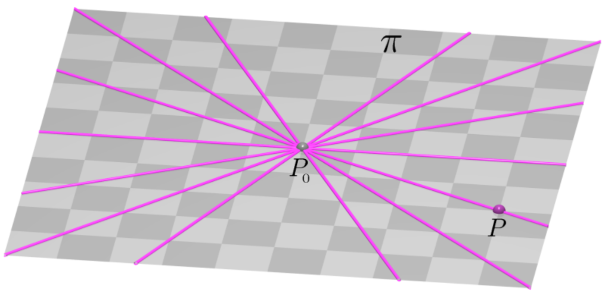

Fig. 2: Plano π, uma superfície regrada que não é cônica

Com efeito, um plano π em $\mathbb{R}^3$ é uma superfície regrada gerada por uma família de retas concorrentes, mas não é uma superfície cônica. De fato, se π fosse uma superfície cônica, existiria um ponto $V \in \pi$, que seria o vértice de π, e um plano π', com $V \notin \pi'$, tal que $\pi \cap \pi'$ seria uma das diretrizes de π. Como $\pi \cap \pi' = r$ é uma reta, teríamos

$$\pi = \left\{ V + t\overrightarrow{VP} \;\middle|\; P \in r \;\text{ e }\; t \in \mathbb{R} \right\} = \pi - (r' - \{V\}) \,,$$

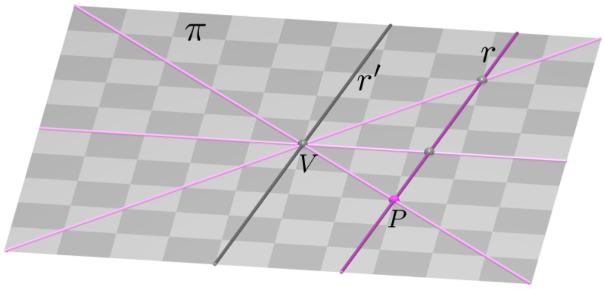

Fig. 3: Plano π e $r' \not\subset \pi$?

onde r' é a reta paralela à reta r que passa pelo vértice V, obtendo assim, uma contradição.

Exemplo 1

Seja S a superfície cuja interseção com os planos $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, são as curvas $y = \lambda x^2$. Mostre que S é uma superfície regrada e determine sua equação cartesiana e suas equações paramétricas. Faça também um esboço.

Solução.

Sendo

$$S \cap \{z = \lambda\} : \begin{cases} y = \lambda x^2 \\ z = \lambda \,, \end{cases}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, obtemos que

$$y = zx^2 \tag{1}$$

é a equação cartesiana de S.

Fazendo $x = k$ na equação (1), vemos que as retas

$$r_k : \begin{cases} y = k^2 z \\ x = k \end{cases}$$

geram a superfície S. Como o plano $\pi_{1k} : y - k^2 z = 0$ é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v_{1k}} = (0, 1, -k^2)$ e o plano $\pi_{2k} : x = k$ é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v_{2k}} = (1, 0, 0)$, temos que a reta r_k é paralela ao vetor

$$\overrightarrow{v_{1k}} \times \overrightarrow{v_{2k}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -k^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -k^2, -1) \parallel (0, k^2, 1)$$

Além disso, o ponto $A_k = (k, 0, 0) \in r_k$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

Como

$$r_k : \begin{cases} x(t) = k \\ y(t) = k^2 t \\ z(t) = t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização da reta r_k, obtemos que:

$$S : \begin{cases} x(k,t) = k \\ y(k,t) = k^2 t \\ z(k,t) = t \end{cases} \quad ; \quad k, t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização da superfície regrada S (ver figura 4). □

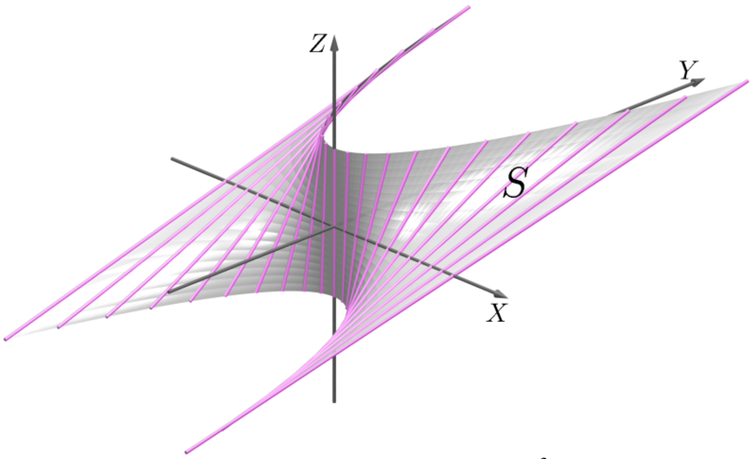

Fig. 4: Superfície regrada $S : y = zx^2$

Exemplo 2

Determine a equação cartesiana da superfície regrada S *gerada por uma reta que se move de modo que é sempre paralela ao plano* YZ *e intersecta as curvas*

$$\gamma : \begin{cases} y^2 = x \\ z = 0 \end{cases} \qquad e \qquad \beta : \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Solução.

A curva $\gamma : \begin{cases} y^2 = x \\ z = 0 \end{cases}$ é uma parábola no plano $z = 0$, de vértice na origem e eixo-focal=eixo$-OX$, e a curva $\beta : \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ é uma reta no plano $y = 0$, que passa pelos pontos $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

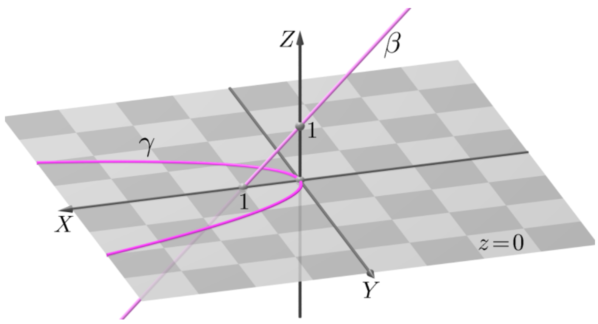

Fig. 5: Curvas γ e β no espaço

Por hipótese, as retas que geram a superfície S estão contidas nos planos $\pi_k : x = k$, $k \in \mathbb{R}$, paralelos ao plano YZ.

Como as retas devem intersectar a parábola γ contida no semi-plano $x \geq 0$, vemos que $k \geq 0$.

Sendo $\pi_k \cap \gamma = \left\{ P_k^+ = (k, \sqrt{k}, 0)\,,\ P_k^- = (k, -\sqrt{k}, 0) \right\}$ e $\pi_k \cap \beta = \{(k, 0, 1-k)\}$, temos que $\pi_k \cap S$ consiste de duas retas:

$$r_k^{\pm} : \begin{cases} (1-k)y \pm \sqrt{k}\,z = \pm(1-k)\sqrt{k} \\ x = k \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (1-x)y \pm \sqrt{x}\,z = \pm(1-x)\sqrt{x} \quad &\Longleftrightarrow \quad (1-x)y = \pm\sqrt{x}(1-x-z) \\ &\Longleftrightarrow \quad (1-x)^2y^2 = x(1-x-z)^2 \end{aligned}$$

é a equação cartesiana e

$$S : \begin{cases} x(s,t) = s^2 \\ y(s,t) = s\,t + s \\ z(s,t) = -t(1-s^2) \end{cases} \quad ; \quad s \in \mathbb{R}\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

é uma parametrização da superfície regrada S, cujo esboço mostramos na figura 6 abaixo. □

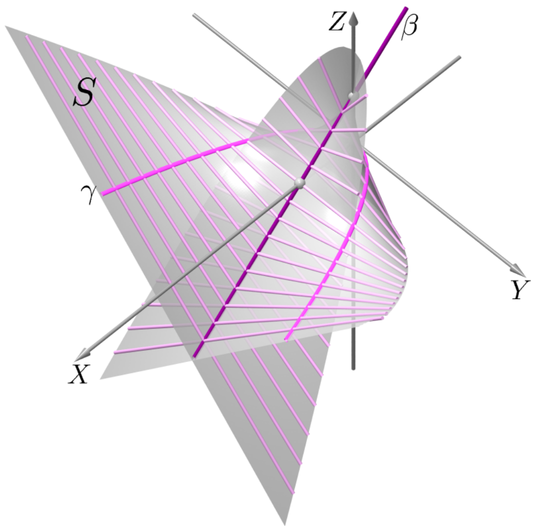

Fig. 6: Superfície regrada $S : (1-x)^2y^2 = x(1-x-z)^2$

Exemplo 3

Em cada um dos itens abaixo, determine a equação cartesiana da superfície regrada S gerada pela família de retas dada. Para cada uma das famílias, determine, caso exista, os pontos que satisfazem a equação cartesiana encontrada, mas que não pertencem à superfície S.

(a) $r_k : \begin{cases} kx + 2ky - 4 = 0 \\ x - 2y - k = 0 \end{cases} \quad ; \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}.$

Solução.
Fazendo $k = x - 2y$ em $k(x + 2y) = 4$, obtemos que:

$$(x-2y)(x+2y) = 4 \Longleftrightarrow x^2 - 4y^2 = 4$$

é a equação cartesiana de S.

Logo S é um cilindro com geratrizes paralelas ao eixo$-OZ$, sendo a hipérbole

$$\gamma : \begin{cases} x^2 - 4y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma : \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

uma de suas diretrizes. □

(b) $r_k : \begin{cases} x - 3y + 3kz = 3k \\ kx - y + 2kz = 2 \end{cases} \quad ; \quad k \in \mathbb{R}\,.$

Solução.

Seja $P = (x, y, z)$ um ponto pertencente a S.

Sendo $x - 3y = 3k - 3kz = 3k(1 - z)$ e $k(x + 2z) = 2 + y$, obtemos que se $z \neq 1$, então $P = (x, y, z) \in S$ se, e só se,

$$\frac{x - 3y}{3 - 3z}(x + 2z) = 2 + y \iff (x - 3y)(x + 2z) = (2 + y)(3 - 3z) \tag{2}$$

$$\iff x^2 + 2xz - 3xy - 6yz = 6 - 6z + 3y - 3yz$$

$$\iff x^2 - 3xy + 2xz - 3yz + 6z - 3y - 6 = 0\,. \tag{3}$$

Observe que:

• se $P = (x, y, z) \in S$ e $z = 1$, então $x - 3y = 3k(1 - 1) = 0$, ou seja, P é da forma $(3y, y, 1)$, que, por (2), satisfaz a equação (3).

• se $P = (x, y, 1)$ satisfaz a equação (3), então, por (2),

$$(x - 3y)(x + 2z) = 0 \iff x = 3y \text{ ou } x = -2z = -2\,.$$

Ou seja,

$$S' \cap \{z = 1\} = \{(3y, y, 1) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(-2, y, 1) \mid y \in \mathbb{R}\},$$

onde S' é a superfície dada pela equação (3).

Vamos agora determinar os pontos da forma $(3y, y, 1)$ ou da forma $(-2, y, 1)$, $y \in \mathbb{R}$, que pertençem a alguma das retas r_k, $k \in \mathbb{R}$.

• Um ponto $(3y, y, 1)$, $y \in \mathbb{R}$, pertence a uma das retas r_k se, e só se,

$$\begin{cases} 3y - 3y = 0 = 3k(1 - 1) \\ k(3y + 2) = 2 + y \end{cases} \iff y \neq -\frac{2}{3}\,.$$

Ou seja, um ponto da forma $P = (3y, y, 1)$ pertence a S se, e só se, $y \neq -\dfrac{2}{3}$, ou seja, se, e só se, $P \neq \left(-2, -\dfrac{2}{3}, 1\right)$. Neste caso, $P \in r_k$, onde $k = \dfrac{2 + y}{3y + 2}$.

• Um ponto $P = (-2, y, 1)$ pertence a S se, e só se, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$-2 - 3y = 3k(1 - 1) = 0 \tag{4}$$

$$k(-2 + 2) = 2 + y\,. \tag{5}$$

Como, por (4), $y = -\frac{2}{3}$ e, por (5),

$$k \cdot 0 \neq 2 - \frac{2}{3};$$

nenhum ponto da forma $(-2, y, 1)$ pertence a S. Observe que para $y = -\frac{2}{3}$,

$$P = \left(-2, -\frac{2}{3}, 1\right).$$

Logo,

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x - 3y)(x + 2z) = (2 + y)(3 - 3z) \right\} - \{(-2, y, 1) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

A reta $r = \{(-2, y, 1) \mid y \in \mathbb{R}\}$ corresponde à reta

$$r_\infty : \begin{cases} x = -2 \\ z = 1 \end{cases},$$

que é o limite das retas

$$r_k : \begin{cases} x - 3y = 3k(1 - z) \\ k(x + 2z) = y + 2 \end{cases} \iff r_k : \begin{cases} 1 - z = \frac{1}{3k}(x - 3y) \\ x + 2z = \frac{1}{k}(y + 2) \end{cases},$$

quando k tende a $+\infty$. $\square$

(c) $r_k : \begin{cases} x + y - ky = 0 \\ x + kz = 0 \end{cases}$; $k \in \mathbb{R}$.

Solução.

Seja $P = (x, y, z)$ um ponto pertencente à superfície S gerada pela família de retas

$$r_k : \begin{cases} x + (1 - k)y = 0 \\ x + kz = 0 \end{cases}. \tag{6}$$

Sendo $x + kz = 0$ e $ky = x + y$, temos que se $y \neq 0$, então $P = (x, y, z)$ pertence à superfície S se, e só se,

$$x + \frac{x + y}{y} z = 0 \iff xy + xz + yz = 0. \tag{7}$$

Observe que:

• se $P = (x, y, z) \in S$ e $y = 0$, então, por (6), P é da forma $(0, 0, z)$, que satisfaz a equação (7).

• se $P = (x, y, z)$ satisfaz a equação e $y = 0$, então $xz = 0 \iff x = 0$ ou $z = 0$. Ou seja, P pertence à reta $\{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ ou à reta $\{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Seja S' a superfície dada pela equação (7). Já sabemos que $S \subset S'$.

Vamos seterminar os pontos da forma $(x, 0, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, ou da forma $(0, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$, pertencentes a $S' \cap \{y = 0\}$, que também pertencem à superfície S.

• Um ponto $(x, 0, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, pertence a uma das retas r_k se, e só se,

$$\begin{cases} x + (1-k)y = 0 \\ x + kz = 0 \end{cases} \iff x = 0\,.$$

Ou seja, apenas a origem $(0, 0, 0)$ pertence a S e ao eixo$-OX$.

• Um ponto $(0, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$, está contido em uma das retas r_k se, e só se,

$$\begin{cases} x + (1-k)y = 0 \\ x + kz = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 + 0 = 0 \\ 0 + kz = 0 \end{cases} \iff z = 0 \text{ ou } k = 0\,.$$

Logo todos os pontos da forma $(0, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$, pertencem à reta

$$r_0 : \begin{cases} x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff r_0 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}\,.$$

Assim,

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, xy + xz + yz = 0 \right\} - \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R} - \{0\}\}\,. \quad \square$$

Exemplo 4

Seja S a superfície regrada gerada pela família de retas:

$$r_\lambda : \begin{cases} x + \lambda y + z = \lambda \\ \lambda y + z = 1 \end{cases} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

(a) *Determine a equação cartesiana e as equações paramétricas da superfície S.*

(b) *Mostre que $\gamma = S \cap \pi$ é uma parábola com vértice no ponto $(-1, 0, 1)$, onde π é o plano $y - x = 1$.*

(c) *Mostre que cada reta r_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, que gera a superfície S, intersecta a curva γ num único ponto.*

Solução.

(a) Como $\lambda y + z = 1$ e $x + (\lambda y + z) = \lambda$, temos que $\lambda = x + 1$. Portanto,

$$(x+1)y + z = 1 \iff xy + y + z = 1$$

é a equação cartesiana de S.

Sejam os planos $\pi_{1\lambda} : x + \lambda y + z = \lambda$ e $\pi_{2\lambda} : \lambda y + z = 1$ perpendiculares, respectivamente, aos vetores $\overrightarrow{v_{1\lambda}} = (1, \lambda, 1)$ e $\overrightarrow{v_{2\lambda}} = (0, \lambda, 1)$. Como $r_\lambda = \pi_{1\lambda} \cap \pi_{2\lambda}$, temos que

$$r_\lambda \parallel \overrightarrow{v_{1\lambda}} \times \overrightarrow{v_{2\lambda}} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, \lambda)\,.$$

Além disso,

$$A = (x, 0, z) \in r_\lambda \iff z = 1 \text{ e } x + z = \lambda \iff z = 1 \text{ e } x = \lambda - 1\,.$$

Logo,

$$r_\lambda : \begin{cases} x(t) = \lambda - 1 \\ y(t) = -t \\ z(t) = \lambda t + 1 \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

é uma parametrização da reta r_λ, e

$$S : \begin{cases} x(\lambda, t) = \lambda - 1 \\ y(\lambda, t) = -t \\ z(\lambda, t) = \lambda t + 1 \end{cases} \quad ; \quad \lambda, t \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização da superfície regrada S gerada pela família de retas r_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Seja a curva γ dada por

$$\gamma = \pi \cap S : \begin{cases} xy + y + z = 1 \\ y - x = 1 \end{cases}$$

Por uma rotação de um ângulo de 45^o, no sentido positivo, dos eixos OX e OY, mantendo-se o eixo$-OZ$ fixo, obtemos um novo sistema de eixos ortogonais $O\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$, no qual:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} - \overline{y}) \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} + \overline{y}) \\ z = \overline{z} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ \overline{y} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) \\ \overline{z} = z \end{cases} \,.$$

A equação $xy + y + z = 1$ nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ é dada por:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} - \overline{y})(\overline{x} + \overline{y}) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = 1 \\ \iff & \frac{1}{2}\overline{x}^2 - \frac{1}{2}\overline{y}^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{y} + \overline{z} = 1 \\ \iff & \frac{1}{2}(\overline{x}^2 + \sqrt{2}\overline{x}) - \frac{1}{2}(\overline{y}^2 - \sqrt{2}\overline{y}) = 1 - \overline{z} \\ \iff & \frac{1}{2}\left(\overline{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\overline{y} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \overline{z} + \frac{2}{8} - \frac{2}{8} = 1 - \overline{z} \\ \iff & \left(\overline{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\overline{y} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 - 2\overline{z}\,. \end{aligned}$$

Além disso, como o plano $y - x = 1$ nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ é

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} + \overline{y}) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} - \overline{y}) = 1 \iff \sqrt{2}\,\overline{y} = 1 \iff \overline{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

temos que a curva γ, nessas coordenadas, é a parábola:

$$\gamma : \begin{cases} \left(\overline{x} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\overline{y} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 - 2\overline{z} \\ \overline{y} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \iff \gamma : \begin{cases} \left(\overline{x} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -2(\overline{z} - 1) \\ \overline{y} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \,,$$

de vértice $\overline{V} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ e eixo-focal paralelo ao eixo$-O\overline{Z}$ =eixo$-OZ$.

O vértice V, nas coordenadas x, y, z, é o ponto

$$V = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right), 1\right) = (-1, 0, 1)\,.$$

(c) Seja $P = (\lambda - 1, -t, \lambda t + 1)$ um ponto da reta r_λ. Como $r_\lambda \subset S$ e $\gamma = S \cap \pi$, temos que $P \in \gamma$ se, e só se, $P \in \pi$, ou seja, se, e só se,

$$-t - \lambda + 1 = 1 \iff t = -\lambda\,.$$

Logo $r_\lambda \cap \gamma = \{(\lambda - 1, \lambda, -\lambda^2 + 1)\}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Exemplo 5

Considere a superfície $S : x^3y + xy + xz + x + y = 0\,.$

(a) *Mostre que S é uma superfície regrada.*

(b) *Parametrize a superfície S.*

(c) *Determine a equação paramétrica de uma reta contida em S que passa pelo ponto $P_0 = (-1, -1, 0) \in S$.*

Solução.

(a) Fazendo $x = k$, $k \in \mathbb{R}$, na equação de S, obtemos que S é gerada pela família de retas:

$$r_k : \begin{cases} k^3y + ky + kz + k + y = 0 \\ x = k \end{cases}$$

(b) Como os planos $\pi_{1k} : (k^3 + k + 1)y + kz = -k$ e $\pi_{2k} : x = k$ são perpendiculares, respectivamente, aos vetores $\overrightarrow{v_{1k}} = (0, k^3 + k + 1, k)$ e $\overrightarrow{v_{2k}} = (1, 0, 0)$, vemos que a reta r_k é paralela ao vetor

$$\overrightarrow{v_{1k}} \times \overrightarrow{v_{2k}} = \begin{pmatrix} 0 & k^3 + k + 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, k, -k^3 - k - 1)\,.$$

Além disso, a reta r_k intesecta o plano $y = 0$ no ponto $(k, 0, -1)$.

Logo,

$$S : \begin{cases} x(k,t) = k \\ y(k,t) = kt \\ z(k,t) = -1 - t(k^3 + k + 1) \end{cases} \quad ; \quad k, t \in \mathbb{R}\,,$$

é uma paremetrização da superfície regrada S.

(c) Seja $P_0 = (-1, -1, 0) \in S$. Como $P_0 \in r_k$, para algum $k \in \mathbb{R}$, e $x = -1$, devemos ter $k = -1$. Assim, $P_0 \in r_{-1}$, cujas equações paramétricas são:

$$r_{-1} : \begin{cases} x(t) = -1 \\ y(t) = -t \\ z(t) = -1 + t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,. \ \square$$

Exemplo 6

Verifique que cada uma das equações abaixo representa uma superfície cilíndrica S, mostrando que S é uma superfície regrada gerada por uma família de retas paralelas.

(a) $S : y^2 - x - z - 1 = 0$.

Solução.
Fazendo $y = k$, $k \in \mathbb{R}$, na equação acima, vemos que S é uma superfície regrada gerada pela família de retas

$$r_k : \begin{cases} x + z = k^2 - 1 \\ y = k\,. \end{cases}$$

Como, para todo $k \in \mathbb{R}$, a reta r_k é paralela ao vetor

$$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1, 0, 1)\,,$$

onde $\overrightarrow{v_1}$ é um vetor perpendicular ao plano $x + z = k^2 - 1$ e $\overrightarrow{v_2}$ é um vetor perpendicular ao plano $y = k$, obtemos que S é uma superfície cilíndrica, sendo a parábola

$$\gamma : \begin{cases} y^2 = z + 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

uma de suas diretrizes, pois o vetor $(-1, 0, 1)$ não é paralelo ao plano $x = 0$. □

(b) $S : x^2 + z^2 - 2xz - y + z = 0$.

Solução.
Por uma rotação de um ângulo de 45^o, no sentido positivo, dos eixos OX e OZ, mantendo-se o eixo$-OY$ fixo, obtemos um novo sistema de eixos ortogonais $O\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$, no qual:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} - \overline{z}) \\ y = \overline{y} \\ z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} + \overline{z}) \end{cases} \quad (8) \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x + z) \\ \overline{y} = y \\ \overline{z} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x + z) \end{cases} \quad (9)$$

Por (8):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\overline{x} - \overline{z})^2 + \frac{1}{2}(\overline{x} + \overline{z})^2 - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} - \overline{z})(\overline{x} + \overline{z}) - \overline{y} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} + \overline{z}) = 0 \\ \iff\ & \frac{1}{2}\overline{x}^2 - \overline{x}\overline{z} + \frac{1}{2}\overline{z}^2 + \frac{1}{2}\overline{x}^2 + \overline{x}\overline{z} + \frac{1}{2}\overline{z}^2 - \overline{x}^2 + \overline{z}^2 - \overline{y} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} + \overline{z}) = 0 \\ \iff\ & 2\overline{z}^2 - \overline{y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{z} = 0\,, \end{aligned} \quad (10)$$

é a equação da superfície nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$.

Fazendo $\overline{z}=k$, $k\in\mathbb{R}$, na equação (10), obtemos que S é gerada pela família de retas:

$$r_k:\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{x}+\overline{y}=2k^2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}k\\ \overline{z}=k\end{cases}. \tag{11}$$

Sendo $\pi_{1k}:-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{x}+\overline{y}=2k^2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}k$ um plano perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v_{1k}}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1,0\right)$ e π_{2k} : $\overline{z}=k$ um plano perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v_{2k}}=(0,0,1)$, vemos que todas as retas $r_k=\pi_{1k}\cap\pi_{2k}$ são paralelas ao vetor

$$\overrightarrow{v_{1k}}\times\overrightarrow{v_{2k}}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2},0\right).$$

Logo S é uma superfície cilíndrica cujas geratrizes são, por (8), paralelas ao vetor:

$$\overrightarrow{v}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\parallel(1,1,1),$$

sendo a parábola

$$\gamma:\begin{cases}2\overline{z}^2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{z}=\overline{y}\\ \overline{x}=0\end{cases}\iff\gamma:\begin{cases}2\left(\overline{z}^2+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\overline{z}\right)=\overline{y}\\ \overline{x}=0\end{cases}$$

$$\iff\gamma:\begin{cases}2\left(\overline{z}+\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^2=\overline{y}+\dfrac{2\times 2}{64}=\overline{y}+\dfrac{1}{16}\\ \overline{x}=0\end{cases}\iff\gamma:\begin{cases}\left(\overline{z}+\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^2=\dfrac{1}{2}\left(\overline{y}+\dfrac{1}{16}\right)\\ \overline{x}=0\end{cases}$$

$$\iff\gamma:\begin{cases}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x+z)+\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^2=\dfrac{1}{2}\left(y+\dfrac{1}{16}\right)\\ x+z=0\end{cases}\iff\gamma:\begin{cases}\left(-x+z+\dfrac{1}{4}\right)^2=\left(y+\dfrac{1}{16}\right)\\ x+z=0\end{cases}$$

uma de suas diretrizes.

Como, por (11), o ponto $\left(0,2k^2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}k,k\right)$, nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, pertence a r_k, temos, por (8), que o ponto

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}k,2k^2+\frac{\sqrt{2}}{2}k,\frac{\sqrt{2}}{2}k\right),$$

nas coordenadas x, y, z, é um ponto da reta r_k.

Logo a superfície cilíndrica S é gerada pela família de retas paralelas:

$$r_k:\begin{cases}x_k(t)=t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}k\\ y_k(t)=t+2k^2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}k\\ z_k(t)=t+\dfrac{\sqrt{2}}{2}k\end{cases},\quad k\in\mathbb{R}.\ \square$$

Exemplo 7

Mostre que a superfície

$$S : x^3y - 4xy + z + x = 0$$

representa uma superfície regrada que não é cilíndrica.

Solução.

Fazendo $x = k$, $k \in \mathbb{R}$, na equação acima, obtemos que S é uma superfície regrada gerada pela família de retas:

$$r_k : \begin{cases} (k^3 - 4k)y + z = -k \\ x = k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}\,.$$

Vamos agora provar que S não é uma superfície cilíndrica. Para isso, não basta mostrar que as retas r_k não são paralelas, pois poderia existir uma outra família de retas paralelas gerando S.

Seja

$$\ell = \{(at, bt, ct) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

uma reta passando pelo ponto $P_0 = (0, 0, 0)$ pertencente a S.

A reta ℓ está contida em S se, e só se, $a^3bt^4 - 4abt^2 + ct + at = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Logo $a^3b = 0$, $ab = 0$ e $a + c = 0$, ou seja, $a = 0 = c$ e $b \neq 0$ ou $b = 0$ e $c = -a \neq 0$.

Provamos, assim, que pelo ponto $P_0 = (0, 0, 0)$ passam exatamente duas retas,

$$\ell_1 = r_0 = \{(0, t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad \ell_2 = \{(t, 0, -t) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

inteiramente contidas em S.

Seja $Q_0 = (1, 1, 2)$ outro ponto pertencente a S e sejam

$$\ell_3 = \{(1, t + 1, 2) \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad \ell_4 = \{(t + 1, 1, -t + 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

as retas paralelas às retas ℓ_1 e ℓ_2, respectivamente, que passam por Q_0.

As retas ℓ_3 e ℓ_4 não estão contidas em S, pois:

- $1(t + 1) - 4 \times 1\,(t + 1) + 2 + 1 = 0 \iff -3t - 3 + 3 = 0 \iff t = 0$
- $(t + 1)^3 \times 1 - 4(t + 1) \times 1 - t + 2 + t + 1 = 0 \iff (t + 1)^3 - 4t - 1 = 0$

  $\iff t^3 + 3t^2 + 3t + 1 - 4t - 1 = 0 \iff t^3 + 3t^2 - t = 0 \iff t(t^2 + 3t - 1) = 0$

  $\iff t = 0 \quad \text{ou} \quad t = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 + 4}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}\,.$

Como ℓ_1 e ℓ_2 são as únicas retas contidas em S que passam por P_0 e as retas ℓ_3 e ℓ_4 que passam por Q_0, paralelas, respectivamente, às retas ℓ_1 e ℓ_2, não estão contidas em S, S não é uma superfície cilíndrica. □

Antes de continuarmos com os nossos exemplos, veremos como verificar se uma curva em $\mathbb{R}^3$ é ou não é uma curva plana, usando os recursos da Geometria Analítica.

Exemplo 8

Verifique se as curvas abaixo são ou não são curvas planas. Caso afirmativo, determine o plano no qual a curva está contida.

(a) $\gamma(t) : \begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = a \,\text{sen}\, t \\ z(t) = bt \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,.$

onde a *e* b *são números reais não-nulos.*

Solução.

Note que a curva γ está contida no cilindro circular reto $S : x^2 + y^2 = a^2$, pois $x(t)^2 + y(t)^2 = a^2$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e que, ao realizar uma volta completa, isto é, ao variar o parâmetro t num intervalo do tipo $[t_0, t_0 + 2\pi]$, a terceira coordenada sofre uma variação de $2\pi b$.

O parâmetro t mede o ângulo que o eixo$-OX$ faz com a reta que liga a origem $O = (0, 0, 0)$ à projeção $(\cos t, \text{sen}\, t, 0)$ do ponto $\gamma(t)$ sobre o plano XY.

Esta curva é chamada *hélice circular* de passo $2\pi b$.

Suponhamos que a hélice acima é uma curva plana, ou seja, que existe um plano

$$\pi : Ax + By + Cz = D, \quad (A, B, C) \neq (0, 0, 0),$$

tal que $\gamma(t) \in \pi$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

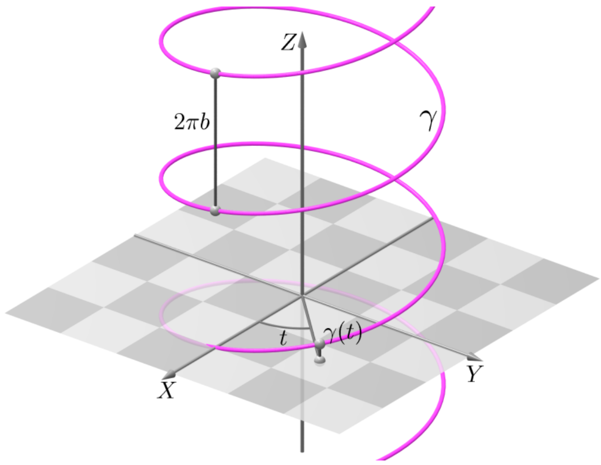

Fig. 7: Hélice circular de passo $2\pi b$ e raio a

Como

$$aA\cos t + aB \,\text{sen}\, t + bCt = D\,,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, obtemos:

$$\begin{aligned} aA &= D & (12)\\ aB + \frac{\pi bC}{2} &= D & (13)\\ -aA + \pi bC &= D & (14)\\ -aB + \frac{3\pi bC}{2} &= D\,, & (15) \end{aligned}$$

fazendo $t = 0$, $t = \dfrac{\pi}{2}$, $t = \pi$ e $t = \dfrac{3\pi}{2}$, respectivamente.

Somando as equações (12) e (14) e as equações (13) e (15), vemos, respectivamente, que:

$$2D = \pi bC \qquad \text{e} \qquad 2D = 2\pi bC\,.$$

Logo, como

$$\pi bC = 2\pi bC - \pi bC = 2D - 2D = 0 \;\text{ e }\; b \neq 0,$$

temos que $C = 0$ e, portanto, $D = 0$.

Além disso, como

$$aA = D = 0\,,\ aB = D - \frac{\pi b C}{2} = 0 \ \text{ e } \ a \neq 0,$$

podemos concluir que $A = B = 0$, um absurdo, pois

$$Ax + By + Cz = D$$

é um plano e $(A, B, C) = (0, 0, 0)$. $\square$

(b) $\gamma(t) : \begin{cases} x(t) = \cos t + \ln t + 1 \\ y(t) = 2\ln t \\ z(t) = 2\cos t \end{cases} \quad ; \quad t \in (0, +\infty)\,.$

Solução.
Seja $\pi : Ax + By + Cz = D\,,\ \ (A, B, C) \neq (0, 0, 0)\,,$ um plano no qual a curva γ está contida, ou seja,

$$A(\cos t + \ln t + 1) + 2B\ln t + 2C\cos t = D \iff (A + 2C)\cos t + (A + 2B)\ln t = D - A\,,$$

para todo $t \in (0, +\infty)$.

Para que isso ocorra, basta tomarmos $A = D = -2C = -2B$, com $B = 1$, por exemplo.

Assim, $\pi : -2x + y + z = -2$ é o plano que contém a curva γ. $\square$

(c) $\gamma(t) : \begin{cases} x(t) = \cos t + 2\cosh t + 1 \\ y(t) = 3\cos t + \cosh t - 1 \\ z(t) = \cosh t - \cos t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,.$

Solução.
Suponhamos que a curva γ está contida no plano

$$\pi : Ax + By + Cz = D\,, \quad (A, B, C) \neq (0, 0, 0)\,,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & A(\cos t + 2\cosh t + 1) + B(3\cos t + \cosh t - 1) + C(\cosh t - \cos t) = D \\ \iff \ & (A + 3B - C)\cos t + (2A + B + C)\cosh t = D - A + B\,, \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Para que isso ocorra, basta achar uma solução não-trivial do sistema

$$\begin{cases} A + 3B - C = 0 \\ 2A + B + C = 0 \\ -A + B + D = 0\,, \end{cases}$$

que é dada por: $(A, B, C) = (1, 3, -1) \times (2, 1, 1) = (4, -3, -5)$ e $D = A - B = 4 + 3 = 7$.

Assim, $\pi : 4x - 3y - 5z = 7$ é o plano que contém a curva γ. $\square$

(d) $\gamma(t) : \begin{cases} x(t) = t\cos t \\ y(t) = 2t\,\text{sen}\, t \\ z(t) = t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,.$

Solução.

Suponhamos que $\gamma \subset \pi : Ax + By + Cz = D$, ou seja,

$$At\cos t + 2Bt\,\text{sen}\, t + Ct = D\,,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Fazendo $t = 0$, $t = 2\pi$, $t = \pi$ e $t = \frac{\pi}{2}$ na equação acima, obtemos, sucessivamente, que:

$$\begin{aligned} &D = 0\,, \\ &2\pi A + 2\pi C = D\,, \\ &-\pi A + \pi C = D\,, \\ &\pi B + \frac{\pi C}{2} = 0\,. \end{aligned}$$

Logo $A = B = C = D = 0$, que é uma contradição, pois $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$.

Observe que esta curva está contida no cone elíptico $x^2 + \frac{y^2}{4} = z^2$ de eixo$-OZ$ (ver figura 8). □

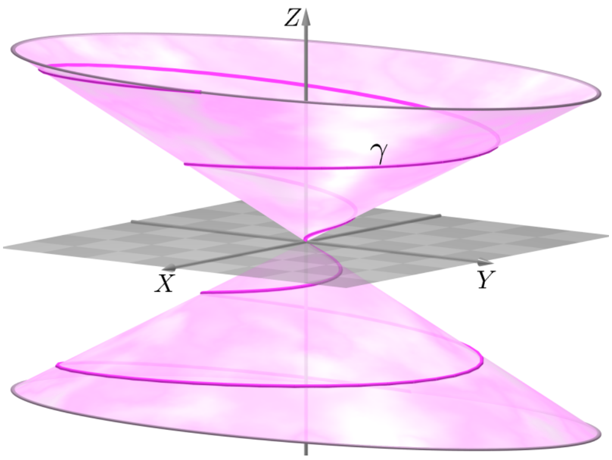

Fig. 8: Curva γ contida num cone elíptico

Daremos agora outro exemplo de superfície regrada.

Considere a hélice circular dada por $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen}\, t, t)$.

Para cada ponto da hélice, trace uma reta paralela ao plano XY que intersecta o eixo$-OZ$

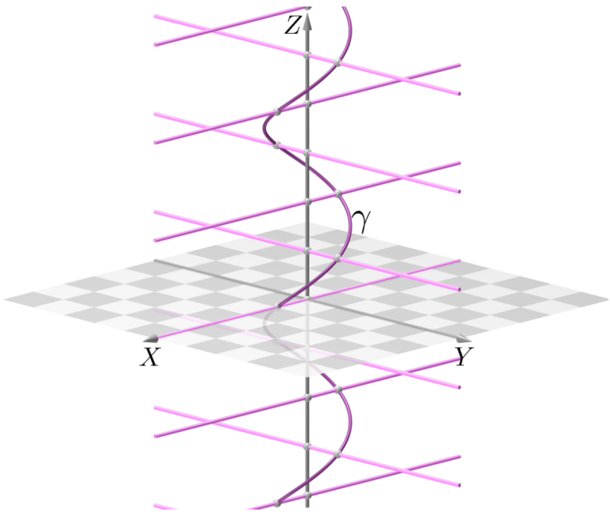

Fig. 9: Hélice γ

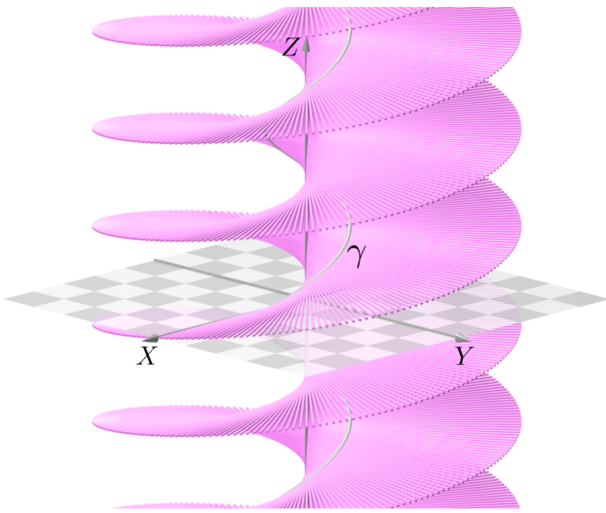

Fig. 10: Helicoide

A superfície regrada gerada por essas retas é chamada *helicóide*.

Seja $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen}\, t, t)$ um ponto de γ e r_t a reta paralela ao plano XY que passa por $\gamma(t)$ e por um ponto $\beta(t) = (0, 0, z(t))$ do eixo$-OZ$.

Como $\overrightarrow{\beta(t)\gamma(t)}$ é perpendicular ao vetor $(0, 0, 1)$, temos que $\beta(t) = (0, 0, t)$.

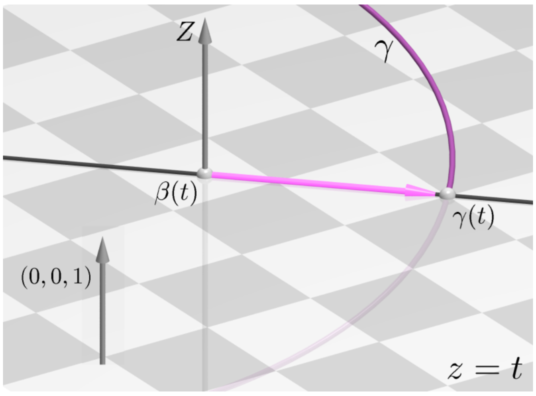

Fig. 11: Reta contida no helicóide e no plano $z = t$

Logo,

$$r_t : \begin{cases} x_t(s) = s\cos t \\ y_t(s) = s\,\text{sen}\, t \\ z_t(s) = t \end{cases} \quad ; \quad s \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização da reta r_t, e

$$S : \begin{cases} x(s,t) = s\cos t \\ y(s,t) = s\,\text{sen}\, t \\ z(s,t) = t \end{cases} \quad ; \quad s, t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização do helicóide.