Aula 9

Superfícies de Revolução

Seja $\mathcal{C}$ uma curva e r uma reta contidas num plano π.

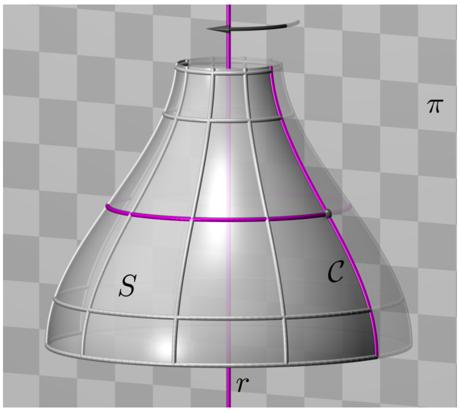

Fig. 1: Superfície de revolução S, geratriz $\mathcal{C}$ e eixo r contidos no plano π

A *superfície de revolução* S de *geratriz* $\mathcal{C}$ e *eixo de revolução* r é a superfície descrita pela rotação da curva $\mathcal{C}$ em torno da reta r.

A interseção de S com um plano π' perpendicular à reta r, tal que $\pi' \cap \mathcal{C} \neq \varnothing$ é, pela definição, um círculo ou um conjunto de círculos centrados no ponto em que a reta r corta o plano π'. Estes círculos são denominados *paralelos* da superfície de revolução S.

Note que os pontos da geratriz $\mathcal{C}$ que pertencem ao eixo de revolução r permanecem fixos durante todo o movimento de rotação da curva $\mathcal{C}$ em torno de r. Neste caso, o paralelo que contém o ponto é um círculo degenerado que consiste apenas deste ponto.

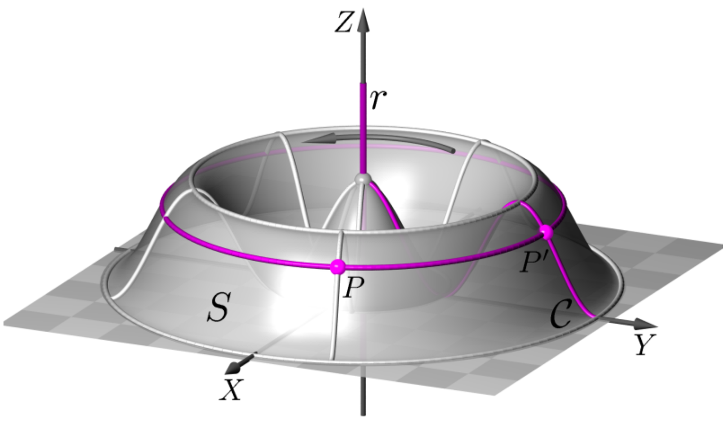

Fig. 2: Superfície de revolução S e pontos $P \in S$ e $P' \in \mathcal{C}$ no mesmo paralelo

A interseção de S com um plano que contém o eixo r é uma cópia rotacionada da geratriz $\mathcal{C}$ mais a reflexão desta cópia com respeito à reta r. Essas cópias de $\mathcal{C}$ são denominadas *meridianos* da superfície S.

Veremos agora como determinar a equação cartesiana de uma superfície de revolução $\mathcal{S}$ cuja geratriz é uma curva contida no plano YZ, descrita de forma implícita pelas equações:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0\,. \end{cases}$$

Suponhamos primeiro que o eixo de revolução r é o eixo$-OZ$.

Pela definição, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a $\mathcal{S}$ se, e só se, existe um ponto $P' = (0, y', z')$ pertencente a $\mathcal{C}$ tal que P e P' estão sobre o mesmo paralelo.

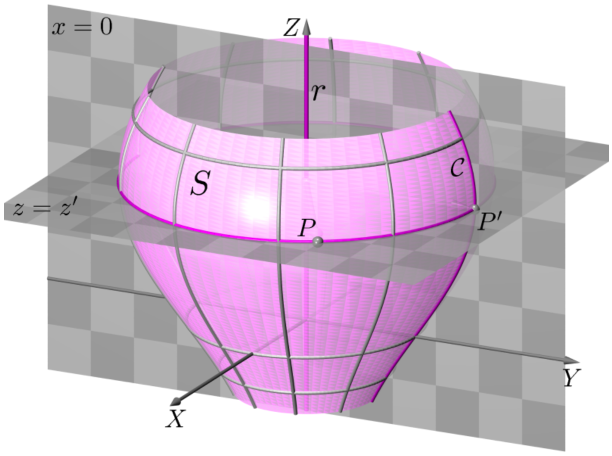

Fig. 3: Superfície de revolução $\mathcal{S}$ e pontos $P \in \mathcal{S}$, $P' \in \mathcal{C}$ no mesmo paralelo

Como o eixo$-OZ$ é o eixo de revolução, este parelelo é um círculo contido no plano π perpendicular ao eixo$-OZ$ que contém os pontos P e P'. Logo $z = z'$ e $C = (0, 0, z) = (0, 0, z')$ é o centro do paralelo, pois $\{C\} = \pi \cap r$.

Além disso, como P e P' estão sobre um círculo de centro C, o raio deste círculo é

$$d(P', C) = d(P, C)\,,$$

ou seja,

$$|y'| = \sqrt{x^2 + y^2} \iff y' = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

Finalmente, como $f(y', z') = 0$, temos que $P = (x, y, z)$ pertence a $\mathcal{S}$ se, e só se,

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\,,\ z) = 0\,,$$

que é a equação cartesiana de $\mathcal{S}$.

Suponhamos agora que o eixo de revolução r seja o eixo$-OY$.

Então, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a $\mathcal{S}$ se, e só se, existe um ponto $P' = (0, y', z')$ em $\mathcal{C}$ tal que P e P' estão sobre o mesmo paralelo.

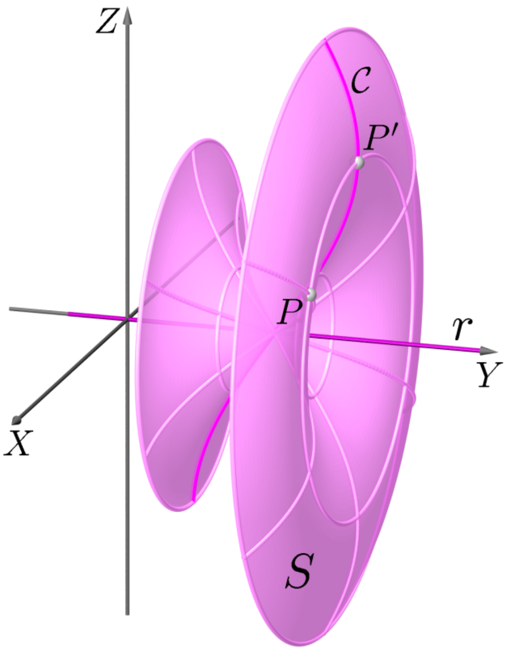

Fig. 4: Superfície de revolução $\mathcal{S}$

Como os paralelos estão contidos nos planos $y =$const., perpendiculares ao eixo$-OY$ (figura 4), temos que $y = y'$ e $C = (0, y, 0) = (0, y', 0)$ é o centro do paralelo que passa por P e P'.

Além disso, como $d(P', C) = d(P, C)$ é o raio do paralelo, temos que

$$|z'| = \sqrt{x^2+z^2} \Longleftrightarrow z' = \pm\sqrt{x^2+z^2}$$

Logo $P = (x, y, z)$ pertence a S se, e só se, satisfaz a equação

$$f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}) = 0\,.$$

De modo análogo, podemos mostrar que:

- se a geratriz $\mathcal{C} : \begin{cases} f(x,y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ está contida no plano XY, então $f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2}) = 0$ é a equação cartesiana da superfície de revolução obtida girando a curva $\mathcal{C}$ em torno do eixo$-OX$, e $f(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y) = 0$ é a equação cartesiana da superfície de revolução de geratriz $\mathcal{C}$ e eixo de revolução $=$ eixo$-OY$.

- se a geratriz $\mathcal{C} : \begin{cases} f(x,z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ está contida no plano XZ , então $f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2}) = 0$ é a equação cartesiana da superfície de revolução de geratriz $\mathcal{C}$ e eixo de revolução $=$ eixo$-OX$, e $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$ é a equação cartesiana da superfície de revolução obtida girando a curva $\mathcal{C}$ em torno do eixo$-OZ$.

Exemplo 1

Determine as equações cartesianas e paramétricas e faça um esboço da superfície de revolução S obtida girando a curva:

(a) $\mathcal{C} : \begin{cases} z = 3y^3 \\ x = 0 \end{cases}$ *em torno do eixo$-OZ$.*

Solução.

A curva $\mathcal{C}$ está contida no plano YZ e é dada pela equação $f(y, z) = 0$, onde $f(y, z) = z - 3y^3$.

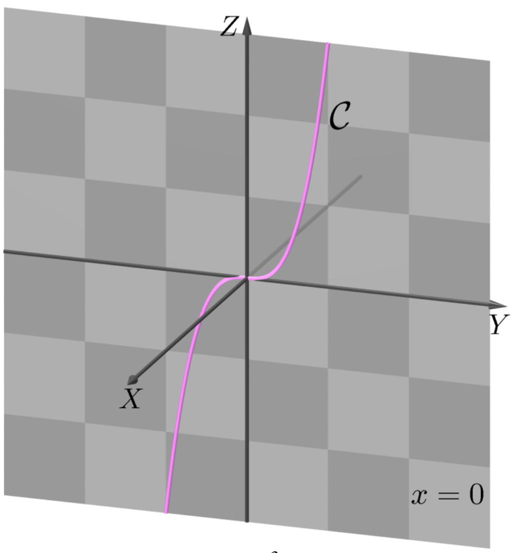

Fig. 5: Curva $z = 3y^3$ no plano $x = 0$

Como a rotação é realizada em torno do eixo$-OZ$, devemos manter a variável z e substituir a variável y pela expressão $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, que define o raio dos paralelos, na equação $f(y,z)=0$, para obtermos a equação cartesiana de S. Assim, a equação cartesiana de S é dada por:

$$\begin{aligned} f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0 &\iff z-3(\pm\sqrt{x^2+y^2})^3=0 \\ &\iff z=\pm 3(x^2+y^2)^{3/2} \\ &\iff z^2=9(x^2+y^2)^3 \end{aligned}$$

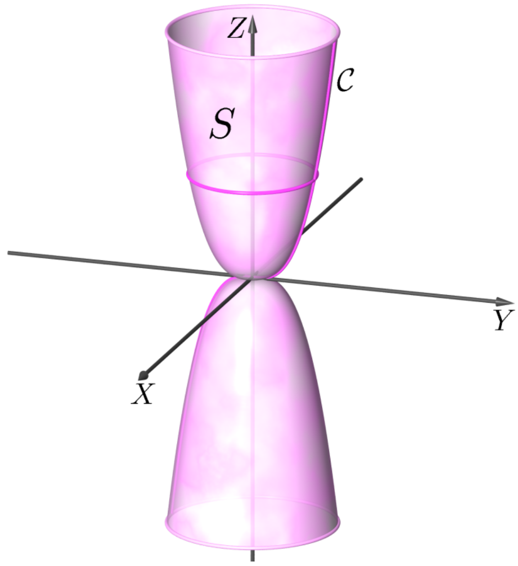

Fig. 6: Superfície de revolução S

Sendo

$$\mathcal{C}:\begin{cases} x(s)=0 \\ y(s)=s \\ z(s)=3s^3 \end{cases}, \quad s\in\mathbb{R},$$

uma parametrização da geratriz $\mathcal{C}$, uma parametrização do paralelo $\mathcal{P}_s$ contido no plano $\pi_s : z = 3s^3$, que é um círculo de centro $A_s=(0,0,3s^3)$ e raio $|s|$, é dada por:

$$\mathcal{P}_s:\begin{cases} x_s(t)=s\cos t \\ y_s(t)=s\,\text{sen}\,t \\ z_s(t)=3s^3 \end{cases}, \quad s,t\in\mathbb{R}.$$

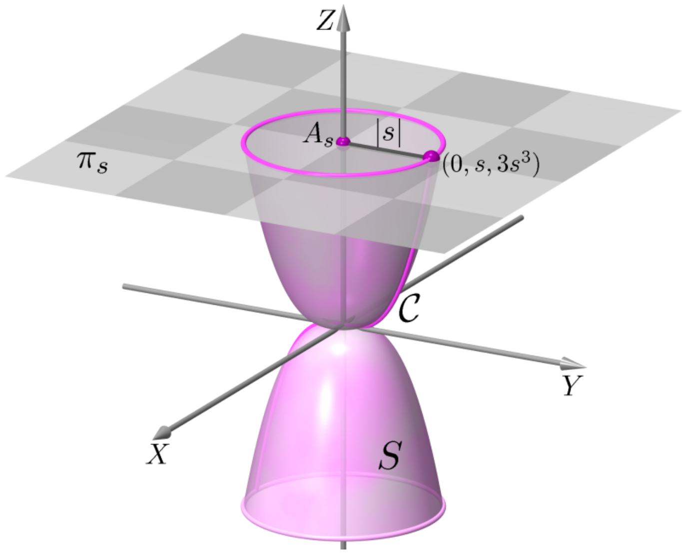

Fig. 7: Paralelo obtido pela interseção $\pi_s\cap S$

Logo,

$$S:\begin{cases} x(s,t)=s\cos t \\ y(s,t)=s\,\text{sen}\,t \\ z(s,t)=3s^3 \end{cases}, \quad s,t\in\mathbb{R},$$

é uma parametrização da superfície de revolução S. □

(b) $\mathcal{C}:\begin{cases} z=3y^3 \\ x=0 \end{cases}$ *em torno do eixo*$-OY$.

Solução.
Como a rotação agora é realizada em torno do eixo$-OY$, não mexemos na variável y e substituímos a variável z pela expressão $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ que define o raio dos paralelos. Logo,

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0 \iff \pm\sqrt{x^2+z^2}=3y^3 \iff x^2+z^2=9y^6$$

é a equação cartesiana de S.

Como, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{P}_s : \begin{cases} x_s(t) = 3s^3 \cos t \\ y_s(t) = s \\ z_s(t) = 3s^3 \operatorname{sen} t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização do paralelo de S contido no plano $\pi_s : y = s$, que é um círculo de centro $A_s = (0, s, 0)$ e raio $|3s^3|$, temos que

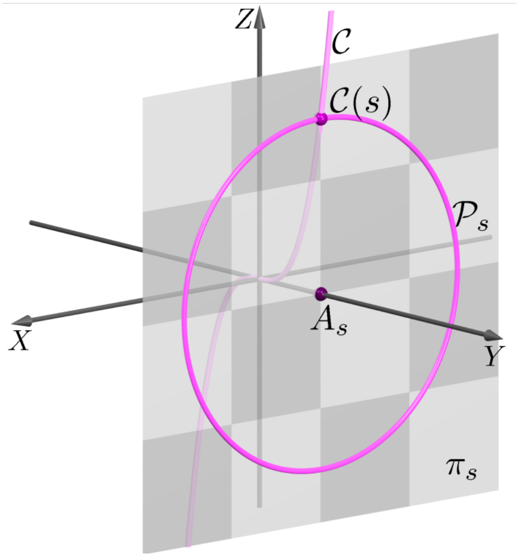

Fig. 8: Curva $\mathcal{C}$ e o paralelo no plano π_s

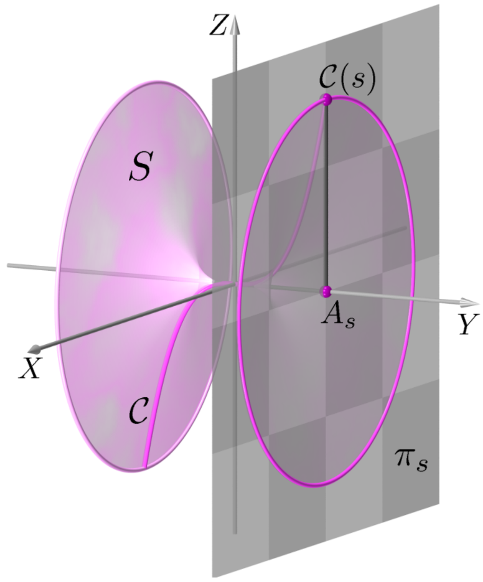

Fig. 9: Superfície de revolução S gerada pela curva $\mathcal{C}$

$$S : \begin{cases} x(s,t) = 3s^3 \cos t \\ y(s,t) = s \\ z(s,t) = 3s^3 \operatorname{sen} t \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização da superfície de revolução S (ver figura 9). $\square$

(c) $\mathcal{C} : \begin{cases} z = e^x \\ y = 0 \end{cases}$ *em torno do eixo*$-OZ$.

Solução.

Neste exemplo, a geratriz $\mathcal{C}$ está contida no plano XZ e

$$\mathcal{C} : \begin{cases} f(x,z) = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

onde $f(x,z) = z - e^x$.

Como estamos girando a curva $\mathcal{C}$ em torno do eixo$-OZ$, obtemos que

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0 \iff z = e^{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$$

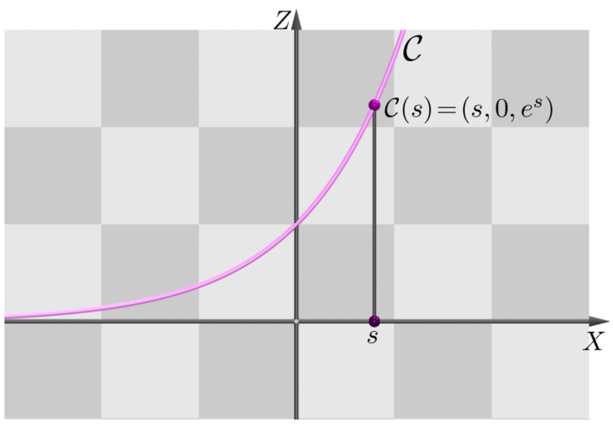

Fig. 10: Curva $\mathcal{C}$

é a equação cartesiana de S e o seu esboço é o mostrado na figura abaixo.

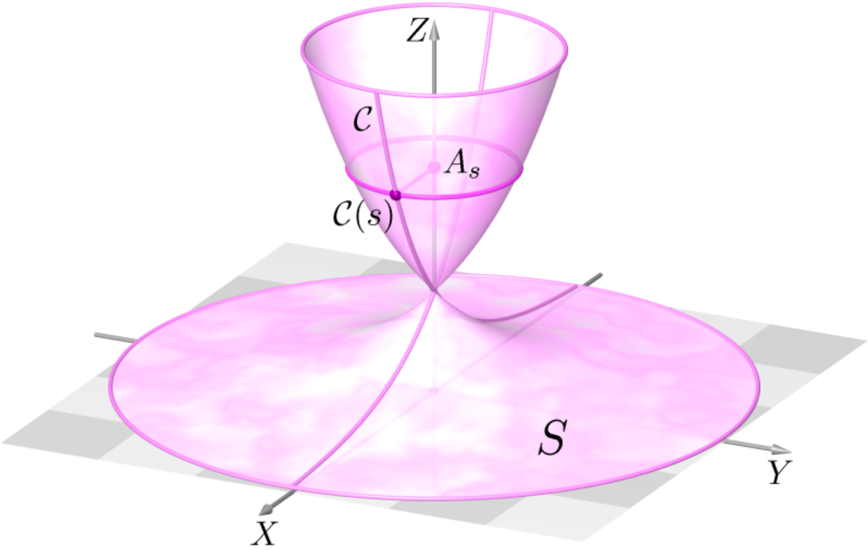

Fig. 11: Superfície S obtida pela rotação da curva $\mathcal{C}$ em torno do eixo$-OZ$

Sendo

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x(s) = s \\ y(s) = 0 \\ z(s) = e^s \end{cases} \quad ; \quad s \in \mathbb{R}\,,$$

uma parametrização da geratriz, temos que

$$\mathcal{P}_s : \begin{cases} x_s(t) = s\cos t \\ y_s(t) = s\,\text{sen}\, t \\ z_s(t) = e^s \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

é uma parametrização do círculo de centro $A_s = (0, 0, e^s)$ e raio $|s|$, que é o paralelo $\mathcal{P}_s$ de S contido no plano $\pi_s : z = e^s$.

Logo,

$$S : \begin{cases} x(s,t) = s\cos t \\ y(s,t) = s\,\text{sen}\, t \\ z(s,t) = e^s \end{cases} \quad ; \quad s, t \in \mathbb{R}$$

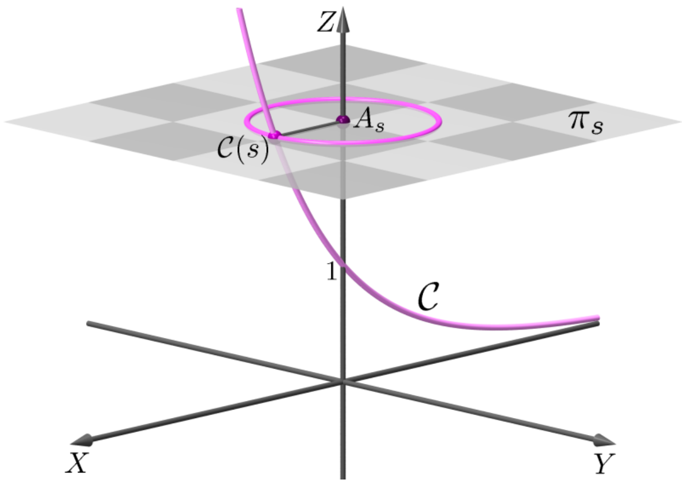

Fig. 12: Curva $\mathcal{C}$ e um paralelo descrito pela sua revolução em torno do eixo$-OZ$

é uma parametrização da superfície de revolução S. $\square$

(d) $\mathcal{C} : \begin{cases} z = e^x \\ y = 0 \end{cases}$ em torno do eixo$-OX$.

Solução.

Como, neste exemplo, um ponto $P' = (x', 0, z') = (x', 0, e^{x'})$ pertencente a $\mathcal{C}$ tem sempre a terceira coordenada z' positiva, devemos substituir, na equação $f(x',z')=0$, a variável x' por x e a variável z' por $\sqrt{y^2+z^2}$ para obtermos a equação cartesiana de S:

$$f(x,\sqrt{y^2+z^2})=0 \iff \sqrt{y^2+z^2}=e^x \iff y^2+z^2=e^{2x}.$$

Na figura 13 mostramos o esboço da superfície de revolução S.

O paralelo $\mathcal{P}_s$, contido no plano $\pi_s : x=s$, de centro no ponto $A_z=(s,0,0)$ e raio e^s, pode ser parametrizado do seguinte modo:

$$\mathcal{P}_s : \begin{cases} x_s(t)=s \\ y_s(t)=e^s\cos t \\ z_s(t)=e^s\,\text{sen}\,t \end{cases} ; \quad t\in\mathbb{R}.$$

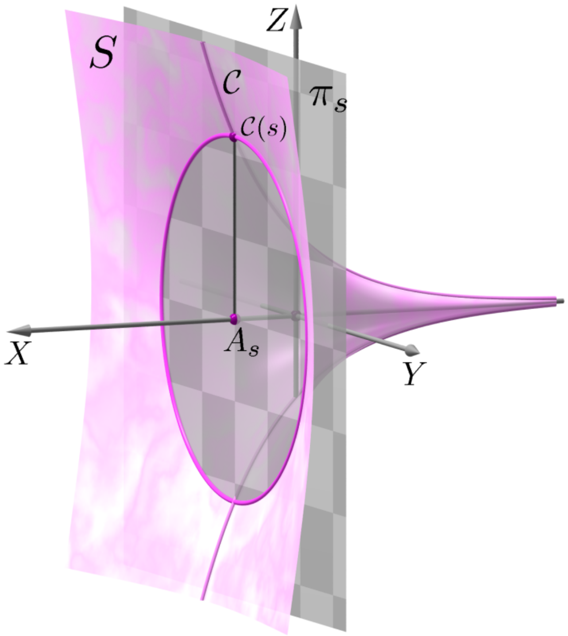

Fig. 13: Superfície S

Assim,

$$S : \begin{cases} x(s,t)=s \\ y(s,t)=e^s\cos t \\ z(s,t)=e^s\,\text{sen}\,t \end{cases} ; \quad s,t\in\mathbb{R}.$$

é uma parametrização da superfície de revolução S. □

(e) $\mathcal{C} : \begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$ *em torno do eixo−OY.*

Solução.

A curva $\mathcal{C}$ é uma reta contida no plano XY

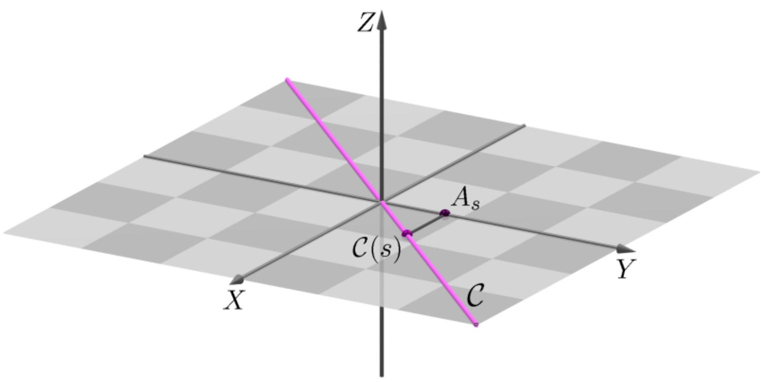

Fig. 14: Curva $\mathcal{C}$

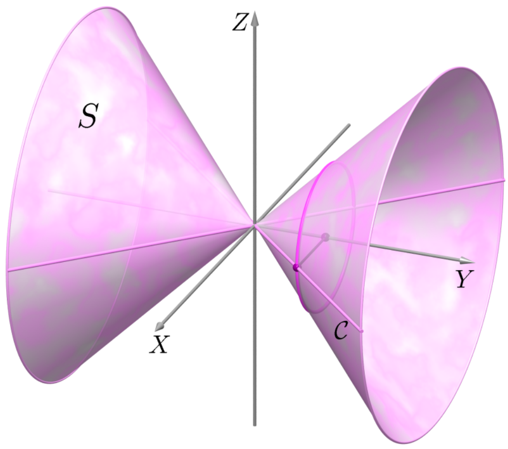

Fig. 15: Superfície $S : x^2+z^2=y^2$

A equação cartesiana da superfície de revolução S de geratriz $\mathcal{C}$ e eixo de revolução = eixo−OY é obtida substituindo , na equação $f(x',y')=x'-y'=0$, a variável y' por y e a variável x' por $\pm\sqrt{x^2+z^2}$, ou seja:

$$\pm\sqrt{x^2+z^2}=y \iff y^2=x^2+z^2\,.$$

Portanto, $S : x^2 + z^2 = y^2$ é um cone circular reto de vértice na origem e eixo$-OY$ (figura 15).

Parametrizando a geratriz,

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x(s) = s \\ y(s) = s \\ z(s) = 0 \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R},$$

obtemos que o paralelo $\mathcal{P}_s$ de S contido no plano $\pi_s : y = s$, que é um círculo de centro $A_s = (0, s, 0)$ e raio $|s|$, pode ser parametrizado da seguinte maneira:

$$\mathcal{P}_s : \begin{cases} x_s(t) = s \cos t \\ y_s(t) = s \\ z_s(t) = s \operatorname{sen} t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$S : \begin{cases} x(s,t) = s \cos t \\ y(s,t) = s \\ z(s,t) = s \operatorname{sen} t \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

é uma parametrização do cone circular S. $\square$

(f) $\mathcal{C} : \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ z = 0 \end{cases}$ *em torno do eixo*$-OX$.

Solução.
A curva $\mathcal{C}$ é uma parábola de vértice $(0, 1, 0)$ e eixo-focal $=$ eixo$-OY$, contida no plano XY.

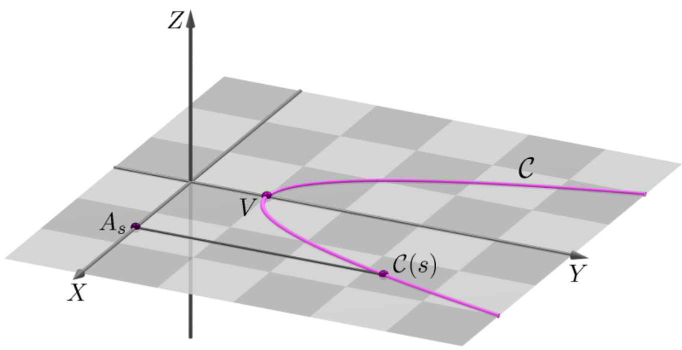

Fig. 16: Parábola $\mathcal{C}$

Para obtermos a equação cartesiana da superfície S devemos substituir, na equação $f(x', y') = y' - x'^2 - 1 = 0$, a variável x' por x e a variável y' por $\sqrt{y^2 + z^2}$, pois $y' > 0$ para todo ponto $(x', y', 0)$ pertencente a $\mathcal{C}$.

Logo,

$$\sqrt{y^2 + z^2} = x^2 + 1 \iff y^2 + z^2 = (x^2 + 1)^2$$

é a equação cartesiana de S.

Como

$$\mathcal{C}:\begin{cases} x(s)=s \\ y(s)=s^2+1 \\ z(s)=0 \end{cases} \quad ; \quad s\in\mathbb{R},$$

o paralelo P_s contido no plano $\pi_s : x = s$, que é um círculo de centro $A_s = (s, 0, 0)$ e raio $s^2 + 1$, pode ser parametrizado do seguinte modo:

$$\mathcal{P}_s:\begin{cases} x_s(t)=s \\ y_s(t)=(s^2+1)\cos t \\ z_s(t)=(s^2+1)\,\text{sen}\, t \end{cases} \quad ; \quad t\in\mathbb{R}.$$

Logo,

$$\mathcal{S}:\begin{cases} x(s,t)=s \\ y(s,t)=(s^2+1)\cos t \\ z(s,t)=(s^2+1)\,\text{sen}\, t \end{cases} \quad ; \quad s,t\in\mathbb{R},$$

é uma parametrização da superfície S (figura 17). □

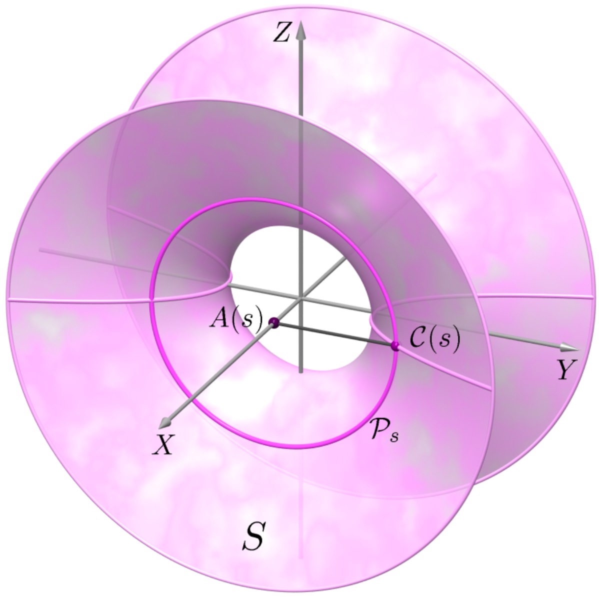

Fig. 17: Superfície $S : y^2 + z^2 = (x^2 + 1)^2$

Exemplo 2

Determine a equação cartesiana e as equações paramétricas do toro obtido girando, em torno do eixo−OZ, o círculo $\mathcal{C}$ no plano YZ de centro $(0, 4, 1)$ e raio 2.

Solução.

A geratriz do toro é o círculo:

$$\mathcal{C}:\begin{cases} (y-4)^2+(z-1)^2=4 \\ x=0 \end{cases}$$

Como, para todo ponto $P' = (0, y', z')$ pertencente a $\mathcal{C}$,

$$(y'-4)^2\leq 4 \iff |y'-4|\leq 2 \iff -2+4\leq y'\leq 4+2 \iff 0<2\leq y'\leq 6,$$

devemos substituir, na equação $f(y', z') = (y' - 4)^2 + (z' - 1)^2 - 4 = 0$, a variável z' por z e a variável y' por $\sqrt{x^2 + y^2}$, para obtermos a equação cartesiana do toro:

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-4\right)^2+(z-1)^2=4.$$

Sendo

$$\mathcal{C}:\begin{cases} x(s)=0 \\ y(s)=2\cos s+4 \\ z(s)=2\,\text{sen}\, s+1 \end{cases} \quad ; \quad s\in\mathbb{R},$$

uma parametrização do círculo $\mathcal{C}$,

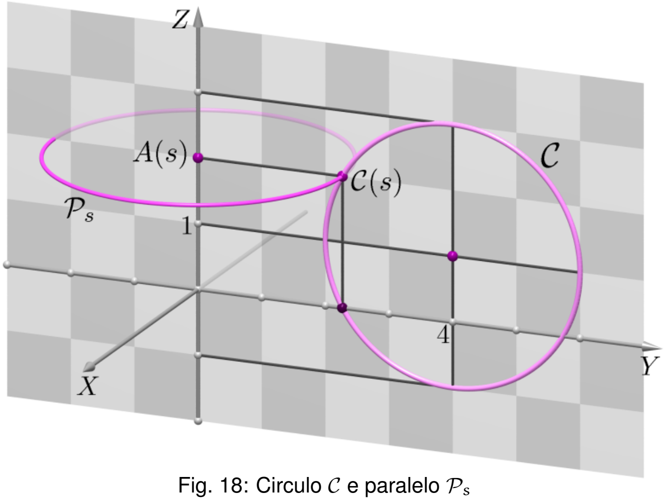

Fig. 18: Circulo $\mathcal{C}$ e paralelo $\mathcal{P}_s$

temos que:

$$\mathcal{P}_s : \begin{cases} x_s(t) = (2\cos s + 4)\cos t \\ y_s(t) = (2\cos s + 4)\,\text{sen}\, t \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,, \\ z_s(t) = 2\,\text{sen}\, s + 1 \end{cases}$$

é uma parametrização do paralelo $\mathcal{P}_s$, círculo de centro $A_s = (0, 0, 2\,\text{sen}\, s + 1)$ e raio $2\cos s + 4$, contido no plano $z = 2\,\text{sen}\, s + 1$.

Então,

$$\mathcal{T} : \begin{cases} x(s,t) = (2\cos s + 4)\cos t \\ y(s,t) = (2\cos s + 4)\,\text{sen}\, t\,;\ s, t \in \mathbb{R}\,, \\ z(s,t) = 2\,\text{sen}\, s + 1 \end{cases}$$

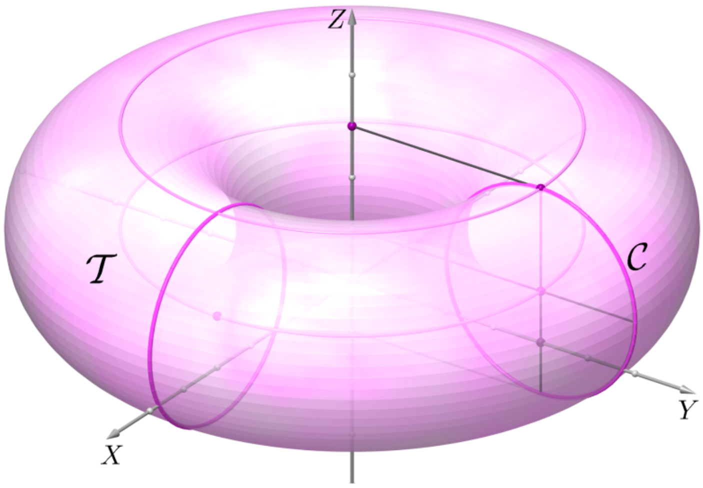

Fig. 19: Toro de revolução $\mathcal{T}$

é uma parametrização do toro de revolução de geratriz $\mathcal{C}$ e eixo$-OZ$. □

Exemplo 3

Seja $\mathcal{E}$ a elipse no plano $x = 0$ com centro no ponto $C = (0, 5, 0)$, reta focal paralela ao eixo$-OY$, um foco no ponto $F = (0, 2, 0)$ e um vértice no ponto $V = (0, 0, 0)$.

Determine a equação cartesiana e as equações paramétricas da superfície de revolução S obtida girando a elipse $\mathcal{E}$ em torno do eixo$-OY$.

Solução.

Como $\overrightarrow{CF} = (0, -3, 0)$ e $\overrightarrow{CV} = (0, -5, 0)$, temos que $c = \|\overrightarrow{CF}\| = 3$ e $a = \|\overrightarrow{CV}\| = 5$. Portanto, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 4$ e

$$\mathcal{E} : \begin{cases} \dfrac{(y-5)^2}{25} + \dfrac{z^2}{16} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Para determinarmos a equação cartesiana da superfície S, devemos substituir, na equação

$$f(y',z') = \frac{(y'-5)^2}{25} + \frac{z'^2}{16} - 1 = 0\,,$$

a variável y' por y e a variável z' por $\pm\sqrt{x^2+z^2}$:

$$f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}) = 0 \iff \frac{(y-5)^2}{25} + \frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1\,.$$

Sendo

$$\mathcal{E}(t) : \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 5\cos t + 5\,; \quad t \in \mathbb{R}; \\ z(t) = 4\,\text{sen}\,t \end{cases}$$

uma parametrização da elipse, e o paralelo $\mathcal{P}_t$, contido no plano $y = 5\cos t + 5$, um círculo de centro no ponto $A_t = (0, 5\cos t + 5, 0)$ e raio $|4\,\text{sen}\,t|$, temos que:

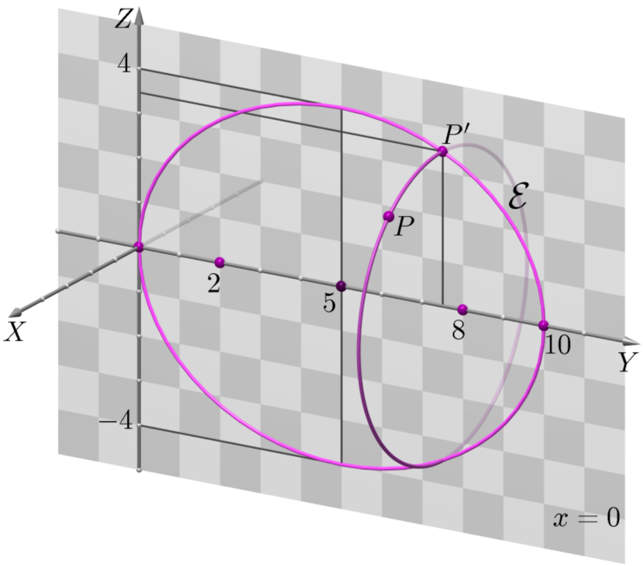

Fig. 20: Elipse $\mathcal{E}$

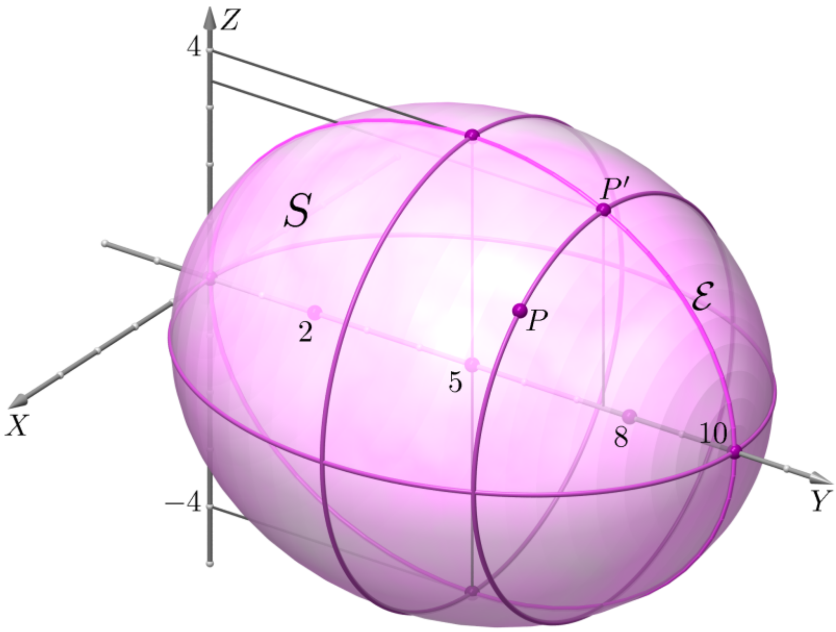

Fig. 21: Elipsoide de revolução S

$$S : \begin{cases} x(s,t) = 4\,\text{sen}\,t\cos s \\ y(s,t) = 5\cos t + 5 \qquad ; \quad s,t \in \mathbb{R}; \\ z(s,t) = 4\,\text{sen}\,t\,\text{sen}\,s \end{cases}$$

é uma parametrização da superfície de revolução S. $\square$

Para verificarmos que uma superfície S é de revolução, devemos encontrar uma reta r tal que $\pi \cap S$ é um círculo de centro no ponto de interseção $r \cap \pi$, onde π é um plano qualquer, que intersecta S, perpendicular à reta r. E para determinarmos uma geratriz de S, basta intersectá-la com um plano que contém o eixo de revolução r.

Exemplo 4

Mostre que cada uma das equações abaixo representa uma superfície de revolução S, determinando o seu eixo de revolução e a equação de uma de suas geratrizes.

(a) $S : x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Solução.
A superfície S é uma esfera de centro na origem e raio 3. Intersectando-a com os planos π_k : $z = k$, paralelos ao plano XY,

$$\mathcal{C}_k = S \cap \{z = k\} : \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 - k^2 \\ z = k \end{cases} ,$$

obtemos que:

- para $k \in (-3, 3)$, $\mathcal{C}_k$ é um círculo de centro $(0, 0, k)$ pertencente ao eixo$-OZ$ e raio $\sqrt{9 - k^2}$;
- para $k = 3$, $\mathcal{C}_3 = S \cap \{z = 3\} = \{(0, 0, 3)\}$;
- para $k = -3$, $\mathcal{C}_{-3} = S \cap \{z = -3\} = \{(0, 0, -3)\}$;
- para $k \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$, $\mathcal{C}_k = S \cap \{z = k\} = \varnothing$.

Logo S é uma superfície de revolução cujo eixo de revolução é o eixo$-OZ$, sendo o semi-círculo

$$\gamma : \begin{cases} y^2 + z^2 = 9 \\ x = 0 \end{cases} , \quad y \geq 0$$

uma de suas geratrizes (figura 22). O plano $x = 0$ é um plano que contém o eixo$-OZ$.

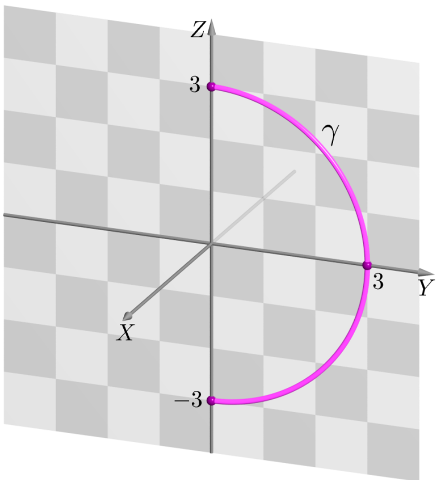

Fig. 22: Geratriz γ

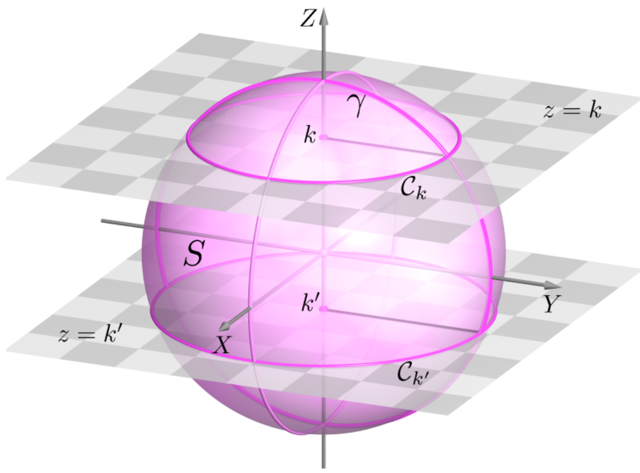

Fig. 23: Esfera S

De fato, seja S' a superfície de revolução de geratriz γ e eixo de revolução = eixo$-OZ$.

Então, para obtermos a equação cartesiana de S', devemos substituir, na equação da geratriz $y'^2 + z'^2 = 9$, a variável z' por z e a variável y' por $\sqrt{x^2 + y^2}$, pois $y' \geq 0$.

Assim,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

é a equação cartesiana de S'. Logo $S' = S$. $\square$

(b) $S : x^2 + z^2 = 4$.

Solução.
Intersectando a superfície S com os planos $y = k$, paralelos ao plano XZ, obtemos os círculos de raio 2,

$$\gamma_k = S \cap \{y = k\} : \begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \\ y = k \end{cases},$$

e centro $(0, k, 0)$ sobre o eixo$-OY$.

Logo S é uma superfície de revolução obtida girando a reta

$$\gamma : \begin{cases} z = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

em torno do eixo$-OY$. Note que $x = 0$ é um plano que contém o eixo$-OY$.

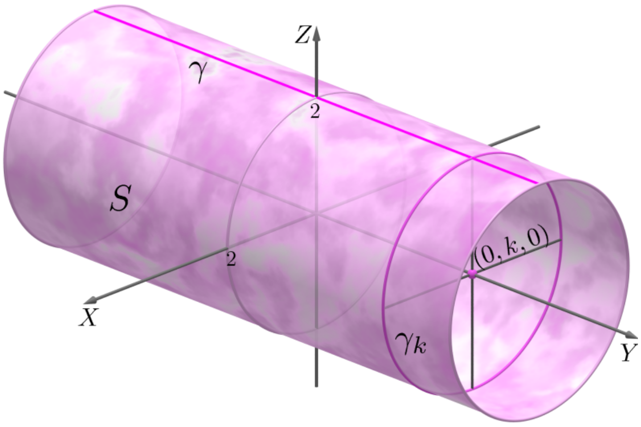

Fig. 24: Cilindro gerado pela reta γ

De fato, seja S' a superfície de revolução de geratriz γ e eixo de revolução $=$ eixo$-OY$.

A equação cartesiana de S' é obtida substituindo, na equação $z' = 2$, a variável z' por $\sqrt{x^2 + y^2}$. Ou seja,

$$S' : \sqrt{x^2 + z^2} = 2 \iff S' : x^2 + z^2 = 4\,.$$

Provamos, assim, que $S = S'$. $\square$

(c) $S : x^2 + y^2 = z^3$.

Solução.
Primeiro observe que a superfície está contida no semi-espaço $z \geq 0$.

Intersectando S com os planos $z = k$, $k \geq 0$,

$$\mathcal{C}_k = S \cap \{z = k\} : \begin{cases} x^2 + y^2 = k^3 \\ z = k \end{cases}$$

obtemos que $\mathcal{C}_k$ é um círculo de raio $k^{3/2}$ e centro $(0, 0, k)$ pertencente ao eixo$-OZ$, se $k > 0$, e, para $k = 0$, $\mathcal{C}_0 = S \cap \{z = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$.

Além disso, a interseção de S com o plano YZ, que contém o eixo$-OZ$, é a curva:

$$S \cap \{x=0\} : \begin{cases} y^2 = z^3 \\ x = 0 \end{cases}$$

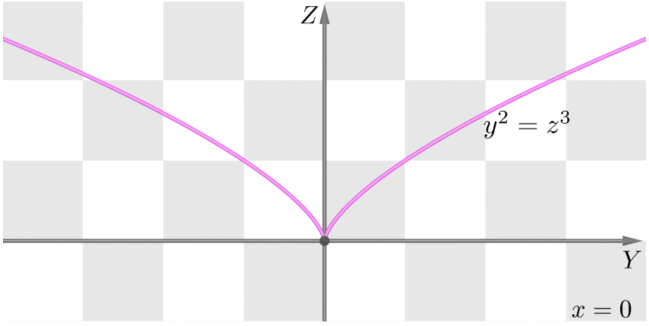

Fig. 25: Curva $y^2 = z^3$ no plano $x = 0$

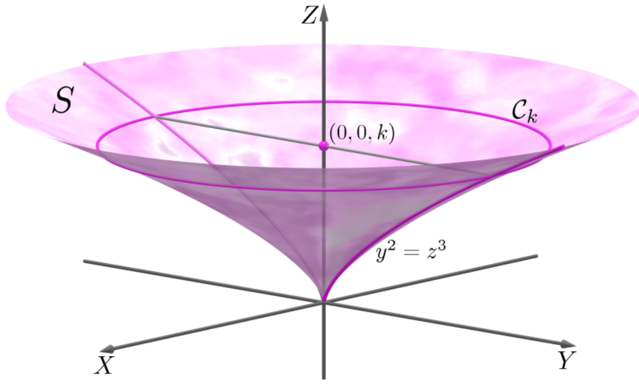

Fig. 26: Superfície de revolução S

Logo S é a superfície de revolução obtida girando a curva

$$\gamma : \begin{cases} y = z^{3/2} \\ x = 0 \end{cases} \quad , \quad z \geq 0 \,,$$

em torno do eixo$-OZ$.

Realmente, a equação cartesiana da superfície de revolução S' de geratriz γ e eixo de revolução $=$ eixo$-OZ$ é dada por:

$$S' : \sqrt{x^2+y^2} = z^{3/2} \iff S' : x^2+y^2 = z^3 \,.$$

Então $S = S'$, como queríamos provar. $\square$

(d) $S : x^2y^2 + x^2z^2 = 1\,.$

Solução.

Fazendo $x = k$, $k \neq 0$, na equação acima, vemos que a interseção de S com o plano $x = k$, paralelo ao plano YZ, é o círculo

$$\mathcal{C}_k = S \cap \{x=k\} : \begin{cases} y^2 + z^2 = \dfrac{1}{k^2} \\ x = k \end{cases}$$

de centro $(k,0,0)$, pertence ao eixo$-OX$, e raio $\dfrac{1}{|k|}$.

Além disso, $S \cap \{z=0\} = \gamma_1 \cup \gamma_{-1}$, onde

$$\gamma_1 : \begin{cases} xy = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \gamma_{-1} : \begin{cases} xy = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

são duas hipérboles com vértice na origem que possuem os eixos OX e OY como assíntotas.

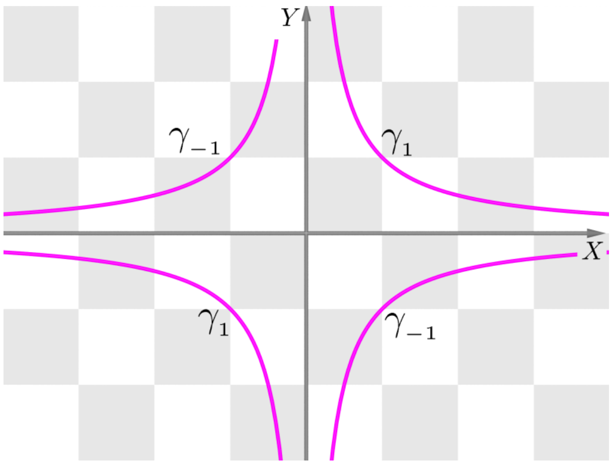

Fig. 27: Hipérboles γ_1 e γ_2

Observe que o plano $z = 0$ é um plano que contém o eixo$-OX$.

Seja S' a superfície de revolução cuja geratriz é

$$\gamma_{-1} \cup \gamma_1 : \begin{cases} x^2y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

e cujo eixo de revolução é o eixo$-OX$.

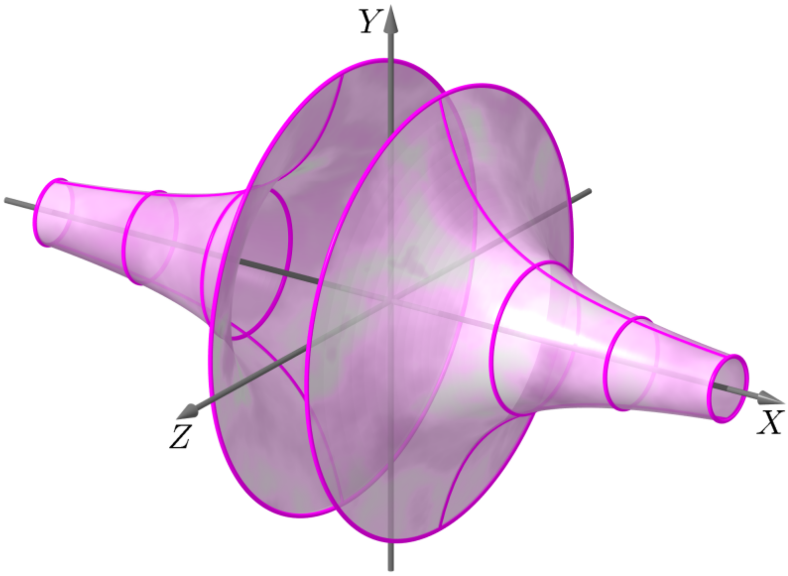

Fig. 28: Superfície de revolução S

Então,

$$S' : x^2(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2 = 1 \iff S' : x^2(y^2+z^2) = 1$$

é a equação cartesiana de S'. Assim, $S = S'$, ou seja, S é uma superfície de revolução (figura 28) obtida girando a curva $S \cap \{z = 0\}$ em torno do eixo$-OX$. $\square$

Veremos agora alguns exemplos de superfícies de revolução que possuem geratrizes contidas num dos planos coordenados, e *eixos paralelos a um dos eixos coordenados*.

Exemplo 5

Detemine a equação cartesiana e as equações paramétricas da superfície de revolução obtida girando a curva γ em torno do eixo r, onde

$$\gamma : \begin{cases} y = \operatorname{tg} x \\ z = 0 \end{cases} \quad ; \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad e \quad r : \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ z = 0\,. \end{cases}$$

Solução.
A curva γ está contida no plano XY e é dada pela equação $f(x,y) = 0$, onde $f(x,y) = y - \operatorname{tg} x$.

Pela definição, $P = (x,y,z) \in S$ se, e só se, existe $P' = (x', y', 0) \in \gamma$, $x' \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tal que P e P' estão sobre o mesmo paralelo.

Como o paralelo é um círculo contido num plano perpendicular ao eixo r e o centro A deste círculo pertence à reta r, temos que $y' = y$ e $A = \left(\frac{\pi}{2}, y, 0\right) = \left(\frac{\pi}{2}, y', 0\right)$.

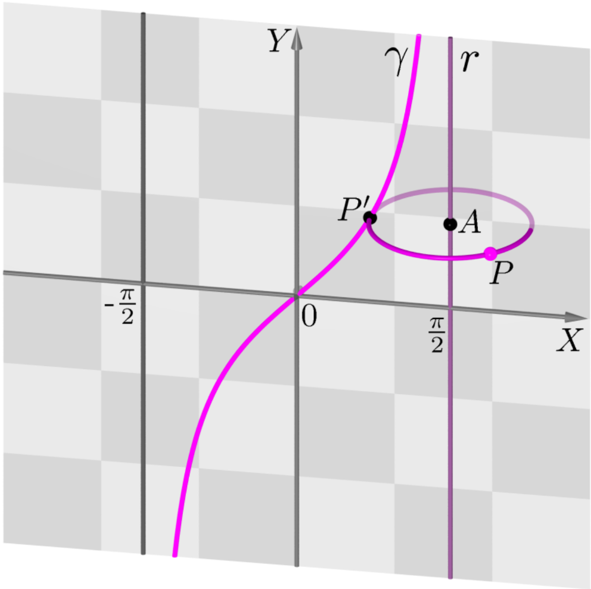

Fig. 29: Curva γ a girar em torno da reta r

Além disso, sendo $d(P', A) = d(P, A)$ o raio do paralelo, temos:

$$\left|x' - \frac{\pi}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + z^2} \iff \frac{\pi}{2} - x' = \sqrt{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + z^2}$$
$$\iff x' = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + z^2},$$

pois $x' \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Logo,

$$f\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + z^2}\,,\, y\right) = 0 \iff y = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + z^2}\right)$$

é a equação cartesiana de S e o seu esboço é mostrado na figura abaixo.

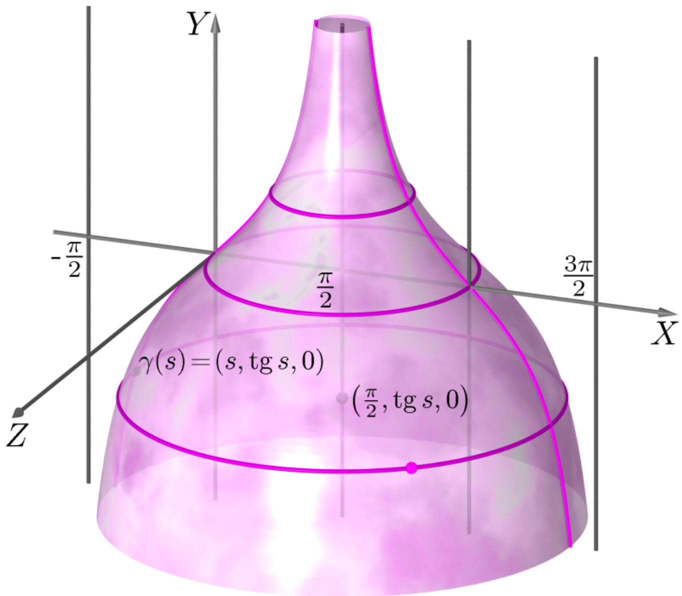

Fig. 30: Superfície S

Por outro lado, sendo

$$\gamma : \begin{cases} x(s) = s \\ y(s) = \operatorname{tg} s \\ z(s) = 0 \end{cases} \quad , \quad s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) ,$$

uma parametrização da geratriz, temos que

$$\mathcal{P}_s : \begin{cases} x_s(t) = \left(\frac{\pi}{2} - s\right) \cos t + \frac{\pi}{2} \\ y_s(t) = \operatorname{tg} s \\ z_s(t) = \left(\frac{\pi}{2} - s\right) \operatorname{sen} t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R} ,$$

é uma parametrização do paralelo $\mathcal{P}_s$, contido no plano $y = \operatorname{tg} s$, de centro $A_s = \left(\frac{\pi}{2}, \operatorname{tg} s, 0\right)$ e raio igual a $\frac{\pi}{2} - s$.

Logo,

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x_s(t) = \left(\frac{\pi}{2} - s\right) \cos t + \frac{\pi}{2} \\ y_s(t) = \operatorname{tg} s \\ z_s(t) = \left(\frac{\pi}{2} - s\right) \operatorname{sen} t \end{cases} , s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) , \quad t \in \mathbb{R} ,$$

é uma parametrização da superfície de revolução S.

Podemos também achar a equação da superfície de revolução fazendo uma translação dos eixos de modo que o eixo r seja um dos eixos coordenados deste novo sistema.

De fato, seja $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$ o sistema de eixos ortogonais tal que $\overline{O} = \left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right)$ e os semi-eixos positivos $\overline{O}\,\overline{X}$,$\overline{O}\,\overline{Y}$ e $\overline{O}\,\overline{Z}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido dos semi-eixos positivos OX, OY e OZ, respectivamente.

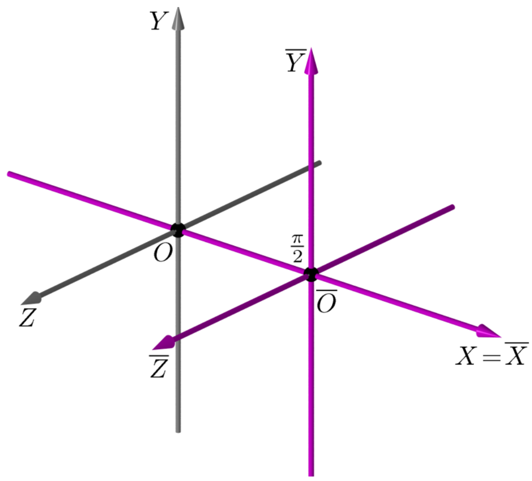

Fig. 31: Translação do sistema de coordenadas

Sejam (x, y, z) e $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ as coordenadas de um ponto P com respeito aos sistemas de eixos $OXYZ$ e $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$, respectivamente. Como $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$, $\overrightarrow{\overline{O}\,P} = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ e $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O\,\overline{O}} + \overrightarrow{\overline{O}\,P}$, temos

$$(x, y, z) = \left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right) + (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \left(\overline{x} + \frac{\pi}{2}, \overline{y}, \overline{z}\right) .$$

A geratriz γ e o eixo r nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ são dados por:

$$\gamma : \begin{cases} \overline{y} = \text{tg}\left(\overline{x} + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \overline{z} = 0 \end{cases} , \quad \overline{x} \in (-\pi, 0) ,$$

e

$$r : \begin{cases} \overline{x} = 0 \\ \overline{z} = 0 . \end{cases}$$

Ou seja, no sistema de eixos $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$, a geratriz é uma curva contida no plano $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ e o eixo de revolução é o eixo$-\overline{O}\,\overline{Y}$.

Logo, na equação $\overline{y}' = \text{tg}\left(\overline{x}' + \frac{\pi}{2}\right)$, devemos substituir $\overline{y}'$ por $\overline{y}$ e $\overline{x}'$ por $-\sqrt{\overline{x}^2 + \overline{z}^2}$, pois $\overline{x}' < 0$, para obtermos a equação cartesiana de S nas coordnadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$:

$$\overline{y} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\overline{x}^2 + \overline{z}^2}\right) .$$

Então, como

$$(x, y, z) = \left(\overline{x} + \frac{\pi}{2}, \overline{y}, \overline{z}\right) ,$$

temos que

$$y = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + z^2}\right)$$

é a equação cartesiana de S nas coordenadas x, y, z. $\square$

Exemplo 6

Determine a equação cartesiana e uma equação paramétrica da superfície de revolução S obtida girando a curva $\gamma(t) = (t, \text{sen}^2 t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, em torno da reta $r : \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ *, e esboçe-a.*

Solução.

A curva γ é dada também da seguinte maneira:

$$\gamma : \begin{cases} y = \text{sen}^2 x \\ z = 0 \end{cases} , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Por uma translação do sistema de coordenadas, obtemos um novo sistema de eixos ortogonais $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$, onde $\overline{O} = (0, 1, 0)$.

Como

$$(x, y, z) = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) + (0, 1, 0) = (\overline{x}, \overline{y} + 1, \overline{z})\,, \tag{1}$$

temos que:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \overline{x}(t) = t \\ \overline{y}(t) = \text{sen}^2 t - 1 = -\cos^2 t \ , \ t \in \mathbb{R}\,, \\ \overline{z}(t) = 0 \end{cases}$$

ou

$$\gamma : \begin{cases} \overline{y} = \text{sen}^2 \overline{x} - 1 = -\cos^2 \overline{x} \\ \overline{z} = 0 \end{cases} \quad , \quad \overline{x} \in \mathbb{R}\,,$$

é a geratriz, e

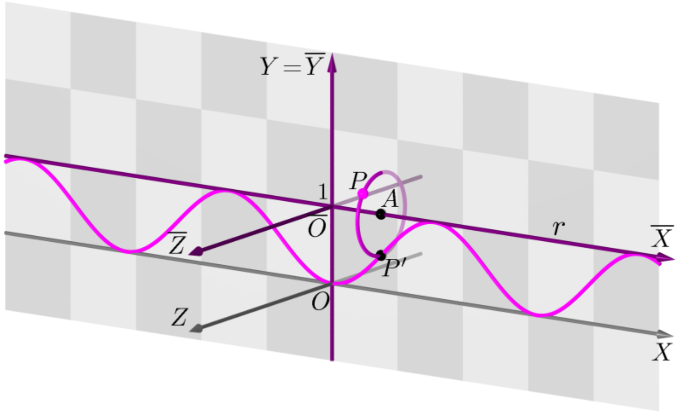

Fig. 32: Curva γ

$$r : \begin{cases} \overline{y} = 0 \\ \overline{z} = 0 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad r = \text{eixo}-\overline{O}\,\overline{X}$$

é o eixo de revolução de S nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$.

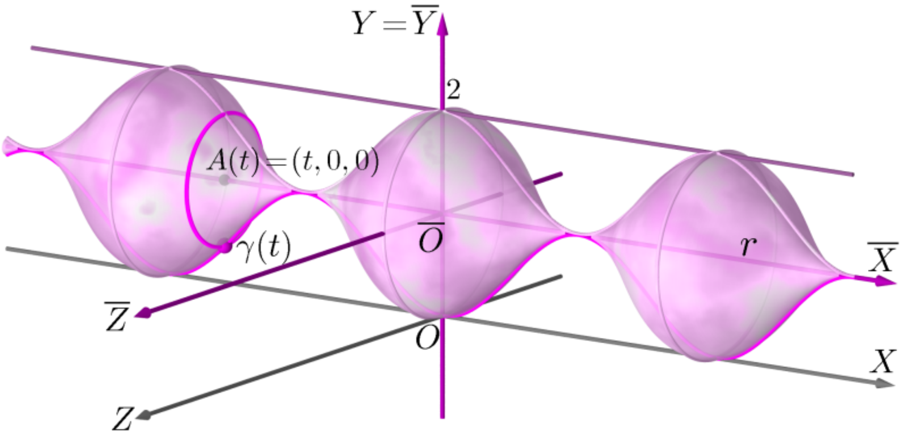

Fig. 33: Superfície S

Neste novo sistema de eixos, a equação cartesiana da superfície S é:

$$-\sqrt{\overline{y}^2 + \overline{z}^2} = -\cos^2 \overline{x} \iff \cos^4 \overline{x} = \overline{y}^2 + \overline{z}^2\,, \tag{2}$$

pois, se $P' = (\overline{x}', \overline{y}', 0) \in \gamma$, então $\overline{y}' = -\cos^2 \overline{x}' \leq 0$.

Além disso,

$$S : \begin{cases} \overline{x}(s, t) = t \\ \overline{y}(s, t) = \cos^2 t \cos s \\ \overline{z}(s, t) = \cos^2 t \,\text{sen}\, s \end{cases} \quad , \quad s, t \in \mathbb{R}\,, \tag{3}$$

são as equações paramétricas de S nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, pois o paralelo $\mathcal{P}_t$, contido no plano $\overline{x} = t$, é um círculo de centro $A(t) = (t, 0, 0)$ e raio igual a $1 \cos^2 t$.

Logo, por (1), (2) e (3),

$$\cos^4 x = (y-1)^2 + z^2$$

é a equação cartesiana e

$$S : \begin{cases} x(s,t) = t \\ y(s,t) = \cos^2 t \cos s + 1 \\ z(s,t) = \cos^2 t \operatorname{sen} s \end{cases} \quad , \quad s,t \in \mathbb{R},$$

são as equações paramétricas da superfície de revolução S de geratriz γ e eixo de revolução r. □

Exemplo 7

Determine a equação cartesiana e uma equação paramétrica da superfície de revolução S obtida girando a curva

$$\gamma : \begin{cases} z = \dfrac{1}{1+y^2} \\ x = 0 \end{cases}$$

em torno da reta $r : \begin{cases} z = 1 \\ x = 0 \end{cases}$, *e esboçe-a.*

Solução.

Uma parametrização da geratriz γ é dada por:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \\ z(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por uma translação dos eixos, obtemos um novo sistema de eixos ortogonais $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$, onde $\overline{O} = (0,0,1)$ e

$$(x,y,z) = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}+1)\,. \qquad (4)$$

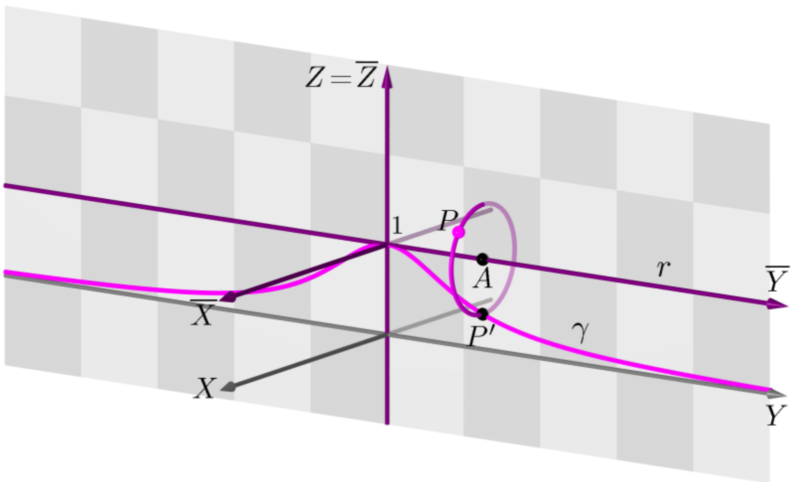

Fig. 34: Curva γ

A geratriz γ, nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, é dada por:

$$\gamma : \begin{cases} \overline{z} = \dfrac{1}{1+\overline{y}^2} - 1 \\ \overline{x} = 0 \end{cases} \quad , \quad \overline{y} \in \mathbb{R}, \quad \text{ou} \quad \gamma : \begin{cases} \overline{x}(t) = 0 \\ \overline{y}(t) = t \\ \overline{z}(t) = \dfrac{1}{1+t^2} - 1 \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R},$$

e o eixo de revolução r é dado por:

$$r : \begin{cases} \overline{z} = 0 \\ \overline{x} = 0 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad r = \text{eixo}-\overline{O}\,\overline{Y}.$$

Então, no sistema $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$, a equação cartesiana de S é:

$$-\sqrt{\overline{x}^2 + \overline{z}^2} = \frac{1}{1+\overline{y}^2} - 1 \iff \frac{\overline{y}^2}{1+\overline{y}^2} = \sqrt{\overline{x}^2 + \overline{z}^2} \tag{5}$$

pois, para todo $P' = (0, \overline{y}', \overline{z}') \in \gamma$, $\overline{z}' = \dfrac{1}{1+\overline{y}'^2} - 1 < 0$, e suas equações paramétricas são:

$$S : \begin{cases} \overline{x}(s,t) = \dfrac{t^2}{1+t^2} \cos s \\ \overline{y}(s,t) = t \\ \overline{z}(s,t) = \dfrac{t^2}{1+t^2} \operatorname{sen} s \end{cases} , \quad s, t \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

pois o paralelo $\mathcal{P}_t$, contido no plano $y = t$, é um círculo de centro $A(t) = (0, t, 0)$ e raio igual a $1 - \dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{t^2}{1+t^2}$.

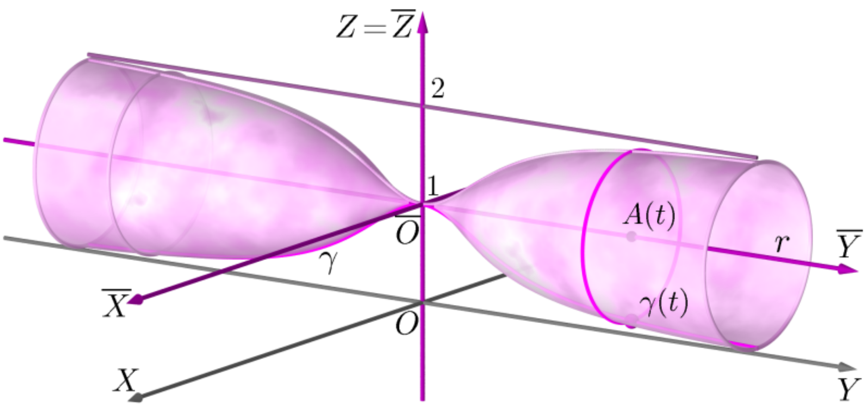

Fig. 35: Superfície S

Logo, por (4), (5) e (6), obtemos que:

$$\frac{y^2}{1+y^2} = \sqrt{x^2 + (z-1)^2} \iff y^4 = (1+y^2)^2(x^2 + (z-1)^2)$$

é a equação cartesiana, e

$$S : \begin{cases} x(s,t) = \dfrac{t^2}{1+t^2} \cos s \\ y(s,t) = t \\ z(s,t) = \dfrac{t^2}{1+t^2} \operatorname{sen} s + 1 \end{cases} , \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

são as equações paramétricas da superfície de revolução S nas coordenadas x, y e z. $\square$

Nos exemplos abaixo, veremos como obter as equações de uma superfície de revolução quando a geratriz e o eixo estão contidos num plano arbitrário.

Exemplo 8

Determine a equação cartesiana e uma equação paramétrica da superfície de revolução S obtida girando o círculo

$$\gamma : \begin{cases} (y-2)^2 + z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

em torno da reta $r : \begin{cases} y = z \\ x = 0 \end{cases}$

Solução.

A geratriz γ é um círculo de centro $(0, 2, 0)$ e raio 1, contido no plano YZ, e o eixo r é a reta paralela ao vetor $\overrightarrow{u} = (0, 1, 1)$ que passa pela origem.

Primeiro observe que a curva γ não intersecta a reta r. De fato, se existisse $P' = (0, y', z')$ pertencente a $\gamma \cap r$, então $y' = z'$ e $(y'-2)^2 + z'^2 = 1$, ou seja,

$$(y'-2)^2 + y'^2 = 1 \iff 2y'^2 - 4y' + 3 = 0\,,$$

que não possui solução real, pois seu discriminante é $\Delta = 16 - 4 \times 2 \times 3 < 0$, uma contradição.

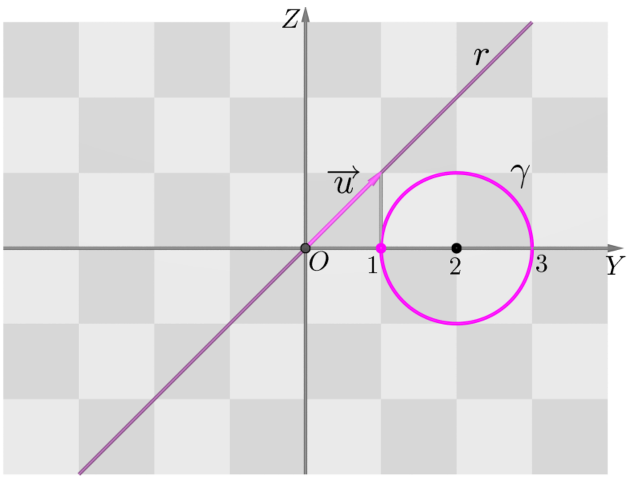

Fig. 36: Círculo γ

Além disso, como o centro $(0, 2, 0)$ pertence ao hiperplano $\begin{cases} y > z \\ x = 0 \end{cases}$, temos que:

$$y' > z'\,, \tag{7}$$

para todo ponto $P' = (0, y', z')$ pertencente a γ.

Sendo o eixo r paralelo ao vetor $\overrightarrow{u} = (0, 1, 1)$, os paralelos de S estão contidos nos planos

$$y + z = \text{const.} \tag{8}$$

perpendiculares ao vetor $\overrightarrow{u}$.

Pela definição, $P = (x, y, z) \in S$ se, e só se, existe $P' = (0, y', z') \in \gamma$ tal que P e P' estão sobre o mesmo paralelo $\mathcal{P}$.

Então, por (8),

$$y + z = y' + z'\,, \tag{9}$$

e, se C é o centro do paralelo, então

$$d(P'C) = d(P, C)$$

é o raio de $\mathcal{P}$.

Por outro lado, como os triângulos OPC e $OP'C$ são congruentes e retângulos em C, vemos que

$$d(O, P') = d(O, P) \iff y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2\,. \tag{10}$$

Logo, por (9) e (10),

$$\begin{aligned}
& y'^2+(y+z-y')^2 = x^2+y^2+z^2\\
\Longleftrightarrow\ & 2y'^2-2y'(y+z)+y^2+z^2+2yz = x^2+y^2+z^2\\
\Longleftrightarrow\ & 2y'^2-2y'(y+z)+2yz-x^2=0\\
\Longleftrightarrow\ & y'=\frac{2(y+z)\pm\sqrt{4(y+z)^2-8(2yz-x^2)}}{4}\\
\Longleftrightarrow\ & y'=\frac{(y+z)\pm\sqrt{(y+z)^2-2(2yz-x^2)}}{2}\\
\Longleftrightarrow\ & y'=\frac{(y+z)\pm\sqrt{y^2+2yz+z^2-4yz+2x^2}}{2}\\
\Longleftrightarrow\ & y'=\frac{(y+z)\pm\sqrt{(y-z)^2+2x^2)}}{2}\,.
\end{aligned}$$

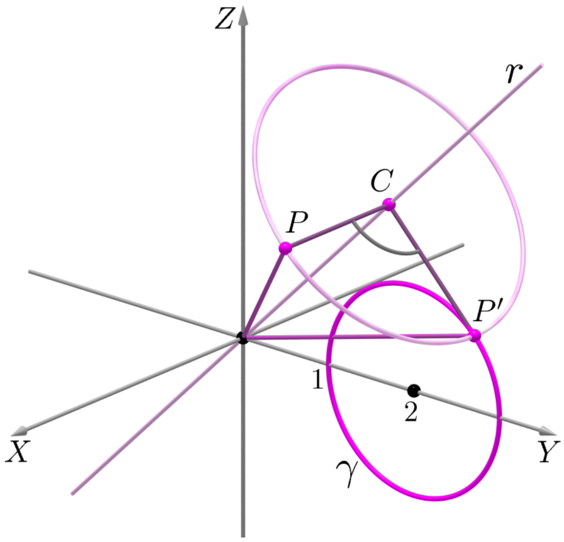

Fig. 37: Círculo γ e $P\in S$

Mas, como por (7) e por (9),

$$y'>z'=y+z-y' \Longleftrightarrow y'>\frac{y+z}{2}\,,$$

obtemos que:

$$y'=\frac{(y+z)+\sqrt{(y-z)^2+2x^2)}}{2}\,. \qquad (11)$$

Assim, sendo

$$(y'-2)^2+z'^2=1 \Longleftrightarrow y'^2+z'^2-4y'+3=0$$

temos, por (10) e (11), que:

$$x^2+y^2+z^2-2\left(y+z+\sqrt{(y-z)^2+2x^2}\right)+3=0$$

é a equação cartesiana de S.

Vamos determinar agora as equações de S por uma rotação dos eixos OX, OY e OZ.

Seja $O\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$ um sistema de eixos ortogonais, no qual os semi-eixos positivos $O\,\overline{X}$, $O\,\overline{Y}$ e $O\,\overline{Z}$ têm a direção e o mesmo sentido, respectivamente, dos vetores:

$$\overrightarrow{v_1}=(1,0,0)\,; \qquad \overrightarrow{v_2}=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,; \qquad \overrightarrow{v_3}=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,,$$

onde $\overrightarrow{v_3}$ é um vetor unitário paralelo ao eixo r.

Sendo

$$(x,y,z)=\overline{x}\,\overrightarrow{v_1}+\overline{y}\,\overrightarrow{v_2}+\overline{z}\,\overrightarrow{v_3}\,,$$

ou seja,

$$(x,y,z)=\overline{x}\,(1,0,0)+\overline{y}\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\overline{z}\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,, \qquad (12)$$

a geratriz e o eixo r nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$ e $\overline{z}$ são dados por:

$$\gamma : \begin{cases} \frac{1}{2}(\overline{y}+\overline{z})^2 + \frac{1}{2}(-\overline{y}+\overline{z})^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}(\overline{y}+\overline{z}) + 3 = 0 \\ \overline{x} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \gamma : \begin{cases} \overline{y}^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}\,\overline{y} + \overline{z}^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}\overline{z} = -3 \\ \overline{x} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \gamma : \begin{cases} \left(\overline{y} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\overline{z} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = -3 + \frac{4}{2} + \frac{4}{2} = 1 \\ \overline{x} = 0 \end{cases}$$

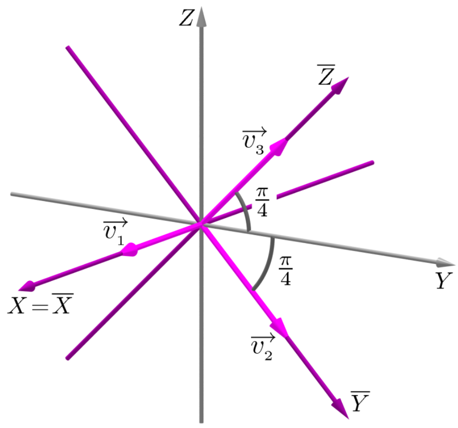

Fig. 38: Rotação do sistema de eixos

e

$$r : \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{y}+\overline{z}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\overline{y}+\overline{z}) \\ \overline{x} = 0 \end{cases} \iff r : \begin{cases} \overline{y} = 0 \\ \overline{x} = 0 \end{cases} \iff r = \text{eixo} - O\overline{Z}\,.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \langle (x,y,z), \overrightarrow{v_1} \rangle = x \\ \overline{y} &= \langle (x,y,z), \overrightarrow{v_2} \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(y-z) \\ \overline{z} &= \langle (x,y,z), \overrightarrow{v_3} \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(y+z)\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Assim, como, por (7), $\overline{y}' = \frac{\sqrt{2}}{2}(y'-z') > 0$ para todo ponto $P' = (0, \overline{y}', \overline{z}')$ pertencente a γ, devemos substituir $\overline{z}'$ por $\overline{z}$ e $\overline{y}'$ por $\sqrt{\overline{x}^2 + \overline{y}^2}$ em

$$\overline{y}'^2 + \overline{z}'^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}(\overline{y}' + \overline{z}') + 3 = 0\,,$$

para obtermos a equação cartesiana de S nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$ e $\overline{z}$:

$$\overline{x}^2 + \overline{y}^2 + \overline{z}^2 - 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\overline{x}^2 + \overline{y}^2} + \overline{z}\right) + 3 = 0\,.$$

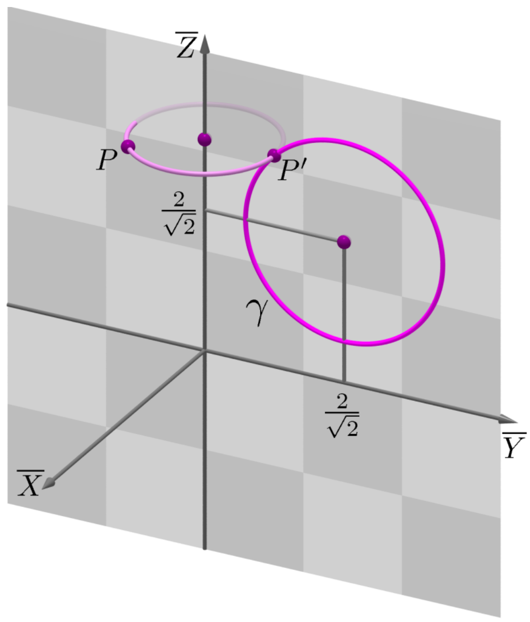

Fig. 39: Ponto P girando em torno do eixo$-\overline{O}\,\overline{Z}$

Logo, por (13),

$$x^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 + \frac{1}{2}(y+z)^2 - 2\sqrt{2}\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(y+z)\right) + 3 = 0$$

$$\iff x^2 + y^2 + z^2 - 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2x^2 + (y-z)^2} + (y+z)}{\sqrt{2}}\right) + 3 = 0$$

$$\iff x^2 + y^2 + z^2 - 2\left(y + z + \sqrt{2x^2 + (y-z)^2}\right) + 3 = 0\,,$$

é a equação cartesiana de S nas coordenadas x, y e z.

Para parametrizarmos a superfície S, devemos primeiro parametrizar a geratriz γ nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$:

$$\gamma : \begin{cases} \overline{x}(s) = 0 \\ \overline{y}(s) = \cos s + \sqrt{2} \\ \overline{z}(s) = \operatorname{sen} s + \sqrt{2} \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$S : \begin{cases} \overline{x}(s,t) = (2+\cos s)\cos t \\ \overline{y}(s,t) = (2+\cos s)\operatorname{sen} t \\ \overline{z}(s,t) = \operatorname{sen} s + \sqrt{2} \end{cases}, \quad s,t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização de S nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$ e $\overline{z}$, pois o paralelo $\mathcal{P}_s$, contido no plano $\overline{z} = \operatorname{sen} s + \sqrt{2}$, é um círculo de centro $A(s) = (0, 0, \operatorname{sen} s + \sqrt{2})$ e raio igual a $\cos s + \sqrt{2}$.

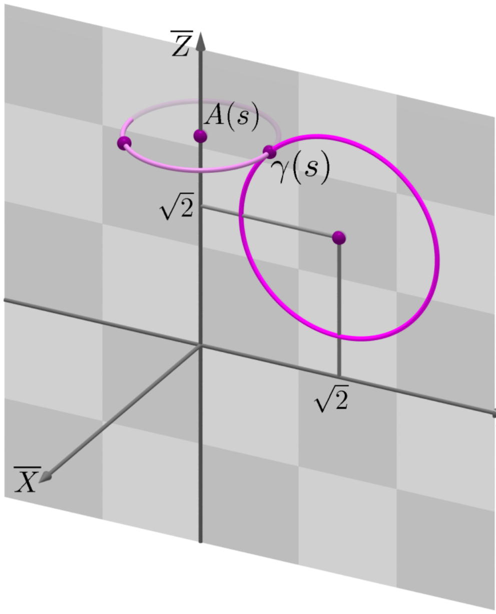

Fig. 40: Parametrização da geratriz γ

Finalmente, por (12),

$$S : \begin{cases} x(s,t) = \overline{x}(s,t) = (2+\cos s)\cos t \\ y(s,t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overline{y}(s,t) + \overline{z}(s,t)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left((2+\cos s)\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} s + \sqrt{2}\right) \\ z(s,t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\overline{y}(s,t) + \overline{z}(s,t)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-(2+\cos s)\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} s + \sqrt{2}\right) \end{cases}, \quad s,t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização da superfície de revolução S nas coordenadas x, y z.

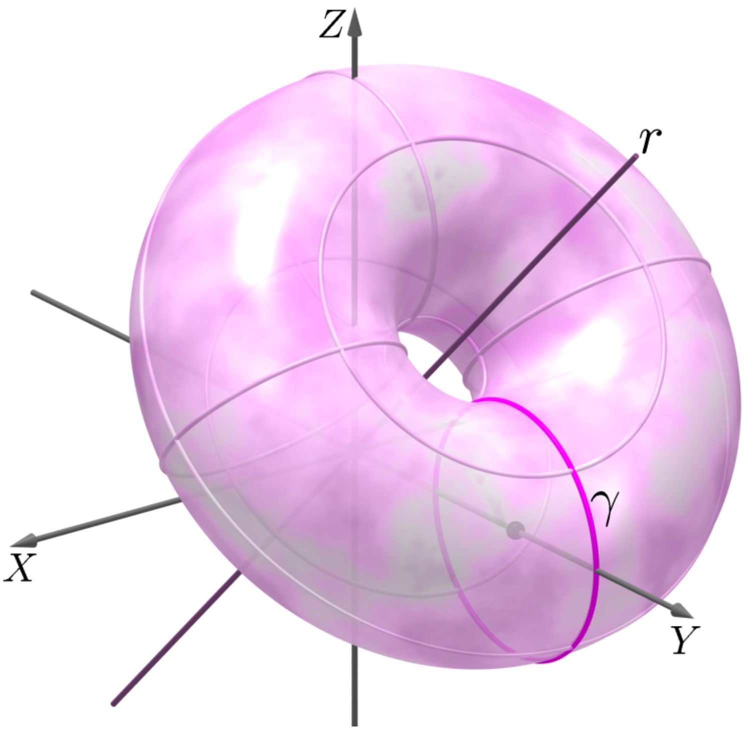

Fig. 41: Superfície S, toro de revolução obtido girando a geratriz γ em torno da reta r $\square$

Exemplo 9

Determine a equação cartesiana e uma equação paramétrica da superfície de revolução S *obtida girando a curva* $\gamma : \begin{cases} z = y^2 + 2 \\ x = 0 \end{cases}$, *em torno do eixo* $r : \begin{cases} y = z \\ x = 0 \,. \end{cases}$

Solução.

A curva γ é uma parábola, contida no plano YZ, de vértice $V = (0, 0, 2)$ e eixo-focal = eixo$-OZ$, e r é uma reta paralela ao vetor $\overrightarrow{u} = (0, 1, 1)$ que passa pela origem.

Observe que a curva γ não intersecta a reta r. De fato, se existisse $P = (0, y', z')$ pertencente a $\gamma \cap r$, então

$$\begin{aligned} & y' = z' \quad \text{e} \quad z' = y'^2 + 2 \\ \iff \; & y' = y'^2 + 2 \iff y'^2 - y' + 2 = 0 \,, \end{aligned}$$

que não possui solução real, pois o seu discriminante é $\Delta = 1 - 4 \times 2 < 0$, uma contradição.

Como o vértice $V = (0, 0, 2)$ de γ pertence ao semi-plano $\begin{cases} z' > y' \\ x' = 0 \end{cases}$, então, para todo $P = (0, y', z')$ pertencente a γ,

$$z' > y' \,. \tag{14}$$

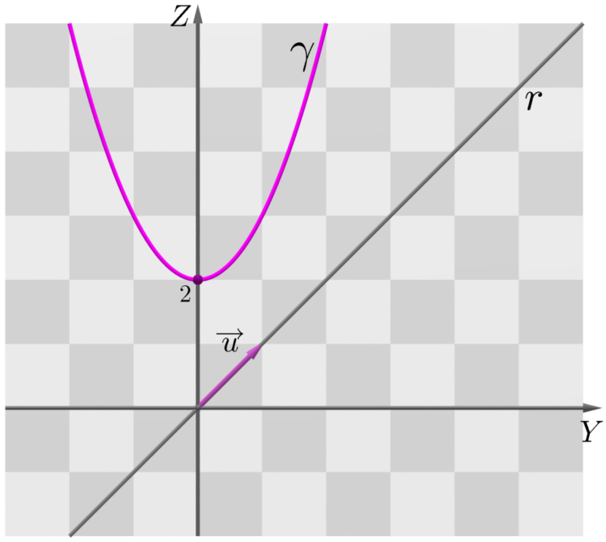

Fig. 42: Curva γ a rotacionar em torno da reta r

Seja $O\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$ o sistema de eixos ortogonais no qual os semi-eixos positivos $O\overline{X}$, $O\overline{Y}$ e $O\overline{Z}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido, respectivamente, dos vetores:

$$\overrightarrow{v_1} = (1, 0, 0) \,, \qquad \overrightarrow{v_2} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \,, \qquad \overrightarrow{v_3} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \,,$$

onde $\overrightarrow{v_3}$ é um vetor unitário na direção do eixo r.

Nesse sistema de eixos, como

$$(x, y, z) = \overline{x}\,\overrightarrow{v_1} + \overline{y}\,\overrightarrow{v_2} + \overline{z}\,\overrightarrow{v_3} = \overline{x}\,(1, 0, 0) + \overline{y}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \overline{z}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \,, \tag{15}$$

temos que:

$$\gamma : \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\overline{y} + \overline{z}) = \dfrac{1}{2}(\overline{y} + \overline{z})^2 + 2 \\ \overline{x} = 0 \end{cases} \iff \gamma : \begin{cases} \sqrt{2}(-\overline{y} + \overline{z}) = (\overline{y} + \overline{z})^2 + 4 \\ \overline{x} = 0 \end{cases} \tag{16}$$

e $$r : \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{y} + \overline{z}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\overline{y} + \overline{z}) \right. \iff r : \begin{cases} \overline{y} = 0 \\ \overline{x} = 0 \end{cases} \iff r = \text{eixo} - O\overline{Z} \,,$$

são a geratriz γ e o eixo r nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$ e $\overline{z}$.

Assim, como, por (15) e por (14),

$$\overline{y}' = \left\langle (x', y', z'), \overrightarrow{v_2} \right\rangle = \frac{1}{2}(y' - z') < 0\,,$$

para todo ponto $(0, y', z') \in \gamma$, vemos que, por (16):

$$\sqrt{2}\left(\sqrt{\overline{x}^2 + \overline{y}^2} + \overline{z}\right) = \left(-\sqrt{\overline{x}^2 + \overline{y}^2} + \overline{z}\right)^2 + 4$$

é a equação cartesiana de S nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$.

Além disso, sendo

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \left\langle (x,y,z), \overrightarrow{v_1} \right\rangle = x\,, \\ \overline{y} &= \left\langle (x,y,z), \overrightarrow{v_2} \right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(y - z)\,, \\ \overline{z} &= \left\langle (x,y,z), \overrightarrow{v_3} \right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(y + z)\,, \end{aligned} \qquad (17)$$

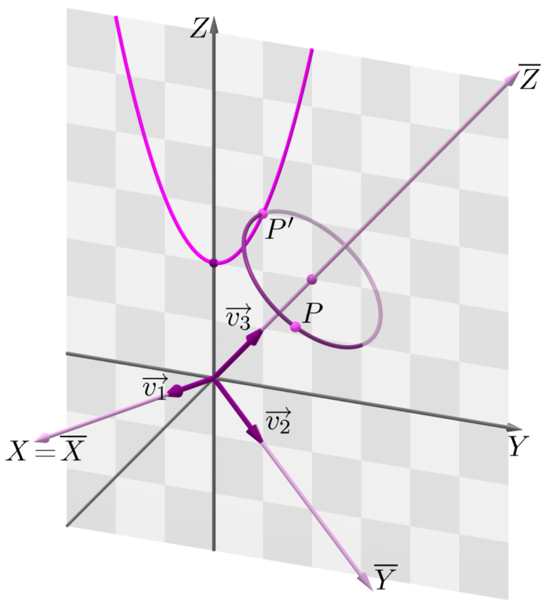

Fig. 43: Rotação da curva γ no sistema $O\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$

obtemos que:

$$\sqrt{2}\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(y+z)\right) = \left(-\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(y+z)\right)^2 + 4$$

$$\iff \sqrt{2x^2 + (y-z)^2} + (y+z) = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2x^2 + (y-z)^2} + (y+z)\right)^2 + 4$$

é a equação cartesiana de S nas coordenadas x, y e z.

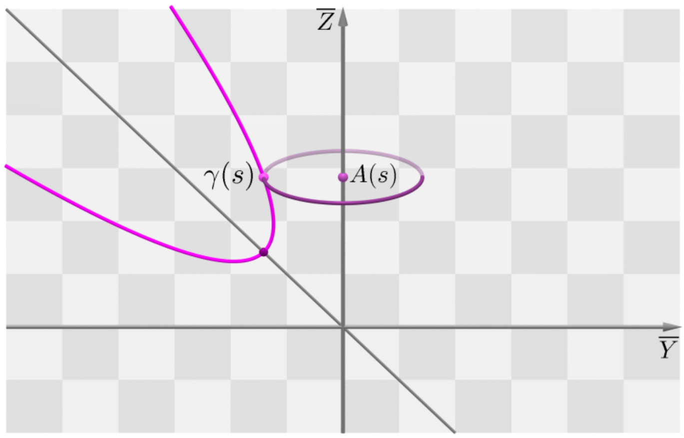

Fig. 44: Curva γ no sistema rotacionado

Parametrizando γ nas coordenadas x, y e z,

$$\gamma : \begin{cases} x(s) = 0 \\ y(s) = s \\ z(s) = s^2 + 2 \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}\,,$$

temos, por (17), que:

$$\gamma : \begin{cases} \overline{x}(s) = x(s) = 0 \\ \overline{y}(s) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(y(s) - z(s)) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(s - s^2 - 2) \\ \overline{z}(s) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(y(s) + z(s)) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(s + s^2 + 2) \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}\,,$$

é uma parametrização de γ nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$ e $\overline{z}$.

Então,

$$S : \begin{cases} \overline{x}(s,t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(s^2 - s + 2)\cos t \\ \overline{y}(s,t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(s^2 - s + 2)\,\text{sen}\, t \\ \overline{z}(s,t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(s^2 + s + 2) \end{cases}$$

é uma parametrização de S nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$ e $\overline{z}$, pois o paralelo $\mathcal{P}_s$, contido no plano $\overline{z} = \frac{\sqrt{2}}{2}(s + s^2 + 2)$, é um círculo de centro $A(s) = \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}(s + s^2 + 2)\right)$ e raio igual a $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}(s - s^2 - 2)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}(s^2 - s + 2)$.

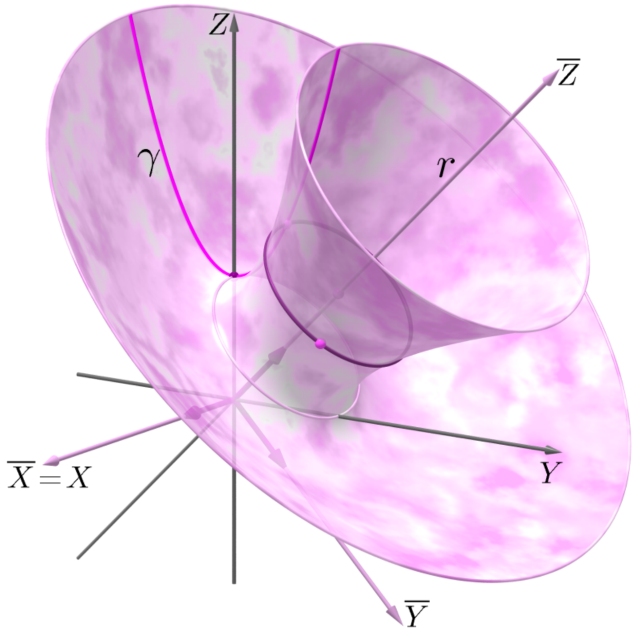

Fig. 45: Superfície de revolução S

Finalmente, por (15),

$$S : \begin{cases} x(s,t) = \overline{x}(s,t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(s^2 - s + 2)\cos t \\ y(s,t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{y}(s,t) + \overline{z}(s,t)) = \frac{1}{2}((s^2 - s + 2)\,\text{sen}\, t + s^2 + s + 2) \\ z(s,t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\overline{y}(s,t) + \overline{z}(s,t)) = \frac{1}{2}(-(s^2 - s + 2)\,\text{sen}\, t + s^2 + s + 2) \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

é uma parametrização da superfície de revolução S. $\square$

Exemplo 10

Seja $\mathcal{H}$ a hipérbole, contida no plano $\pi : x + 2y = 0$, com centro no ponto $C = (2, -1, 0)$, reta focal paralela ao vetor $(0, 0, 1)$, cuja distância do centro aos vértices é de 2 unidades e a distância do centro aos focos é de 4 unidades.

(a) *Determine uma equação paramétrica da hipérbole $\mathcal{H}$.*

(b) *Determine a equação cartesiana e uma equação paramétrica da superfície de revolução S obtida girando a hipérbole $\mathcal{H}$ em torno da reta*

$$r : \begin{cases} x(t) = 2t + 2 \\ y(t) = -t - 1 \\ z(t) = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

contida no plano π.

Solução.

(a) Sendo $a = 2$ e $c = 4$, vemos que $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$.

Por uma translação e uma rotação dos eixos, obtemos um novo sistema de eixos ortogonais $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}}\,\overline{\overline{Z}}$, no qual $\overline{O} = C = (2, -1, 0)$ e os semi-eixos positivos $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$, $\overline{O}\,\overline{\overline{Y}}$ e $\overline{O}\,\overline{\overline{Z}}$ possuem, respectivamente, a mesma direção e o mesmo sentido dos vetores unitários:

$$\overrightarrow{v_1} = (0, 0, 1)\,, \qquad \overrightarrow{v_2} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{v_3} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right).$$

Observe que $\overrightarrow{v_1}$ é paralelo à reta-focal, $\overrightarrow{v_2}$ é paralelo à reta não-focal e $\overrightarrow{v_3}$ é normal ao plano π.

Neste sistema de eixos ortogonais, a hipérbole $\mathcal{H}$ está contida no plano $\pi : \overline{\overline{z}} = 0$, tem centro na origem e reta-focal$=$eixo$-\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$. Então, sendo

$$\mathcal{H} : \begin{cases} \dfrac{\overline{\overline{x}}^2}{4} - \dfrac{\overline{\overline{y}}^2}{12} = 1 \\ \overline{\overline{z}} = 0 \end{cases}$$

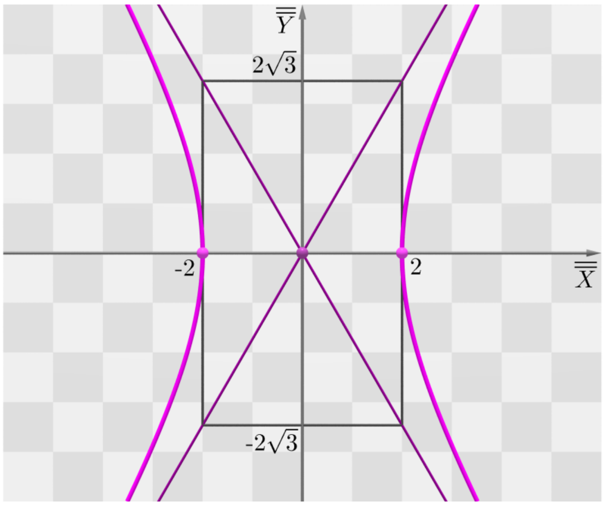

Fig. 46: Hipérbole $\mathcal{H}$

obtemos que:

$$\mathcal{H} : \begin{cases} \overline{\overline{x}}(s) = \pm 2\cosh s \\ \overline{\overline{y}}(s) = 2\sqrt{3}\,\text{senh}\, s \\ \overline{\overline{z}}(s) = 0 \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$$

é uma parametrização de $\mathcal{H}$ nas coordenadas $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{y}}$ e $\overline{\overline{z}}$.

Logo, como

$$(x, y, z) = \overline{\overline{x}}\,\overrightarrow{v_1} + \overline{\overline{y}}\,\overrightarrow{v_2} + \overline{\overline{z}}\,\overrightarrow{v_3} + C\,, \tag{18}$$

vemos que:

$$(x(s), y(s), z(s)) = \pm 2\cosh s(0, 0, 1) + 2\sqrt{3}\,\text{senh}\, s\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) + (2, -1, 0)\,,$$

ou seja,

$$\mathcal{H} : \begin{cases} x(s) = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\,\text{senh}\, s + 2 \\ y(s) = -\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\,\text{senh}\, s - 1 \\ z(s) = \pm 2\,\cosh s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização de $\mathcal{H}$ nas coordenadas x, y, z

(b) O eixo de revolução r é a reta paralela ao vetor $\overrightarrow{v_2}$ que passa pelo centro C que, no sistema $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}}\,\overline{\overline{Z}}$, é o eixo$-\overline{O}\,\overline{\overline{Y}}$.

Assim, no sistema $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}}\,\overline{\overline{Z}}$, $\mathcal{S}$ é a superfície de revolução obtida girando a hipérbole

$$\mathcal{H}: \begin{cases} \dfrac{\overline{\overline{x}}^2}{4} - \dfrac{\overline{\overline{y}}^2}{12} = 1 \\ \overline{\overline{z}} = 0 \end{cases} \quad ,$$

em torno do eixo$-\overline{O}\,\overline{\overline{Y}}$.

Devemos, então, substituir $\overline{\overline{y}}'$ por $\overline{\overline{y}}$ e $\overline{\overline{x}}'$ por $\pm\sqrt{\overline{\overline{x}}^2 + \overline{\overline{z}}^2}$ na equação

$$\frac{\overline{\overline{x}}'^2}{4} - \frac{\overline{\overline{y}}'^2}{16} = 1\,,$$

para obtermos a equação cartesiana de S nas variáveis $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{y}}$ e $\overline{\overline{z}}$:

$$\frac{\overline{\overline{x}}^2 + \overline{\overline{z}}^2}{4} - \frac{\overline{\overline{y}}'^2}{16} = 1 \iff \frac{\overline{\overline{x}}^2}{4} - \frac{\overline{\overline{y}}^2}{16} + \frac{\overline{\overline{z}}^2}{4} = 1 \tag{19}$$

Observe que aplicando a um ramo da hipérbole $\mathcal{H}$ uma rotação de 180^o em torno do eixo$-\overline{O}\,\overline{\overline{Y}}$ obtemos o outro ramo. Portanto, basta escolher um desses ramos para gerar S.

Sendo

$$\gamma: \begin{cases} \overline{\overline{x}}(s) = 2\cosh s \\ \overline{\overline{y}}(s) = 2\sqrt{3}\sinh s \\ \overline{\overline{z}}(s) = 0 \end{cases} \quad , \quad s \in \mathbb{R}\,,$$

uma parametrização de um ramo da hipérbole, temos que:

$$S: \begin{cases} \overline{\overline{x}}(s,t) = 2\cosh s\,\cos t \\ \overline{\overline{y}}(s,t) = 2\sqrt{3}\sinh s \\ \overline{\overline{z}}(s,t) = 2\cosh s\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad , \quad s,t \in \mathbb{R}\,, \tag{20}$$

é uma parametrização de S nas coordenadas $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{y}}$ e $\overline{\overline{z}}$, pois o paralelo $\mathcal{P}_s$, contido no plano $\overline{\overline{y}} = 2\sqrt{3}\,\text{senh}\,s$, é um círculo de centro $A(s) = (0, 2\sqrt{3}\,\text{senh}\,s, 0)$ e raio igual a $2\cosh s$.

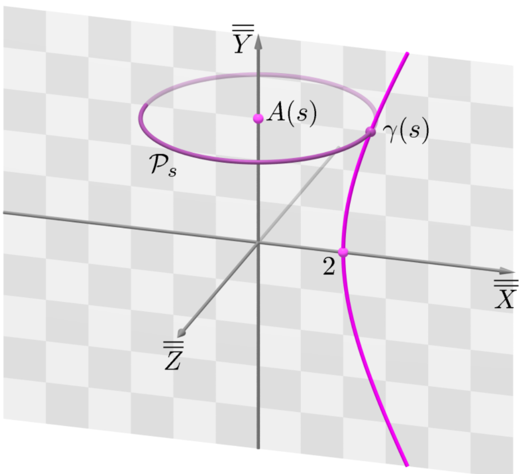

Fig. 47: Paralelo $\mathcal{P}_s$ de centro $A_s = A(s)$ passando por $\gamma(s)$

Como

$$(x, y, z) = \overline{\overline{x}}(0, 0, 1) + \overline{\overline{y}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) + \overline{\overline{z}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right) + (2, -1, 0)\,, \qquad (21)$$

obtemos que:

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{x}} &= \langle (x,y,z) - (2,-1,0), (0,0,1)\rangle = z\,, \\
\overline{\overline{y}} &= \left\langle (x,y,z) - (2,-1,0), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x - 4 - y - 1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x - y - 5)\,, \qquad (22)\\
\overline{\overline{z}} &= \left\langle (x,y,z) - (2,-1,0), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(x - 2 + 2y + 2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y)\,.
\end{aligned}$$

Então, por (20) e (21)

$$S : \begin{cases} x(s,t) = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\,\text{senh}\, s + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\cosh s\ \text{sen}\, t + 2 \\ y(s,t) = -\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\,\text{senh}\, s + \dfrac{4}{\sqrt{5}}\cosh s\ \text{sen}\, t - 1 \\ z(s,t) = 2\cosh s\ \cos t \end{cases} \quad , \quad s, t \in \mathbb{R}$$

é uma parametrização de S e, por (19) e (22),

$$\begin{aligned}
& \frac{z^2}{4} - \frac{1}{16 \times 5}(2x - y - 5)^2 + \frac{1}{4 \times 5}(x + 2y)^2 = 1 \\
\iff\ & 20z^2 - (2x - y - 5)^2 + 4(x + 2y)^2 = 80 \\
\iff\ & 20z^2 - (2x - y)^2 + 10(2x - y) - 25 + 4x^2 + 8xy + 16y^2 = 80 \\
\iff\ & 20z^2 - 4x^2 + 4xy - y^2 + 20x - 10y - 25 + 4x^2 + 8xy + 16y^2 = 80 \\
\iff\ & 15y^2 + 20z^2 + 12xy + 20x - 10y - 105 = 0
\end{aligned}$$

é a equação cartesiana da superfície de revolução S, nas coordenadas x, y e z. □

Exemplo 11

Seja $\mathcal{P}$ a parábola contida no plano $\pi : x + 2z = 0$, com vértice no ponto $V = (2, 0, -1)$ e foco no ponto $F = (4, 0, -2)$.

(a) *Parametrize a parábola $\mathcal{P}$.*

(b) *Determine a equação cartesiana e uma equação paramétrica da superfície de revolução S obtida girando a parábola $\mathcal{P}$ em torno da reta ℓ contida no plano π que passa pelo foco F e é perpendicular à reta-focal da parábola.*

Solução.

(a) Como, pelo item (b), a superfície S é obtida girando a parábola em torno da reta ℓ contida no plano π que passa pelo foco e é perpendicular à reta-focal r da parábola, vamos fazer uma translação e uma rotação dos eixos coordenados para obter um novo sistema de eixos ortogonais $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}}\,\overline{\overline{Z}}$, no qual $\overline{O} = F$ e os semi-eixos positivos $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$, $\overline{O}\,\overline{\overline{Y}}$, $\overline{O}\,\overline{\overline{Z}}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido, respectivamente, dos vetores unitários:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_1} &= \frac{\overrightarrow{VF}}{\|\overrightarrow{VF}\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad (\parallel r)\\
\overrightarrow{v_2} &= \overrightarrow{v_3} \times \overrightarrow{v_1} = (0,1,0) \quad (\parallel \ell)\\
\overrightarrow{v_3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \quad (\perp \pi)\,.
\end{aligned}$$

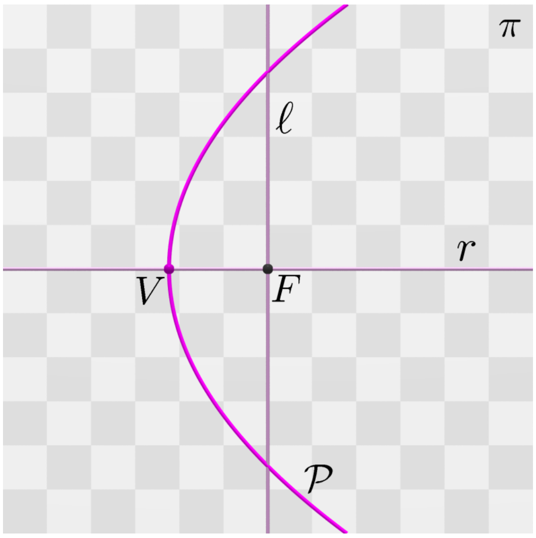

Fig. 48: Parábola $\mathcal{P}$ no plano π

Neste sistema de eixos, a parábola está contida no plano $\pi : \overline{\overline{z}} = 0$ e tem foco na origem, reta-focal = eixo$-\overline{O}\,\overline{\overline{X}}$, $p = d(V, F) = \sqrt{5}$, vértice $V = (-\sqrt{5}, 0, 0)$, ou seja,

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \overline{\overline{y}}^2 = 4\sqrt{5}\,(\overline{\overline{x}} + \sqrt{5}) \\ \overline{\overline{z}} = 0\,. \end{cases}$$

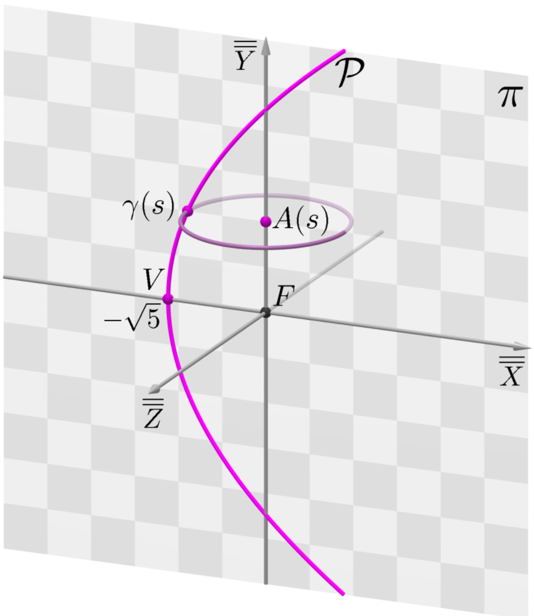

Fig. 49: Ponto $\gamma(s)$ na parábola $\mathcal{P}$ descrevendo o paralelo de centro $A(s)$

Sendo

$$\gamma : \begin{cases} \overline{\overline{x}}(s) = \dfrac{s^2}{4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \dfrac{s^2 - 20}{4\sqrt{5}} \\ \overline{\overline{y}}(s) = s \\ \overline{\overline{z}}(s) = 0 \end{cases} \quad , \quad s \in \mathbb{R}\,, \tag{23}$$

uma parametrização de $\mathcal{P}$ nas coordenadas $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{y}}$, $\overline{\overline{z}}$, e

$$(x, y, z) = \overline{\overline{x}}\,\overrightarrow{v_1} + \overline{\overline{y}}\,\overrightarrow{v_2} + \overline{\overline{z}}\,\overrightarrow{v_3} + F\,, \tag{24}$$

temos que:

$$(x(s), y(s), z(s)) = \frac{s^2-20}{4\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + s(0,1,0) + (4,0,-2),$$

ou seja,

$$\mathcal{P}: \begin{cases} x(s) = \dfrac{2(s^2-20)}{20} + 4 = \dfrac{s^2+20}{10} \\ y(s) = s \\ z(s) = -\dfrac{s^2-20}{20} - 2 = \dfrac{-s^2-20}{20} \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização de $\mathcal{P}$ nas coordenadas x, y, z.

(b) Por (23), o paralelo contido no plano $\overline{\overline{y}} = s$ é um círculo de centro $A(s) = (0, s, 0)$ e raio igual a $\left|\dfrac{s^2-20}{4\sqrt{5}}\right|$. Assim,

$$S: \begin{cases} \overline{\overline{x}} = \dfrac{s^2-20}{4\sqrt{5}} \cos t \\ \overline{\overline{y}} = s \\ \overline{\overline{z}} = \dfrac{s^2-20}{4\sqrt{5}} \operatorname{sen} t \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização de S nas coordenadas $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{y}}$, $\overline{\overline{z}}$.

Então, por (24),

$$S = \left\{ \frac{s^2-20}{4\sqrt{5}} \cos t \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + s(0,1,0) + \frac{s^2-20}{4\sqrt{5}} \operatorname{sen} t \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) + (4,0,-2) \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\},$$

ou seja,

$$S: \begin{cases} x(s,t) = \dfrac{s^2-20}{10} \cos t + \dfrac{s^2-20}{20} \operatorname{sen} t + 4 \\ y(s,t) = s \\ z(s,t) = -\dfrac{s^2-20}{20} \cos t + \dfrac{s^2-20}{10} \operatorname{sen} t - 2 \end{cases}$$

é uma parametrização de S nas coordenadas x, y, z.

Como, nas coordenadas $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{y}}$, $\overline{\overline{z}}$, o eixo de revolução é o eixo$-\overline{O}\,\overline{\overline{Y}}$, devemos substituir na equação da geratriz,

$$(\overline{\overline{y}}')^2 = 4\sqrt{5}(\overline{\overline{x}}' + \sqrt{5}),$$

$\overline{\overline{y}}'$ por $\overline{\overline{y}}$ e $\overline{\overline{x}}'$ por $\pm\sqrt{\overline{\overline{x}}^2 + \overline{\overline{z}}^2}$, para obtemos a equação cartesiana da superfície de revolução S nestas coordenadas:

$$\begin{aligned} S: \overline{\overline{y}}^2 = 4\sqrt{5}\left(\pm\sqrt{\overline{\overline{x}}^2 + \overline{\overline{z}}^2} + \sqrt{5}\right) &\iff S: \overline{\overline{y}}^2 - 20 = \pm 4\sqrt{5}\sqrt{\overline{\overline{x}}^2 + \overline{\overline{z}}^2} \\ &\iff S: \left(\overline{\overline{y}}^2 - 20\right)^2 = 80\left(\overline{\overline{x}}^2 + \overline{\overline{z}}^2\right). \end{aligned} \tag{25}$$

Além disso, por (24),

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{x}} &= \left\langle (x,y,z)-(4,0,-2), \overrightarrow{v_1} \right\rangle = \frac{2(x-4)}{\sqrt{5}} - \frac{z+2}{\sqrt{5}} = \frac{2x-z-10}{\sqrt{5}}\,;\\
\overline{\overline{y}} &= \left\langle (x,y,z)-(4,0,-2), \overrightarrow{v_2} \right\rangle = y\,;\\
\overline{\overline{z}} &= \left\langle (x,y,z)-(4,0,-2), \overrightarrow{v_3} \right\rangle = \frac{x-4}{\sqrt{5}} + \frac{2(z+2)}{\sqrt{5}} = \frac{x+2z}{\sqrt{5}}\,;
\end{aligned}$$

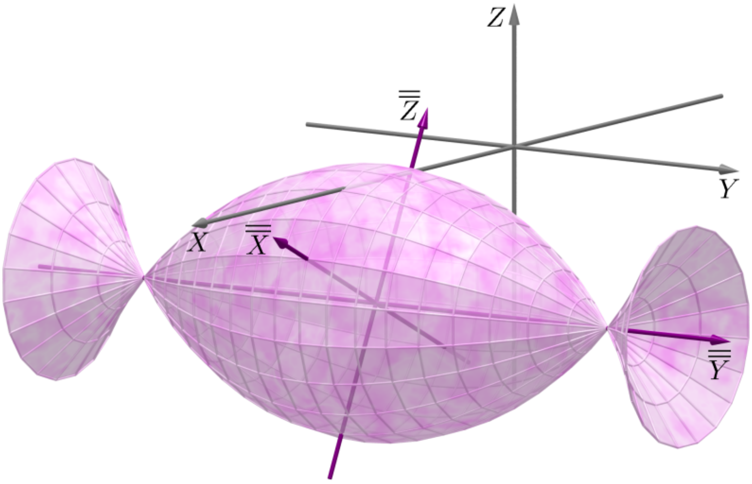

Fig. 50: Superfície S nos sistemas $OXYZ$ e $\overline{O}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}}\,\overline{\overline{Z}}$

Então, por (25),

$$\begin{aligned}
& S : (y^2-20)^2 = \frac{80}{5}\left((2x-z-10)^2 + (x+2z)^2\right)\\
\iff\ & S : y^4 - 40y^2 + 400 = 16(4x^2 + z^2 - 4xz - 20(2x-z) + 100 + x^2 + 4z^2 + 4xz)\\
\iff\ & S : -y^4 + 80x^2 + 40y^2 + 80z^2 - 640x + 320z + 1200 = 0
\end{aligned}$$

é a equação cartesiana de S nas coordenadas x, y, z. $\square$