

Geometria Diferencial I

Jorge Delgado - Katia Frensel

Sumário

1	Curvas Planas	1
1.	Curva Parametrizada Diferenciável	1
2.	Mudança de parâmetro; comprimento de arco	5
3.	Orientação de um espaço vetorial	13
4.	Fórmulas de Frenet	14
5.	Teorema Fundamental das Curvas Planas	27
6.	Forma Canônica Local para Curvas Planas	30
2	Curvas no Espaço	37
1.	Curva Parametrizada Diferenciável	37
2.	Produto Vetorial	41
3.	Teoria Local de Curvas no Espaço	45
4.	Forma Local das Curvas no Espaço	59
5.	Teoria do Contato	63
6.	Teorema Fundamental das Curvas	70
3	Superfícies Regulares	81
1.	Superfícies Regulares; Pré-imagens de valores regulares	81
2.	Mudança de Parâmetros; Funções Diferenciáveis sobre Superfícies	100
3.	Plano Tangente; Diferencial de uma Aplicação	118
4.	Primeira Forma Fundamental; Área	126
5.	Orientação de Superfícies	135

6.	Uma Caracterização das Superfícies Compactas Orientáveis	147
7.	Uma Definição Geométrica da Área	153
4	A Geometria da Aplicação de Gauss	161
1.	Aplicações Lineares Auto-Adjuntas e Formas Quadráticas	161
2.	A Definição da Aplicação de Gauss e suas Propriedades Fundamentais	165
3.	A Aplicação de Gauss em Coordenadas Locais	188
4.	Campos de Vetores	215
5.	Superfícies Mínicas	238
5	Geometria Intrínseca das Superfícies	251
1.	Isometrias; Aplicações Conformes	251
2.	Teorema de Gauss e as Equações de Compatibilidade	271
3.	Transporte Paralelo; Geodésicas	279
4.	Teorema de Gauss-Bonnet e suas Aplicações	315
6	Rigidez da Esfera	351
7	Aplicação Exponencial e Superfícies Completas	361

Capítulo 1

Curvas Planas

1. Curva Parametrizada Diferenciável

Definição 1.1 Uma *curva parametrizada diferenciável no plano* é uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^∞ definida num intervalo aberto $I = (a, b)$ da reta.

Se $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, dizemos que t é o *parâmetro* da curva; $\alpha(I) = \{\alpha(t) \mid t \in I\}$ é o *traço* da curva e o vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ é o *vetor tangente* (ou *vetor velocidade*) à curva α em $t \in I$.

Observação 1.1 Lembre que uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é de classe C^∞ se, e só se, suas funções coordenadas $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^∞ . E que a derivada de ordem j de α é dada por $\alpha^{(j)}(t) = (x^{(j)}(t), y^{(j)}(t))$ para todo $t \in I$.

Definição 1.2 Dizemos que uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é *regular* em $t = t_0 \in I$ quando $\alpha'(t_0) \neq 0$. Nesse caso, a reta r_{t_0} que passa por $\alpha(t_0)$ e é paralela ao vetor $\alpha'(t_0)$ é chamada de *reta tangente a α em t_0* e é dada por

$$r_{t_0} = \{\alpha(t_0) + s \alpha'(t_0) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Um *ponto singular* de α é um valor do parâmetro $t \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha'(t) = 0$.

Quando α é regular em todos os pontos $t \in I$, dizemos que α é uma *curva parametrizada diferenciável regular*.

Para o desenvolvimento da geometria diferencial local das curvas é essencial a existência de uma reta tangente à curva em todos os pontos. Portanto, restringiremos o nosso estudo apenas às curvas regulares, isto é, às curvas *sem pontos singulares*.

Exemplo 1.1 Vejamos alguns exemplos de curvas:

(a) A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha(t) = (x_0, y_0) + t(a, b),$$

com $a^2 + b^2 \neq 0$, é uma curva parametrizada diferenciável regular, pois $\alpha'(t) = (a, b) \neq (0, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, cujo traço é a reta que passa pelo ponto (x_0, y_0) e é paralela ao vetor (a, b) (ver Fig. 1).

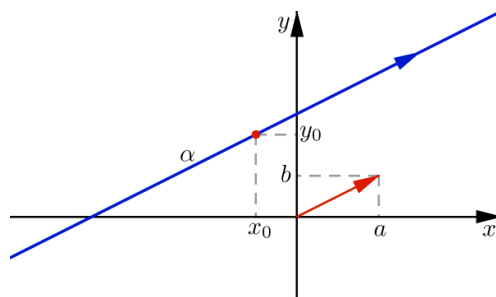


Fig. 1: Traço da curva α item (a)

(b) A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t) + (x_0, y_0),$$

com $r > 0$, é uma curva parametrizada diferenciável regular, pois $\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$ e, portanto, $\|\alpha'(t)\| = r \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

O traço da curva α é o círculo de centro (x_0, y_0) e raio r (ver Fig. 2).

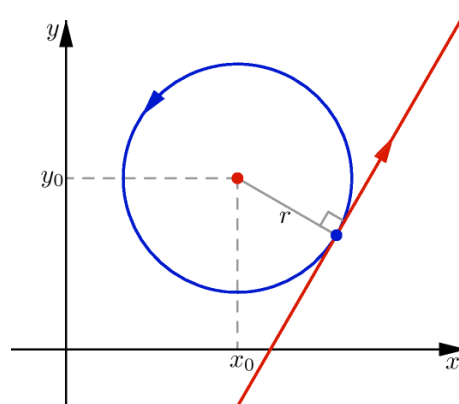


Fig. 2: Traço da curva α item (b)

(c) A curva parametrizada $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (t^3, t^2)$$

é diferenciável, mas não é regular, pois $\alpha'(t) = (3t^2, 2t) = (0, 0)$ para $t = 0$, ou seja, $t = 0$ é um ponto singular.

Observando que as coordenadas de um ponto da curva satisfazem à equação $y^3 = x^2$, podemos traçar a curva (ver Fig. 3).

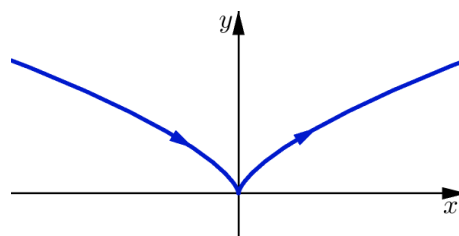


Fig. 3: Traço da curva α item (c)

(d) A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (t, |t|)$$

não é uma curva parametrizada diferenciável, pois a função coordenada $t \mapsto |t|$ não é diferenciável na origem (ver Fig. 4).

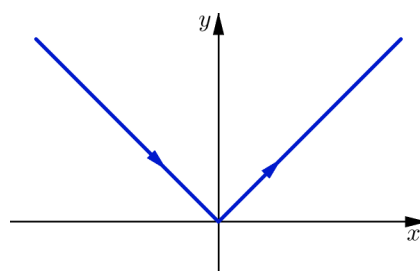


Fig. 4: Traço da curva α item (d)

(e) A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0), & \text{se } t \leq 0 \\ \left(t, t^2 \operatorname{sen} \frac{1}{t}\right), & \text{se } t > 0, \end{cases}$$

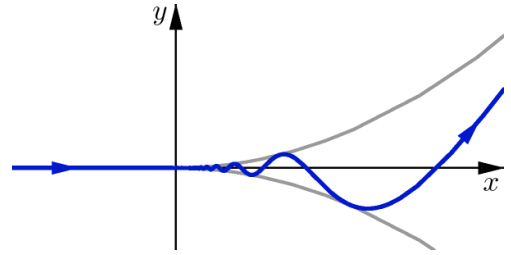


Fig. 5: Traço da curva α item (e)

não é uma curva parametrizada diferenciável, pois a sua segunda função coordenada

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0 \\ t^2 \operatorname{sen} \frac{1}{t}, & \text{se } t > 0, \end{cases}$$

é de classe C^1 que não possui derivada de segunda ordem na origem (ver Fig. 5). \square

Definição 1.3 Dizemos que uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é *simples* quando a aplicação α é injetora, isto é, $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ se $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in I$.

É fácil verificar que as curvas dos exemplos (a), (c), (d) e (e) são simples, e que a curva do exemplo (b) não é simples, já que é periódica de período 2π .

Exemplo 1.2 Continuamos com os exemplos:

(f) A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$$

é uma curva parametrizada diferenciável regular, pois $\alpha'(t) = (3t^2 - 4, 2t) \neq (0, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Mas α não é simples, pois:

$$\alpha(t) = \alpha(s) \iff \begin{cases} t^3 - 4t = s^3 - 4s \\ e \\ t^2 - 4 = s^2 - 4 \end{cases} \iff \begin{cases} t(t^2 - 4) = s(s^2 - 4) \\ e \\ t^2 - 4 = s^2 - 4 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2 \text{ e } s = -2 \\ \text{ou} \\ t = s \end{cases}.$$

Para fazer um esboço do traço de α , observe o sinal das funções coordenadas $x(t) = t^3 - 4t$ e $y(t) = t^2 - 4$ nos intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$ e $(2, +\infty)$ (ver Fig. 6).

Observe também que $\alpha'(-2) = (8, -4) \neq (8, 4) = \alpha'(2)$, apesar de termos $\alpha(2) = \alpha(-2) = (0, 0)$. Assim, não faz sentido falar no vetor tangente à curva α no ponto $\alpha(t)$ e, sim, no vetor tangente à curva α no ponto t .

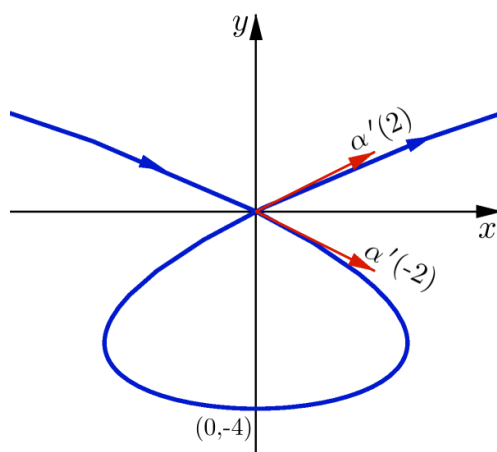


Fig. 6: Traço da curva α item (f)

(g) Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação dada por

$$\alpha(t) = (\cos t (2 \cos t - 1), \sin t (2 \cos t - 1)).$$

Como $\alpha'(t) = (\sin t - 4 \cos t \sin t, -\cos t + 2(\cos^2 t - \sin^2 t))$, temos que se $\alpha'(t) = (0, 0)$ então $\sin t = 0$ ou $\cos t = \frac{1}{4}$. Mas,

- $\sin t = 0 \implies \cos t = \pm 1 \implies -\cos t + 2(\cos^2 t - \sin^2 t) = \begin{cases} 1 \\ \text{ou} \\ 3 \end{cases}$.

- $\cos t = \frac{1}{4} \implies \sin t = \pm \sqrt{\frac{15}{16}} \implies -\cos t + 2(\cos^2 t - \sin^2 t) = -\frac{1}{4} + 2\left(\frac{1}{16} - \frac{15}{16}\right) = -\frac{8}{4}$.

Logo α é uma curva parametrizada diferenciável regular.

Para fazermos um esboço do traço da curva α basta analisar a curva no intervalo $[-\pi, \pi]$. Primeiro observe que, se $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, então:

$$x(t) = 0 \iff \begin{cases} t = \pm \frac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ t = \pm \frac{\pi}{3}, \end{cases} \quad \text{e} \quad y(t) = 0 \iff \begin{cases} t = \pm \frac{\pi}{3} \\ \text{ou} \\ t = \pm \pi \\ \text{ou} \\ t = 0. \end{cases}$$

Marque os pontos $\alpha(0) = (1, 0)$, $\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, -1)$, $\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$, $\alpha(\pi) = \alpha(-\pi) = (3, 0)$ e $\alpha\left(\frac{\pi}{3}\right) = \alpha\left(-\frac{\pi}{3}\right) = (0, 0)$ no plano, e depois estude o sinal das funções coordenadas $x(t) = \cos t (2 \cos t - 1)$ e $y(t) = \sin t (2 \cos t - 1)$ nos intervalos $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$, $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3})$, $(-\frac{\pi}{3}, 0)$, $(0, \frac{\pi}{3})$, $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ e $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ (ver Fig. 7).

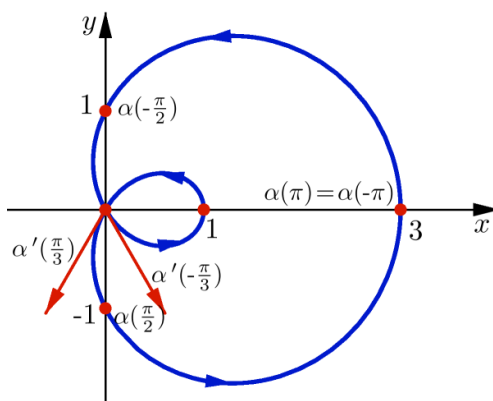


Fig. 7: Traço da curva α item (g)

Uma maneira mais fácil de obter o traço da curva α é utilizar a equação da curva em coordenadas polares: $r = 2 \cos \theta - 1$. \square

2. Mudança de parâmetro; comprimento de arco

Duas curvas diferenciáveis podem ter o mesmo traço. Por exemplo, as curvas $\alpha(t) = (t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$, e $\beta(s) = (2s + 1, 4s + 2)$, $s \in \mathbb{R}$, têm o mesmo traço, que é a reta que passa pela origem e é paralela ao vetor $(1, 2)$, pois $\beta(s) = \alpha(2s + 1)$. Observe que o vetor tangente a β no ponto s é o dobro do vetor tangente a α no ponto $2s + 1$, já que $\beta'(s) = 2\alpha'(2s + 1)$.

O mesmo acontece com os pares de curvas:

- $\alpha_1(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$ e $\beta_1(s) = (2 \cos \frac{s}{2}, 2 \sin \frac{s}{2})$, $s \in \mathbb{R}$, pois $\beta_1(2s) = \alpha_1(s)$. Neste exemplo, também temos $\alpha_1'(s) = 2\beta_1'(2s)$, $s \in \mathbb{R}$ (ver Fig. 8).

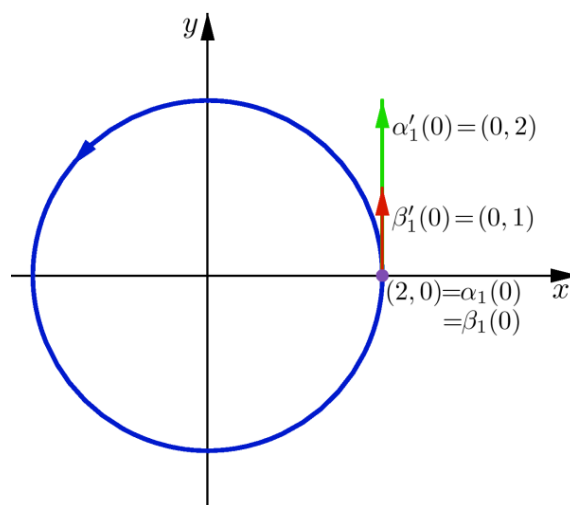


Fig. 8: Os traços das curvas α_1 e β_1 coincidem, mas os vetores tangentes não

- $\alpha_2(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$ e $\beta_2(s) = (\sin s, \cos s)$, $s \in \mathbb{R}$, pois $\alpha_2(t) = \beta_2\left(-t + \frac{\pi}{2}\right)$. Neste exemplo, $\alpha_2'(t) = -\beta_2'\left(-t + \frac{\pi}{2}\right)$ (ver Fig. 9).

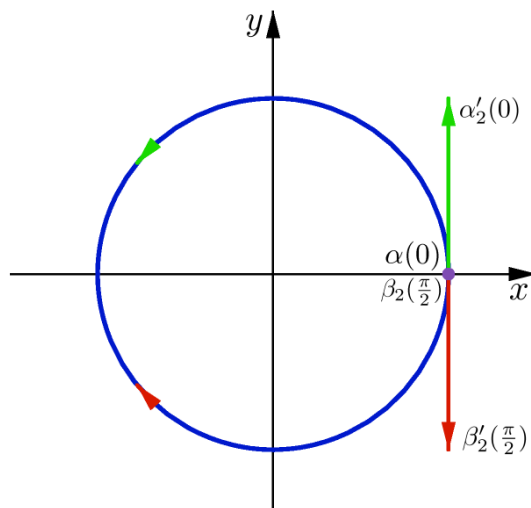


Fig. 9: Os traços das curvas α_1 e β_1 coincidem, mas os vetores tangentes e o sentido do percurso não

Na realidade, dada uma curva parametrizada diferenciável regular, podemos obter várias curvas parametrizadas diferenciáveis regulares que têm o mesmo traço que α , da seguinte maneira.

Proposição 2.1 *Sejam I e J intervalos abertos da reta, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável regular e $h : J \rightarrow I$ uma função diferenciável (C^∞) tal que $h(J) = I$ e $h'(s) \neq 0$ para todo $s \in J$. Então a aplicação $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva diferenciável regular que tem o mesmo traço de α .*

Prova.

Como α e h são de classe C^∞ , temos que $\alpha \circ h$ é de classe C^∞ com $(\alpha \circ h)'(s) = \alpha'(h(s)) \cdot h'(s) \neq 0$, pois $h'(s) \neq 0$ e $\alpha'(h(s)) \neq 0$ para todo $s \in J$.

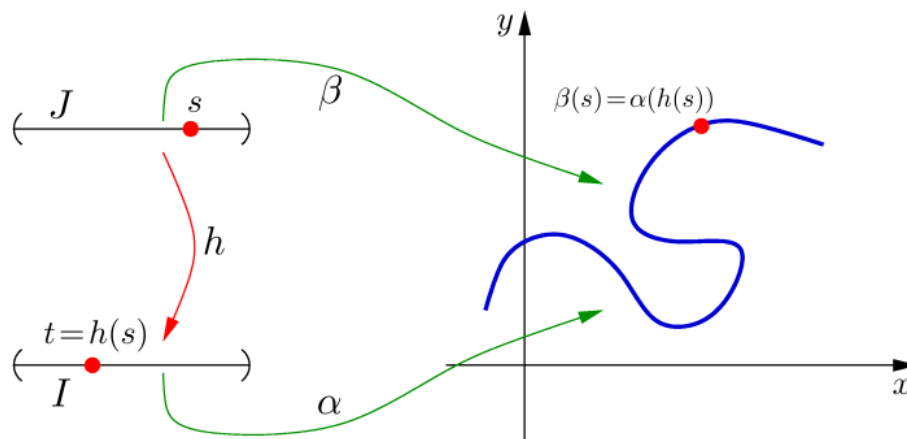


Fig. 10: Os traços das curvas α e $\beta = \alpha \circ h$ coincidem

Além disso, $\text{traço}(\alpha \circ h) = (\alpha \circ h)(J) = \alpha(h(J)) = \alpha(I) = \text{traço } \alpha$ (ver Fig. 10).

A curva $\beta = \alpha \circ h$ é chamada *reparametrização de α por h* , e a função h é dita *mudança de parâmetro*. ■

Observação 2.1 A mudança de parâmetro $h : J \rightarrow I$ é um difeomorfismo de classe C^∞ .

Prova.

Para provar esta observação, vamos utilizar os dois teoremas abaixo de análise na reta:

(I) (E. Lima, *Curso de Análise Vol. I*, pag. 237) Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua injetora definida num intervalo I . Então f é monótona, $J = f(I)$ é um intervalo e sua inversa $f^{-1} : J \rightarrow I$ é contínua.

(II) (E. Lima, *Curso de Análise Vol. I*, pag. 263) Seja $f : I \rightarrow J$ uma bijeção contínua, onde I e J são intervalos, tal que $f^{-1} : J \rightarrow I$ é contínua. Se f é derivável em $t_0 \in I$, então f^{-1} é derivável em $f(t_0) = s_0$ se, e só se, $f'(t_0) \neq 0$. Neste caso,

$$(f^{-1})'(s_0) = \frac{1}{f'(t_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(s_0))}.$$

De fato, como h é C^∞ e $h'(s) \neq 0$ para todo $s \in J$, então $h'(s) > 0$ ou $h'(s) < 0$ para todo $s \in J$. Logo, pelo Teorema do Valor Médio, h é crescente ou decrescente (estritamente) em J . Em qualquer caso, h é uma bijeção e, portanto, pelo teorema (I), $h^{-1} : I \rightarrow J$ é contínua.

Assim, pelo teorema (II), h^{-1} é diferenciável e $(h^{-1})' = \frac{1}{h' \circ h^{-1}}$. Como h' e h^{-1} são contínuas temos que h^{-1} é de classe C^1 . E se supusermos que h^{-1} é de classe C^k , obteremos que $(h^{-1})'$ é de classe C^k e, portanto, h^{-1} é de classe C^{k+1} . Então, por indução, h^{-1} é de classe C^∞ . ■

Observação 2.2 Se β é uma reparametrização de α por $h : J \rightarrow I$, isto é, $\beta(s) = \alpha \circ h(s)$ para todo $s \in J$, então α é uma reparametrização de β por h^{-1} , pois $\beta \circ h^{-1}(t) = \alpha(t)$ para todo $t \in I$.

Definição 2.1 A *orientação* de uma curva plana α é o sentido de percurso do traço de α .

Observação 2.3 Seja $\beta = \alpha \circ h$ uma reparametrização da curva α . Então β e α têm a mesma orientação se $h'(s) > 0$ para todo $s \in J$; e β e α têm orientações opostas se $h'(s) < 0$ para todo $s \in J$.

Exemplo 2.1 Sejam a curva diferenciável regular $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (r \cos t + a, r \sin t + b)$, com $r > 0$, e o difeomorfismo de classe C^∞ $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $h(s) = \frac{s}{r}$. Então $\beta = \alpha \circ h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\beta(s) = \left(r \cos \frac{s}{r} + a, r \sin \frac{s}{r} + b \right)$, é uma reparametrização de α que tem a mesma orientação que α . Além disso, $\|\beta'(s)\| = 1$ para todo $s \in \mathbb{R}$. \square

Exemplo 2.2 A curva diferenciável $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\beta(s) = (-2s+1, -4s+2)$, é uma reparametrização da curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t, 2t)$, que tem orientação oposta, pois a mudança de parâmetro $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(s) = -2s + 1$, é uma função decrescente (ver Fig. 11). \square

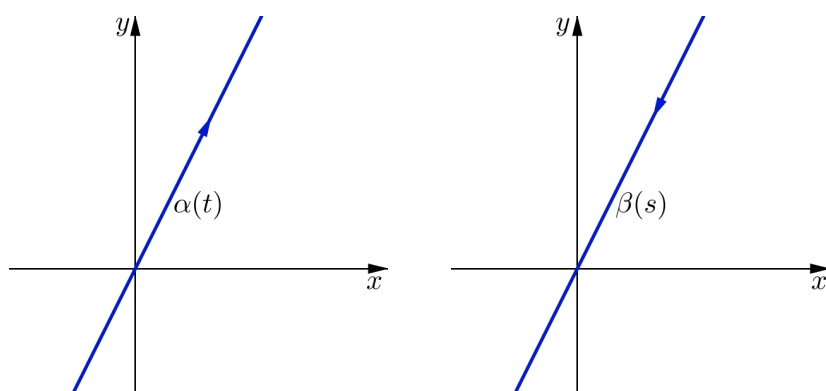


Fig. 11: Os traços das curvas α e $\beta = \alpha \circ h$ coincidem mas o sentido do percurso não

Definição 2.2 Sejam $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação, $\mathcal{P} = \{ a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \}$ uma partição do intervalo $[a, b]$ e

$$\ell(\alpha; \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$$

o comprimento da linha poligonal que tem vértices nos pontos $\alpha(t_0), \alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)$ (Fig. 12).

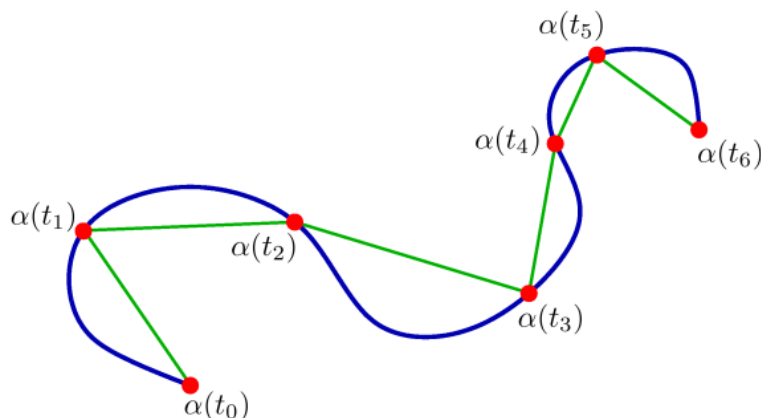


Fig. 12: Aproximação poligonal da curva α

Dizemos que α é *retificável* se o conjunto $\{\ell(\alpha; \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ partição de } [a, b]\}$ é limitado. Neste caso,

$$\ell(\alpha) = \sup \{ \ell(\alpha; \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ partição de } [a, b] \}$$

é, por definição, o *comprimento* de α .

Teorema 2.1 Se a aplicação $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é contínua e retificável, então

$$\ell(\alpha) = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \ell(\alpha; \mathcal{P}),$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\mathcal{P}| < \delta \implies |\ell(\alpha) - \ell(\alpha; \mathcal{P})| < \varepsilon$, onde $|\mathcal{P}| = \max_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}|$.

Além disso, se α é de classe C^1 , então α é retificável e

$$\lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \ell(\alpha; \mathcal{P}) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

(Ver E. Lima, Curso de Análise Vol. II, Cap. II, seção 4).

Definição 2.3 Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva parametrizada diferenciável regular, a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(s)\| ds,$$

é chamada *função comprimento de arco da curva a partir de t_0* , onde $t_0 \in I$.

Observação 2.4 A função comprimento de arco $s : I \rightarrow J$, onde $J = s(I)$, é um difeomorfismo de classe C^∞ sobre o intervalo aberto J .

De fato, como $s'(t) = \|\alpha'(t)\| = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle^{1/2} > 0$ e as funções $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$, $H : I \rightarrow \mathbb{R}$, $H(t) = x'(t)^2 + y'(t)^2$, onde $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, são de classe C^∞ , temos que s' é de classe C^∞ e, portanto, s é de classe C^∞ .

Logo, pela observação 2.1, $s : I \rightarrow J$ é um difeomorfismo de classe C^∞ sobre o intervalo aberto $J = s(I)$.

- Além disso, se $s^{-1} = h : J \rightarrow I$, temos, pelo teorema II, que $h'(u) = \frac{1}{s'(h(u))} = \frac{1}{\|\alpha'(h(u))\|}$, para todo $u \in J$.

Definição 2.4 Dizemos que uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está *parametrizada pelo comprimento de arco* se

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = t_1 - t_0,$$

para todos $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$. Isto é, o comprimento do arco da curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$.

Proposição 2.2 Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e só se, $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$.

Prova.

(\Leftarrow) Se $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$, então $\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = t_1 - t_0$ para quaisquer $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$.

(\Rightarrow) Seja $t_0 \in I$ fixo e consideremos a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ comprimento de arco a partir de t_0 . Então,

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = t - t_0, \text{ se } t \geq t_0,$$

e

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = - \int_t^{t_0} \|\alpha'(\xi)\| d\xi = -(t_0 - t) = t - t_0, \text{ se } t_0 \geq t,$$

ou seja, $s(t) = t - t_0$ para todo $t \in I$. Logo, $s'(t) = \|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$. ■

Exemplo 2.3 Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a curva regular dada por $\alpha(s) = \left(r \cos \frac{s}{r} + a, r \sin \frac{s}{r} + b \right)$, cujo traço é o círculo de centro (a, b) e raio $r > 0$. Então α está parametrizada pelo comprimento de arco, pois $\|\alpha'(s)\| = 1$, já que $\alpha'(s) = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r} \right)$. □

Proposição 2.3 Toda curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ admite uma reparametrização β , tal que β está parametrizada pelo comprimento de arco.

Prova.

Seja $t_0 \in I$ fixo e consideremos $s : I \rightarrow J$, $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi$, a função comprimento de arco a partir de t_0 . Pela observação 2.4, $h = s^{-1} : J \rightarrow I$, é uma função de classe C^∞ com $h'(u) = \frac{1}{s'(h(u))} = \frac{1}{\|\alpha'(h(u))\|}$, para todo $u \in J$.

Logo $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\beta(u) = \alpha \circ h(u)$, é uma reparametrização de α tal que

$$\beta'(u) = \alpha'(h(u)) \cdot h'(u) = \alpha'(h(u)) \cdot \frac{1}{\|\alpha'(h(u))\|}.$$

Então $\|\beta'(u)\| = 1$ para todo $u \in J$. Assim, pela proposição 2.2, β é uma reparametrização de α que está parametrizada pelo comprimento de arco. ■

Exemplo 2.4 Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a curva regular dada por $\alpha(t) = (at + c, bt + d)$, onde $a^2 + b^2 \neq 0$, e seja $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função comprimento de arco de α a partir de $t_0 = 0$. Então

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} \, d\xi = \sqrt{a^2 + b^2} t,$$

e, portanto, $h = s^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $h(u) = \frac{u}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Logo $\beta = \alpha \circ h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$\beta(u) = \left(a \frac{u}{\sqrt{a^2 + b^2}} + c, b \frac{u}{\sqrt{a^2 + b^2}} + d \right)$ é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco. □

Exemplo 2.5 A curva regular $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, é chamada *espiral logarítmica*. Como

$$\alpha'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t),$$

temos que $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2} e^t$. Logo a função comprimento de arco a partir de $t_0 = 0$ é dada por

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{2} e^\xi \, d\xi = \sqrt{2} e^t - \sqrt{2}.$$

Assim, $s(\mathbb{R}) = (-\sqrt{2}, \infty)$ e $h = s^{-1} : (-\sqrt{2}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $h(u) = \log \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + 1 \right)$.

Portanto, $\beta = \alpha \circ h : (-\sqrt{2}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\beta(u) = \alpha(h(u)) = \left(\left(\frac{u}{\sqrt{2}} + 1 \right) \cos \left(\log \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + 1 \right) \right), \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + 1 \right) \sin \left(\log \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + 1 \right) \right) \right),$$

é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco. □

Observação 2.5 A reparametrização de uma curva regular α pelo comprimento de arco não é única.

De fato, seja $h_1 : J_1 \rightarrow I$ uma mudança de parâmetro tal que $\beta_1 = \alpha \circ h_1 : J_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco. Então

$$\|\beta_1'(u)\| = \|\alpha'(h_1(u))\| |h_1'(u)| = 1,$$

ou seja,

$$|h_1'(u)| = \frac{1}{\|\alpha'(h_1(u))\|}.$$

Portanto,

$$h_1'(u) = \frac{1}{\|\alpha'(h_1(u))\|} \quad \text{ou} \quad h_1'(u) = -\frac{1}{\|\alpha'(h_1(u))\|}, \quad (*)$$

para todo $u \in J_1$.

Seja $f = h_1^{-1} : I \rightarrow J_1$. Então f é de classe C^∞ e $f'(t) = \frac{1}{h_1'(f(t))}$. Logo, por (*),

$$f'(t) = \|\alpha'(h_1(f(t)))\| = \|\alpha'(t)\| = s'(t) \quad \text{ou} \quad f'(t) = -\|\alpha'(h_1(f(t)))\| = -\|\alpha'(t)\| = -s'(t),$$

para todo $t \in I$. Ou seja, $f(t) = s(t) + M$ para todo $t \in I$ ou $f(t) = -s(t) + M$ para todo $t \in I$, onde M é uma constante.

Seja $h = s^{-1} : J_1 \rightarrow I$. Então, se:

- $f(t) = s(t) + M$ para todo $t \in I$, temos que $h_1(u) = h(u - M)$ para todo $u \in J_1$, pois

$$f(h(u - M)) = s(h(u - M)) + M = u - M + M = u, \quad \text{para todo } u \in J_1.$$

- $f(t) = -s(t) + M$ para todo $t \in I$, temos que $h_1(u) = h(-u + M)$ para todo $u \in J_1$, pois

$$f(h(-u + M)) = -s(h(-u + M)) + M = -(-u + M) + M = u, \quad \text{para todo } u \in J_1.$$

Provamos, assim, que qualquer mudança de parâmetro $h_1 : J_1 \rightarrow I$, tal que $\beta_1 = \alpha \circ h_1$ está parametrizada pelo comprimento de arco, é da forma

$$h_1(u) = h(\pm u + M),$$

onde $h = s^{-1}$, $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi$, $t_0 \in I$ e M é uma constante.

3. Orientação de um espaço vetorial

Definição 3.1 Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita n e sejam $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ bases ordenadas de V . Dizemos que \mathcal{B} e \mathcal{B}' têm a mesma *orientação*, e escrevemos $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$, se a matriz de mudança da base \mathcal{B}' para a base \mathcal{B} possui determinante positivo.

Segue-se das propriedades do determinante que a relação \sim é uma *relação de equivalência*, isto é, as seguintes propriedades são satisfeitas:

- (1) $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}$ (reflexividade);
- (2) $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \implies \mathcal{B}' \sim \mathcal{B}$ (simetria);
- (3) $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}' \sim \mathcal{B}'' \implies \mathcal{B} \sim \mathcal{B}''$ (transitividade).

Assim, o conjunto de todas as bases ordenadas de V se decompõe em subconjuntos disjuntos denominados *classes de equivalência* pela relação \sim :

$$[\mathcal{B}] = \{\mathcal{B}' \mid \mathcal{B} \sim \mathcal{B}'\}.$$

Mais ainda, como o determinante da matriz de mudança de base ou é positivo ou é negativo, existem apenas duas classes.

Definição 3.2 Cada uma das classes determinadas pela relação de equivalência acima é chamada uma *orientação de V* .

Assim, V tem exatamente duas orientações, e, se fixarmos uma das duas de maneira arbitrária, a outra será chamada *orientação oposta*.

No caso em que $V = \mathbb{R}^n$, existe uma base ordenada natural

$$\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)\},$$

e a orientação correspondente a esta base é chamada a *orientação positiva de \mathbb{R}^n* , a outra sendo a *orientação negativa*.

Diremos também que uma base ordenada de \mathbb{R}^n é *positiva* (ou *negativa*) se ela pertence à orientação positiva (resp. negativa) de \mathbb{R}^n .

Por exemplo, a base $\{e_2, e_1\}$ de \mathbb{R}^2 é negativa, uma vez que a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ que muda esta base para a base $\{e_1, e_2\}$ tem determinante igual a -1 .

4. Fórmulas de Frenet

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, $\|\alpha'(s)\| = 1$ para todo $s \in I$.

Para cada $s \in I$, o vetor $\alpha'(s)$ é um vetor unitário e será designado por $\mathbf{t}(s)$, isto é, $\mathbf{t}(s) = (x'(s), y'(s))$.

Seja $\mathbf{n}(s)$ o vetor unitário de \mathbb{R}^2 ortogonal a $\mathbf{t}(s)$ tal que a base ortogonal $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ tem a mesma orientação da base canônica $\{e_1, e_2\}$. Então $\mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$, pois $\|\mathbf{n}(s)\| = 1$,

$$\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0 \text{ e } \det \begin{pmatrix} x'(s) & -y'(s) \\ y'(s) & x'(s) \end{pmatrix} = 1 > 0.$$

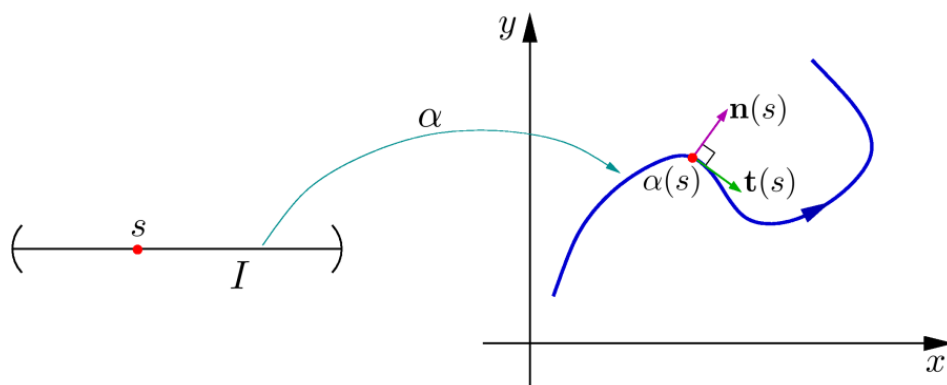


Fig. 13: Vetores normal e tangente à curva α em s

A base ordenada $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ é chamada o *referencial de Frenet¹ da curva α em s* . E a *reta $r_{\mathbf{n}}(s_0)$ normal a α em s_0* é a reta que passa pelo ponto $\alpha(s_0)$ e é paralela ao vetor normal $\mathbf{n}(s_0)$, ou seja

$$r_{\mathbf{n}}(s_0) = \{ \alpha(s_0) + \lambda \mathbf{n}(s_0) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

Como, para cada $s \in I$, $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^2 , temos que $\mathbf{t}'(s) = \alpha''(s)$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$.

Mas como $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 1$ para todo $s \in I$, temos que $\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0$, ou seja, $\mathbf{t}'(s)$ é ortogonal a $\mathbf{t}(s)$.

Logo $\mathbf{t}'(s)$ é paralelo a $\mathbf{n}(s)$, isto é, existe uma função $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s) \mathbf{n}(s),$$

¹**Jean Frédéric Frenet** (1816 - 1900): matemático e astrônomo francês, descobriu, independentemente do seu compatriota Joseph Alfred Serret as hoje chamadas *fórmulas de Frenet-Serret* das curvas (planas e espaciais). No caso das curvas espaciais, ele escreveu seis das nove fórmulas, que, naquela época, não foram expressas em termos vetoriais nem usando a linguagem da Álgebra Linear. Essas fórmulas, de fundamental importância na Geometria Diferencial, foram apresentadas na sua tese de doutorado em Toulouse (1847).

para todo $s \in I$, onde

$$\kappa(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s)$$

é chamada a *curvatura de α em $s \in I$* .

De modo análogo, como $\mathbf{n}(s)$ é um vetor unitário, segue-se que $\mathbf{n}'(s)$ é ortogonal a $\mathbf{n}(s)$ e é, portanto, paralelo a $\mathbf{t}(s)$. Além disso, como $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0$, temos que

$$\langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle = -\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{t}'(s) \rangle = -\langle \mathbf{n}(s), \kappa(s) \mathbf{n}(s) \rangle = -\kappa(s).$$

Logo,

$$\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s) \mathbf{t}(s).$$

Resumindo: Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s , então o referencial de Frenet $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ satisfaz as equações:

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = \kappa(s) \mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}'(s) = -\kappa(s) \mathbf{t}(s), \end{cases}$$

que são as *fórmulas de Frenet de uma curva plana*.

Exemplo 4.1 Seja $\alpha(s) = (as + x_0, bs + y_0)$, $s \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 = 1$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco cujo traço é a reta que passa pelo ponto (x_0, y_0) e é paralela ao vetor unitário (a, b) . Então a curvatura de α é identicamente nula.

De fato, como $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s) = (a, b)$ é constante, segue-se que $\mathbf{t}'(s) = 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e, portanto, $\kappa(s) = 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$. \square

Exemplo 4.2 Consideremos a curva regular parametrizada pelo comprimento de arco

$$\alpha(s) = \left(r \cos \frac{s}{r} + a, r \sin \frac{s}{r} + b \right),$$

onde $s \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, cujo traço é o círculo de centro (a, b) e raio r . Então

$$\mathbf{t}(s) = \alpha'(s) = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r} \right) \quad \text{e} \quad \mathbf{n}(s) = \left(-\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r} \right).$$

Logo, $\kappa(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \frac{1}{r} > 0$, pois $\mathbf{t}'(s) = \frac{1}{r} \left(-\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r} \right)$.

Ou seja, α tem curvatura constante igual a $\frac{1}{r}$ (ver Fig. 14). \square

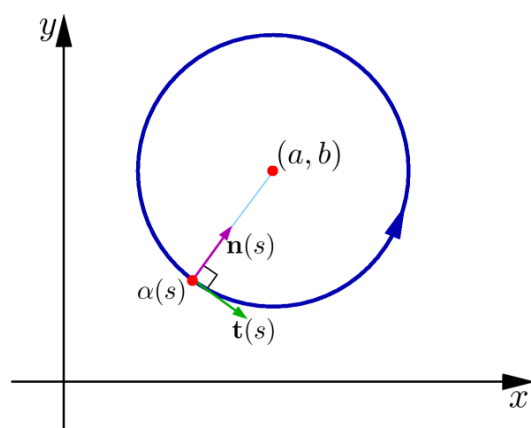


Fig. 14: Vetores normal e tangente ao círculo α em s

Observação 4.1 A curvatura κ muda de sinal se mudarmos a orientação da curva α .

De fato, seja $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma reparametrização de $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que β está, também, parametrizada pelo comprimento de arco, mas com orientação oposta à de α . Então, pela observação 2.5, $h(r) = -r + M$, $r \in (-b + M, -a + M)$.

Ou seja, $\beta(r) = \alpha(-r + M)$, ou ainda, $\alpha(s) = \beta(-s + M)$.

Então, como $\alpha'(s) = -\beta'(-s + M)$, ou seja, $\mathbf{t}_\alpha(s) = -\mathbf{t}_\beta(-s + M)$, temos $\mathbf{n}_\alpha(s) = -\mathbf{n}_\beta(-s + M)$ e $\mathbf{t}'_\alpha(s) = \mathbf{t}'_\beta(-s + M)$ e, portanto,

$$\kappa_\beta(-s + M) = \langle \mathbf{t}'_\beta(-s + M), \mathbf{n}_\beta(-s + M) \rangle = \langle \mathbf{t}'_\alpha(s), -\mathbf{n}_\alpha(s) \rangle = -\kappa_\alpha(s).$$

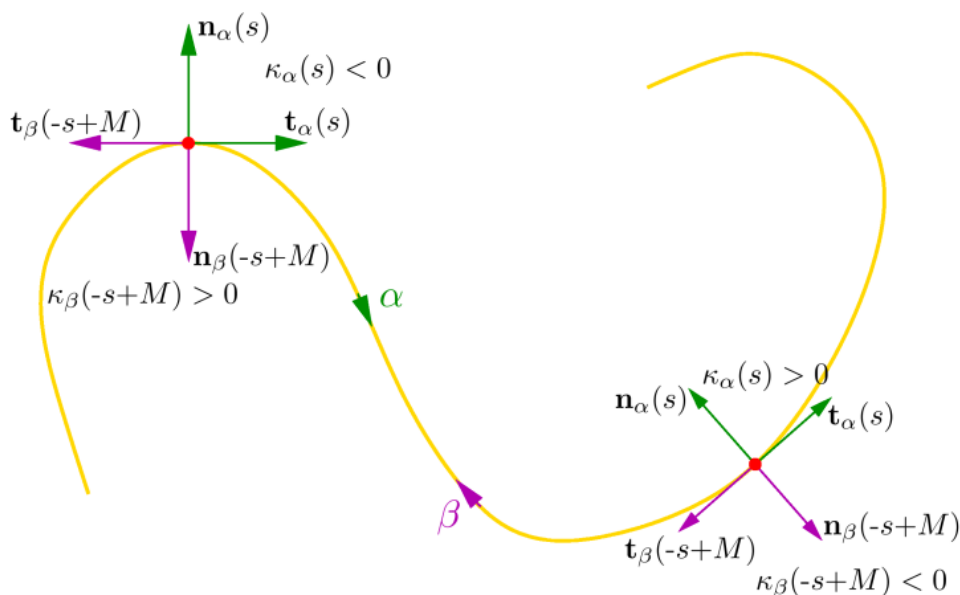


Fig. 15: Mudança do sinal da curvatura ao longo da curva

- Note que os vetores *aceleração* são iguais, isto é, $\mathbf{t}'_\alpha(s) = \mathbf{t}'_\beta(-s + M)$.

Observação 4.2 A curvatura κ de α muda de sinal ao mudarmos a orientação de \mathbb{R}^2 .

De fato, considere \mathbb{R}^2 com a orientação oposta à dada pela base canônica. Assim, nesta orientação, a base $\{e_2, e_1\}$ é positiva.

Então, o vetor unitário $\bar{\mathbf{n}}(s)$ ortogonal a $\mathbf{t}(s)$ tal que $\{\mathbf{t}(s), \bar{\mathbf{n}}(s)\}$ é uma base positiva é dado por

$$\bar{\mathbf{n}}(s) = (y'(s), -x'(s)) = -\mathbf{n}(s).$$

Logo,

$$\bar{\kappa}(s) = \langle \alpha''(s), \bar{\mathbf{n}}(s) \rangle = -\kappa(s).$$

Observação 4.3 Interpretação geométrica da curvatura.

Mostraremos que $\kappa(s)$ indica a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção numa vizinhança de s .

Sejam $s_0 \in I$ e $\varphi : (-s_0 + a, -s_0 + h) \rightarrow \mathbb{R}$ a função de classe C^∞ que determina o ângulo que o vetor $\alpha'(s_0 + h)$ faz com o vetor $\alpha'(s_0)$, isto é,

$$\alpha'(s_0 + h) = (\cos(\varphi(h) + \theta_0), \sin(\varphi(h) + \theta_0)),$$

onde $\varphi(0) = 0$ e $\alpha'(s_0) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ (veja o Lema — da próxima seção).

Então,

$$\mathbf{n}(s_0 + h) = (-\sin(\varphi(h) + \theta_0), \cos(\varphi(h) + \theta_0))$$

e

$$\alpha''(s_0 + h) = \varphi'(h)(-\sin(\varphi(h) + \theta_0), \cos(\varphi(h) + \theta_0)) = \varphi'(h) \mathbf{n}(s_0 + h).$$

Logo,

$$\kappa(s_0) = \langle \alpha''(s_0), \mathbf{n}(s_0) \rangle = \varphi'(0).$$

Observação 4.4 Interpretação geométrica do sinal da curvatura

Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e $s_0 \in I$ tal que $\kappa(s_0) \neq 0$ ($\iff \alpha''(s_0) \neq 0$).

Seja r a reta tangente a α em s_0 :

$$r = \{ p \in \mathbb{R}^2 \mid \langle p - \alpha(s_0), \alpha''(s_0) \rangle = 0 \}.$$

Provaremos que, para $s \neq s_0$ suficientemente próximo de s_0 :

$$\alpha(s) \in \{ p \in \mathbb{R}^2 \mid \langle p - \alpha(s_0), \alpha''(s_0) \rangle > 0 \}.$$

Isto é, que existe $\delta > 0$ tal que, para $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta) - \{s_0\}$, $\alpha(s)$ pertence ao semi-plano aberto determinado pela reta tangente a α em s_0 para o qual $\alpha''(s_0)$ aponta (ver Fig. 16).

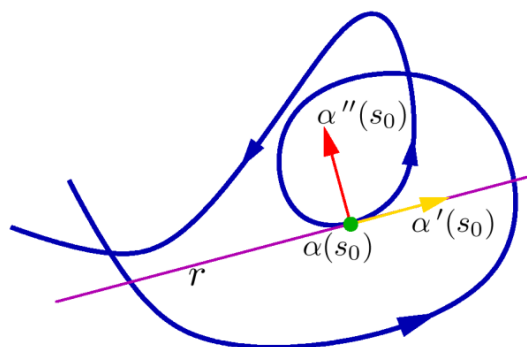


Fig. 16: Perto de s_0 a curva permanece no semi-plano determinado pela tangente para o qual $\alpha''(s_0)$ aponta

Pela Fórmula de Taylor Infinitesimal temos que:

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + (s - s_0)\alpha'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2} \alpha''(s_0) + R(s), \quad \text{onde } \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{R(s)}{(s - s_0)^2} = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), \alpha''(s_0) \rangle &= (s - s_0)\langle \alpha'(s_0), \alpha''(s_0) \rangle + \langle \alpha''(s_0), \alpha''(s_0) \rangle \frac{(s - s_0)^2}{2} + \langle R(s), \alpha''(s_0) \rangle \\ &= \kappa(s_0)^2 \frac{(s - s_0)^2}{2} + \langle R(s), \alpha''(s_0) \rangle, \end{aligned}$$

pois $\alpha'(s_0) \perp \alpha''(s_0)$ e $\alpha''(s_0) = \kappa(s_0) \mathbf{n}(s_0)$.

Portanto,

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), \alpha''(s_0) \rangle}{(s - s_0)^2} = \frac{\kappa(s_0)^2}{2} > 0.$$

Assim, dado $\varepsilon = \frac{\kappa(s_0)^2}{4} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$s \in I, 0 < |s - s_0| < \delta \implies \frac{\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), \alpha''(s_0) \rangle}{(s - s_0)^2} > \frac{\kappa(s_0)^2}{2} - \frac{\kappa(s_0)^2}{4} = \frac{\kappa(s_0)^2}{4} > 0.$$

Isto é, $\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), \alpha''(s_0) \rangle > 0$ para todo $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \cap I, s \neq s_0$.

Como $\alpha''(s_0) = \kappa(s_0)\mathbf{n}(s_0)$, note que (ver Fig. 17):

- $\kappa(s_0) > 0$ se $\alpha''(s_0)$ e $\mathbf{n}(s_0)$ têm o mesmo sentido;
- $\kappa(s_0) < 0$ se $\alpha''(s_0)$ e $\mathbf{n}(s_0)$ têm sentidos opostos;

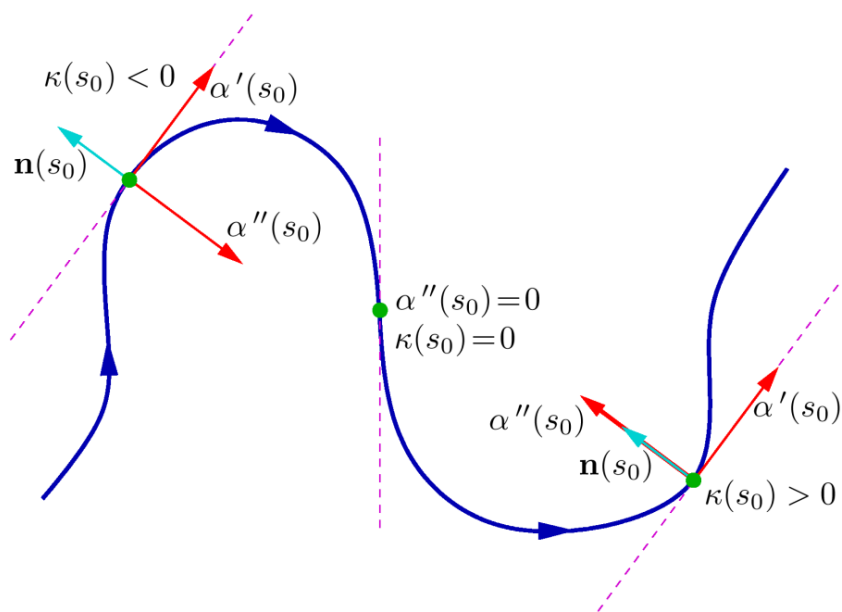


Fig. 17: Variação do sinal da curvatura

Atividade 4.1 Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e seja $s_0 \in I$ tal que $\kappa(s_0) = 0$ e $\kappa'(s_0) \neq 0$. Mostre que para toda vizinhança de s_0 existem pontos de α em cada um dos semi-planos abertos determinados pela reta tangente a α em s_0 .

O referencial de Frenet e a curvatura foram definidos para curvas parametrizadas pelo comprimento de arco. A seguir vamos determinar o referencial de Frenet e a curvatura de uma curva regular com qualquer parâmetro.

Definição 4.1 Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de parâmetro qualquer $r \in I$, $s : I \rightarrow J$ a função comprimento de arco a partir de $r_0 \in I$ e $h = s^{-1} : J \rightarrow I$. Consideremos a curva $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, que é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco s que tem a mesma orientação de α .

Se $\{\mathbf{t}_\beta(s), \mathbf{n}_\beta(s)\}$ é o referencial de Frenet e $\kappa_\beta(s)$ é a curvatura de β em s , dizemos que $\{\mathbf{t}(r) = \mathbf{t}_\beta(s(r)), \mathbf{n}(r) = \mathbf{n}_\beta(s(r))\}$ é o *referencial de Frenet de α em r* e que $\kappa(r) = \kappa_\beta(s(r))$ é a *curvatura de α em r* .

Observação 4.5 Se $\beta_1 = \alpha \circ h_1 : J_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma reparametrização qualquer de α pelo comprimento de arco que tem a mesma orientação de α , temos, pela observação 2.5, que $h_1(s) = h(s + M)$ para todo $s \in J_1$, onde M é uma constante.

Logo, $\beta_1(s) = \beta(s + M)$ e, portanto,

$$\mathbf{t}_{\beta_1}(s) = \mathbf{t}_\beta(s + M), \quad \mathbf{n}_{\beta_1}(s) = \mathbf{n}_\beta(s + M), \quad \beta_1''(s) = \beta''(s + M) \quad \text{e} \quad \kappa_{\beta_1}(s) = \kappa_\beta(s + M).$$

Então, como $h_1^{-1}(r) = s(r) - M$, pois $h_1(s(r) - M) = h(s(r) - M + M) = r$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{\beta_1}(h_1^{-1}(r)) &= \mathbf{t}_{\beta_1}(s(r) - M) = \mathbf{t}_{\beta}(s(r)), \\ \mathbf{n}_{\beta_1}(h_1^{-1}(r)) &= \mathbf{n}_{\beta_1}(s(r) - M) = \mathbf{n}_{\beta}(s(r)), \\ \kappa_{\beta_1}(h_1^{-1}(r)) &= \kappa_{\beta_1}(s(r) - M) = \kappa_{\beta}(s(r)). \end{aligned}$$

Assim, a definição dada acima independe da reparametrização de α pelo comprimento de arco com a mesma orientação de α .

Proposição 4.1 *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(r) = (x(r), y(r))$, uma curva regular. Então*

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(r) &= \frac{(x'(r), y'(r))}{\sqrt{x'(r)^2 + y'(r)^2}}, \\ \mathbf{n}(r) &= \frac{(-y'(r), x'(r))}{\sqrt{x'(r)^2 + y'(r)^2}}, \\ \kappa(r) &= \frac{-x''(r)y'(r) + x'(r)y''(r)}{(x'(r)^2 + y'(r)^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Prova.

Seja $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $h = s^{-1} : J \rightarrow I$ e $s : I \rightarrow J$ é a função comprimento de arco a partir de $r_0 \in I$.

Como $\beta(s(r)) = \alpha(r)$, temos que $\beta'(s(r)) \cdot s'(r) = \alpha'(r)$ e, portanto,

$$\beta''(s(r)) \cdot s'(r)^2 + \beta'(s(r)) \cdot s''(r) = \alpha''(r),$$

onde $s'(r) = \|\alpha'(r)\|$ e $s''(r) = \frac{\langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle}{\|\alpha'(r)\|}$.

Então

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(r) &= \mathbf{t}_{\beta}(s(r)) = \frac{\alpha'(r)}{s'(r)} = \frac{(x'(r), y'(r))}{\sqrt{x'(r)^2 + y'(r)^2}}, \\ \mathbf{n}(r) &= \mathbf{n}_{\beta}(s(r)) = \frac{(-y'(r), x'(r))}{\sqrt{x'(r)^2 + y'(r)^2}}. \end{aligned}$$

Logo, como $\kappa_\beta(s(\mathbf{r})) = \langle \beta''(s(\mathbf{r})), \mathbf{n}_\beta(s(\mathbf{r})) \rangle$, temos que:

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{r}) &= \kappa_\beta(s(\mathbf{r})) = \frac{\langle \alpha''(\mathbf{r}) - \mathbf{t}_\beta(s(\mathbf{r})) \cdot s''(\mathbf{r}), \mathbf{n}_\beta(s(\mathbf{r})) \rangle}{s'(\mathbf{r})^2} \\ &= \frac{\langle \alpha''(\mathbf{r}), \mathbf{n}(\mathbf{r}) \rangle}{\|\alpha'(\mathbf{r})\|^2} = \frac{(-x''(\mathbf{r})y'(\mathbf{r}) + x'(\mathbf{r})y''(\mathbf{r}))}{\|\alpha'(\mathbf{r})\|^3} \\ &= \frac{-x''(\mathbf{r})y'(\mathbf{r}) + x'(\mathbf{r})y''(\mathbf{r})}{(x'(\mathbf{r})^2 + y'(\mathbf{r})^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$



Exemplo 4.3 Consideremos a *espiral logarítmica* $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t).$$

Então, como

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= e^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t), \\ \alpha''(t) &= e^t(\cos t - \sin t - \sin t - \cos t, \sin t + \cos t + \cos t - \sin t) \\ &= e^t(-2 \sin t, 2 \cos t), \end{aligned}$$

temos que $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2} e^t$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{(2 \sin t e^t (e^t \sin t + e^t \cos t) + (e^t \cos t - e^t \sin t) \cdot 2e^t \cos t)}{(\sqrt{2} e^t)^3} \\ &= \frac{2e^{2t}}{2\sqrt{2} e^{3t}} (\sin^2 t + \sin t \cos t + \cos^2 t - \sin t \cos t) = \frac{2e^{2t}}{2\sqrt{2} e^{3t}} = \frac{1}{\sqrt{2} e^t}. \end{aligned}$$

Assim, $\lim_{t \rightarrow -\infty} \kappa(t) = +\infty$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \kappa(t) = 0$. □

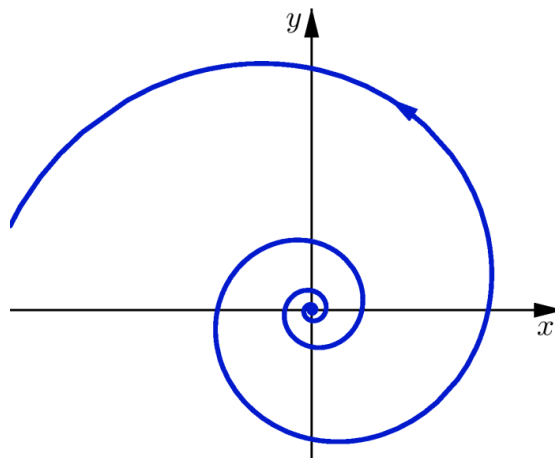


Fig. 18: Espiral logarítmica $\alpha(t) = (e^{t/5} \cos t, e^{t/5} \sin t)$

Nota: O estudo das curvas espirais teve início com o livro *Sobre espirais* de *Arquimedes de Siracusa* (287 - 212 a.C.). Nesse livro, Arquimedes define um tipo particular de espirais, hoje chamadas *espirais de Arquimedes*, e descreve detalhadamente as suas propriedades geométricas. Outros tipos de espirais foram estudados ao longo da História. A *espiral logarítmica* aparece entre os estudos do matemático suíço *Jacob Bernoulli* (1654 - 1705). Bernoulli considerava essa espiral uma forma maravilhosa, denominando-a *spira mirabilis*. Ele descobriu que essa espiral mantém a sua forma perante rotações ou mudanças de escala em relação ao seu centro. Bernoulli, fascinado por essa espiral, determinou que na lápide do seu túmulo fosse gravada a frase *Eadem mutata resurgo*, que significa *após transformado, ressurgirei o mesmo*.



Jacob (Jaques) Bernoulli

Definição 4.2 Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\kappa(s_0) \neq 0$, $s_0 \in I$, o número $R(s_0) = \frac{1}{|\kappa(s_0)|}$ é o *raio de curvatura* e $c(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} \mathbf{n}(s_0)$ é o *centro de curvatura* de α em s_0 .

O *círculo osculador* de α em s_0 é o círculo de centro $c(s_0)$ e raio $R(s_0)$.

Observação 4.6 O centro e o raio de curvatura de uma curva independem de sua orientação. Portanto, o círculo osculador também independe da orientação da curva.

Observação 4.7 O ponto $\alpha(s_0)$ pertence ao círculo osculador de α em s_0 . De fato,

$$\|\alpha(s_0) - c(s_0)\| = \left\| \frac{1}{\kappa(s_0)} \mathbf{n}(s_0) \right\| = \frac{1}{|\kappa(s_0)|} = R(s_0).$$

Observação 4.8 Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = \left(a + r \cos \frac{s}{r}, b + r \sin \frac{s}{r} \right)$, a curva parametrizada pelo comprimento de arco cujo traço é o círculo de centro (a, b) e raio $r > 0$.

Então o círculo osculador de α em s é o próprio círculo de centro (a, b) e raio r para todo $s \in \mathbb{R}$.

De fato, como $\alpha'(s) = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r} \right)$, temos que

$$\mathbf{n}(s) = \left(-\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r} \right), \quad \alpha''(s) = -\frac{1}{r} \left(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r} \right), \quad \text{e} \quad \kappa(s) = \langle \alpha''(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \frac{1}{r}.$$

Logo, $R(s) = r$ e $c(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s) = (a, b)$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Observação 4.9 A curva α e o círculo osculador de α em s_0 são tangentes em $\alpha(s_0)$.

De fato, a reta tangente ao círculo osculador no ponto $\alpha(s_0)$ é a reta que passa por $\alpha(s_0)$ e é perpendicular ao vetor $c(s_0) - \alpha(s_0) = \frac{1}{\kappa(s_0)} \mathbf{n}(s_0)$. Logo, essa reta é paralela ao vetor $\alpha'(s_0)$, sendo, portanto, a reta tangente a α em s_0 (ver Fig. 19).

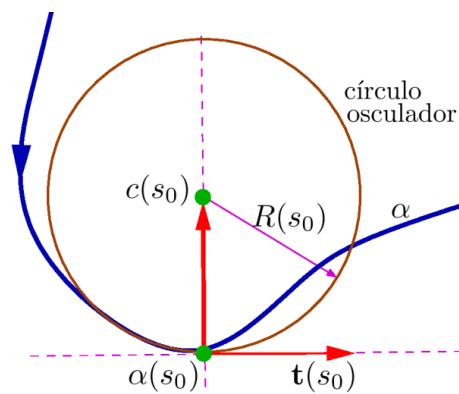


Fig. 19: O círculo osculador é tangente à curva

Observação 4.10 Seja $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ a curva dada por

$$\beta(s) = c(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} \left(\cos \left(\kappa(s_0)(s - s_0) + \theta_0 - \frac{\pi}{2} \right), \sin \left(\kappa(s_0)(s - s_0) + \theta_0 - \frac{\pi}{2} \right) \right),$$

onde $\alpha'(s_0) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$.

Então β é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\beta(s_0) = \alpha(s_0)$, $\beta'(s_0) = \alpha'(s_0)$ e $\beta''(s_0) = \alpha''(s_0)$ cujo traço é o círculo osculador de α em s_0 . Dizemos, então, que α e β têm *contato* de ordem ≥ 2 em s_0 .

De fato:

- $$\begin{aligned} \beta(s_0) &= c(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} \left(\cos \left(\theta_0 - \frac{\pi}{2} \right), \sin \left(\theta_0 - \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= \alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} (-\sin \theta_0, \cos \theta_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} (\sin \theta_0, -\cos \theta_0) = \alpha(s_0). \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \beta'(s) &= \left(-\sin \left(\kappa(s_0)(s - s_0) + \theta_0 - \frac{\pi}{2} \right), \cos \left(\kappa(s_0)(s - s_0) + \theta_0 - \frac{\pi}{2} \right) \right) \implies \\ \beta'(s_0) &= \left(-\sin \left(\theta_0 - \frac{\pi}{2} \right), \cos \left(\theta_0 - \frac{\pi}{2} \right) \right) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0) = \alpha'(s_0). \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \beta''(s) &= -\kappa(s_0) \left(\cos \left(\kappa(s_0)(s - s_0) + \theta_0 - \frac{\pi}{2} \right), \sin \left(\kappa(s_0)(s - s_0) + \theta_0 - \frac{\pi}{2} \right) \right) \implies \\ \beta''(s_0) &= -\kappa(s_0) \left(\cos \left(\theta_0 - \frac{\pi}{2} \right), \sin \left(\theta_0 - \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= \kappa(s_0) (-\sin \theta_0, \cos \theta_0) = \kappa(s_0) \mathbf{n}(s_0) = \alpha''(s_0). \end{aligned}$$

Definição 4.3 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Variando o parâmetro s em I , o centro de curvatura $c(s)$ descreve uma curva $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, chamada a *evoluta de α* , dada por

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s),$$

Observação 4.11 A evoluta β da curva α é regular no ponto s se, e só se, $\kappa'(s) \neq 0$.

De fato,

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \alpha'(s) - \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2} \mathbf{n}(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}'(s) \\ &= \alpha'(s) - \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2} \mathbf{n}(s) - \frac{\kappa(s)}{\kappa(s)} \alpha'(s) \\ &= -\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2} \mathbf{n}(s) \neq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

se, e só se, $\kappa'(s) \neq 0$.

Observação 4.12 A reta tangente à evoluta β no ponto s , onde $\kappa'_\alpha(s) \neq 0$, é a reta normal a α em s .

Com efeito, por (1), temos que o vetor tangente a β em s , $\beta'(s)$, é paralelo ao vetor normal a α em s , $\mathbf{n}(s)$. Além disso, como o ponto $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s)$ pertence à reta tangente a β em s , $r_{\mathbf{t}_\beta} = \{ \beta(s) + \lambda \beta'(s) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$, e a reta normal a α em s , $r_{\mathbf{n}_\alpha} = \{ \alpha(s) + \mu \mathbf{n}(s) \mid \mu \in \mathbb{R} \}$, temos $r_{\mathbf{t}_\beta} = r_{\mathbf{n}_\alpha}$ (ver Fig. 20).

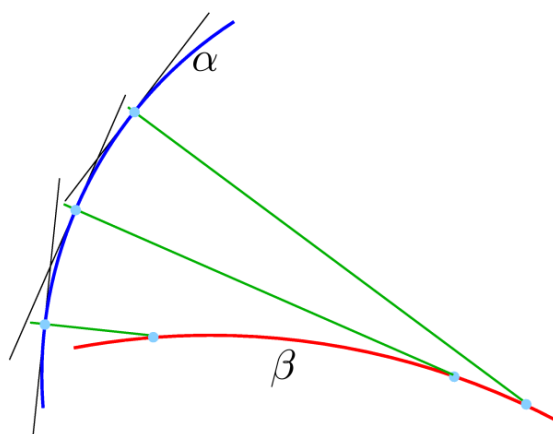


Fig. 20: Evoluta β da curva α .

Observação 4.13 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\kappa'(s) \neq 0$ para todo $s \in I$.

Então a evoluta de α é a única curva diferenciável regular cuja reta tangente em s é igual à reta normal a α em s .

Seja $\bar{\beta} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva com a propriedade acima. Então existe uma função diferenciável

$\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\bar{\beta}(s) = \alpha(s) + \lambda(s) \mathbf{n}(s), \quad (\text{onde } \lambda(s) = \langle \bar{\beta}(s) - \alpha(s), \mathbf{n}(s) \rangle).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{\beta}'(s) &= \alpha'(s) + \lambda'(s) \mathbf{n}(s) + \lambda(s) \mathbf{n}'(s) \\ &= \alpha'(s) + \lambda'(s) \mathbf{n}(s) - \lambda(s) \kappa(s) \alpha'(s) \\ &= (1 - \lambda(s) \kappa(s)) \alpha'(s) + \lambda'(s) \mathbf{n}(s). \end{aligned}$$

Como $\bar{\beta}'(s)$ é paralelo a $\mathbf{n}(s)$, temos que $1 - \lambda(s) \kappa(s) = 0$, ou seja, $\lambda(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$. Portanto,

$$\bar{\beta}(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s)$$

é a evoluta de α .

Exemplo 4.4 O traço da evoluta de um círculo é um ponto (o centro do círculo).

De fato, seja $\alpha(s) = (a, b) + r \left(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r} \right)$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco cujo traço é o círculo de centro (a, b) e raio r .

Como $\mathbf{n}(s) = \left(-\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r} \right)$ e $\kappa(s) = \frac{1}{r}$, temos que

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s) = (a, b) + r \left(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r} \right) - r \left(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r} \right) = (a, b)$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. \square

Observação 4.14 Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular com $\kappa(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Então a evoluta de α é a curva $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \mathbf{n}(t)$, onde

$$\kappa(t) = \frac{-x''(t)y'(t) + x'(t)y''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} \quad \text{e} \quad \mathbf{n}(t) = \frac{(-y'(t), x'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}.$$

Exemplo 4.5 Achar a evoluta da elipse $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, onde $b < a$.

Solução: Temos que $x'(t) = -a \sin t$, $x''(t) = -a \cos t$, $y'(t) = b \cos t$, $y''(t) = -b \sin t$. Logo,

$$\kappa(t) = \frac{ab(\cos^2 t + \sin^2 t)}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}},$$

é a curvatura de α em t , e

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \left(x(t) - \left(\frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{-x''(t)y'(t) + x'(t)y''(t)} \right) y'(t), y(t) + \left(\frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{-x''(t)y'(t) + x'(t)y''(t)} \right) x'(t) \right) \\ &= \left(a \cos t - \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab} b \cos t, b \sin t - \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab} a \sin t \right) \\ &= \left(\frac{a^2 \cos t - a^2 \sin^2 t \cos t - b^2 \cos^3 t}{a}, \frac{b^2 \sin t - a^2 \sin^3 t - b^2 \cos^2 t \sin t}{b} \right) \\ &= \left(\left(\frac{a^2 - b^2}{a} \right) \cos^3 t, - \left(\frac{a^2 - b^2}{b} \right) \sin^3 t \right) \end{aligned}$$

é a evoluta de α . Logo, as coordenadas de β satisfazem a equação

$$a^{2/3} x^{2/3} + b^{2/3} y^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3},$$

cujo traço é a *astróide* (ver Fig. 21).

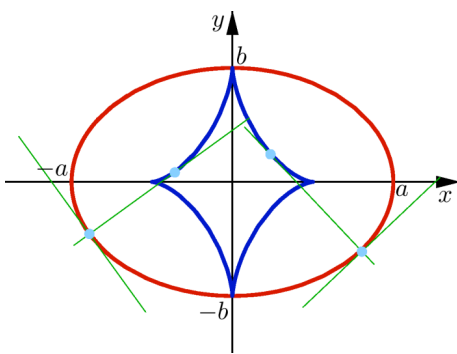


Fig. 21: Evoluta da elipse, $a = \sqrt{2}$ e $b = 1$.

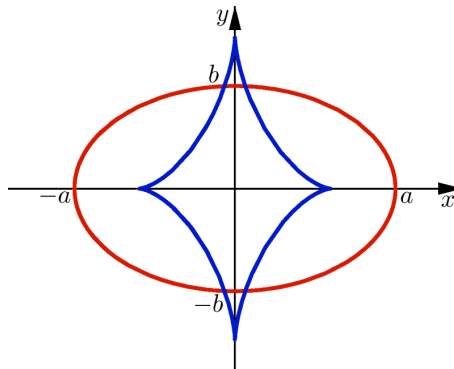


Fig. 22: Evoluta da elipse, $a = \sqrt{2}$ e $b = .9$.

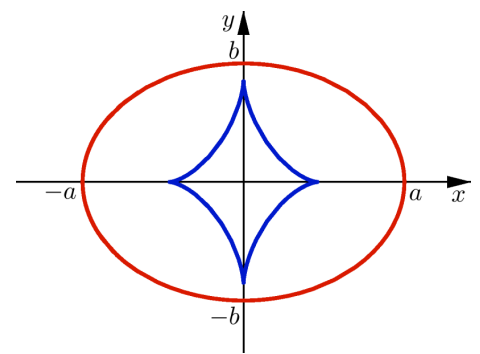


Fig. 23: Evoluta da elipse, $a = \sqrt{2}$ e $b = 1.04$.

Pela observação 4.11, β é regular em t se, e só se, $\kappa'(t) \neq 0$. Ou seja, $\beta'(t) = 0$ se, e só se, $\kappa'(t) = 0$.

Como

$$\kappa'(t) = -\frac{3}{2}ab \frac{2a^2 \sin t \cos t - 2b^2 \cos t \sin t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{5/2}} = \frac{-3ab \sin t \cos t (a^2 - b^2)}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{5/2}},$$

temos que $\kappa'(t) = 0$ se, e só se, $\sin t = 0$ ou $\cos t = 0$.

Além disso, como

$$b^2 \leq a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t \leq a^2,$$

temos que $\frac{b}{a^2} \leq \kappa(t) \leq \frac{a}{b^2}$. Logo, os pontos onde $\kappa'(0) = 0$ são os pontos de máximo $t = 0$ e

$t = \pi$ e os pontos de mínimo $t = \frac{\pi}{2}$ e $t = \frac{3\pi}{2}$. \square

5. Teorema Fundamental das Curvas Planas

A curvatura determina a curva plana a menos de sua posição no plano.

Teorema 5.1 (Teorema Fundamental das Curvas Planas)

(1) Dada uma função de classe C^∞ $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\kappa_\alpha(s) = \kappa(s)$ para todo $s \in I$.

(2) A curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ acima é única quando fixamos $\alpha(s_0) = p_0 = (x_0, y_0)$ e $\alpha'(s_0) = v_0$, onde v_0 é um vetor unitário de \mathbb{R}^2 .

(3) Se duas curvas $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizadas pelo comprimento de arco têm a mesma curvatura, então diferem por um movimento rígido, isto é, existem uma rotação R e uma translação T em \mathbb{R}^2 tais que

$$\alpha(s) = (T \circ R) \circ \beta(s),$$

para todo $s \in I$.

Antes de demonstrarmos esse teorema, precisamos do seguinte resultado:

Lema 5.1 Sejam $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis (C^∞) tais que $a(t)^2 + b(t)^2 = 1$ para todo $t \in I$, $t_0 \in I$ e $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tais que $a(t_0) = \cos \theta_0$ e $b(t_0) = \sin \theta_0$. Então a função diferenciável $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t [a(s)b'(s) - b(s)a'(s)] ds,$$

é tal que $\theta(t_0) = \theta_0$ e $a(t) = \cos \theta(t)$, $b(t) = \sin \theta(t)$ para todo $t \in I$.

Prova.

Basta provar que

$$(a(t) - \cos \theta(t))^2 + (b(t) - \sin \theta(t))^2 = 2(1 - a(t) \cos \theta(t) - b(t) \sin \theta(t)) = 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, que a função

$$A(t) = a(t) \cos \theta(t) + b(t) \sin \theta(t)$$

é constante e igual a 1 no intervalo I .

De fato,

$$\begin{aligned}
 A'(t) &= -a(t)\theta'(t) \operatorname{sen} \theta(t) + b(t)\theta'(t) \operatorname{cos} \theta(t) + a'(t) \operatorname{cos} \theta(t) + b'(t) \operatorname{sen} \theta(t) \\
 &= -a(t)(a(t)b'(t) - b(t)a'(t)) \operatorname{sen} \theta(t) + b(t)(a(t)b'(t) - b(t)a'(t)) \operatorname{cos} \theta(t) \\
 &\quad + a'(t) \operatorname{cos} \theta(t) + b'(t) \operatorname{sen} \theta(t) \\
 &= (-a(t)^2 b'(t) + a(t)a'(t)b(t)) \operatorname{sen} \theta(t) + a'(t) \operatorname{cos} \theta(t) + b'(t) \operatorname{sen} \theta(t) \\
 &\quad + (a(t)b(t)b'(t) - b(t)^2 a'(t)) \operatorname{cos} \theta(t).
 \end{aligned}$$

Como $a(t)^2 + b(t)^2 = 1$ para todo $t \in I$, temos que $2a(t)a'(t) = -2b(t)b'(t)$ para todo $t \in I$. Logo

$$\begin{aligned}
 A'(t) &= -b'(t)(a(t)^2 + b(t)^2) \operatorname{sen} \theta(t) - a'(t)(a(t)^2 + b(t)^2) \operatorname{cos} \theta(t) + a'(t) \operatorname{cos} \theta(t) \\
 &\quad + b'(t) \operatorname{sen} \theta(t) = 0,
 \end{aligned}$$

para todo $t \in I$.

Assim, como

$$A(t_0) = a(t_0) \operatorname{cos} \theta(t_0) + b(t_0) \operatorname{sen} \theta(t_0) = \operatorname{cos} \theta_0 \operatorname{cos} \theta_0 + \operatorname{sen} \theta_0 \operatorname{sen} \theta_0 = 1,$$

temos que $A(t) = 1$ para todo $t \in I$. ■

Prova. (do Teorema Fundamental das Curvas Planas)

(1) Seja a curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, dada por:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad x(s) &= x_0 + \int_{s_0}^s \operatorname{cos} \theta(r) \, dr \\
 \bullet \quad y(s) &= y_0 + \int_{s_0}^s \operatorname{sen} \theta(r) \, dr,
 \end{aligned}$$

onde $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $s_0 \in I$ e $\theta(s) = \int_{s_0}^s \kappa(\xi) \, d\xi + \theta_0$.

Então $\alpha'(s) = (x'(s), y'(s)) = (\operatorname{cos} \theta(s), \operatorname{sen} \theta(s))$ e, portanto, $\|\alpha'(s)\| = 1$ para todo $s \in I$, isto é, α é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s .

Assim, como $\mathbf{n}(s) = (-\operatorname{sen} \theta(s), \operatorname{cos} \theta(s))$ e $\alpha''(s) = \theta'(s)(-\operatorname{sen} \theta(s), \operatorname{cos} \theta(s)) = \theta'(s)\mathbf{n}(s)$, temos que $\kappa_\alpha(s) = \langle \alpha''(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \theta'(s) = \kappa(s)$ para todo $s \in I$.

(2) Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\alpha(s_0) = (x_0, y_0)$, $\alpha'(s_0) = \mathbf{v}_0$ e $\kappa_\alpha(s) = \kappa(s)$ para todo $s \in I$.

Seja $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $v_0 = (\cos \theta_0, \text{sen } \theta_0)$. Então, pelo Lema 5.1, existe uma função $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que $\theta(s_0) = \theta_0$ e $\alpha'(s) = (\cos \theta(s), \text{sen } \theta(s))$.

Como $\mathbf{n}(s) = (-\text{sen } \theta(s), \cos \theta(s))$ e $\alpha''(s) = \theta'(s)\mathbf{n}(s)$ temos que $\kappa(s) = \langle \alpha''(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \theta'(s)$ para todo $s \in I$, ou seja, $\theta(s) = \int_{s_0}^s \kappa(\xi) d\xi + \theta_0$ para todo $s \in I$.

Logo, se $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ são curvas parametrizadas pelo comprimento de arco tais que $\kappa_\alpha(s) = \kappa_\beta(s) = \kappa(s)$ para todo $s \in I$, $\alpha(s_0) = \beta(s_0) = p_0$ e $\alpha'(s_0) = \beta'(s_0) = v_0$, então, pelo provado acima, $\alpha'(s) = (\cos \theta(s), \text{sen } \theta(s))$ e $\beta'(s) = (\cos \bar{\theta}(s), \text{sen } \bar{\theta}(s))$, onde $\theta, \bar{\theta} : I \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis tais que $\theta'(s) = \bar{\theta}'(s) = \kappa(s)$ e $v_0 = (\cos \theta(s_0), \text{sen } \theta(s_0)) = (\cos \bar{\theta}(s_0), \text{sen } \bar{\theta}(s_0))$.

Assim, $\bar{\theta}(s) = \theta(s) + 2\pi k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Portanto, $\alpha'(s) = \beta'(s)$ para todo $s \in I$. Como $\alpha(s_0) = \beta(s_0) = p_0$, temos que $\alpha(s) = \beta(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Observação 5.1 Como $\alpha''(s) = +\kappa(s)\mathbf{n}(s)$, $\alpha(s_0) = (x_0, y_0)$ e $\alpha'(s_0) = v_0 = (v_1, v_2)$, temos que as coordenadas de α satisfazem as equações diferenciais

$$\begin{cases} x''(s) = -\kappa(s)y'(s) \\ y''(s) = \kappa(s)x'(s), \end{cases}$$

com condições iniciais $(x(s_0), y(s_0)) = (x_0, y_0)$ e $(x'(s_0), y'(s_0)) = (v_1, v_2)$.

Portanto, a existência e a unicidade da curva α segue do teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias.

(3) Sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ duas curvas parametrizadas pelo comprimento de arco tais que $\kappa_\alpha(s) = \kappa_\beta(s) = \kappa(s)$ para todo $s \in I$.

Então, pelo provado acima, existem funções $\theta, \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tais que

$$\alpha'(s) = (\cos \theta(s), \text{sen } \theta(s)), \beta'(s) = (\cos \varphi(s), \text{sen } \varphi(s)) \text{ e } \theta'(s) = \varphi'(s) = \kappa(s).$$

para todo $s \in I$.

Seja $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(s) = \theta(s) + c_0$. Então, sendo $\alpha(s_0) = p_0 = (x_0, y_0)$ e $\beta(s_0) = p_1 = (x_1, y_1)$, temos:

$$\alpha(s) = \left(x_0 + \int_{s_0}^s \cos \theta(\xi) d\xi, y_0 + \int_{s_0}^s \text{sen } \theta(\xi) d\xi \right),$$

e

$$\begin{aligned} \beta(s) &= \left(x_1 + \int_{s_0}^s \cos \varphi(\xi) d\xi, y_1 + \int_{s_0}^s \operatorname{sen} \varphi(\xi) d\xi \right) \\ &= \left(x_1 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(\xi) + c_0) d\xi, y_1 + \int_{s_0}^s \operatorname{sen}(\theta(\xi) + c_0) d\xi \right) \\ &= (x_1, y_1) + \left(\int_{s_0}^s (\cos c_0 \cos \theta(\xi) - \operatorname{sen} c_0 \operatorname{sen} \theta(\xi)) d\xi, \right. \\ &\quad \left. \int_{s_0}^s (\cos c_0 \operatorname{sen} \theta(\xi) + \operatorname{sen} c_0 \cos \theta(\xi)) d\xi \right). \end{aligned}$$

Como $x(s) - x_0 = \int_{s_0}^s \cos \theta(\xi) d\xi$ e $y(s) - y_0 = \int_{s_0}^s \operatorname{sen} \theta(\xi) d\xi$, onde $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, obtemos que:

$$\beta(s) = p_1 + (\cos c_0(x(s) - x_0) - \operatorname{sen} c_0(y(s) - y_0), \cos c_0(y(s) - y_0) + \operatorname{sen} c_0(x(s) - x_0),).$$

Logo, $\beta(s) = p_1 + R_{c_0}(\alpha(s) - p_0)$, onde $R_{c_0} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a rotação positiva de ângulo c_0 em torno da origem, cuja matriz na base canônica é

$$\begin{pmatrix} \cos c_0 & -\operatorname{sen} c_0 \\ \operatorname{sen} c_0 & \cos c_0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $\beta(s) = p_1 + R_{c_0}(\alpha(s)) - R_{c_0}(p_0) = T_a \circ R_{c_0}(\alpha(s))$, onde $T_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a translação dada por $T_a(p) = p + a$, com $a = p_1 - R_{c_0}(p_0)$.

Também temos que $\beta = (R_{c_0} \circ T_b) \circ \alpha$, onde $T_b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a translação dada por $T(p) = p + b$, com $b = R_{c_0}^{-1}(p_1) - p_0 = R_{-c_0}(p_1) - p_0$.

6. Forma Canônica Local para Curvas Planas

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Pela fórmula de Taylor infinitesimal em torno do ponto $s_0 \in I$, temos que:

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \alpha'(s_0)(s - s_0) + \frac{\alpha''(s_0)(s - s_0)^2}{2} + \frac{\alpha'''(s_0)(s - s_0)^3}{3!} + R(s), \quad \text{onde} \quad \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{R(s)}{(s - s_0)^3} = 0.$$

Então, pelas fórmulas de Frenet, $\mathbf{t}'(s_0) = \kappa(s_0) \mathbf{n}(s_0)$ e $\mathbf{n}'(s_0) = -\kappa(s_0) \mathbf{t}(s_0)$, obtemos que:

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \alpha(s_0) + \mathbf{t}(s_0)(s - s_0) + \kappa(s_0) \mathbf{n}(s_0) \frac{(s - s_0)^2}{2} \\ &\quad + (\kappa'(s_0) \mathbf{n}(s_0) - \kappa(s_0)^2 \mathbf{t}(s_0)) \frac{(s - s_0)^3}{3!} + \mathbf{R}(s) \\ &= \alpha(s_0) + \bar{x}(s) \mathbf{t}(s_0) + \bar{y}(s) \mathbf{n}(s_0), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{x}(s) &= (s - s_0) - \kappa(s_0)^2 \frac{(s - s_0)^3}{3!} + \mathbf{R}_{\mathbf{t}}(s) \\ \bar{y}(s) &= \kappa(s_0) \frac{(s - s_0)^2}{2} + \kappa'(s_0) \frac{(s - s_0)^3}{3!} + \mathbf{R}_{\mathbf{n}}(s), \end{aligned}$$

sendo $\mathbf{R}_{\mathbf{t}}(s) = \langle \mathbf{R}(s), \mathbf{t}(s_0) \rangle$ e $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}(s) = \langle \mathbf{R}(s), \mathbf{n}(s_0) \rangle$.

A expressão

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \bar{x}(s) \mathbf{t}(s_0) + \bar{y}(s) \mathbf{n}(s_0)$$

é chamada *forma canônica local da curva* α em s_0 .

Pela forma canônica local de α em s_0 , temos que existe $\delta > 0$ tal que se $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta) - \{s_0\}$, então

- $\bar{x}(s)$ e $(s - s_0)$ têm o mesmo sinal, pois $\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\bar{x}(s)}{s - s_0} = 1$.
- $\bar{y}(s) > 0$ se $\kappa(s_0) > 0$ e $\bar{y}(s) < 0$ se $\kappa(s_0) < 0$, pois $\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\bar{y}(s)}{(s - s_0)^2} = \frac{\kappa(s_0)}{2}$.

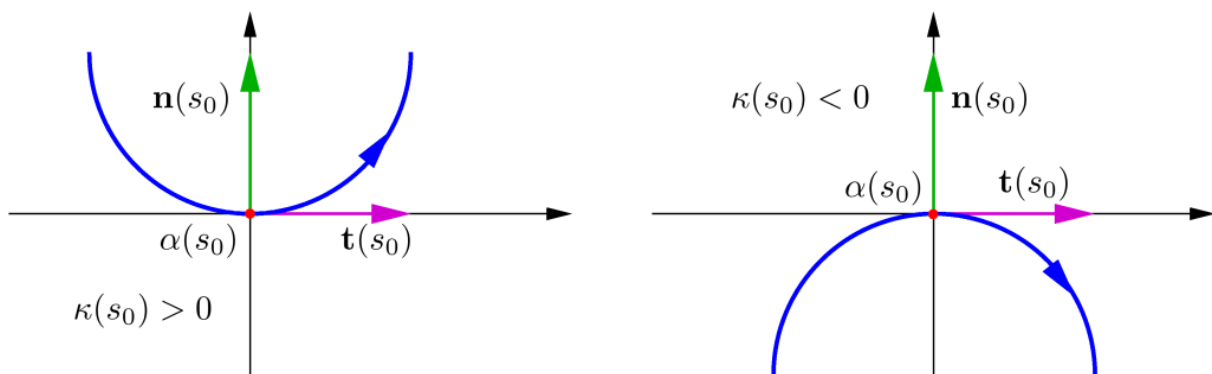


Fig. 24: Forma canônica local de uma curva.

Observação 6.1 Se $\kappa(s_0) \neq 0$ e $\kappa'(s_0) \neq 0$, a curva α *corta* o círculo osculador de α em s_0 apesar de ser tangente a ele.

De fato,

$$\begin{aligned}
 \|\alpha(s) - c(s_0)\|^2 &= \|\alpha(s_0) + \bar{x}(s)\mathbf{t}(s_0) + \bar{y}(s)\mathbf{n}(s_0) - \alpha(s_0) - \frac{1}{\kappa(s_0)}\mathbf{n}(s_0)\|^2 \\
 &= \bar{x}(s)^2 + \left(\bar{y}(s) - \frac{1}{\kappa(s_0)}\right)^2 \\
 &= \left[(s - s_0) - \frac{1}{6}\kappa(s_0)^2(s - s_0)^3 + \mathbf{R}_t(s)\right]^2 \\
 &\quad + \left[\frac{1}{2}\kappa(s_0)(s - s_0)^2 + \frac{1}{6}\kappa'(s_0)(s - s_0)^3 + \mathbf{R}_n(s) - \frac{1}{\kappa(s_0)}\right]^2 \\
 &= (s - s_0)^2 - \frac{1}{3}(s - s_0)^4\kappa(s_0)^2 + \frac{1}{36}\kappa(s_0)^4(s - s_0)^6 + \mathbf{O}_4(s) \\
 &\quad + \frac{1}{4}\kappa(s_0)^2(s - s_0)^4 + \frac{1}{6}\kappa(s_0)\kappa'(s_0)(s - s_0)^5 + \frac{1}{36}\kappa'(s_0)^2(s - s_0)^6 \\
 &\quad - (s - s_0)^2 - \frac{1}{3}\frac{\kappa'(s_0)}{\kappa(s_0)}(s - s_0)^3 + \frac{1}{\kappa(s_0)^2} + \mathbf{O}_3(s),
 \end{aligned}$$

onde $\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\mathbf{O}_4(s)}{(s - s_0)^4} = 0$ e $\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\mathbf{O}_3(s)}{(s - s_0)^3} = 0$.

Logo,

$$\|\alpha(s) - c(s_0)\|^2 = -\frac{1}{3}\frac{\kappa'(s_0)}{\kappa(s_0)}(s - s_0)^3 + \frac{1}{\kappa(s_0)^2} + \mathbf{R}_3(s),$$

onde $\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\mathbf{R}_3(s)}{(s - s_0)^3} = 0$.

Portanto,

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\|\alpha(s) - c(s_0)\|^2 - 1/\kappa(s_0)^2}{(s - s_0)^3} = -\frac{1}{3}\frac{\kappa'(s_0)}{\kappa(s_0)}. \quad (\star)$$

Vamos agora analisar os casos possíveis para os sinais de $\kappa'(s_0)$ e $\kappa(s_0)$:

Caso 1. $\kappa'(s_0) > 0$ e $\kappa(s_0) > 0$.

Neste caso, o limite (\star) é negativo. Logo, existe $\delta > 0$ tal que se $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ e:

- $s < s_0 \implies (s - s_0)^3 < 0 \implies \|\alpha(s) - c(s_0)\|^2 > \frac{1}{\kappa(s_0)^2}$;
- $s > s_0 \implies (s - s_0)^3 > 0 \implies \|\alpha(s) - c(s_0)\|^2 < \frac{1}{\kappa(s_0)^2}$.

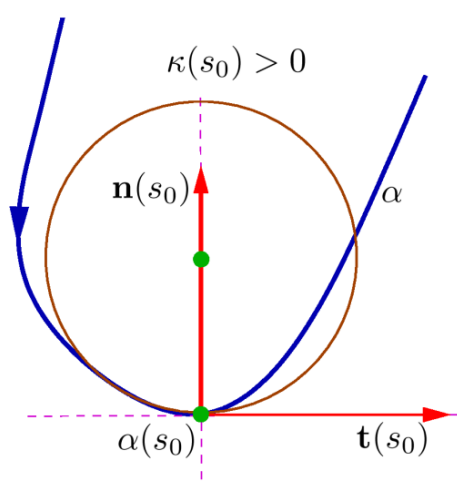


Fig. 25: Caso 1.

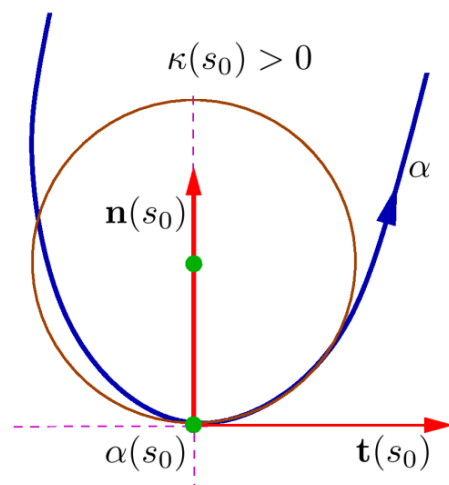


Fig. 26: Caso 2.

Caso 2. $\kappa'(s_0) < 0$ e $\kappa(s_0) > 0$.

Neste caso, o limite (*) é positivo. Logo, existe $\delta > 0$ tal que se $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ e:

- $s < s_0 \implies (s - s_0)^3 < 0 \implies \|\alpha(s) - c(s_0)\|^2 < \frac{1}{\kappa(s_0)^2}$;
- $s > s_0 \implies (s - s_0)^3 > 0 \implies \|\alpha(s) - c(s_0)\|^2 > \frac{1}{\kappa(s_0)^2}$.

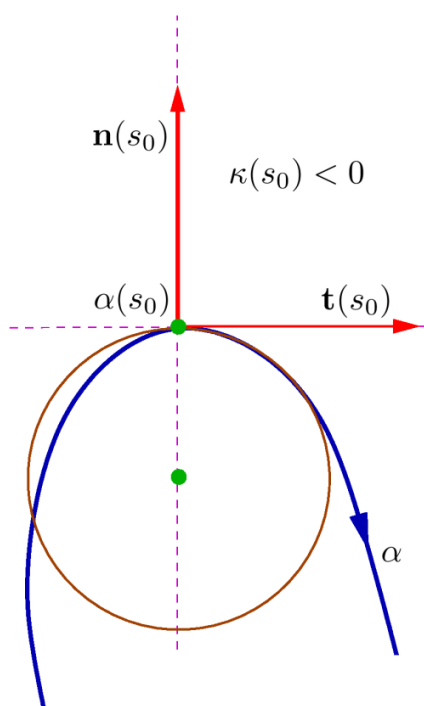


Fig. 27: Caso 3.

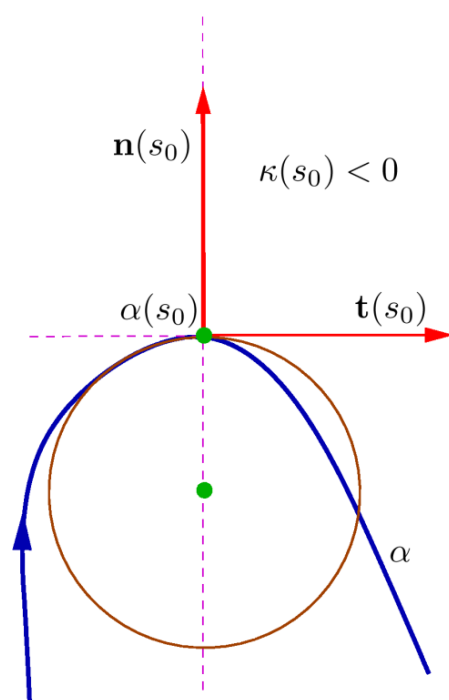


Fig. 28: Caso 4.

Caso 3. $\kappa'(s_0) > 0$ e $\kappa(s_0) < 0$.

Neste caso, o limite (*) é positivo. Logo, existe $\delta > 0$ tal que se $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ e:

- $s < s_0 \implies (s - s_0)^3 < 0 \implies \|\alpha(s) - c(s_0)\|^2 < \frac{1}{\kappa(s_0)^2}$;
- $s > s_0 \implies (s - s_0)^3 > 0 \implies \|\alpha(s) - c(s_0)\|^2 > \frac{1}{\kappa(s_0)^2}$.

Caso 4. $\kappa'(s_0) < 0$ e $\kappa(s_0) < 0$.

Neste caso, o limite (*) é negativo. Logo, existe $\delta > 0$ tal que se $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ e:

- $s < s_0 \implies (s - s_0)^3 < 0 \implies \|\alpha(s) - c(s_0)\|^2 > \frac{1}{\kappa(s_0)^2}$;
- $s > s_0 \implies (s - s_0)^3 > 0 \implies \|\alpha(s) - c(s_0)\|^2 < \frac{1}{\kappa(s_0)^2}$.

Exemplo 6.1 Seja \mathcal{C} um círculo de raio a que rola sobre o eixo- Ox sem deslizar. Um ponto P deste círculo descreve uma curva chamada *ciclóide*. Supondo que para $t = 0$ o ponto P do círculo coincide com a origem do sistema de coordenadas, obtenha uma curva parametrizada diferenciável cujo traço é a ciclóide. Esta curva é regular?

Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, a curva parametrizada que descreve a trajetória que o ponto P faz quando o círculo \mathcal{C} rola sobre o eixo- Ox de um ângulo t no sentido horário. Então $x(t) = at - a \sin t$ e $y(t) = a - a \cos t$, pois at é o comprimento do arco PQ_t , onde $Q_t = \mathcal{C}_t \cap \text{eixo-}Ox$ e \mathcal{C}_t é o círculo \mathcal{C} após rolar sobre o eixo- Ox de um ângulo t no sentido horário. Então α é uma curva parametrizada que não é regular nos pontos $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, pois

$$\alpha'(t) = (a - a \cos t, a \sin t),$$

e, portanto, $\alpha'(t) = (0, 0)$ se, e só se, $\cos t = 1$ e $\sin t = 0$, ou seja, se, e só se, $t = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

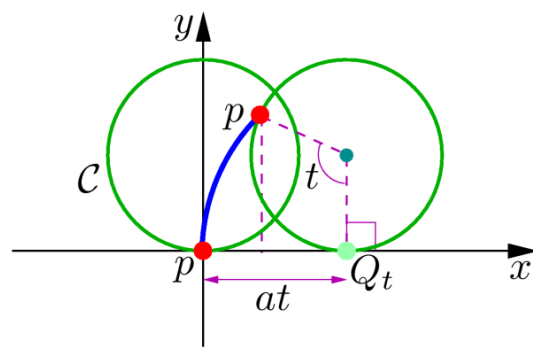


Fig. 29: Ciclóide.

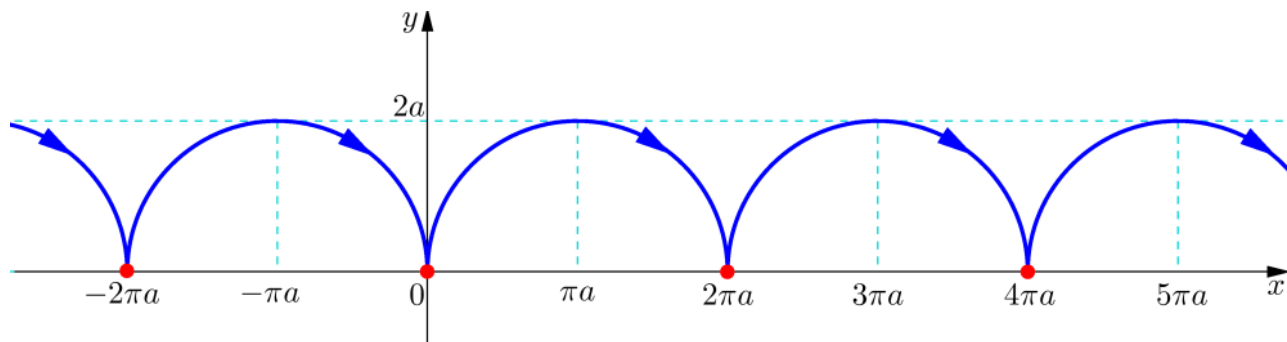


Fig. 30: Ciclóide.

Como

$$\|\alpha'(t)\|^2 = (a - a \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = a^2 + a^2 \cos^2 t - 2a^2 \cos t + a^2 \sin^2 t = 2a^2(1 - \cos t),$$

temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 2\pi k \pm} \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} &= \lim_{t \rightarrow 2\pi k \pm} \left(\frac{a(1 - \cos t)}{a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}}, \frac{a \sin t}{a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 2\pi k \pm} \left(\frac{\sqrt{1 - \cos t}}{\sqrt{2}}, \frac{\sin t}{\sqrt{1 - \cos^2 t}} \frac{\sqrt{1 + \cos t}}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 2\pi k \pm} \left(\frac{\sqrt{1 - \cos t}}{\sqrt{2}}, \frac{\sin t}{|\sin t|} \frac{\sqrt{1 + \cos t}}{\sqrt{2}} \right) \\ &= (0, \pm 1). \end{aligned}$$

Isto é, as retas tangentes a α tendem à reta vertical $r_k : x = 2\pi k a$ quando $t \rightarrow 2\pi k$.

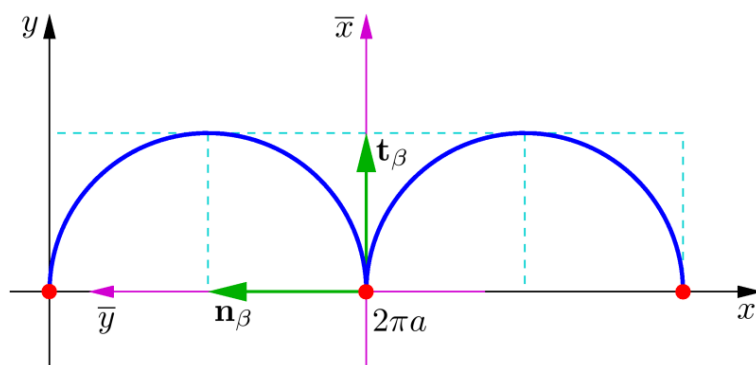


Fig. 31: Cicloide.

Logo, não existe uma curva parametrizada diferenciável regular $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ cujo traço é a cicloide, pois, caso contrário, γ possuiria uma reparametrização $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ pelo comprimento de arco e, portanto, pela forma canônica local de β em s_0 ,

$$\beta(s) = \beta(s_0) + \bar{x}(s)\mathbf{t}_\beta(s_0) + \bar{y}(s)\mathbf{n}_\beta(s_0),$$

onde $\beta(s_0) = (2k\pi a, 0)$ e $\bar{x}(s) = (s - s_0) - \kappa_\beta(s_0)^2 \frac{(s - s_0)^3}{3!} + R_{\bar{x}}(s)$ teríamos que $\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\bar{x}(s)}{s - s_0} = 1$, uma contradição, pois $\bar{x}(s)$ não muda de sinal numa vizinhança de s_0 . \square

Capítulo 2

Curvas no Espaço

Neste capítulo estudaremos a teoria local das curvas no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Como veremos a seguir, muitos conceitos e resultados básicos são introduzidos e provados de modo análogo aos de curvas planas.

1. Curva Parametrizada Diferenciável

Definição 1.1 Uma *curva parametrizada diferenciável* em \mathbb{R}^3 é uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ definida no intervalo aberto $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$. A variável $t \in I$ é o *parâmetro da curva* e o subconjunto de \mathbb{R}^3 formado pelos pontos $\alpha(t)$, $t \in I$, é o *traço da curva* α .

Definição 1.2 Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é *plana* se existe um plano π de \mathbb{R}^3 tal que $\alpha(I) \subset \pi$.

Exemplo 1.1 A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (x_0, y_0, z_0) + (a, b, c)t$ é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço é a reta que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e é paralela ao vetor (a, b, c) . Logo, α é uma curva plana. \square

Exemplo 1.2 A curva parametrizada diferenciável $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt),$$

com $a > 0$ e $b \neq 0$, é a *hélice circular* de passo $2\pi b$ cujo traço está contido no cilindro $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = a^2$. O parâmetro t mede o ângulo que o eixo OX faz com a reta que liga a origem O à projeção do ponto $\alpha(t)$ sobre o plano XY .

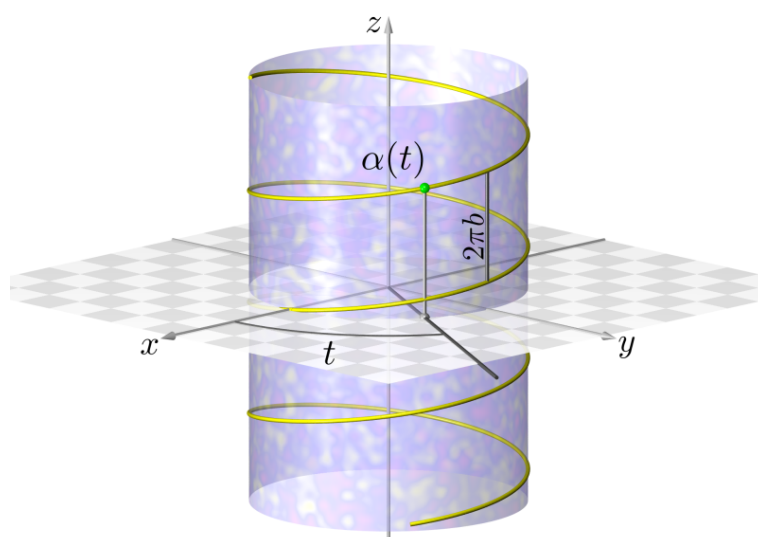


Fig. 1: Forma canônica local de uma curva.

Se dois pontos $\alpha(t_1)$ e $\alpha(t_2)$ têm as duas primeiras coordenadas iguais, então $z(t_2) - z(t_1)$ é um múltiplo inteiro de $2\pi b$.

Afirmção: A curva α não é plana.

De fato, suponhamos que existem um vetor (A, B, C) não-nulo e um número real D tal que $\alpha(\mathbb{R})$ está contido no plano

$$\pi : Ax + By + Cz = D.$$

Ou seja,

$$aA \cos t + aB \sin t + bCt = D. \quad (\text{I})$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Derivando a igualdade (I), temos que

$$-aA \sin t + aB \cos t + bC = 0, \quad (\text{II})$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Fazendo $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{2}$ em (II), obtemos, respectivamente, que $aB = -bC$ e $aA = bC$. Logo $aA = -aB = bC \neq 0$ e, portanto, por (II), $-\sin t - \cos t + 1 = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Assim, $-\cos t + \sin t = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, uma contradição. \square

Exemplo 1.3 A curva parametrizada diferenciável $\alpha : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(t) = \left(t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t} \right)$$

é uma curva plana.

De fato, seja $\pi : Ax + By + Cz = D$ um plano normal ao vetor $v = (A, B, C)$ não-nulo tal que $\alpha((0, \infty)) \subset \pi$, ou seja,

$$At + B \left(\frac{1+t}{t} \right) + C \left(\frac{1-t^2}{t} \right) = D$$

para todo $t \in (0, \infty)$. Então,

$$At^2 + B(1+t) + C(1-t^2) = Dt \iff (A-C)t^2 + (B-D)t + C + B = 0$$

para todo $t \in (0, \infty)$.

Logo $A = C = -B = -D$ e, portanto, $\alpha((0, \infty)) \subset \pi : x - y + z = -1$ \square

Exemplo 1.4 A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$$

é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço está contido no cone $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = z^2$.

De modo análogo ao feito no exemplo 1.2, podemos provar que α não é uma curva plana. \square

As noções de vetor tangente, curva regular, reta tangente e mudança de parâmetro são análogas às já vistas para curvas planas. Portanto, serão introduzidas sem muitos comentários.

Definição 1.3 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma curva parametrizada diferenciável. O *vetor tangente* a α em t é o vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$. A curva α é *regular* se $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. A *reta tangente* r à curva α em $t_0 \in I$ é a reta que passa por $\alpha(t_0)$ e é paralela ao vetor $\alpha'(t_0)$, isto é, $r = \{\alpha(t_0) + \lambda \alpha'(t_0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Definição 1.4 Sejam I e J intervalos abertos de \mathbb{R} , $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $h : J \rightarrow I$ uma função diferenciável (C^∞) tal que $\alpha(J) = I$ e $h'(t) \neq 0$ para todo $t \in J$. Então a função composta $\alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular que tem o mesmo traço de α , chamada *reparametrização de α por h* . A função h é a *mudança de parâmetro*.

Como $h : J \rightarrow I$ é um difeomorfismo de classe C^∞ , temos que se β é uma reparametrização de α por h , então α é uma reparametrização de β por h^{-1} .

Definição 1.5 A *orientação de uma curva regular* α é o sentido de percurso do traço de α .

Observação 1.1 Uma reparametrização β de α por h tem *orientação igual* (respectivamente *oposta*) à de α se a mudança de parâmetro h é estritamente crescente (respectivamente decrescente).

Definição 1.6 Sejam α uma curva regular e $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$. O *comprimento de arco da curva α de t_0 a t_1* é dado por

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(\xi)\| d\xi,$$

e a *função comprimento de arco* da curva α a partir de t_0 é

$$\int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi,$$

para todo $t \in I$.

Definição 1.7 Dizemos que uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está *parametrizada pelo comprimento de arco* se

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(\xi)\| d\xi = t_1 - t_0,$$

para todos $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$.

Proposição 1.1 Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e só se, $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$.

Proposição 1.2 Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $s : I \rightarrow \alpha(I) = J$ a função comprimento de arco a partir de $t_0 \in I$. Então $s : I \rightarrow J$ é um difeomorfismo C^∞ e $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $h = s^{-1} : J \rightarrow I$, é uma reparametrização de α tal que β está parametrizada pelo comprimento de arco.

Observação 1.2 Se $\beta_1 = \alpha \circ h_1 : J_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco, então existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $h_1(r) = h(\pm r + M)$ para todo $r \in J_1$, onde $h = s^{-1} : J \rightarrow I$ e $s : I \rightarrow J$ é a função comprimento de arco a partir de $t_0 \in I$.

As demonstrações desses resultados são idênticas às feitas no Capítulo I para curvas planas.

Exemplo 1.5 Seja a hélice circular $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt),$$

onde $a > 0$ e $b \neq 0$.

Como $\alpha'(t) = (-a \operatorname{sen} t, a \operatorname{cos} t, b)$, temos que $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} \, d\xi = \sqrt{a^2 + b^2} t$ e, portanto, $h(r) = s^{-1}(r) = \frac{r}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Logo,

$$\beta(r) = \alpha \circ h(r) = \left(a \operatorname{cos} \frac{r}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \operatorname{sen} \frac{r}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{br}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco. \square

2. Produto Vetorial

Definição 2.1 Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$. O *produto vetorial* de u e v , nesta ordem, é o único vetor $u \wedge v \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\langle u \wedge v, w \rangle = \det(u, v, w),$$

para todo $w \in \mathbb{R}^3$.

Expressando u, v e w na base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$:

$$u = \sum_{i=1}^3 u_i e_i, \quad v = \sum_{i=1}^3 v_i e_i, \quad w = \sum_{i=1}^3 w_i e_i,$$

temos:

$$\det(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = w_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \langle u \wedge v, w \rangle$$

Logo,

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3. \quad (1)$$

Das propriedades conhecidas dos determinantes, podemos verificar facilmente que o produto vetorial satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) $u \wedge v = -v \wedge u$;
- (b) $(\lambda u + \mu w) \wedge v = \lambda(u \wedge v) + \mu(w \wedge v)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

(c) $u \wedge v = 0$ se, e só se, u e v são linearmente dependentes (LD);

(d) $\langle u \wedge v, u \rangle = \langle u \wedge v, v \rangle = 0$.

Segue-se da propriedade (d) que se $u \wedge v \neq 0$, isto é, se u e v são LI então $u \wedge v$ é ortogonal ao plano gerado pelos vetores u e v , o que determina a direção do vetor $u \wedge v$.

Além disso, como $\det(u, v, u \wedge v) = \langle u \wedge v, u \wedge v \rangle > 0$, temos que $\{u, v, u \wedge v\}$ é uma base positiva de \mathbb{R}^3 , o que determina o sentido do vetor $u \wedge v$.

Para caracterizar completamente o vetor $u \wedge v$, basta determinar sua norma.

Para isso, necessitamos da seguinte relação:

$$\langle u \wedge v, x \wedge y \rangle = \begin{vmatrix} \langle u, x \rangle & \langle v, x \rangle \\ \langle u, y \rangle & \langle v, y \rangle \end{vmatrix},$$

onde u, v, x e y são vetores arbitrários.

Prova.

De fato, sendo $x \wedge y = (a, b, c)$, temos que:

$$\begin{aligned} \langle u \wedge v, x \wedge y \rangle &= \det \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2)(u_2 v_3 - u_3 v_2) + (x_1 y_3 - x_3 y_1)(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ &\quad + (x_1 y_2 - x_2 y_1)(u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= x_2 y_3 u_2 v_3 + x_3 y_2 u_3 v_2 - x_2 y_3 u_3 v_2 - x_3 y_2 u_2 v_3 + x_1 y_3 u_1 v_3 + y_1 x_3 v_1 u_3 \\ &\quad - y_1 x_3 y_1 v_3 - x_1 y_3 v_1 u_3 + x_1 y_2 y_1 v_2 + x_2 y_1 u_2 v_1 - x_1 y_2 u_2 v_1 - x_2 y_1 u_1 v_2 \\ &= [x_2 u_2 y_3 v_3 + x_3 u_3 y_2 v_2 + x_1 u_1 y_3 v_3 + x_3 u_3 y_1 v_1 + x_1 u_1 y_2 v_2 + x_2 u_2 y_1 v_1] \\ &\quad - [x_2 v_2 y_3 u_3 + x_3 v_3 y_2 u_2 + x_3 v_3 y_1 u_1 + x_1 v_1 y_3 u_3 + x_1 v_1 y_2 u_2 + x_2 v_2 y_1 u_1] \\ &= \left[\boxed{x_1 u_1 y_1 v_1} + x_1 u_1 y_2 v_2 + x_1 u_1 y_3 v_3 + x_2 u_2 y_1 v_1 + \boxed{x_2 u_2 y_2 v_2} + x_2 u_2 y_3 v_3 \right. \\ &\quad \left. + x_3 u_3 y_1 v_1 + x_3 u_3 y_2 v_2 + \boxed{x_3 u_3 y_3 v_3} \right] \\ &\quad - \left[\boxed{x_1 v_1 y_1 u_1} + x_1 v_1 y_2 u_2 + x_1 v_1 y_3 u_3 + x_2 v_2 y_1 u_1 + \boxed{x_2 v_2 y_2 u_2} + x_2 v_2 y_3 u_3 \right. \\ &\quad \left. + x_3 v_3 y_1 u_1 + x_3 v_3 y_2 u_2 + \boxed{x_3 v_3 y_3 u_3} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3)(y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3) - (x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3)(y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3) \\
 &= \langle u, x \rangle \langle v, y \rangle - \langle v, x \rangle \langle u, y \rangle.
 \end{aligned}$$

Como desejávamos. ■

Portanto, pela relação provada acima,

$$\begin{aligned}
 \|u \wedge v\|^2 &= \langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = \begin{vmatrix} \langle u, u \rangle & \langle v, u \rangle \\ \langle u, v \rangle & \langle v, v \rangle \end{vmatrix} = \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2 \\
 &= \|u\|^2 \|v\|^2 (1 - \cos^2 \theta) = \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2 \theta = A^2,
 \end{aligned}$$

onde θ é o ângulo entre u e v , e A é a área do paralelogramo gerado por u e v .

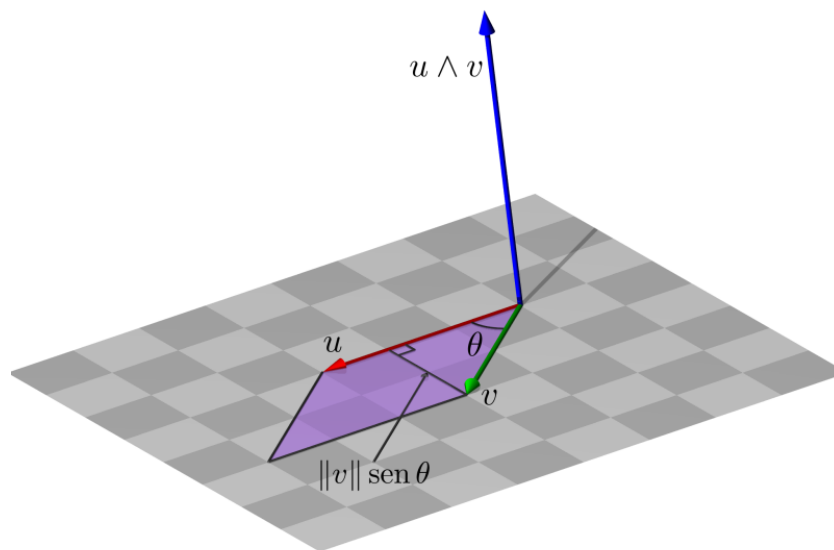


Fig. 2: Produto vetorial de u e v

Resumindo: O produto vetorial de dois vetores LI u e v é um vetor $u \wedge v$ perpendicular ao plano gerado por u e v , cuja norma é igual à área do paralelogramo de lados u e v e cujo sentido é tal que $\{u, v, u \wedge v\}$ é uma base positiva.

Observação 2.1 O produto vetorial satisfaz a seguinte relação:

$$(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u,$$

onde u, v e w são vetores arbitrários de \mathbb{R}^3 .

Prova.

De fato, sendo $(a, b, c) = u \wedge v$,

$$\begin{aligned}
 (u \wedge v) \wedge w &= \begin{vmatrix} b & c \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a & c \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a & b \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} e_3 \\
 &= (bw_3 - cw_2)e_1 - (aw_3 - cw_1)e_2 + (aw_2 - bw_1)e_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(- \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} w_3 - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} w_2 \right) e_1 \\
 &\quad - \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} w_3 - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} w_1 \right) e_2 \\
 &\quad + \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} w_1 \right) e_3 \\
 &= (-(u_1 v_3 w_3 - v_1 u_3 w_3) - (u_1 v_2 w_2 - u_2 v_1 w_2)) e_1 \\
 &\quad + (-(u_2 v_3 w_3 - u_3 v_2 w_3) + (u_1 v_2 w_1 - u_2 v_1 w_1)) e_2 \\
 &\quad + ((u_2 v_3 w_2 - u_3 v_2 w_2) + (u_1 v_3 w_1 - u_3 v_1 w_1)) e_3 \\
 &= \left(\boxed{u_1 w_1 v_1} + u_2 w_2 v_1 + u_3 w_3 v_1 - \boxed{v_1 w_1 u_1} - v_2 w_2 u_1 - v_3 w_3 u_1 \right) e_1 \\
 &\quad + \left(u_1 w_1 v_2 + \boxed{u_2 w_2 v_2} + u_3 w_3 v_2 - v_1 w_1 u_2 - \boxed{v_2 w_2 u_2} - v_3 w_3 u_2 \right) e_2 \\
 &\quad + \left(u_1 w_1 v_3 + u_2 w_2 v_3 + \boxed{u_3 w_3 v_3} - v_1 w_1 u_3 - v_2 w_2 u_3 - \boxed{v_3 w_3 u_3} \right) e_3 \\
 &= (\langle u, w \rangle v_1 - \langle v, w \rangle u_1) e_1 + (\langle u, w \rangle v_2 - \langle v, w \rangle u_2) e_2 + (\langle u, w \rangle v_3 - \langle v, w \rangle u_3) e_3 \\
 &= \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u.
 \end{aligned}$$

Como queiramos. ■

Usando a relação acima, podemos concluir que o produto vetorial *não é associativo*, pois como:

- $(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u,$

e

- $u \wedge (v \wedge w) = -(v \wedge w) \wedge u = -\langle v, u \rangle w + \langle w, u \rangle v,$

temos, tomando $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0)$ e $w = (1, 1, 1)$, por exemplo, que:

$$(u \wedge v) \wedge w = v - 2u = (-1, 1, 0) \quad \text{e} \quad u \wedge (v \wedge w) = -w + v = (0, 0, -1).$$

Finalmente, sejam $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ e $v(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$ aplicações diferenciáveis definidas em um intervalo aberto $I = (a, b)$, $t \in (a, b)$. Pela equação (1) decorre que $u(t) \wedge v(t)$ é diferenciável e

$$\frac{d}{dt}(u(t) \wedge v(t)) = \frac{du}{dt}(t) \wedge v(t) + u(t) \wedge \frac{dv}{dt}(t).$$

3. Teoria Local de Curvas no Espaço

No Capítulo anterior, vimos que a teoria local das curvas planas está contida essencialmente nas fórmulas de Frenet, que são obtidas considerando um diedro ortonormal positivo associado naturalmente a uma curva plana.

A seguir, vamos desenvolver um estudo análogo, considerando um triedro ortonormal positivo associado a uma curva de \mathbb{R}^3 parametrizada pelo comprimento de arco.

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Como o vetor tangente $\alpha'(s)$ é unitário, o módulo $\|\alpha''(s)\|$ da derivada segunda mede a taxa de variação do ângulo que as tangentes vizinhas fazem com a tangente em s , ou seja, $\|\alpha''(s)\|$ dá uma medida do quão rapidamente a curva se afasta, em uma vizinhança de s , da reta tangente a α em s .

Isso sugere a seguinte definição:

Definição 3.1 Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, então a *curvatura de α em $s \in I$* é o número real

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|.$$

Exemplo 3.1 Seja a curva parametrizada $\alpha : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(s) = \left(\frac{(1+s)^{3/2}}{3}, \frac{(1-s)^{3/2}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right).$$

$$\text{Então } \alpha'(s) = \left(\frac{(1+s)^{1/2}}{2}, \frac{-(1-s)^{1/2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ e } \alpha''(s) = \left(\frac{1}{4(1+s)^{1/2}}, \frac{1}{4(1-s)^{1/2}}, 0 \right).$$

Logo, $\|\alpha'(s)\| = \sqrt{\frac{1+s}{4} + \frac{1-s}{4} + \frac{1}{2}} = 1$, isto é, α está parametrizada pelo comprimento de arco, e

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\| = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s} \right)^{1/2} = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{1-s^2} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{8(1-s^2)}}.$$

□

A proposição abaixo caracteriza as retas como sendo as únicas curvas de curvatura identicamente nula.

Proposição 3.1 *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Então $\alpha(I)$ é um segmento de reta se, e só se, $\kappa(s) = 0$ para todo $s \in I$.*

Prova.

(\Rightarrow) Suponhamos que $\alpha(I)$ é um segmento de reta. Seja $v = \alpha'(s_0)$, $s_0 \in I$ fixo. Então existe uma função $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que $\alpha'(s) = \lambda(s)v$ para todo $s \in I$.

Como $|\lambda(s)| = \|\alpha'(s)\| = 1$ para todo $s \in I$, $\lambda(s_0) = 1$ e $\lambda(s) = \langle \alpha'(s), v \rangle$ é contínua, temos que $\lambda(s) = 1$ para todo $s \in I$.

Logo $\alpha'(s) = v$ para todo $s \in I$ e, portanto, $\alpha(s) = vs + p$ para algum ponto $p \in \mathbb{R}^3$.

Assim, $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\| = 0$ para todo $s \in I$.

(\Leftarrow) Suponhamos que $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\| = 0$ para todo $s \in I$. Então existe $v \in \mathbb{R}^3$ unitário tal que $\alpha'(s) = v$ para todo $s \in I$.

Logo, existe $p \in \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(s) = vs + p$ para todo $s \in I$. ■

Se $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$ para todo $s \in I$, então $\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ para todo $s \in I$. Portanto, nos pontos $s \in I$ onde $\kappa(s) \neq 0$, isto é, $\alpha''(s) \neq 0$, podemos definir um vetor unitário na direção de $\alpha''(s)$ da seguinte maneira.

Definição 3.2 Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e $s_0 \in I$ tal que $\kappa(s_0) > 0$. O vetor

$$\mathbf{n}(s_0) = \frac{\alpha''(s_0)}{\kappa(s_0)}$$

é denominado *vetor normal* a α em s_0 .

A *reta normal a α em s_0* é a reta paralela ao vetor $\mathbf{n}(s_0)$ que passa por $\alpha(s_0)$:

$$r_{\mathbf{n}(s_0)} = \{\alpha(s_0) + \lambda \mathbf{n}(s_0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Denotando por $\mathbf{t}(s_0)$ o *vetor tangente* a $\alpha'(s_0)$, temos que $\mathbf{t}(s_0)$ e $\mathbf{n}(s_0)$ são vetores ortonormais e

$$\mathbf{t}'(s_0) = \kappa(s_0) \mathbf{n}(s_0).$$

O plano paralelo aos vetores $\mathbf{t}(s_0)$ e $\mathbf{n}(s_0)$ que passa pelo ponto $\alpha(s_0)$ é chamado o *plano osculador de α em s_0* :

$$\pi_{\text{osc}}(s_0) = \{\alpha(s_0) + \lambda \mathbf{t}(s_0) + \mu \mathbf{n}(s_0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

- Nos pontos onde $\kappa(s) = 0$, o vetor normal (portanto o plano osculador) não está definido. Para prosseguir a análise local das curvas, necessitamos, de uma maneira essencial, do plano osculador. Dizemos que $s \in I$ é um *ponto singular de ordem 1* se $\alpha''(s) = 0$. Os pontos onde $\alpha'(s) = 0$ são chamados *pontos singulares de ordem 0*.

- No que se segue, nos restringiremos às curvas parametrizadas pelo comprimento de arco sem pontos singulares de ordem 1.

Vamos definir um terceiro vetor que junto com \mathbf{t} e \mathbf{n} formam uma base ortonormal positiva de \mathbb{R}^3 .

Definição 3.3 • Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\kappa(s) > 0$ para todo $s \in I$. O **vetor binormal a α em s** é o vetor

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s).$$

- O referencial ortonormal positivo $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ é o **triedro de Frenet** de α em s .
- O plano que passa por $\alpha(s)$ e é paralelo aos vetores $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$ é chamado o **plano normal a α em s** :

$$\pi_{\text{normal}}(s) = \{\alpha(s) + \lambda \mathbf{n}(s) + \mu \mathbf{b}(s) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

- O plano que passa por $\alpha(s)$ e é paralelo aos vetores $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$ é chamado o **plano retificante da curva α em s** :

$$\pi_{\text{ret}}(s) = \{\alpha(s) + \lambda \mathbf{t}(s) + \mu \mathbf{b}(s) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

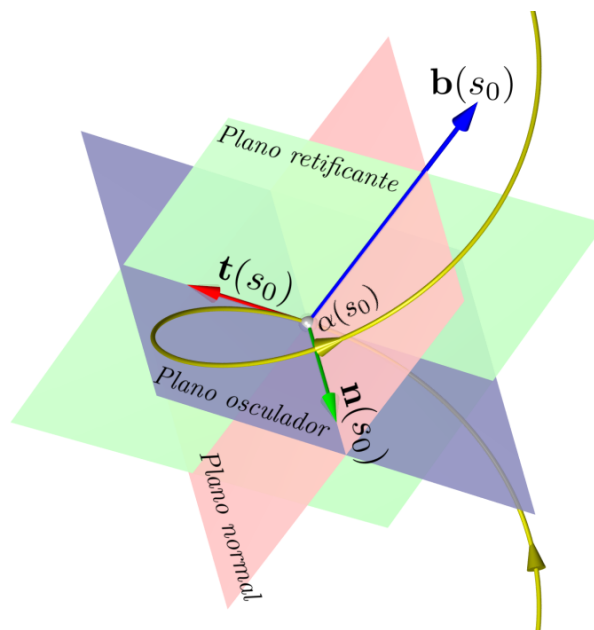


Fig. 3: Triedro de Frenet de α em s_0

Observação 3.1 O vetor binormal $\mathbf{b}(s)$ é normal ao plano osculador de α em s , pois $\mathbf{b}(s) \perp \mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{b}(s) \perp \mathbf{n}(s)$. Portanto:

$$\pi_{\text{osc}}(s) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - \alpha(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0\}.$$

De modo análogo, como $\mathbf{t}(s) = \mathbf{n}(s) \wedge \mathbf{b}(s)$ e $\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}(s)$, temos que

$$\pi_{\text{normal}}(s) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - \alpha(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0\},$$

e

$$\pi_{\text{ret}}(s) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - \alpha(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 0\}.$$

Observação 3.2 O vetor $\mathbf{b}'(s)$ é paralelo ao vetor normal $\mathbf{n}(s)$.

De fato, derivando $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$, obtemos:

$$\mathbf{b}'(s) = \mathbf{t}'(s) \wedge \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s),$$

pois $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$.

Portanto, $\mathbf{b}'(s)$ é ortogonal a $\mathbf{t}(s)$.

Como $\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 1$, temos que $\langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0$, ou seja, $\mathbf{b}'(s)$ é ortogonal a $\mathbf{b}(s)$.

Logo, $\mathbf{b}'(s)$ é paralelo a $\mathbf{n}(s)$, isto é, $\mathbf{b}'(s)$ é igual ao produto de $\mathbf{n}(s)$ por um número real.

Definição 3.4 O número real $\tau(s)$ definido por

$$\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s),$$

é denominado *torção da curva α em s* .

Observação 3.3 Como o vetor $\mathbf{b}(s)$ é unitário, $|\tau(s)| = \|\mathbf{b}'(s)\|$ mede a taxa de variação do ângulo do plano osculador de α em s com os planos osculadores vizinhos, isto é, $|\tau(s)|$ indica quão rapidamente a curva se afasta, em uma vizinhança de s , do plano osculador de α em s .

Proposição 3.2 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\kappa(s) > 0$ para todo $s \in I$. Se α é uma curva plana, então o plano osculador de α independe de s e é o plano que contém o traço de α .

Prova.

Seja v um vetor normal unitário ao plano que contém o traço de α , isto é,

$$\pi = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - \alpha(s_0), v \rangle = 0\}.$$

Como $\alpha(I) \subset \pi$, temos que $\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), v \rangle = 0$ para todo $s \in I$.

Derivando, obtemos que $\langle \alpha'(s), v \rangle = 0$, ou seja, $\mathbf{t}(s)$ é ortogonal a v .

Derivando novamente, temos que $\langle \alpha''(s), v \rangle = 0$, ou seja, $\kappa(s)\langle \mathbf{n}(s), v \rangle = 0$. Logo, $\mathbf{n}(s)$ é ortogonal a v , pois $\kappa(s) > 0$. Então $\mathbf{b}(s) = v$ ou $\mathbf{b}(s) = -v$ para todo $s \in I$.

Como $\alpha(s) \in \pi \cap \pi_{\text{osc}}(s)$ para todo $s \in I$, temos que $\pi_{\text{osc}}(s) = \pi$ para todo $s \in I$. ■

Proposição 3.3 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\kappa(s) > 0$ para todo $s \in I$. Então α é uma curva plana se, e só se, $\tau(s) = 0$ para todo $s \in I$.

Prova.

(\Rightarrow) Se α é uma curva plana, pela proposição acima, $\mathbf{b}(s)$ é constante. Então $\mathbf{b}'(s) = 0$ e, portanto, $\tau(s) = \langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 0$ para todo $s \in I$.

(\Leftarrow) Se $\tau(s) = 0$ para todo $s \in I$, temos que $\mathbf{b}'(s) = 0$ para todo $s \in I$. Sejam $s_0 \in I$ e a função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ dada por $f(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), \mathbf{b}_0 \rangle$, onde $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}(s)$ para todo $s \in I$.

Derivando, obtemos $f'(s) = \langle \alpha'(s), \mathbf{b}_0 \rangle = \langle \alpha'(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0$ para todo $s \in I$. Logo f é constante e igual a zero, pois $f(s_0) = 0$.

Então $\alpha(s) \in \pi = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - \alpha(s_0), \mathbf{b}_0 \rangle = 0\}$ para todo $s \in I$. ■

Observação 3.4 A condição $\kappa(s) > 0$ para todo $s \in I$, na proposição acima, é essencial. No exercício 10 (pag. —) é dado um exemplo onde τ pode ser definida como identicamente zero, mas a curva não é plana.

Observação 3.5 Diferentemente da curvatura, a torção pode ser positiva ou negativa. Na próxima seção veremos uma interpretação geométrica para o sinal da torção.

Observação 3.6 A curvatura, a torção e o vetor normal permanecem invariantes por uma mudança de orientação da curva α , enquanto o vetor tangente e o vetor binormal mudam de sinal.

Com efeito, seja $\beta(s) = \alpha(-s + M)$, $s \in (-a + M, -b + M)$ outra parametrização pelo comprimento de arco que tem orientação oposta à de α .

Então, $\beta'(s) = -\alpha'(-s + M)$ e $\beta''(s) = \alpha''(-s + M)$. Logo

$$\kappa_\beta(s) = \|\beta''(s)\| = \|\alpha''(-s + M)\| = \kappa_\alpha(-s + M);$$

$$\mathbf{n}_\beta(s) = \frac{\beta''(s)}{\kappa_\beta(s)} = \frac{\alpha''(-s + M)}{\kappa_\alpha(-s + M)} = \mathbf{n}_\alpha(-s + M);$$

$$\mathbf{b}_\beta(s) = \mathbf{t}_\beta(s) \wedge \mathbf{n}_\beta(s) = -\mathbf{t}_\alpha(-s + M) \wedge \mathbf{n}_\alpha(-s + M) = -\mathbf{b}_\alpha(-s + M);$$

$$\mathbf{b}'_\beta(s) = \mathbf{b}'_\alpha(-s + M);$$

e

$$\tau_\beta(s) = \langle \mathbf{b}'_\beta(s), \mathbf{n}_\beta(s) \rangle = \langle \mathbf{b}'_\alpha(-s + M), \mathbf{n}_\alpha(-s + M) \rangle = \tau_\alpha(-s + M). \quad \square$$

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com $\kappa(s) > 0$ para todo $s \in I$. Como o referencial de Frenet da curva α em s , $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$, é uma base ortogonal

de \mathbb{R}^3 , podemos escrever os vetores $\mathbf{t}'(s)$, $\mathbf{n}'(s)$ e $\mathbf{b}'(s)$ como combinação linear de $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$. Já vimos que

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s) \mathbf{n}(s) \quad \text{e} \quad \mathbf{b}'(s) = \tau(s) \mathbf{n}(s).$$

Vamos obter agora a expressão de $\mathbf{n}'(s)$ como combinação linear de $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$.

Como $\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}(s)$, derivando temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'(s) &= \mathbf{b}'(s) \wedge \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}'(s) \\ &= \tau(s) \mathbf{n}(s) \wedge \mathbf{t}(s) + \kappa(s) \mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{n}(s) \\ &= -\tau(s) \mathbf{b}(s) - \kappa(s) \mathbf{t}(s), \end{aligned}$$

pois $\mathbf{b}(s) = -\mathbf{n}(s) \wedge \mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{t}(s) = -\mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$.

Resumindo: Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com $\kappa(s) > 0$ para todo $s \in I$, então o triedro de Frenet definido por $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$, $\mathbf{n}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)}$ e $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$ satisfaz as equações:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= \kappa(s) \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) &= -\kappa(s) \mathbf{t}(s) - \tau(s) \mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &= \tau(s) \mathbf{n}(s), \end{aligned}$$

que são denominadas *fórmulas de Frenet da curva α* .

Exemplo 3.2 Seja a hélice circular parametrizada pelo comprimento de arco $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

onde $a > 0$ e $b \neq 0$.

Então,

$$\alpha'(s) = \left(\frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

e

$$\alpha''(s) = \left(\frac{-a}{a^2 + b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{-a}{a^2 + b^2} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right).$$

Logo, $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\| = \frac{a}{a^2 + b^2}$ é constante e o vetor normal

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)} = \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right)$$

é um vetor paralelo ao plano xy para todo $s \in \mathbb{R}$.

Como

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(s) &= \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{vmatrix} -a \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} & a \operatorname{cos} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} & b \\ -\operatorname{cos} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} & -\operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(b \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -b \operatorname{cos} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \right), \end{aligned}$$

temos que

$$\mathbf{b}'(s) = \left(\frac{b}{a^2 + b^2} \operatorname{cos} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{a^2 + b^2} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right)$$

e, portanto, $\tau(s) = \langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \frac{-b}{a^2 + b^2}$ é constante. \square

• O triedro de Frenet, a curvatura e a torção foram definidas para uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. A proposição abaixo permite obter a curvatura, a torção e o triedro de Frenet de uma curva regular com parâmetro qualquer sem precisar reparametrizá-la pelo comprimento de arco.

Proposição 3.4 *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de parâmetro $t \in I$ e seja $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\beta(s) = \alpha \circ h(s)$, uma reparametrização de α pelo comprimento de arco com a mesma orientação, onde $h = s^{-1} : J \rightarrow I$ e $s : I \rightarrow J$, $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi$, é a função comprimento de arco de α a partir de t_0 .*

Então,

$$\mathbf{t}_\alpha(t) = \mathbf{t}_\beta(s(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|};$$

$$\mathbf{n}_\alpha(t) = \mathbf{n}_\beta(s(t)) = \frac{\alpha''(t)\|\alpha'(t)\|^2 - \alpha'(t)\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\| \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|};$$

$$\mathbf{b}_\alpha(t) = \mathbf{b}_\beta(s(t)) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t)\| \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} - \frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha'''(t), \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \rangle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\| \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^3};$$

$$\kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(s(t)) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

e

$$\tau_\alpha(t) = \tau_\beta(s(t)) = \frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}.$$

Prova.

Como $\alpha(t) = \beta(s(t))$, $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$ e $s''(t) = \frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|}$, temos que:

$$\alpha'(t) = \beta'(s(t)) s'(t) = \beta'(s(t)) \|\alpha'(t)\|$$

e

$$\alpha''(t) = \beta''(s(t)) \|\alpha'(t)\|^2 + \beta'(s(t)) \frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Logo,

$$\mathbf{t}_\alpha(t) = \mathbf{t}_\beta(s(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}; \quad (2)$$

$$\beta''(s(t)) = \frac{\alpha''(t) \|\alpha'(t)\|^2 - \alpha'(t) \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^4}; \quad (3)$$

e

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = s'(t)^3 \beta'(s(t)) \wedge \beta''(s(t)).$$

Então,

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| &= s'(t)^3 \|\beta'(s(t)) \wedge \beta''(s(t))\| \\ &= s'(t)^3 \|\beta'(s(t))\| \|\beta''(s(t))\| \text{sen } 90^\circ \\ &= s'(t)^3 \|\beta''(s(t))\| = s'(t)^3 \kappa_\beta(s(t)). \end{aligned}$$

Portanto, $\kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(s(t)) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$, e, por (3),

$$\mathbf{n}_\alpha(t) = \mathbf{n}_\beta(s(t)) = \frac{\beta''(s(t))}{\kappa_\beta(s(t))} = \frac{\alpha''(t) \|\alpha'(t)\|^2 - \alpha'(t) \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\| \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} \quad (4)$$

Vamos agora determinar a torção e o vetor binormal. Como

$$\mathbf{b}_\beta(s(t)) = \mathbf{t}_\beta(s(t)) \wedge \mathbf{n}_\beta(s(t)),$$

temos, por (2) e (4), que

$$\mathbf{b}_\alpha(t) = \mathbf{b}_\beta(s(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \wedge \frac{\alpha''(t) \|\alpha'(t)\|^2 - \alpha'(t) \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\| \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}.$$

Derivando a expressão acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'_\beta(s(t)) s'(t) &= \left[(\alpha'(t) \wedge \alpha'''(t)) \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| \right. \\ &\quad \left. - (\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)) \frac{1}{2} 2 \langle \alpha'(t) \wedge \alpha'''(t), \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \rangle \right] \frac{1}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}. \end{aligned}$$

Logo

$$\mathbf{b}'_{\beta}(s(t)) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t)\| \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} - \frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha'''(t), \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \rangle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\| \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}. \quad (5)$$

Assim, como

$$\tau_{\alpha}(t) = \tau_{\beta}(s(t)) = \langle \mathbf{b}'_{\beta}(s(t)), \mathbf{n}_{\beta}(s(t)) \rangle,$$

temos, por (4) e (5), que:

$$\tau_{\alpha}(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2},$$

pois

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \wedge \alpha'''(t) \rangle = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \rangle = \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \rangle = 0,$$

para todo $t \in I$. ■

A proposição abaixo caracteriza as curvas regulares cujo traço está contido em um círculo.

Proposição 3.5 *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular tal que $\kappa(t) > 0$ para todo $t \in I$. Então o traço de α está contido num círculo de raio $a > 0$ se, e só se, $\tau \equiv 0$ e $\kappa \equiv \frac{1}{a}$.*

Prova.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que α está parametrizada pelo comprimento de arco.

(\Rightarrow) Suponhamos que $\alpha(I) \subset \mathcal{C}_a(c)$, onde $\mathcal{C}_a(c)$ é o círculo de centro c e raio a .

Como α é uma curva plana temos, pela proposição 3.3, que $\tau \equiv 0$, $\mathbf{b}(s) = \mathbf{b}$ é constante e $\langle \alpha(s) - c, \mathbf{b} \rangle = 0$ para todo $s \in I$.

Além disso, como $\langle \alpha(s) - c, \alpha(s) - c \rangle = a^2$ para todo $s \in I$, obtemos, derivando duas vezes essa expressão, que:

$$\langle \alpha'(s), \alpha(s) - c \rangle = 0,$$

e

$$\langle \alpha''(s), \alpha(s) - c \rangle = -\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = -1, \quad (6)$$

para todo $s \in I$.

Como $\alpha(s) - c$ é ortogonal aos vetores $\mathbf{t}(s)$ e \mathbf{b} temos que $\alpha(s) - c$ é paralelo ao vetor normal $\mathbf{n}(s)$. Portanto, por (6),

$$\|\alpha''(s)\| \|\alpha(s) - c\| = 1,$$

ou seja, $\kappa(s) = \frac{1}{a}$ para todo $s \in I$.

(\Leftarrow) Consideremos a aplicação diferenciável $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(s) = \alpha(s) + a\mathbf{n}(s)$.

Usando as fórmulas de Frenet temos que

$$f'(s) = \alpha'(s) + a\mathbf{n}'(s) = \alpha'(s) + a(-\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{n}(s)).$$

Como $\tau \equiv 0$ e $\kappa \equiv \frac{1}{a}$, concluímos que $f'(s) = 0$. Portanto, existe $c \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(s) = c$ para todo $s \in I$, ou seja,

$$\alpha(s) + a\mathbf{n}(s) = c,$$

para todo $s \in I$.

Logo, $\|\alpha(s) - c\| = \|a\mathbf{n}(s)\| = a$ para todo $s \in I$.

Além disso, como $\tau \equiv 0$, temos que $\mathbf{b}(s) = \mathbf{b}$ é constante e

$$\alpha(I) \subset \pi = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - \alpha(s_0), \mathbf{b} \rangle = 0\}.$$

Então $c = \alpha(s_0) + a\mathbf{n}(s_0) \in \pi$.

Assim, $\alpha(I)$ está contida no círculo do plano π de centro c e raio a , pois $c \in \pi$ e $\|\alpha(s) - c\| = a$.



Atividade 3.1 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco contida numa esfera $S_a(c)$ de centro c e raio a . Então $\kappa(s) \geq \frac{1}{a}$ para todo $s \in I$

Solução: Como $\langle \alpha(s) - c, \alpha(s) - c \rangle = a^2$ para todo $s \in I$, obtemos, derivando duas vezes essa expressão, que:

$$\begin{aligned} & \langle \alpha'(s), \alpha(s) - c \rangle = 0 \\ \implies & \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle + \langle \alpha''(s), \alpha(s) - c \rangle = 0 \\ \implies & \kappa(s) \langle \mathbf{n}(s), \alpha(s) - c \rangle = -1 \\ \implies & \kappa(s) \neq 0 \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{n}(s), \alpha(s) - c \rangle = -\frac{1}{\kappa(s)} \\ \implies & \frac{1}{\kappa(s)} = |\langle \mathbf{n}(s), \alpha(s) - c \rangle| \leq \|\mathbf{n}(s)\| \|\alpha(s) - c\| = a \\ \implies & \kappa(s) \geq \frac{1}{a} \quad \text{para todo } s \in I. \end{aligned}$$

Atividade 3.2 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco contida numa esfera de centro c e raio a tal que $\kappa(s) \equiv \kappa$ é constante em I . Mostre que $\alpha(I)$ está contido num círculo de raio $\frac{1}{\kappa}$ e determine o centro deste círculo.

Solução: Temos, pelo exercício anterior, que

$$\kappa \geq \frac{1}{\alpha}, \quad \langle \alpha'(s), \alpha(s) - c \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{n}(s), \alpha(s) - c \rangle = -\frac{1}{\kappa}, \quad (7)$$

para todo $s \in I$. Derivando a última identidade, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}'(s), \alpha(s) - c \rangle + \langle \mathbf{n}(s), \alpha'(s) \rangle &= 0 \\ \iff -\kappa \langle \alpha'(s), \alpha(s) - c \rangle - \tau(s) \langle \mathbf{b}(s), \alpha(s) - c \rangle &= 0 \\ \iff \tau(s) \langle \mathbf{b}(s), \alpha(s) - c \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

para todo $s \in I$.

Afirmação: $\tau(s) = 0$ para todo $s \in I$.

Suponhamos, por absurdo, que existe $s_0 \in I$ tal que $\tau(s_0) \neq 0$. Então existe um intervalo aberto $I_0 \subset I$ tal que $s_0 \in I_0$ e $\tau(s) \neq 0$ para todo $s \in I_0$.

Logo, por (8), $\langle \mathbf{b}(s), \alpha(s) - c \rangle = 0$ para todo $s \in I_0$. Como

$$(\alpha(s) - c) \perp \alpha'(s), \quad (\alpha(s) - c) \perp \mathbf{b}(s) \quad \text{e} \quad \langle \alpha(s) - c, \mathbf{n}(s) \rangle = -\frac{1}{\kappa},$$

temos que

$$\alpha(s) - c = -\frac{1}{\kappa} \mathbf{n}(s) \iff c = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n}(s),$$

para todo $s \in I_0$.

Então,

$$0 = \alpha'(s) + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n}'(s) = \alpha'(s) + \frac{1}{\kappa} (-\kappa \alpha'(s) - \tau(s) \mathbf{b}(s)) = -\frac{\tau(s)}{\kappa} \mathbf{b}(s),$$

para todo $s \in I_0$. Ou seja, $\tau(s) = 0$ para todo $s \in I_0$, uma contradição. \square

Como $\tau(s) = 0$ e $\kappa(s) = \frac{1}{\kappa}$ para todo $s \in I$ pela proposição 3.5, $\alpha(I)$ está contido em um círculo \mathcal{C} de raio κ no plano

$$\pi = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - \alpha(s), \mathbf{b} \rangle = 0\},$$

que é o plano osculador de α em s , onde $\mathbf{b}(s) = \mathbf{b}$ é constante em I .

Então $\langle \mathbf{b}(s), \alpha(s) - c \rangle$ é constante em I , pois sua derivada

$$\langle \mathbf{b}'(s), \alpha(s) - c \rangle + \langle \mathbf{b}(s), \alpha'(s) \rangle = 0,$$

para todo $s \in I$.

Logo,

$$\langle \mathbf{b}, \alpha(s) - c \rangle = \|\mathbf{b}\| \|\alpha(s) - c\| \cos \theta = a \cos \theta \quad (9)$$

é constante em I .

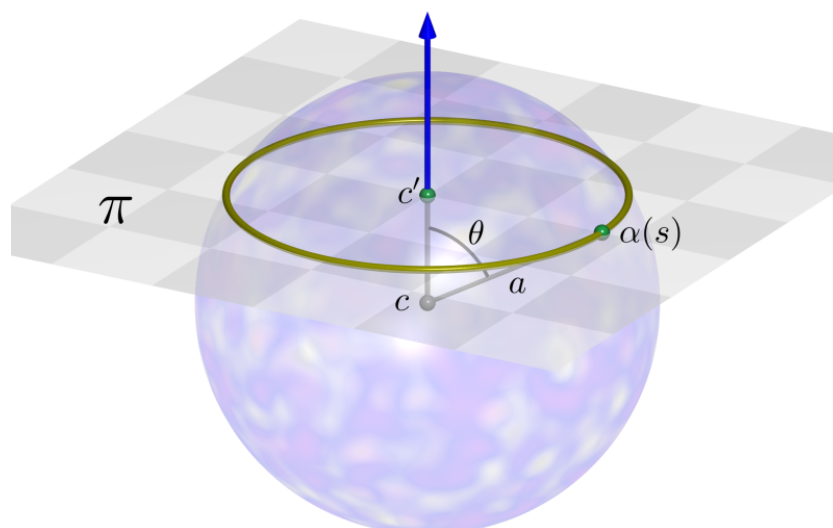


Fig. 4: $\mathbf{b}(s)$ é constante ao longo do traço de α

Afirmção: $c' = c + a \cos \theta \mathbf{b}$ é o centro do círculo \mathcal{C} . (★)

De fato, por (7) e (9), temos

$$\alpha(s) - c = -\frac{1}{\kappa} \mathbf{n}(s) + a \cos \theta \mathbf{b}.$$

Logo,

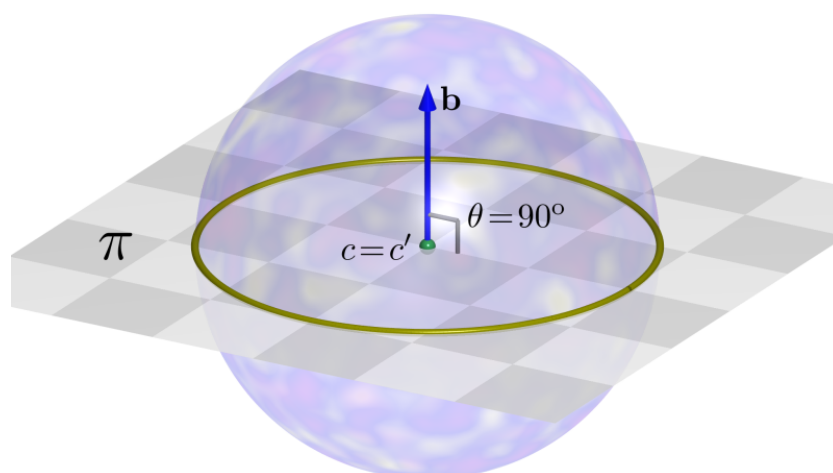
$$\|\alpha(s) - (c + a \cos \theta \mathbf{b})\| = \left\| -\frac{1}{\kappa} \mathbf{n}(s) \right\| = \frac{1}{\kappa},$$

para todo $s \in I$.

Para concluir que $c' = c + a \cos \theta \mathbf{b}$ é o centro do círculo \mathcal{C} , basta observar que $c' \in \pi = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - \alpha(s_0), \mathbf{b} \rangle = 0\}$, pois, por (9),

$$\langle c + a \cos \theta \mathbf{b} - \alpha(s_0), \mathbf{b} \rangle = \langle c - \alpha(s_0), \mathbf{b} \rangle + a \cos \theta = -a \cos \theta + a \cos \theta = 0.$$

- Observe que se $\kappa \equiv \frac{1}{a}$ então $c' = c$, ou seja, $\alpha(I)$ está contido na interseção da esfera $S_r(c)$ com um plano que passa por c .

Fig. 5: Se $\kappa \equiv \frac{1}{a}$ então $c = c'$

De fato, por (7), $\langle \alpha(s) - c, \mathbf{n}(s) \rangle = -\frac{1}{\kappa} = -a$ e, portanto,

$$a = |\langle \alpha(s) - c, \mathbf{n}(s) \rangle| \leq \|\alpha(s) - c\| \|\mathbf{n}(s)\| = a.$$

Logo, $\alpha(s) - c$ e $\mathbf{n}(s)$ são LD e $\alpha(s) - c = -\frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s) = -a\mathbf{n}(s)$, ou seja, $c' = c = \alpha(s) + a\mathbf{n}(s)$, pois $\cos \theta = 0$ em (*).

• A hélice circular $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $b \neq 0$, tem a propriedade de que o vetor tangente $\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$ faz um ângulo constante com o eixo-Oz, pois

$$\cos \theta(t) = \frac{\langle \alpha'(t), (0, 0, 1) \rangle}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{é constante.}$$

Este é um caso particular de uma classe de curvas que têm a mesma propriedade.

Definição 3.5 Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma **hélice** se existe um vetor v unitário que faz um ângulo constante com $\alpha'(t)$, isto é, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\langle \alpha'(t), v \rangle}{\|\alpha'(t)\|} = c,$$

para todo $t \in I$.

Exemplo 3.3 A curva regular $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$, é uma hélice, pois

$$\alpha'(t) = e^t(\cos t, \sin t, 1) + e^t(-\sin t, \cos t, 0)$$

e, portanto, $\frac{\langle \alpha'(t), (0, 0, 1) \rangle}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{e^t}{\sqrt{3}e^t} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ é constante. \square

Proposição 3.6 *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular tal que $\kappa(t) > 0$ para todo $t \in I$. Então α é uma hélice se, e só se, $\frac{\tau}{\kappa}$ é constante.*

Prova.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que α está parametrizada pelo comprimento de arco.

(\Rightarrow) Suponhamos que existem um vetor v unitário e $c \in \mathbb{R}$ tais que $\langle \alpha'(s), v \rangle = c$ para todo $s \in I$.

Então, como $\langle \alpha''(s), v \rangle = 0$, $\alpha''(s) = \kappa \mathbf{n}(s)$ e $\kappa(s) \neq 0$, temos que $\langle \mathbf{n}(s), v \rangle = 0$ para todo $s \in I$.

Logo, existem funções $\lambda, \delta : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tais que

$$v = \lambda(s)\mathbf{t}(s) + \delta(s)\mathbf{b}(s),$$

para todo $s \in I$. Como $\lambda(s)^2 + \delta(s)^2 = 1$, temos, pelo lema 5.1 do Capítulo 1, que existe uma função $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que $\lambda(s) = \cos \theta(s)$ e $\delta(s) = \sin \theta(s)$, ou seja,

$$v = \cos \theta(s) \mathbf{t}(s) + \sin \theta(s) \mathbf{b}(s),$$

para todo $s \in I$.

Derivando, obtemos:

$$0 = -\sin \theta(s) \cdot \theta'(s) \mathbf{t}(s) + \cos \theta(s) \cdot \kappa(s) \mathbf{n}(s) + \cos \theta(s) \cdot \theta'(s) \mathbf{b}(s) + \sin \theta(s) \cdot \tau(s) \mathbf{n}(s).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \theta'(s) \sin \theta(s) &= 0 \\ \kappa(s) \cos \theta(s) + \tau(s) \sin \theta(s) &= 0 \\ \theta'(s) \cos \theta(s) &= 0, \end{aligned} \tag{10}$$

para todo $s \in I$. Então,

$$\theta'(s)^2 = (\theta'(s) \cos \theta(s))^2 + (\theta'(s) \sin \theta(s))^2 = 0,$$

ou seja, $\theta(s) = \theta_0$ para todo $s \in I$, onde θ_0 é uma constante real.

Além disso, se $\cos \theta_0 = 0$ temos, por (10), que $\tau(s) = 0$, para todo $s \in I$, e, portanto, $\frac{\tau}{\kappa} \equiv 0$.

Se $\cos \theta_0 \neq 0$, temos, por (10), que $\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = -\cotg \theta_0$ é também constante.

Observe que, em qualquer caso, $\sin \theta_0 \neq 0$, pois, caso contrário, teríamos, por (10), que $\kappa(s) \equiv 0$, uma contradição.

(\Leftarrow) Suponhamos que $\frac{\tau}{\kappa}$ é constante. Então existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{\tau}{\kappa} = -\frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0}$.

Seja $v(s) = \cos \theta_0 \mathbf{t}(s) + \sin \theta_0 \mathbf{b}(s)$. Derivando, obtemos:

$$\begin{aligned} v'(s) &= \cos \theta_0 \mathbf{t}'(s) + \sin \theta_0 \mathbf{b}'(s) \\ &= (\cos \theta_0 \kappa(s) + \sin \theta_0 \tau(s)) \mathbf{n}(s) = 0, \end{aligned}$$

para todo $s \in I$. Logo, $v(s) = v$ é constante e $\langle v, \mathbf{t}(s) \rangle = \cos \theta_0$, pois v é unitário. ■

4. Forma Local das Curvas no Espaço

Um dos métodos mais eficazes para resolver problemas em geometria consiste na escolha de um sistema de coordenadas adequado ao problema em questão. Para o estudo das propriedades locais de uma curva na vizinhança de um ponto, convém analisar as funções coordenadas da curva com respeito ao sistema de coordenadas dado pelo triedro de Frenet.

Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\kappa(s) > 0$ para todo $s \in I$ e $s_0 \in I$.

Pela Fórmula de Taylor Infinitesimal de α em torno do ponto s_0 , temos:

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + (s - s_0)\alpha'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2} \alpha''(s_0) + \frac{(s - s_0)^3}{6} \alpha'''(s_0) + \mathbf{R}(s),$$

onde $\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\mathbf{R}(s)}{(s - s_0)^3} = 0$.

Como

$$\alpha'(s_0) = \mathbf{t}(s_0),$$

$$\alpha''(s_0) = \kappa(s_0) \mathbf{n}(s_0),$$

$$\alpha'''(s_0) = (\kappa \mathbf{n})'(s_0) = \kappa'(s_0) \mathbf{n}(s_0) + \kappa(s_0) \mathbf{n}'(s_0) = \kappa'(s_0) \mathbf{n}(s_0) - \kappa(s_0)^2 \mathbf{t}(s_0) - \kappa(s_0) \tau(s_0) \mathbf{b}(s_0),$$

temos que:

$$\begin{aligned} \alpha(s) - \alpha(s_0) &= \left((s - s_0) - \kappa(s_0)^2 \frac{(s - s_0)^3}{6} \right) \mathbf{t}(s_0) + \left(\frac{(s - s_0)^2 \kappa(s_0)}{2} + \frac{(s - s_0)^3 \kappa'(s_0)}{6} \right) \mathbf{n}(s_0) \\ &\quad - \frac{(s - s_0)^3}{6} \kappa(s_0) \tau(s_0) \mathbf{b}(s_0) + \mathbf{R}(s). \end{aligned}$$

Ou seja, as coordenadas de $\alpha(s)$ no sistema de coordenadas com origem no ponto $\alpha(s_0)$ e eixos nas direções dos vetores $\mathbf{t}(s_0)$, $\mathbf{n}(s_0)$ e $\mathbf{b}(s_0)$ são dadas por:

$$\bar{x}(s) = (s - s_0) - \frac{\kappa(s_0)^2}{6} (s - s_0)^3 + R_{\bar{x}}(s)$$

$$\bar{y}(s) = \frac{\kappa(s_0)}{2} (s - s_0)^2 + \frac{\kappa'(s_0)}{6} (s - s_0)^3 + R_{\bar{y}}(s)$$

$$\bar{z}(s) = -\frac{\kappa(s_0)\tau(s_0)}{6} (s - s_0)^3 + R_{\bar{z}}(s),$$

onde

$$R_{\bar{x}}(s) = \langle R(s), \mathbf{t}(s_0) \rangle, \quad R_{\bar{y}}(s) = \langle R(s), \mathbf{n}(s_0) \rangle \quad \text{e} \quad R_{\bar{z}}(s) = \langle R(s), \mathbf{b}(s_0) \rangle,$$

com

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{R_{\bar{x}}(s)}{(s - s_0)^3} = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{R_{\bar{y}}(s)}{(s - s_0)^3} = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{R_{\bar{z}}(s)}{(s - s_0)^3} = 0.$$

A representação

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \bar{x}(s) \mathbf{t}(s_0) + \bar{y}(s) \mathbf{n}(s_0) + \bar{z}(s) \mathbf{b}(s_0)$$

é chamada *forma canônica local de α* em uma vizinhança de s_0 .

- Projeções do traço de α , para s próximo de s_0 nos planos \mathbf{tn} (osculador), \mathbf{tb} (retificante) e \mathbf{nb} (normal).

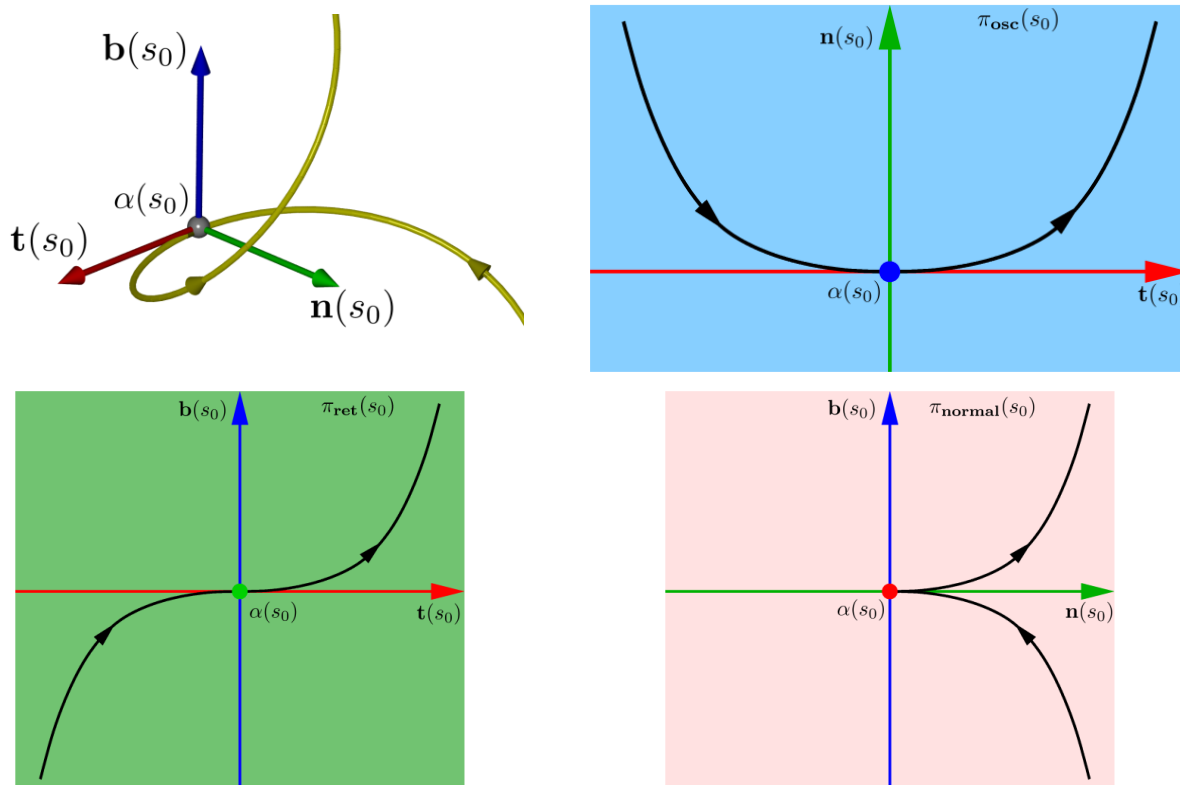


Fig. 6: Traço de α e suas projeções sobre os planos osculador, retificante e normal

- Faremos abaixo algumas aplicações geométricas da forma canônica local.

Aplicação 1. Interpretação geométrica do sinal da torção.

Suponhamos que $\tau(s_0) < 0$. Como

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\bar{z}(s)}{(s - s_0)^3} &= \lim_{s \rightarrow s_0} \left(-\frac{\kappa(s_0)\tau(s_0)}{6} + \frac{R_{\bar{z}(s)}}{(s - s_0)^3} \right) \\ &= -\frac{\kappa(s_0)\tau(s_0)}{6} > 0, \end{aligned}$$

existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |s - s_0| < \delta \implies \frac{\bar{z}(s)}{(s - s_0)^3} > 0.$$

Logo, se:

- $s_0 - \delta < s < s_0 \implies \bar{z}(s) < 0$;
- $s_0 < s < s_0 + \delta \implies \bar{z}(s) > 0$.

Ou seja, se percorrermos a curva no sentido crescente do comprimento de arco s , a curva atravessa o plano osculador de α em s_0 de baixo para cima.

Isto ocorre na hélice circular $\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$, com $a > 0$ e $b > 0$ e $\tau(s) = \frac{-b}{a^2 + b^2} < 0$.

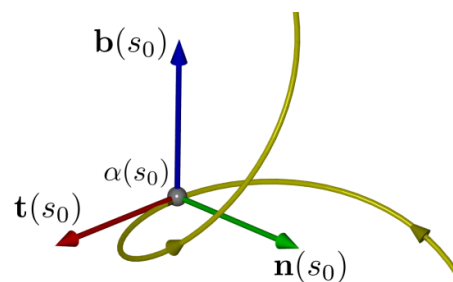


Fig. 7: Traço de α para $\tau(s) < 0$

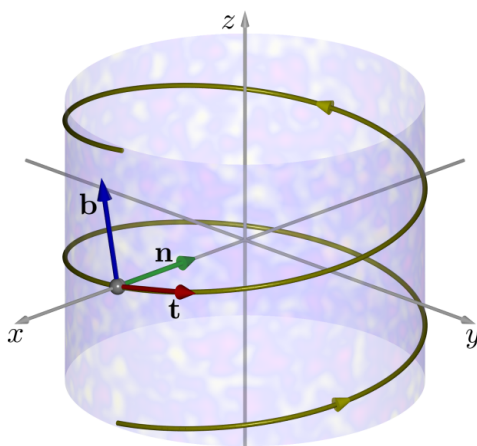


Fig. 8: Hélice α e referencial de Frenet em $\alpha(s)$, sendo $\tau < 0$

Quando $\tau(s_0) > 0$, podemos verificar, por um argumento análogo ao anterior, que se percorrermos a curva no sentido crescente do comprimento de arco, a curva atravessa o plano osculador de cima para baixo.

Para a hélice circular acima, com $a > 0$ e $b < 0$, a torção $\tau = \frac{-b}{a^2 + b^2} > 0$.

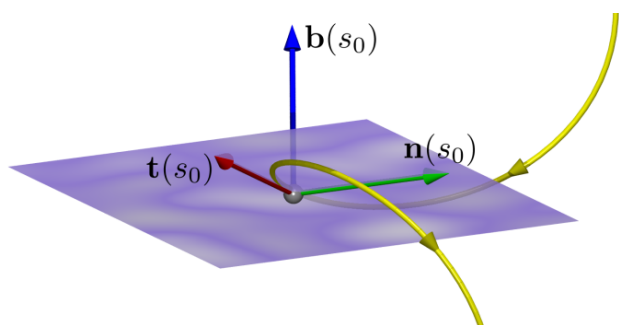


Fig. 9: Traço de α para $\tau(s) > 0$. O plano mostrado contém os vetores $\mathbf{t}(s_0)$ e $\mathbf{n}(s_0)$, o traço de α passa de cima para baixo do plano no ponto $\alpha(s_0)$

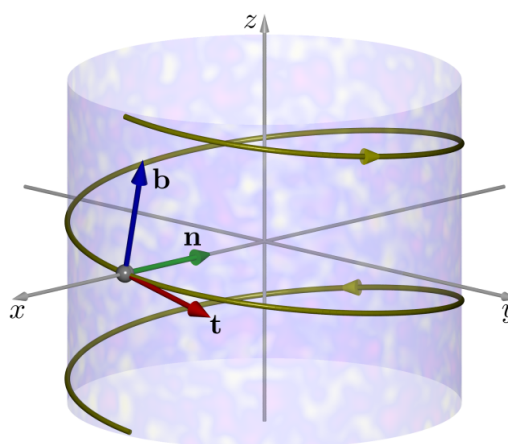


Fig. 10: Traço da hélice α para $\tau(s) > 0$ e o referencial de Frenet no ponto $\alpha(0)$

Aplicação 2. Existe uma vizinhança de s_0 em I tal que $\alpha(s)$ pertence ao semi-espaço determinado pelo plano retificante para o qual o vetor $\mathbf{n}(s_0)$ aponta.

De fato, como

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\bar{y}(s)}{(s - s_0)^2} = \lim_{s \rightarrow s_0} \left(\frac{\kappa(s_0)(s - s_0)^2}{2(s - s_0)^2} + \frac{\kappa'(s_0)(s - s_0)^3}{6(s - s_0)^2} + \frac{R_{\bar{y}}(s)}{(s - s_0)^2} \right) = \frac{\kappa(s_0)}{2} > 0,$$

existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |s - s_0| < \delta \implies \frac{\bar{y}(s)}{(s - s_0)^2} > 0.$$

Logo, $\bar{y}(s) > 0$ para todo $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$, $s \neq s_0$.

Aplicação 3. O plano osculador de α em s_0 é o limite, quando $h \rightarrow 0$, do plano que contém a reta tangente a α em s_0 e o ponto $\alpha(s_0 + h)$.

De fato, seja π um plano que contém a reta tangente a α em s_0 . Então π é da forma:

$$\pi = \{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{p} - \alpha(s_0), \mathbf{N} \rangle = 0 \},$$

onde \mathbf{N} é ortogonal a $\alpha'(s_0)$, ou seja,

$$\mathbf{N} = A\mathbf{n}(s_0) + B\mathbf{b}(s_0), \text{ com } A^2 + B^2 \neq 0.$$

Observe, também, que para $h \neq 0$ suficientemente pequeno, $\alpha(s_0 + h)$ não pertence à reta tangente a α em s_0 , pois esta reta está no plano retificante a α em s_0 e, pela Aplicação 2, $\alpha(s_0 + h)$ não pertence ao plano retificante de α em s_0

Seja $\pi(h) = \{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{p} - \alpha(s_0), \mathbf{N}(h) \rangle = 0 \}$ o plano que contém a reta tangente a α em s_0 e o ponto $\alpha(s_0 + h)$. Então

$$\mathbf{N}(h) = A(h)\mathbf{n}(s_0) + B(h)\mathbf{b}(s_0),$$

onde $B(h) \neq 0$, pois, caso contrário, $\pi(h)$ seria o plano retificante de α em s_0 e, neste caso, pela Aplicação 2, $\alpha(s_0 + h)$ não pertenceria a $\pi(h)$.

Assim,

$$\begin{aligned} p = \alpha(s_0) + \bar{x}\mathbf{t}(s_0) + \bar{y}\mathbf{n}(s_0) + \bar{z}\mathbf{b}(s_0) \in \pi(h) &\iff \langle p - \alpha(s_0), \mathbf{N}(h) \rangle = 0 \\ &\iff A(h)\bar{y} + B(h)\bar{z} = 0 \\ &\iff \bar{z} = -\frac{A(h)}{B(h)}\bar{y} = C(h)\bar{y} \end{aligned}$$

Ou seja, $\pi(h) : \bar{z} = C(h)\bar{y}$ é a equação cartesiana do plano $\pi(h)$.

Como $\alpha(s_0 + h) \in \pi(h)$, temos que $\bar{z}(s_0 + h) = C(h)\bar{y}(s_0 + h)$. Então $\bar{y}(s_0 + h) \neq 0$, pois, caso contrário, $\alpha(s_0 + h) = \alpha(s_0) + \bar{x}(s_0 + h)\mathbf{t}(s_0)$ pertenceria à reta tangente a α em s_0 .

Logo,

$$C(h) = \frac{\bar{z}(s_0 + h)}{\bar{y}(s_0 + h)} = \frac{\left(-\frac{\kappa(s_0)\tau(s_0)h^3}{6} + R_{\bar{z}}(h)\right)/h^2}{\left(\frac{\kappa(s_0)h^2}{2} + \frac{\kappa'(s_0)h^3}{6} + R_{\bar{y}}(h)\right)/h^2},$$

e, portanto, $\lim_{h \rightarrow 0} C(h) = 0$. Então,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{N}(h)}{B(h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{A(h)}{B(h)} \mathbf{n}(s_0) + \mathbf{b}(s_0) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} (-C(h)\mathbf{n}(s_0) + \mathbf{b}(s_0)) = \mathbf{b}(s_0)$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \pi(h) = \pi = \{ p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - \alpha(s_0), \mathbf{b}(s_0) \rangle = 0 \}$$

é o plano osculador de α em s_0 .

5. Teoria do Contato

Definição 5.1 Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ curvas regulares tais que $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$, onde $t_0 \in I \cap J$. Dizemos que α e β *têm contato de ordem n em t_0* (n inteiro ≥ 1) quando

$$\alpha'(t_0) = \beta'(t_0), \dots, \alpha^{(n)}(t_0) = \beta^{(n)}(t_0),$$

e $\alpha^{(n+1)}(t_0) \neq \beta^{(n+1)}(t_0)$.

Exemplo 5.1 As curvas regulares $\alpha(t) = (t, 0, 0)$ e $\beta(t) = (t, t^n, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, têm ordem de contato $n - 1$ em $t = 0$, se $n \geq 2$.

De fato, $\alpha(0) = \beta(0) = (0, 0, 0)$, $\alpha'(0) = \beta'(0) = (1, 0, 0)$, $\alpha^{(k)}(t) = (0, 0, 0)$ se $k \geq 2$, $\beta^{(k)}(t) = (0, n(n-1) \cdots (n-(k-1))t^{n-k}, 0)$ se $2 \leq k \leq n$ e $\beta^{(k)}(t) = (0, 0, 0)$ se $k \geq n+1$. Logo, $\alpha^{(k)}(0) = \beta^{(k)}(0) = (0, 0, 0)$ se $2 \leq k \leq n-1$ e $\alpha^{(n)}(0) = (0, 0, 0) \neq (0, n!, 0) = \beta^{(n)}(0)$. \square

Exemplo 5.2 As curvas regulares $\alpha(t) = (t, \cosh t, 0)$ e $\beta(t) = \left(t, \frac{t^2}{2} + 1, 0\right)$, $t \in \mathbb{R}$ têm contato de ordem 3 em $t = 0$.

De fato, $\alpha(0) = \beta(0) = (0, 1, 0)$, $\alpha'(t) = (1, \sinh t, 0)$, $\alpha''(t) = (0, \cosh t, 0)$, $\alpha'''(t) = (0, \sinh t, 0)$, $\beta'(t) = (1, t, 0)$, $\beta''(t) = (0, 1, 0)$ e $\beta'''(t) = (0, 0, 0)$.

Portanto, $\alpha'(0) = \beta'(0) = (1, 0, 0)$, $\alpha''(0) = \beta''(0) = (0, 1, 0)$ e $\alpha'''(0) = \beta'''(0) = (0, 0, 0)$ e $\alpha^{(iv)}(0) = (0, 1, 0) \neq (0, 0, 0) = \beta^{(iv)}(0)$. \square

Observação 5.1 Sejam α e β curvas regulares tais que $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ e todas as derivadas de ordem $\leq n$ de α e β coincidem em t_0 . Então α e β têm contato de ordem $\geq n$ em t_0 .

Proposição 5.1 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Uma reta $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tem contato ≥ 1 com α em t_0 se, e só se, β é a reta tangente a α em t_0 .

Prova.

(\Leftarrow) Seja $\beta(t) = \alpha(t_0) + (t - t_0)\alpha'(t_0)$ a reta tangente a α em t_0 . Então $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ e $\alpha'(t_0) = \beta'(t_0)$. Portanto, α e β têm contato de ordem ≥ 1 .

(\Rightarrow) Seja $\beta(t) = \alpha + (t - t_0)v$, $v \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ e $\alpha \in \mathbb{R}^3$ a parametrização da reta que passa por α em t_0 e é paralela ao vetor v .

Se α e β têm contato de ordem ≥ 1 em t_0 , então

$$\alpha = \beta(t_0) = \alpha(t_0) \quad \text{e} \quad v = \beta'(t_0) = \alpha'(t_0).$$

Logo, $\beta(t) = \alpha(t_0) + (t - t_0)\alpha'(t_0)$ é uma parametrização da reta tangente a α em t_0 . \blacksquare

Definição 5.2 Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com $\kappa(s) > 0$ para todo $s \in I$, dizemos que $\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$ é o *raio de curvatura de α em s* e que

$c(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s)$ é o *centro de curvatura de α em s* .

O *círculo osculador de α em s* é o círculo contido no plano osculador de α em s com centro $c(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s)$ e raio $\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$.

Observação 5.2

- $c(s)$ pertence ao plano osculador de α em s .
- $\alpha(s)$ pertence ao círculo osculador de α em s , pois $\alpha(s) \in \pi_{\text{osc}}(s)$ e $\|\alpha(s) - c(s)\| = \rho(s)$.
- A curva α e o círculo osculador de α em s possuem a mesma reta tangente em s e, portanto, têm contato de ordem ≥ 1 em s .

De fato, a reta tangente r ao círculo osculador de α em s é a reta que passa por $\alpha(s)$ e é ortogonal ao vetor $c(s) - \alpha(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s)$. Assim, r é paralela ao vetor $\alpha'(s)$, pois $\pi_{\text{osc}}(s)$ é gerado pelos vetores $\alpha'(s)$ e $\mathbf{n}(s)$.

Proposição 5.2 *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\kappa(s) > 0$ para todo $s \in I$ e seja $s_0 \in I$. Então o círculo osculador de α em s_0 tem contato de ordem ≥ 2 com α em s_0 .*

Prova.

Vamos mostrar que existe uma curva $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\beta(s_0) = \alpha(s_0)$, $\beta'(s_0) = \alpha'(s_0)$, $\beta''(s_0) = \alpha''(s_0)$ e traço $\beta =$ círculo osculador de α em s_0 .

De fato, como $\beta(\mathbb{R}) \subset$ plano osculador de α em s_0 , $\beta(s) = \alpha(s_0) + A(s) \mathbf{t}(s_0) + B(s) \mathbf{n}(s_0)$, onde $A, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções C^∞ tais que $A(s_0) = B(s_0) = 0$ e

$$\|\beta(s) - c(s_0)\|^2 = \frac{1}{\kappa(s_0)^2} = A(s)^2 + \left(B(s) - \frac{1}{\kappa(s_0)} \right)^2.$$

Tomemos $A(s) = \frac{1}{\kappa(s_0)} \cos(Ls + M)$ e $B(s) = \frac{1}{\kappa(s_0)} \sin(Ls + M) + \frac{1}{\kappa(s_0)}$, onde L e M são constantes a serem determinadas.

Devemos ter $\|\beta'(s)\| = 1$, o que implica que $A'(s)^2 + B'(s)^2 = 1$.

Como $A'(s) = -\frac{L}{\kappa(s_0)} \sin(Ls + M)$ e $B'(s) = \frac{L}{\kappa(s_0)} \cos(Ls + M)$, podemos tomar $L = \kappa(s_0)$.

Além disso, queremos que $\beta'(s_0) = \alpha'(s_0)$. Portanto, devemos ter $A'(s_0) = 1$ e $B'(s_0) = 0$.

Tomemos, então, M tal que $\kappa(s_0) s_0 + M = -\frac{\pi}{2}$, ou seja, $M = -\frac{\pi}{2} - \kappa(s_0) s_0$.

$$\text{Logo, } A(s) = \frac{1}{\kappa(s_0)} \cos\left(\kappa(s_0)(s - s_0) - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{e} \quad B(s) = \frac{1}{\kappa(s_0)} \text{sen}\left(\kappa(s_0)(s - s_0) - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\kappa(s_0)}.$$

Assim, $\beta(s_0) = \alpha(s_0)$, $\beta'(s_0) = \mathbf{t}(s_0)$ e

$$\begin{aligned} \beta''(s_0) &= A''(s_0)\mathbf{t}(s_0) + B''(s_0)\mathbf{n}(s_0) \\ &= -\kappa(s_0) \cos\left(\kappa(s_0)(s_0 - s_0) - \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{t}(s_0) - \kappa(s_0) \text{sen}\left(\kappa(s_0)(s_0 - s_0) - \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{n}(s_0) \\ &= \kappa(s_0) \mathbf{n}(s_0) = \alpha''(s_0). \end{aligned}$$



Proposição 5.3 *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\kappa(s) > 0$ para todo $s \in I$. O círculo osculador de α em $s_0 \in I$ é o único círculo que passa por $\alpha(s_0)$ e tem contato de ordem ≥ 2 com α em s_0 .*

Prova.

Seja \mathcal{C} um círculo de centro A e raio R contido num plano π que tem contato de ordem ≥ 2 com α em s_0 .

Então $\pi = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - \alpha(s_0), \mathbf{N} \rangle = 0\}$, onde \mathbf{N} é um vetor unitário normal ao plano π , e existe uma curva $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\beta(\mathbb{R}) = \mathcal{C}$, $\beta(s_0) = \alpha(s_0)$, $\beta'(s_0) = \alpha'(s_0)$ e $\beta''(s_0) = \alpha''(s_0) = \kappa(s_0) \mathbf{n}(s_0)$.

Como $\langle \beta(s) - \alpha(s_0), \mathbf{N} \rangle = 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$, temos, derivando duas vezes, que $\langle \beta'(s_0), \mathbf{N} \rangle = 0$ e $\langle \beta''(s_0), \mathbf{N} \rangle = 0$. Logo, $\mathbf{N} \perp \beta'(s_0) = \alpha'(s_0)$ e $\mathbf{N} \perp \beta''(s_0) = \kappa(s_0) \mathbf{n}(s_0)$.

Portanto, \mathbf{N} é paralelo ao vetor binormal $\mathbf{b}(s_0)$ de α em s_0 e π é o plano osculador de α em s_0 .

Além disso, como $\langle \beta(s) - A, \beta(s) - A \rangle = R^2$ para todo $s \in \mathbb{R}$, obtemos, derivando duas vezes, que

$$\langle \beta'(s), \beta(s) - A \rangle = 0$$

e

$$\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle + \langle \beta''(s), \beta(s) - A \rangle = 0,$$

para todo $s \in \mathbb{R}$.

Então, para $s = s_0$,

$$\langle \alpha'(s_0), \alpha(s_0) - A \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \kappa(s_0) \mathbf{n}(s_0), \alpha(s_0) - A \rangle = -1.$$

Logo, $(\alpha(s_0) - A) \perp \alpha'(s_0)$ e $\langle \alpha(s_0) - A, \mathbf{n}(s_0) \rangle = -\frac{1}{\kappa(s_0)}$. Sendo $(\alpha(s_0) - A) \perp \mathbf{b}(s_0)$, pois

$\alpha(s_0), A \in \pi_{\text{osc}}(s_0)$, obtemos que $\alpha(s_0) - A = -\frac{1}{\kappa(s_0)} \mathbf{n}(s_0)$, ou seja, $A = \alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} \mathbf{n}(s_0)$ é o

centro de curvatura de α em s_0 .

Como $\alpha(s_0) \in \mathcal{C}$,

$$R = \|\alpha(s_0) - \mathbf{A}\| = \|\alpha(s_0) - \mathbf{c}(s_0)\| = \frac{1}{\kappa(s_0)}$$

é o raio de curvatura de α em s_0 .

Logo \mathcal{C} é o círculo osculador de α em s_0 . ■

Definição 5.3 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e π um plano de \mathbb{R}^3 tal que $p = \alpha(t_0) \in \pi$, $t_0 \in I$.

Dizemos que α e π têm contato de ordem n em p se existe uma curva regular $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $t_0 \in J$, $\beta(J) \subset \pi$, α e β têm contato de ordem n em t_0 e não existe uma curva regular em π que tem contato de ordem $> n$ com α em t_0 .

Observação 5.3 Se existe uma curva regular $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $t_0 \in J$, $\beta(J) \subset \pi$ e β , α têm contato de ordem n em $p = \alpha(t_0)$, então α e π têm contato de ordem $\geq n$ em p .

Observação 5.4 Todo plano que contém a reta tangente a α em t_0 tem contato de ordem ≥ 1 com α em t_0 . Dentre estes planos temos o plano osculador de α em t_0 .

Proposição 5.4 Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com $\kappa(s) > 0$ para todo $s \in I$ e π um plano que passa por $\alpha(s_0)$.

Então α e π têm contato de ordem ≥ 2 em $\alpha(s_0)$ se, e só se, π é o plano osculador de α em s_0 .

Prova.

(\Leftarrow) O círculo osculador de α em s_0 está contido no plano osculador de α em s_0 e tem contato de ordem ≥ 2 com α em s_0 .

(\Rightarrow) Se π e α têm contato de ordem ≥ 2 em $\alpha(s_0)$, existe uma curva regular $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$, que podemos supor parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $s_0 \in I \cap J$, $\beta(J) \subset \pi$ e β e α têm contato de ordem ≥ 2 em s_0 , ou seja, $\beta(s_0) = \alpha(s_0)$, $\beta'(s_0) = \alpha'(s_0)$ e $\beta''(s_0) = \alpha''(s_0)$.

Logo, $\kappa_\beta(s_0) = \|\beta''(s_0)\| = \|\alpha''(s_0)\| = \kappa_\alpha(s_0)$ e, portanto, $\mathbf{n}_\beta(s_0) = \mathbf{n}_\alpha(s_0)$.

Assim, α e β têm o mesmo plano osculador em s_0 . Mas como β é uma curva plana, temos que π é o plano osculador de β em s_0 . Então π é o plano osculador de α em s_0 . ■

Observação 5.5 Se a torção de α em s_0 é não-nula, então α e o plano osculador de α em s_0 têm contato de ordem 2 (ver Atividade 2.22).

Definição 5.4 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com $\kappa(s) > 0$ para todo $s \in I$ e $\tau(s_0) \neq 0$, onde $s_0 \in I$. Dizemos, então, que

$$R(s_0) = \sqrt{\frac{1}{\kappa(s_0)^2} + \left(\frac{\kappa'(s_0)}{\kappa(s_0)^2 \tau(s_0)}\right)^2} = \sqrt{\rho(s_0)^2 + \left(\frac{\rho'(s_0)}{\tau(s_0)}\right)^2}$$

é o *raio de curvatura esférica de α em s_0* e

$$c(s_0) = \alpha(s_0) + \rho(s_0)\mathbf{n}(s_0) + \frac{\rho'(s_0)}{\tau(s_0)}\mathbf{b}(s_0)$$

é o *centro de curvatura esférica de α em s_0* , onde $\rho(s_0) = \frac{1}{\kappa(s_0)}$ é o raio de curvatura de α em s_0 .

A *esfera oscultriz de α em s_0* é a esfera de raio $R(s_0)$ e centro $c(s_0)$.

Observação 5.6 De modo análogo à definição 5.3, podemos introduzir o conceito de contato entre uma curva e uma esfera, e provar que a esfera oscultriz de α em s_0 tem contato de ordem ≥ 2 com a curva α em s_0 (ver Atividade 2.23).

Exemplo 5.3 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com $\kappa(s) > 0$ e $\tau(s) \neq 0$ para todo $s \in I$.

(a) Se $\alpha(I)$ está contida numa esfera $S_r(A)$ de centro A e raio $r > 0$, então

$$\alpha(s) - A = -\frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s) - \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2 \tau(s)}\mathbf{b}(s)$$

e

$$r^2 = \frac{1}{\kappa(s)^2} + \left(\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2 \tau(s)}\right)^2$$

para todo $s \in I$. Ou seja, se $\alpha(I) \subset S_r(A)$, então $S_r(A)$ é a esfera oscultriz de α em s para todo $s \in I$.

Prova.

Como $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 para todo $s \in I$, existem funções de classe C^∞ $\lambda, \delta, \mu : I \rightarrow \mathbb{R}$, tais que:

$$\alpha(s) - A = \lambda(s)\mathbf{t}(s) + \delta(s)\mathbf{n}(s) + \mu(s)\mathbf{b}(s),$$

onde $\lambda(s) = \langle \alpha(s) - A, \mathbf{t}(s) \rangle$, $\delta(s) = \langle \alpha(s) - A, \mathbf{n}(s) \rangle$ e $\mu(s) = \langle \alpha(s) - A, \mathbf{b}(s) \rangle$, para todo $s \in I$.

Sendo $\langle \alpha(s) - A, \alpha(s) - A \rangle = r^2$ para todo $s \in I$, obtemos, derivando três vezes a expressão acima, que:

- $\langle \alpha'(s), \alpha(s) - A \rangle = 0 \iff \lambda(s) = 0$;
- $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle + \langle \alpha''(s), \alpha(s) - A \rangle = 0 \implies \kappa(s) \langle \mathbf{n}(s), \alpha(s) - A \rangle = -1 \iff \delta(s) = -\frac{1}{\kappa(s)}$;
- $\kappa'(s) \langle \mathbf{n}(s), \alpha(s) - A \rangle + \kappa(s) \langle \mathbf{n}'(s), \alpha(s) - A \rangle + \kappa(s) \langle \mathbf{n}(s), \alpha'(s) \rangle = 0$
 $\iff \kappa'(s) \langle \mathbf{n}(s), \alpha(s) - A \rangle + \kappa(s) \langle -\kappa(s) \mathbf{t}(s) - \tau(s) \mathbf{b}(s), \alpha(s) - A \rangle = 0$
 $\iff +\kappa'(s) \delta(s) - \kappa(s) \tau(s) \mu(s) = 0 \iff \mu(s) = \frac{+\kappa'(s) \delta(s)}{\kappa(s) \tau(s)} = \frac{-\kappa'(s)}{\kappa(s)^2 \tau(s)}$.

Ou seja,

$$A = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s) + \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2 \tau(s)} \mathbf{b}(s),$$

para todo $s \in I$ e, portanto,

$$r^2 = \|\alpha(s) - A\|^2 = \frac{1}{\kappa(s)^2} + \frac{\kappa'(s)^2}{\kappa(s)^4 \tau(s)^2},$$

para todo $s \in I$.

(b) Se $\frac{1}{\kappa(s)^2} + \frac{\kappa'(s)^2}{\kappa(s)^4 \tau(s)^2} = r^2$ e $\kappa'(s) \neq 0$ para todo $s \in I$, então $\alpha(s)$ está contido em uma esfera de raio r e centro

$$A = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s) + \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2 \tau(s)} \mathbf{b}(s).$$

Prova.

Basta mostrar que $\alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s) + \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2 \tau(s)} \mathbf{b}(s)$ é constante em I .

Como $\frac{1}{\kappa(s)^2} + \left(\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2 \tau(s)} \right)^2 = r^2$ é constante em I , obtemos, derivando essa expressão, que

$$\frac{-2\kappa'(s)}{\kappa(s)^3} + \frac{2\kappa'(s)}{\kappa(s)^2 \tau(s)} \left(\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2 \tau(s)} \right)' = 0 \iff \frac{2\kappa'(s)}{\kappa(s)^2} \left(\frac{1}{\tau(s)} \left(\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2 \tau(s)} \right)' - \frac{1}{\kappa(s)} \right) = 0.$$

Como $\kappa'(s) \neq 0$ para todo $s \in I$, temos que

$$\left(\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2 \tau(s)} \right)' = \frac{\tau(s)}{\kappa(s)}, \text{ para todo } s \in I. \quad (11)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left(\alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s) + \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2 \tau(s)} \mathbf{b}(s) \right)' &= \alpha'(s) - \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2} \mathbf{n}(s) + \frac{1}{\kappa(s)} (-\kappa(s)\alpha'(s) - \tau(s) \mathbf{b}(s)) \\ &\quad + \left(\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2 \tau(s)} \right)' \mathbf{b}(s) + \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2 \tau(s)} \tau(s) \mathbf{n}(s) \\ &= \left(-\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} + \left(\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2 \tau(s)} \right)' \right) \mathbf{b}(s) = 0 \quad \text{por (11)}. \end{aligned}$$

Então

$$A = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s) + \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2 \tau(s)} \mathbf{b}(s)$$

é constante e $\|\alpha(s) - A\|^2 = \frac{1}{\kappa(s)^2} + \left(\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2 \tau(s)} \right)^2 = r^2$ para todo $s \in I$, isto é $\alpha(I) \subset S_r(A)$. \square

Observação 5.7 O mesmo resultado vale se o conjunto $\{s \in I \mid \kappa'(s) = 0\}$ for discreto.

Observação 5.8 Se o conjunto $\{s \in I \mid \kappa'(s) = 0\}$ não é discreto, o resultado acima pode não ser verdadeiro.

Por exemplo, para a hélice circular $\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ temos

que $\kappa(s) = \frac{a}{a^2 + b^2}$, $\tau(s) = \frac{-a}{a^2 + b^2}$ e, portanto, $r^2 = \frac{1}{\kappa(s)^2} + \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^4 \tau(s)^2} = \left(\frac{a^2 + b^2}{a} \right)^2$ é constante, mas a hélice não está contida em esfera alguma, já que é ilimitada.

6. Teorema Fundamental das Curvas

Fisicamente, podemos pensar em uma curva em \mathbb{R}^3 como sendo obtida a partir de uma reta quando esta é entortada (curvatura) e torcida (torção). Mostraremos, nesta seção, que, de fato, o comportamento de uma curva pode ser descrito completamente por κ e τ .

Mas antes precisamos dar algumas definições e relembrar alguns resultados básicos.

Definição 6.1 Uma aplicação $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma *isometria* quando preserva distância, isto é,

$$\|F(p) - F(q)\| = \|p - q\|$$

para todos $p, q \in \mathbb{R}^3$.

Exemplo 6.1 Seja α um ponto fixo de \mathbb{R}^3 . A aplicação $T_\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $T_\alpha(p) = p + \alpha$, é uma isometria de \mathbb{R}^3 , denominada *translação por α* . \square

Exemplo 6.2 A aplicação $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(x, y, z) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z),$$

onde $\theta \in (0, 2\pi)$, é uma isometria de \mathbb{R}^3 , denominada *rotação de ângulo θ em torno do eixo-Oz*. \square

Proposição 6.1

- (a) Se F e G são isometrias de \mathbb{R}^3 , então $F \circ G$ é uma isometria.
- (b) Se F e G são translações, então $F \circ G = G \circ F$ é uma translação.
- (c) Se T é a translação por α , então T é invertível e T^{-1} é a translação por $-\alpha$.
- (d) Dados $p, q \in \mathbb{R}^3$, existe uma única translação T tal que $T(p) = q$.

Prova.

- (a) $\|F \circ G(p) - F \circ G(q)\| = \|G(p) - G(q)\| = \|p - q\|$.
- (b) Se $F(p) = p + \alpha$ e $G(p) = p + b$ para todo $p \in \mathbb{R}^3$, então $(F \circ G)(p) = (G \circ F)(p) = p + (\alpha + b)$ para todo $p \in \mathbb{R}^3$.
- (c) Seja $F(p) = p + \alpha$ e considere $G(p) = p - \alpha$. Então $F \circ G(p) = G \circ F(p) = p$ para todo $p \in \mathbb{R}^3$. Logo $G = F^{-1}$.
- (d) Seja T a translação por $q - p$, isto é $T(v) = v + (q - p)$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$. Então $T(p) = q$.
Para provar a unicidade, consideramos duas translações T e \bar{T} por α e $\bar{\alpha}$, respectivamente, tais que $T(p) = \bar{T}(p) = q$. Então $T(p) = p + \alpha = p + \bar{\alpha} = \bar{T}(p)$, donde $\alpha = \bar{\alpha}$. Portanto $T = \bar{T}$. \blacksquare

Definição 6.2 Uma *transformação ortogonal* de \mathbb{R}^3 é uma aplicação linear $C : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que preserva produto interno, isto é,

$$\langle C(p), C(q) \rangle = \langle p, q \rangle$$

para todos $p, q \in \mathbb{R}^3$.

Observação 6.1 Sendo C uma aplicação linear, temos que $C(0) = 0$; C é diferenciável; $dC_p = C$ para todo $p \in \mathbb{R}^3$, e é invertível, pois $C(p) = 0 \iff p = 0$, já que $\|C(p)\|^2 = \|p\|^2$.

Observação 6.2 Toda transformação ortogonal é uma isometria.

De fato,

$$\|C(p) - C(q)\|^2 = \|C(p - q)\|^2 = \langle C(p - q), C(p - q) \rangle = \langle p - q, p - q \rangle = \|p - q\|^2.$$

Proposição 6.2 Se $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma isometria tal que $F(0) = 0$, então F é uma transformação ortogonal.

Prova.

Provaremos primeiro que F preserva produto interno.

Como $\langle F(p), F(p) \rangle = \|F(p)\|^2 = \|F(p) - F(0)\|^2 = \|p - 0\|^2 = \langle p, p \rangle$ (pois F é uma isometria e $F(0) = 0$), temos que:

$$\langle F(p), F(q) \rangle = \frac{1}{2} (\|F(p)\|^2 + \|F(q)\|^2 - \|F(p) - F(q)\|^2) = \frac{1}{2} (\|p\|^2 + \|q\|^2 - \|p - q\|^2) = \langle p, q \rangle.$$

Mostraremos agora que F é linear, isto é, $F(ap + bq) = aF(p) + bF(q)$ para todos $p, q \in \mathbb{R}^3$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

De fato,

$$\begin{aligned} \|F(ap + bq) - aF(p) - bF(q)\|^2 &= \langle F(ap + bq) - aF(p) - bF(q), F(ap + bq) - aF(p) - bF(q) \rangle \\ &= \|F(ap + bq)\|^2 + a^2\|F(p)\|^2 + b^2\|F(q)\|^2 \\ &\quad - 2a\langle F(ap + bq), F(p) \rangle - 2b\langle F(ap + bq), F(q) \rangle \\ &\quad + 2ab\langle F(p), F(q) \rangle \\ &= \|ap + bq\|^2 + a^2\|p\|^2 + b^2\|q\|^2 - 2a\langle ap + bq, p \rangle \\ &\quad - 2b\langle ap + bq, q \rangle + 2ab\langle p, q \rangle \\ &= \|(ap + bq) - ap - bq\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Logo, $F(ap + bq) - aF(p) - bF(q) = 0$, ou seja, $F(ap + bq) = aF(p) + bF(q)$. ■

Corolário 6.1 Se $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma isometria, então existe uma única translação T e uma única transformação ortogonal C tal que $F = T \circ C$.

Prova.

Existência. Pela proposição acima, $C(p) = F(p) - F(0)$ é uma transformação ortogonal, pois C é uma isometria e $C(0) = 0$. Como $F(p) = C(p) + F(0)$ para todo $p \in \mathbb{R}^3$, temos que $F = T \circ C$, onde T é a translação por $F(0)$.

Unicidade. Sejam T, \bar{T} translações e C, \bar{C} transformações ortogonais tais que $F = T \circ C = \bar{T} \circ \bar{C}$. Então $F(0) = T(C(0)) = T(0) = \bar{T}(\bar{C}(0)) = \bar{T}(0)$.

Logo, $T = \bar{T}$ e, portanto, $C = T^{-1} \circ F = \bar{T}^{-1} \circ F = \bar{C}$. ■

Observação 6.3 Se F é uma isometria, então existe uma única translação T_1 e uma única transformação ortogonal C tais que $F = C \circ T_1$.

Basta tomar $C(p) = F(p) - F(0)$, $p \in \mathbb{R}^3$ e T_1 a translação por $C^{-1}(F(0))$. De fato,

$$C \circ T_1^{-1}(p) = C(p + C^{-1}(F(0))) = C(p) + F(0) = F(p),$$

para todo $p \in \mathbb{R}^3$.

Observação 6.4 Se $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma isometria, então F é invertível e F^{-1} é uma isometria.

De fato, como $F = C \circ T$ e T e C são invertíveis, temos que F é invertível e $F^{-1} = T^{-1} \circ C^{-1}$. Portanto, F^{-1} é uma isometria, pois F^{-1} é a composta de duas isometrias.

Observação 6.5 Se F é uma isometria dada por $F = T \circ C$, onde T é uma translação e C é uma transformação ortogonal, então F é diferenciável e $dF_p(v) = C(v)$ para todos $p, v \in \mathbb{R}^3$.

De fato, F é diferenciável, pois F é composta de duas funções diferenciáveis, e

$$\begin{aligned} dF_p(v) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(p + tv) - F(p)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{C(p + tv) + a - C(p) - a}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{C(p) + tC(v) + a - C(p) - a}{t} = C(v), \end{aligned}$$

para todos $p, v \in \mathbb{R}^3$, onde T é a translação por a .

Portanto, para todo $p \in \mathbb{R}^3$, $dF_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ preserva produto interno. Assim, para todo $p \in \mathbb{R}^3$, dF_p leva uma base ortonormal $\{v_1, v_2, v_3\}$ em outra base ortonormal $\{dF_p(v_1), dF_p(v_2), dF_p(v_3)\}$.

• Dizemos que a isometria F *preserva orientação* se as bases

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \{dF_p(v_1), dF_p(v_2), dF_p(v_3)\}$$

têm a mesma orientação, isto é,

$$\langle dF_p(v_1) \wedge dF_p(v_2), dF_p(v_3) \rangle = \langle v_1 \wedge v_2, v_3 \rangle.$$

E dizemos que a isometria F *inverte orientação* se as bases \mathcal{B} e \mathcal{B}' têm orientações opostas, isto é,

$$\langle dF_p(v_1) \wedge dF_p(v_2), dF_p(v_3) \rangle = -\langle v_1 \wedge v_2, v_3 \rangle.$$

Observação 6.6 Desta definição, decorre que F preserva (respectivamente, inverte) orientação se, e só se, o determinante da matriz jacobiana de F é igual a 1 (respectivamente, -1).

Proposição 6.3 *Sejam $p, q \in \mathbb{R}^3$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ e $\{w_1, w_2, w_3\}$ bases ortonormais de \mathbb{R}^3 . Então existe uma única isometria $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $F(p) = q$ e $dF_p(v_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$.*

Prova.

Existência. Seja $C : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que $C(v_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$, isto é, se $v \in \mathbb{R}^3$, $v = av_1 + bv_2 + cv_3$, então

$$C(v) = aC(v_1) + bC(v_2) + cC(v_3) = aw_1 + bw_2 + cw_3.$$

Como as bases $\{v_1, v_2, v_3\}$ e $\{w_1, w_2, w_3\}$ são ortonormais, segue-se da definição de C , que C preserva produto interno. Portanto, C é uma transformação ortogonal.

Seja T a translação por $q - C(p)$. Então a isometria $F = T \circ C$ satisfaz as condições exigidas. De fato,

$$F(p) = T \circ C(p) = q - C(p) + C(p) = q,$$

e, pela observação 6.5,

$$dF_p(v_i) = C(v_i) = w_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Unicidade. Suponhamos que as isometrias $F = T \circ C$ e $\bar{F} = \bar{T} \circ \bar{C}$ satisfazem as condições da proposição, isto é,

$$F(p) = \bar{F}(p) = q \quad \text{e} \quad dF_p(v_i) = d\bar{F}_p(v_i) = w_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Segue-se da última relação que $C(v_i) = \bar{C}(v_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$. Como C e \bar{C} são aplicações lineares temos que $C = \bar{C}$. Portanto, $T \circ C(p) = \bar{T} \circ C(p) = q$, isto é, T e \bar{T} são translações que levam $C(p)$ em q . Então, pela proposição 6.1, $T = \bar{T}$ e, portanto, $F = \bar{F}$. ■

Definição 6.3 Dizemos que duas curvas regulares $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ são *congruentes* quando existe uma isometria $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\beta = F \circ \alpha$, ou seja, β difere de α apenas por sua posição no espaço.

Proposição 6.4 *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com $\kappa(s) > 0$ para todo $s \in I$. Sejam F uma isometria de \mathbb{R}^3 e $\bar{\alpha} = F \circ \alpha$. Então $\bar{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma*

curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que, para todo $s \in I$,

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}(s) &= \kappa(s), \\ \bar{\tau}(s) &= \pm\tau(s), \\ \bar{\mathbf{t}}(s) &= dF_{\alpha(s)}(\mathbf{t}(s)), \\ \bar{\mathbf{n}}(s) &= dF_{\alpha(s)}(\mathbf{n}(s)), \\ \bar{\mathbf{b}}(s) &= \pm dF_{\alpha(s)}(\mathbf{b}(s)),\end{aligned}$$

onde o sinal é + (resp. -) se F preserva a orientação (resp. inverte a orientação).

Prova.

A curva $\bar{\alpha}$ é diferenciável, pois F e α são diferenciáveis. Além disso, como

$$\bar{\alpha}'(s) = dF_{\alpha(s)}(\alpha'(s)),$$

temos que

$$\|\bar{\alpha}'(s)\| = \|dF_{\alpha(s)}(\alpha'(s))\| = \|\alpha'(s)\| = 1,$$

pois $dF_{\alpha(s)}$ é uma transformação ortogonal. Logo $\bar{\alpha}$ está parametrizada pelo comprimento de arco.

Sejam T uma translação e C uma transformação ortogonal tais que $F = T \circ C$. Então como $\bar{\alpha}'(s) = C(\alpha'(s))$, segue que $\bar{\alpha}''(s) = C(\alpha''(s))$.

Assim

$$\bar{\kappa}(s) = \|\bar{\alpha}''(s)\| = \|C(\alpha''(s))\| = \|\alpha''(s)\| = \kappa(s),$$

e

$$\bar{\mathbf{n}}(s) = \frac{\bar{\alpha}''(s)}{\bar{\kappa}(s)} = C\left(\frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)}\right) = C(\mathbf{n}(s)) = dF_{\alpha(s)}(\mathbf{n}(s)).$$

Temos que $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$ e $\bar{\mathbf{b}}(s) = C(\mathbf{t}(s)) \wedge C(\mathbf{n}(s))$.

Se F , isto é, se C preserva orientação, então C leva a base ortonormal positiva $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ na base ortonormal positiva $\{C(\mathbf{t}(s)), C(\mathbf{n}(s)), C(\mathbf{b}(s))\} = \{\bar{\mathbf{t}}(s), \bar{\mathbf{n}}(s), C(\mathbf{b}(s))\}$.

Logo, $\bar{\mathbf{b}}(s) = C(\mathbf{b}(s)) = dF_{\alpha(s)}(\mathbf{b}(s))$.

Se F inverte orientação, então C leva a base ortonormal positiva $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ na base ortonormal negativa $\{C(\mathbf{t}(s)), C(\mathbf{n}(s)), C(\mathbf{b}(s))\} = \{\bar{\mathbf{t}}(s), \bar{\mathbf{n}}(s), C(\mathbf{b}(s))\}$.

Logo, $\bar{\mathbf{b}}(s) = -C(\mathbf{b}(s)) = -dF_{\alpha(s)}(\mathbf{b}(s))$.

Finalmente, como $\bar{\mathbf{b}}(s) = \pm C(\mathbf{b}(s))$, temos que $\bar{\mathbf{b}}'(s) = \pm C(\mathbf{b}'(s))$ e, portanto

$$\bar{\tau}(s) = \langle \bar{\mathbf{b}}'(s), \bar{\mathbf{n}}(s) \rangle = \pm \langle C(\mathbf{b}'(s)), C(\mathbf{n}(s)) \rangle = \pm \langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \pm\tau(s). \blacksquare$$

Teorema 6.1 (Fundamental das Curvas)

(a) Se duas curvas $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizadas pelo comprimento de arco têm a mesma curvatura e torção (a menos de sinal), então α e β são congruentes, isto é, existe uma isometria $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $F \circ \alpha = \beta$.

(b) Se $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ são duas funções de classe C^∞ , com $\kappa(s) > 0$ para todo $s \in I$, então existe uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\kappa(s)$ é a curvatura e $\tau(s)$ é a torção de α em s para todo $s \in I$.

(c) Dados $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ vetores ortonormais, existe uma única curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\alpha(s_0) = p_0$, $\alpha'(s_0) = v_1$, $\alpha''(s_0) = \kappa(s_0)v_2$, $\kappa_\alpha \equiv \kappa$ e $\tau_\alpha \equiv \tau$.

Prova.

(a) Seja $s_0 \in I$ fixo e suponhamos que $\tau_\alpha = \tau_\beta$ (resp. $\tau_\alpha = -\tau_\beta$). Pela proposição 6.3, existe uma isometria $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $F(\alpha(s_0)) = \beta(s_0)$ e

$$\begin{aligned} dF_{\alpha(s_0)}(\mathbf{t}_\alpha(s_0)) &= \mathbf{t}_\beta(s_0); \\ dF_{\alpha(s_0)}(\mathbf{n}_\alpha(s_0)) &= \mathbf{n}_\beta(s_0); \\ dF_{\alpha(s_0)}(\mathbf{b}_\alpha(s_0)) &= \mathbf{b}_\beta(s_0) \quad (\text{resp. } dF_{\alpha(s_0)}(\mathbf{b}_\alpha(s_0)) = -\mathbf{b}_\beta(s_0)). \end{aligned}$$

Seja $\bar{\alpha} = F \circ \alpha$. Então, pela proposição 6.4:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(s_0) &= \beta(s_0); \quad \bar{\mathbf{t}}(s_0) = \mathbf{t}_\beta(s_0); \quad \bar{\kappa} = \kappa_\alpha = \kappa_\beta; \quad \bar{\mathbf{n}}(s_0) = \mathbf{n}_\beta(s_0); \quad \bar{\tau} = \tau_\alpha = \tau_\beta \quad (\text{resp. } \bar{\tau} = -\tau_\alpha = \tau_\beta); \\ \bar{\mathbf{b}}(s_0) &= \mathbf{b}_\beta(s_0) \quad (\text{resp. } \bar{\mathbf{b}}(s_0) = -\mathbf{C}(\mathbf{b}_\alpha(s_0)) = \mathbf{b}_\beta(s_0)). \end{aligned}$$

Para provar que $\bar{\alpha} = \beta$, basta mostrar que $\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{t}_\beta$, pois, neste caso, teremos $\bar{\alpha} - \beta$ constante e como $\bar{\alpha}(s_0) = \beta(s_0)$, poderemos concluir que $\bar{\alpha}(s) = \beta(s)$ para todo $s \in I$.

Consideremos a função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(s) = \|\bar{\mathbf{t}}(s) - \mathbf{t}_\beta(s)\|^2 + \|\bar{\mathbf{n}}(s) - \mathbf{n}_\beta(s)\|^2 + \|\bar{\mathbf{b}}(s) - \mathbf{b}_\beta(s)\|^2.$$

Então,

$$\begin{aligned} f'(s) &= 2\langle \bar{\mathbf{t}}'(s) - \mathbf{t}'_\beta(s), \bar{\mathbf{t}}(s) - \mathbf{t}_\beta(s) \rangle + 2\langle \bar{\mathbf{n}}'(s) - \mathbf{n}'_\beta(s), \bar{\mathbf{n}}(s) - \mathbf{n}_\beta(s) \rangle \\ &\quad + 2\langle \bar{\mathbf{b}}'(s) - \mathbf{b}'_\beta(s), \bar{\mathbf{b}}(s) - \mathbf{b}_\beta(s) \rangle \\ &= 2\kappa(s)\langle \bar{\mathbf{n}}(s) - \mathbf{n}_\beta(s), \bar{\mathbf{t}}(s) - \mathbf{t}_\beta(s) \rangle - 2\kappa(s)\langle \bar{\mathbf{t}}(s) - \mathbf{t}_\beta(s), \bar{\mathbf{n}}(s) - \mathbf{n}_\beta(s) \rangle \\ &\quad - 2\tau(s)\langle \bar{\mathbf{b}}(s) - \mathbf{b}_\beta(s), \bar{\mathbf{n}}(s) - \mathbf{n}_\beta(s) \rangle + 2\tau(s)\langle \bar{\mathbf{n}}(s) - \mathbf{n}_\beta(s), \bar{\mathbf{b}}(s) - \mathbf{b}_\beta(s) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, f é constante. Como $f(s_0) = 0$, temos $f \equiv 0$ e, portanto, $\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{t}_\beta$.

(b) Existência. Para provar a existência de α mostraremos primeiro que existe um referencial ortonormal $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ que satisfaz as fórmulas de Frenet, isto é,

$$\begin{aligned}\mathbf{t}'(s) &= \kappa(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &= \tau(s)\mathbf{n}(s).\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade de soluções de equações diferenciais lineares temos que, fixados os valores $\mathbf{t}(s_0) = (t_1(s_0), t_2(s_0), t_3(s_0))$, $\mathbf{n}(s_0) = (n_1(s_0), n_2(s_0), n_3(s_0))$ e $\mathbf{b}(s_0) = (b_1(s_0), b_2(s_0), b_3(s_0))$, o sistema de nove equações diferenciais, $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned}t_i'(s) &= \kappa(s) n_i(s); \\ n_i'(s) &= -\kappa(s) t_i(s) - \tau(s) b_i(s); \\ b_i'(s) &= \tau(s) n_i(s);\end{aligned}\tag{12}$$

possui uma única solução com as condições iniciais dadas. Em particular, existe uma única solução $t_i, n_i, b_i, i = 1, 2, 3$ do sistema (12) quando fixamos

$$\mathbf{t}(s_0) = (1, 0, 0), \quad \mathbf{n}(s_0) = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(s_0) = (0, 0, 1).\tag{13}$$

Vamos provar agora que a solução $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 para todo $s \in I$. Para isto, consideremos as funções

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle, \quad \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle, \quad \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle, \\ \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle, \quad \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle, \quad \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle,\end{aligned}$$

que satisfazem ao sistema de 6 equações diferenciais:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle &= 2\kappa(s) \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle; \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle &= -2\kappa(s) \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle - 2\tau(s) \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle; \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle &= 2\tau(s) \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle; \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle &= \kappa(s) \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle - \kappa(s) \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle - \tau(s) \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle; \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle &= \kappa(s) \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle + \tau(s) \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle; \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle &= -\kappa(s) \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle - \tau(s) \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle + \tau(s) \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle,\end{aligned}\tag{14}$$

com condição inicial:

$$\langle \mathbf{t}(s_0), \mathbf{t}(s_0) \rangle = \langle \mathbf{n}(s_0), \mathbf{n}(s_0) \rangle = \langle \mathbf{b}(s_0), \mathbf{b}(s_0) \rangle = 1,$$

e

$$\langle \mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0) \rangle = \langle \mathbf{t}(s_0), \mathbf{b}(s_0) \rangle = \langle \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0) \rangle = 0.$$

A solução para esse sistema de equações diferenciais é única e é dada pelas funções:

$$\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \equiv 1,$$

e

$$\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \equiv 0.$$

De fato, basta substituir estas funções no sistema acima para verificar que formam uma solução do sistema.

Portanto, a solução de (12) com a condição inicial (13) forma um referencial ortonormal positivo, ou seja, $\det(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)) = 1$ para todo $s \in I$, pois $\det(\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)) = 1$.

Logo, $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$ para todo $s \in I$.

Definimos a curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $\alpha(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{t}(\xi) d\xi$.

Então $\alpha'(s) = \mathbf{t}(s)$. Portanto, $\|\alpha'(s)\| = \|\mathbf{t}(s)\| = 1$ para todo $s \in I$, isto é, α está parametrizada pelo comprimento de arco, e $\alpha''(s) = \mathbf{t}'(s) = \kappa(s) \mathbf{n}(s)$.

Assim, $\kappa_\alpha(s) = \|\alpha''(s)\| = \|\kappa(s) \mathbf{n}(s)\| = \kappa(s)$ e $\mathbf{n}_\alpha(s) = \frac{\alpha''(s)}{\kappa_\alpha(s)} = \mathbf{n}(s)$ para todo $s \in I$.

Além disso, $\mathbf{b}_\alpha(s) = \mathbf{t}_\alpha(s) \wedge \mathbf{n}_\alpha(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s)$ e, portanto,

$$\tau_\alpha(s) = \langle \mathbf{b}'_\alpha(s), \mathbf{n}_\alpha(s) \rangle = \langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \tau(s) \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \tau(s),$$

para todo $s \in I$.

(c) Unicidade. Sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ duas curvas parametrizadas pelo comprimento de arco tais que

$$\kappa_\alpha = \kappa_\beta = \kappa, \tau_\alpha = \tau_\beta = \tau, \alpha(s_0) = \beta(s_0) = p_0, \alpha'(s_0) = \beta'(s_0) = v_1, \alpha''(s_0) = \beta''(s_0) = \kappa(s_0) v_2.$$

Então, $\mathbf{n}_\alpha(s_0) = \mathbf{n}_\beta(s_0) = v_2$ e $\mathbf{b}_\alpha(s_0) = \mathbf{t}_\alpha(s_0) \wedge \mathbf{n}_\alpha(s_0) = v_1 \wedge v_2 = \mathbf{t}_\beta(s_0) \wedge \mathbf{n}_\beta(s_0) = \mathbf{b}_\beta(s_0)$.

Como $\{\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{b}_\alpha\}$ e $\{\mathbf{t}_\beta, \mathbf{n}_\beta, \mathbf{b}_\beta\}$ são soluções do sistema (12) com condição inicial $\{v_1, v_2, v_1 \wedge v_2\}$, temos que $\alpha = \beta$.

Existência. Dados $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ vetores ortonormais, o sistema (12) tem uma única solução $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ com condição inicial $\mathbf{t}(s_0) = v_1$, $\mathbf{n}(s_0) = v_2$, e $\mathbf{b}(s_0) = v_1 \wedge v_2$.

Como $\{v_1, v_2, v_1 \wedge v_2\}$ é uma base ortonormal positiva, podemos provar, de modo análogo ao feito no item (a) para $v_1 = e_1, v_2 = e_2$ e $v_1 \wedge v_2 = e_3$, que $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ é uma base ortonormal positiva para todo $s \in I$ e que

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{t}(\xi) \, d\xi + p_0$$

é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, com

$$\alpha(s_0) = p_0, \quad \mathbf{t}_\alpha(s) = \mathbf{t}(s), \quad \mathbf{n}_\alpha(s) = \mathbf{n}(s), \quad \mathbf{b}_\alpha(s) = \mathbf{b}(s), \quad \kappa_\alpha(s) = \kappa(s) \quad \text{e} \quad \tau_\alpha(s) = \tau(s),$$

para todo $s \in I$. ■

Capítulo 3

Superfícies Regulares

Em contraste ao tratamento dado às curvas nos Capítulos 1 e 2, as superfícies regulares serão definidas como conjuntos e não como aplicações. As curvas também podem ser tratadas a partir desse ponto de vista, isto é, como subconjuntos de \mathbb{R}^3 (ou \mathbb{R}^2). Faremos um breve comentário sobre isso na seção 2 deste capítulo.

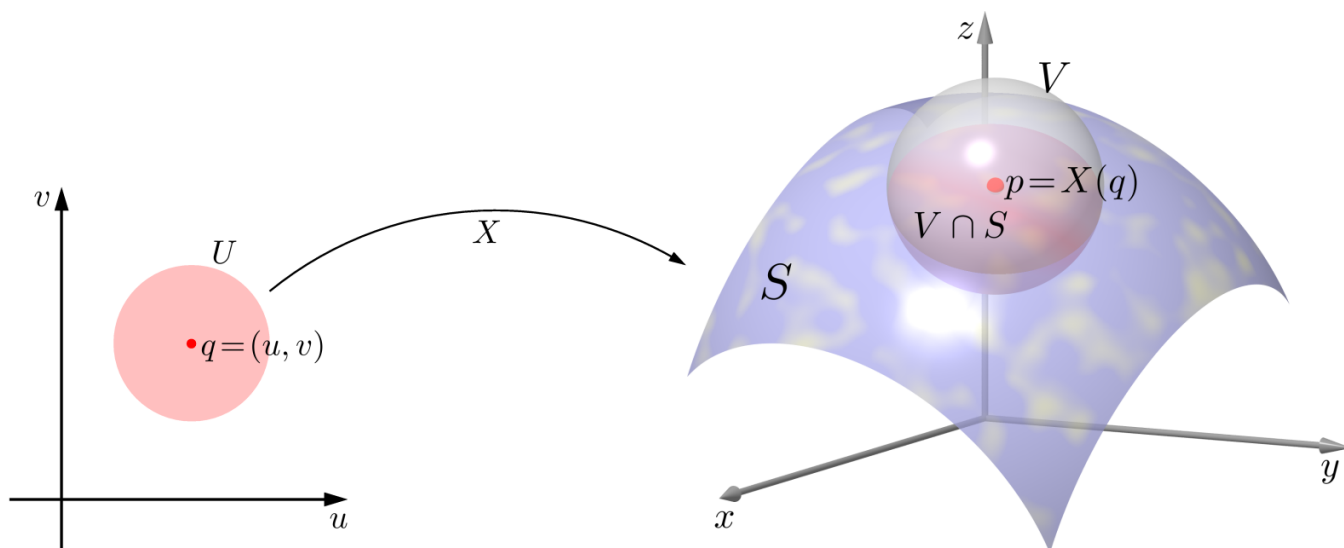
1. Superfícies Regulares; Pré-imagens de valores regulares

A grosso modo, *uma superfície regular em \mathbb{R}^3* é obtida tomando-se pedaços do plano, deformando-os e colando-os entre si de tal modo que a figura resultante não apresente vértices, arestas ou auto-interseções, e que tenha sentido falar em plano tangente nos pontos desta figura.

Definição 1.1 Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma *superfície regular* se, para cada $p \in S$, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^3$, com $p \in V$, e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$, definida num aberto U de \mathbb{R}^2 tal que:

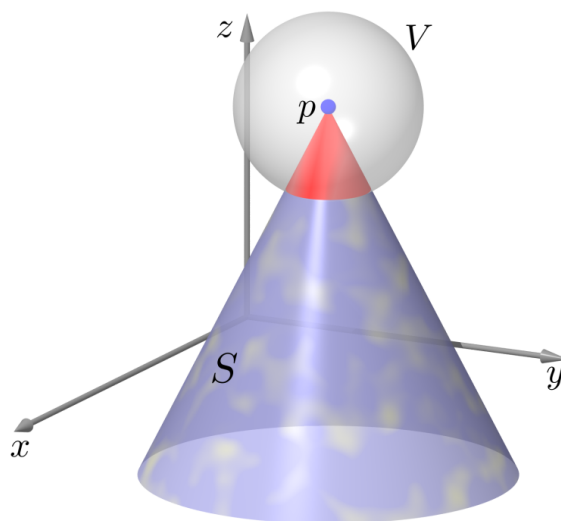
- (1) $X : U \rightarrow V \cap S$, $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, é diferenciável, isto é, as funções $x, y, z : U \rightarrow \mathbb{R}$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U .
- (2) $X : U \rightarrow V \cap S$ é um homeomorfismo, isto é, X é uma bijeção contínua cuja inversa $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ é contínua.
- (3) $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora para todo $q \in U$.

A aplicação X é chamada uma *parametrização* ou um *sistema de coordenadas* (locais) *em* (uma vizinhança de) p , e $V \cap S$ é chamada uma *vizinhança coordenada de S em p* .

Fig. 1: Vizinhança coordenada do ponto $p \in S$

Observação 1.1

- A condição (1) é natural se esperamos fazer alguma geometria diferencial sobre S . Por exemplo, permite definir o conceito de plano tangente.

Fig. 2: O cone S não possui uma parametrização diferenciável numa vizinhança do vértice p .

- A injetividade de X na condição (2) tem como objetivo excluir a possibilidade de auto-interseções em superfícies regulares, que é necessário para podermos falar, por exemplo, sobre o plano tangente em um ponto de S .
- A continuidade da inversa na condição (2) serve para provar que certos conceitos que dependem aparentemente da parametrização, na realidade só dependem do ponto $p \in S$, isto é, independem da parametrização $X : U \rightarrow S \cap V$ com $p \in S \cap V$.
- A condição (3) garante a existência de um *plano tangente* em todos os pontos de S .

- Vamos agora calcular a matriz da aplicação linear dX_q nas bases canônicas $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 , com coordenadas (u, v) , e $\{f_1 = (1, 0, 0), f_2 = (0, 1, 0), f_3 = (0, 0, 1)\}$ de \mathbb{R}^3 , com coordenadas (x, y, z) .

Seja $q = (u_0, v_0)$. O vetor e_1 é tangente à curva $u \mapsto (u, v_0)$, cuja imagem por X é a curva na superfície S

$$u \mapsto (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)),$$

chamada *curva coordenada* $v = v_0$. O vetor tangente desta curva em $X(q)$ é o vetor

$$dX_q(e_1) = \frac{\partial X}{\partial u}(q) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(q), \frac{\partial y}{\partial u}(q), \frac{\partial z}{\partial u}(q) \right).$$

Analogamente, o vetor tangente à *curva coordenada* $u = u_0$,

$$v \mapsto (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v)),$$

imagem por X da curva $v \mapsto (u_0, v)$, é o vetor

$$dX_q(e_2) = \frac{\partial X}{\partial v}(q) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(q), \frac{\partial y}{\partial v}(q), \frac{\partial z}{\partial v}(q) \right).$$

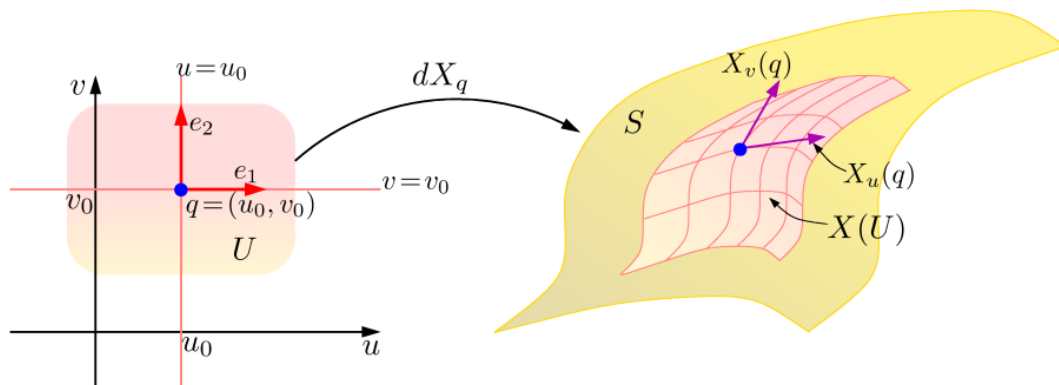


Fig. 3: Vetores tangentes às curvas $u \mapsto (u, v_0)$ e $v \mapsto (u_0, v)$.

Portanto, a matriz da aplicação linear dX_q (que designamos pela mesma notação para simplificar) nas bases canônicas de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 é

$$dX_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{pmatrix}.$$

A condição (3), da definição 1.1, nos diz que $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora, o que significa que os dois vetores coluna da matriz Jacobiana acima são linearmente independentes, ou seja, que o

seu produto vetorial é diferente de zero:

$$\frac{\partial X}{\partial u}(q) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(q) \neq 0.$$

Ou ainda, que um dos menores de ordem 2 da matriz de dX_q , isto é, um dos determinantes:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \end{vmatrix};$$

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}(q) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{vmatrix};$$

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}(q) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{vmatrix},$$

é diferente de zero.

Exemplo 1.1 Vamos mostrar que a esfera de centro na origem e raio 1,

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

é uma superfície regular.

Seja a aplicação $X_3^+ : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X_3^+(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}),$$

definida no aberto $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$.

Então X_3^+ satisfaz as condições da definição 1.1. De fato:

(1) $X_3^+(U) = S^2 \cap \mathcal{H}_3^+$, onde $\mathcal{H}_3^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ é um aberto de \mathbb{R}^3 .

(2) X_3^+ é diferenciável, pois $1 - (u^2 + v^2) > 0$ para todo $(u, v) \in U$.

(3) $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ para todo $q \in U$.

(4) X_3^+ é um homeomorfismo, pois X_3^+ é uma bijeção contínua sobre $S^2 \cap \mathcal{H}_3^+$ e $(X_3^+)^{-1} = \pi|_{S^2 \cap \mathcal{H}_3^+}$ é contínua, onde $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a projeção sobre o plano-xy dada por $\pi(x, y, z) = (x, y)$.

Podemos cobrir a esfera com seis parametrizações similares a esta. Para isso, consideramos as aplicações:

$$X_1^+, X_1^-, X_2^+, X_2^-, X_3^+, X_3^- : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

dadas por:

$$X_1^\pm(u, v) = (\pm\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v);$$

$$X_2^\pm(u, v) = (u, \pm\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v);$$

$$X_3^\pm(u, v) = (u, v, \pm\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}).$$

De modo análogo ao feito para X_3^+ , podemos provar que X_1^\pm , X_2^\pm e X_3^- são parametrizações de S^2 sobre $S^2 \cap \mathcal{H}_1^\pm$, $S^2 \cap \mathcal{H}_2^\pm$, $S^2 \cap \mathcal{H}_3^\pm$, respectivamente, onde

$$\mathcal{H}_1^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\}; \quad \mathcal{H}_1^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0\};$$

$$\mathcal{H}_2^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0\}; \quad \mathcal{H}_2^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y < 0\};$$

$$\mathcal{H}_3^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}; \quad \mathcal{H}_3^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\},$$

são abertos de \mathbb{R}^3 . Como

$$X_1^+(U) \cup X_1^-(U) = S^2 - \{(x, y, z) \in S^2 \mid y^2 + z^2 = 1 \text{ e } x = 0\};$$

$$X_2^+(U) \cup X_2^-(U) = S^2 - \{(x, y, z) \in S^2 \mid x^2 + z^2 = 1 \text{ e } y = 0\};$$

$$X_3^+(U) \cup X_3^-(U) = S^2 - \{(x, y, z) \in S^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ e } z = 0\}.$$

temos que

$$S^2 = X_1^+(U) \cup X_1^-(U) \cup X_2^+(U) \cup X_2^-(U) \cup X_3^+(U) \cup X_3^-(U).$$

Logo, S^2 é uma superfície regular.

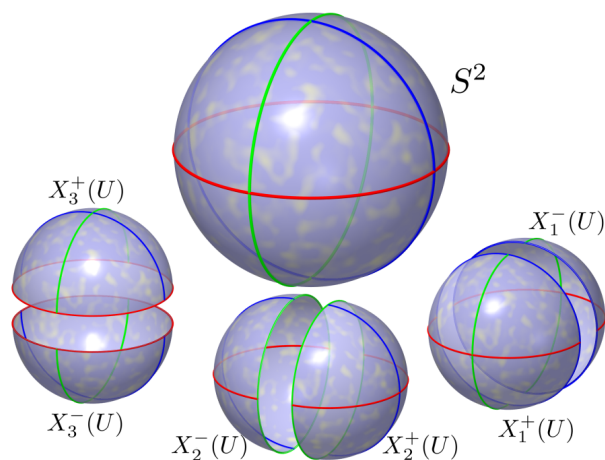


Fig. 4: Cobertura da esfera pelas 6 parametrizações $X_1^+(U)$, $X_1^-(U)$, $X_2^+(U)$, $X_2^-(U)$, $X_3^+(U)$ e $X_3^-(U)$.

- Podemos também cobrir a esfera com duas parametrizações usando as *coordenadas geográficas* de S^2 .

De fato, seja a aplicação $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(\theta, \varphi) = (\text{sen } \theta \cos \varphi, \text{sen } \theta \text{ sen } \varphi, \cos \theta),$$

definida no aberto

$$U = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \theta < \pi \text{ e } 0 < \varphi < 2\pi\}.$$

Então $X : U \rightarrow X(U)$ é uma parametrização de S^2 sobre $X(U) = S^2 \cap (\mathbb{R}^3 - A)$, onde $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0 \text{ e } y = 0\}$ é fechado em \mathbb{R}^3 .

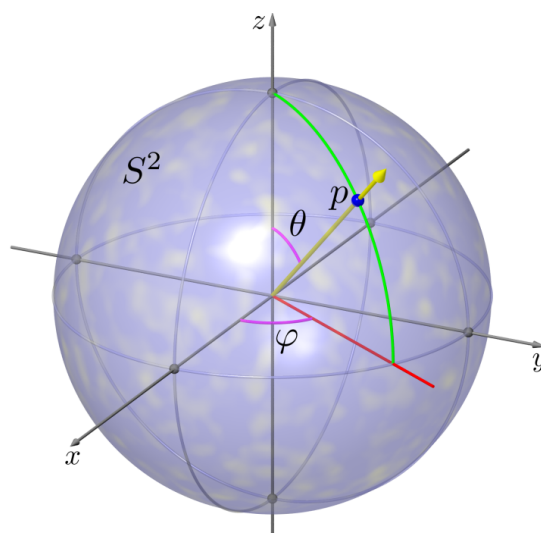


Fig. 5: Coordenadas esféricas do ponto $p \in S^2$.

Ou seja, $X(U) = \mathbb{R}^3 - C$, onde C é o semi-círculo

$$C = \{(x, y, z) \in S^2 \mid x \geq 0 \text{ e } y = 0\}.$$

De fato, X é diferenciável e $dX_{(\theta, \varphi)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora para todo $(\theta, \varphi) \in U$, pois:

$$X_\theta(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \text{ sen } \varphi, -\text{sen } \theta),$$

e

$$X_\varphi(\theta, \varphi) = (-\text{sen } \theta \text{ sen } \varphi, \text{sen } \theta \cos \varphi, 0),$$

portanto:

$$(X_\theta \wedge X_\varphi)(\theta, \varphi) = (\text{sen}^2 \theta \cos \varphi, \text{sen}^2 \theta \text{ sen } \varphi, \cos \theta \text{ sen } \theta),$$

e

$$\|X_\theta \wedge X_\varphi\|^2(\theta, \varphi) = \text{sen}^4 \theta \cos^2 \varphi + \text{sen}^4 \theta \text{ sen}^2 \varphi + \cos^2 \theta \text{ sen}^2 \theta = \text{sen}^2 \theta \neq 0,$$

já que $\theta \in (0, \pi)$. Logo X satisfaz as condições (1) e (3) da definição 1.1.

Observamos que dado $(x, y, z) \in S^2 - C$, θ fica determinado de maneira única por $\theta = \arccos z$ uma vez que $0 < \theta < \pi$.

Conhecendo o valor de θ , temos que $\cos \varphi = \frac{x}{\sin \theta}$ e $\sin \varphi = \frac{y}{\sin \theta}$, o que determina φ de maneira única, pois $\varphi \in (0, 2\pi)$. Segue-se então que X tem uma inversa X^{-1} .

Como já sabemos que S^2 é uma superfície regular, obteremos, pela proposição 1.4 que demonstraremos em breve, que X^{-1} é contínua.

Logo, $X : U \rightarrow S^2 - C$ é uma parametrização de S^2 que cobre toda a esfera menos o semi-círculo C .

Podemos cobrir a esfera toda considerando outra parametrização. De fato, seja $Y : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação

$$Y(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \cos \theta, \sin \theta \sin \varphi),$$

onde

$$V = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < \theta < 0 \text{ e } 0 < \varphi < 2\pi\}.$$

Então $Y(V) = S^2 - C'$, onde C' é o semi-círculo:

$$C' = \{(x, y, z) \in S^2 \mid x \leq 0 \text{ e } z = 0\}.$$

De modo análogo ao feito para X , podemos provar que Y é uma parametrização de S^2 . Temos também que $X(U) \cup Y(V) = S^2$. \square

O exemplo 1.1 mostra que verificar que um dado subconjunto S de \mathbb{R}^3 é uma superfície regular, a partir da definição, pode ser muito trabalhoso. Antes de prosseguirmos com os exemplos, apresentaremos duas proposições que simplificarão essa tarefa.

Proposição 1.1 Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável definida no aberto U de \mathbb{R}^2 , então o seu gráfico

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U \text{ e } z = f(x, y)\},$$

é uma superfície regular.

Prova.

Sejam $S = \text{Graf}(f)$ e a aplicação $X : U \rightarrow S = S \cap \mathbb{R}^3$ dada por $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$.

Então a aplicação X é diferenciável e $dX_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora para todo $(u, v) \in U$, pois

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u, v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Além disso, X é uma bijeção e $X^{-1} = \pi|_S$ é contínua, onde $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\pi(x, y, z) = (x, y)$, é a projeção sobre o plano- xy .

Logo, $S = \text{Graf}(f)$ é uma superfície regular. ■

Exemplo 1.2 Sejam $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e $a, b \in \mathbb{R}^3$ vetores LI. Então o plano

$$\pi = \{p_0 + \lambda a + \mu b \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

que passa pelo ponto p_0 e é paralelo aos vetores a e b , é uma superfície regular.

De fato, seja $N = a \wedge b$ o vetor normal ao plano π .

Então

$$\pi = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - p_0, N \rangle = 0\}.$$

Sendo $N = (A, B, C)$, temos que

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Ax + By + Cz = D\},$$

onde $D = \langle p_0, N \rangle$.

Como $N \neq (0, 0, 0)$, temos que $A \neq 0$ ou $B \neq 0$ ou $C \neq 0$.

Se $C \neq 0$, por exemplo, π é o gráfico da função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x, y) = \frac{D - Ax - By}{C}.$$

Portanto, pela proposição 1.1, π é uma superfície regular. □

Exemplo 1.3 O *parabolóide elíptico*

$$\mathcal{P} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right\},$$

onde a e b são constantes positivas, é uma superfície regular.

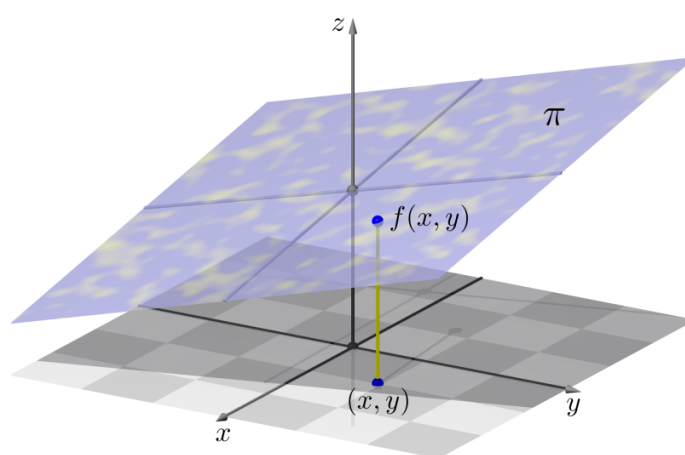


Fig. 6: O plano π visto como gráfico de $f(x, y) = \frac{D - Ax - By}{C}$.

De fato, $\mathcal{P} = \text{Graf}(f)$, onde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é a função diferenciável dada por

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \quad \square$$

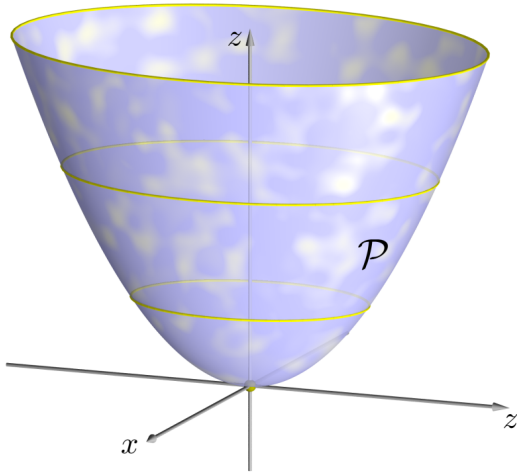


Fig. 7: Parabolóide elíptico \mathcal{P} gráfico de $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

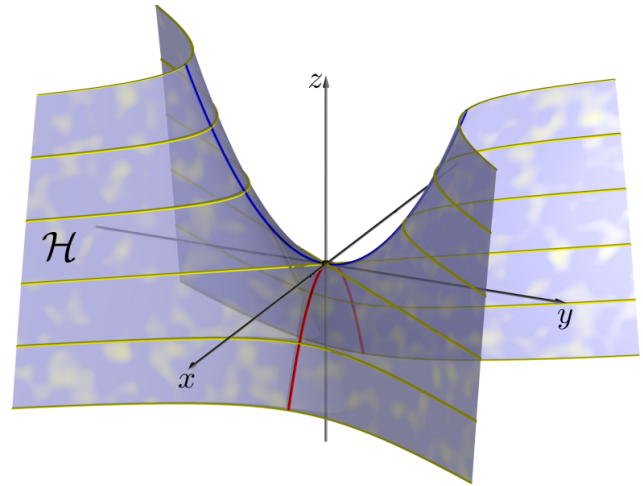


Fig. 8: Parabolóide hiperbólico \mathcal{H} gráfico de $f(x, y) = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$

Exemplo 1.4 O *parabolóide hiperbólico*

$$\mathcal{H} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \right\},$$

onde a e b são constantes positivas, é uma superfície regular.

Com efeito, \mathcal{H} é o gráfico da função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}. \quad \square$$

Antes de enunciarmos a proposição 1.2, precisamos da seguinte definição:

Definição 1.2 Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável definida no aberto U de \mathbb{R}^n . Dizemos que $p_0 \in U$ é um *ponto crítico de F* se a diferencial $dF_{p_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ não é sobrejetora.

Um ponto $b \in \mathbb{R}^m$ é um *valor crítico de F* se existe um ponto crítico $p_0 \in U$ tal que $F(p_0) = b$.

Um ponto $a \in \mathbb{R}^m$ que não é um valor crítico de F é chamado um *valor regular de F*, isto é, dF_p é sobrejetora para todo $p \in F^{-1}(a)$.

Observação 1.2 Pela própria definição, se $a \notin F(U)$, então a é um valor regular de F .

Observação 1.3 Seja $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então $df_p(e_1) = f_x(p)$, $df_p(e_2) = f_y(p)$ e $df_p(e_3) = f_z(p)$. Portanto, dizer que $df_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ não é sobrejetora equivale a dizer que $f_x(p) = f_y(p) = f_z(p) = 0$.

Logo, $\alpha \in f(U)$ é um valor regular de f se, e só se, f_x , f_y e f_z não se anulam simultaneamente em qualquer ponto do conjunto $f^{-1}(\alpha) = \{(x, y, z) \in U \mid f(x, y, z) = \alpha\}$, chamado a *pré-imagem* ou *imagem inversa* do ponto α .

Para provarmos a proposição 1.2 precisamos também do Teorema da Aplicação Inversa.

Teorema 1.1 (Teorema da Aplicação Inversa)

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k , $k \geq 1$, tal que, num ponto $p_0 \in U$, $df_{p_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo linear. Então existe um aberto $V \subset U$ tal que $p_0 \in V$, $W = f(V)$ é aberto e $f : V \rightarrow W$ é um difeomorfismo de classe C^k .

Proposição 1.2 Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável definida no aberto U de \mathbb{R}^3 e $\alpha \in f(U)$ é um valor regular de f , então $f^{-1}(\alpha)$ é uma superfície regular em \mathbb{R}^3 .

Prova.

Seja $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de $f^{-1}(\alpha)$. Como α é um valor regular de f , temos que

$$\text{grad } f(p_0) = (f_x(p_0), f_y(p_0), f_z(p_0)) \neq (0, 0, 0).$$

Suponhamos que $f_z(p_0) \neq 0$ e consideremos a aplicação $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)).$$

Como

$$dF_{p_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x(p_0) & f_y(p_0) & f_z(p_0) \end{pmatrix},$$

temos que $\det(dF_{p_0}) = f_z(p_0) \neq 0$. Logo, $dF_{p_0} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um isomorfismo.

Pelo Teorema da Aplicação Inversa, existe um aberto $V \subset U$ tal que $p_0 \in V$, $W = F(V)$ é um aberto de \mathbb{R}^3 , com $F(p_0) = (x_0, y_0, \alpha) \in W$, e $F : V \rightarrow W$ é um difeomorfismo de classe C^∞ .

Então $F^{-1} : W \rightarrow V$, dada por

$$F^{-1}(u, v, t) = (x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t)),$$

é diferenciável e $x(u, v, t) = u$, $y(u, v, t) = v$, pois

$$(u, v, t) = F \circ F^{-1}(u, v, t) = (x(u, v, t), y(u, v, t), f(x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t))),$$

para todo $u, v, t \in W$.

Afirmção: $F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, t) \mid t = a\}$

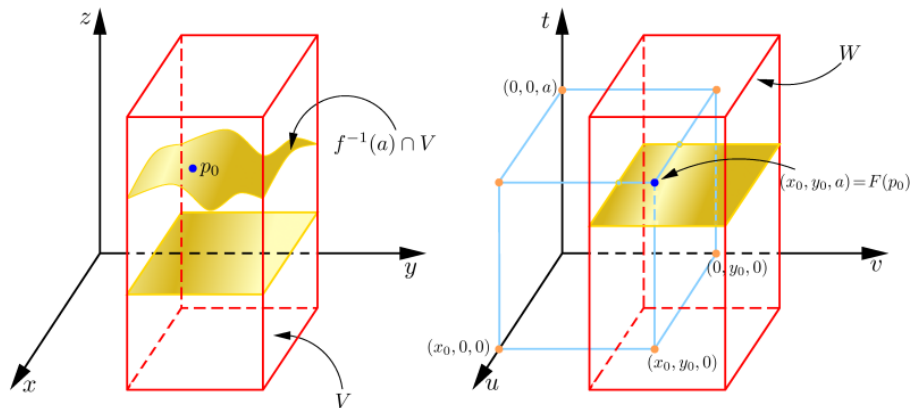


Fig. 9:

De fato, seja $(u, v, a) \in W \cap \{(u, v, t) \mid t = a\}$.

Então existe $(x, y, z) \in V$ tal que $(u, v, a) = F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$. Logo, $f(x, y, z) = a$, ou seja, $(x, y, z) \in f^{-1}(a) \cap V$.

Portanto, $(u, v, a) = F(x, y, z) \in F(f^{-1}(a) \cap V)$.

Seja $(x, y, z) \in f^{-1}(a) \cap V$. Assim, $F(x, y, z) = (x, y, a) \in W \cap \{(u, v, t) \mid t = a\}$. \square

Diminuindo V , se necessário, podemos tomar $W = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \times (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, onde $\varepsilon > 0$.

Seja $h : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ a função diferenciável dada por $h(x, y) = z(x, y, a)$, onde

$$U_0 = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon).$$

Logo, $f^{-1}(a) \cap V$ é o gráfico da função h , pois

$$\begin{aligned} f^{-1}(a) \cap V &= F^{-1}(W \cap \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t = a\}) = \{F^{-1}(x, y, a) \mid (x, y) \in U_0\} \\ &= \{(x, y, h(x, y)) \mid (x, y) \in U_0\} = \text{Graf}(h). \end{aligned}$$

Assim, $f^{-1}(a) \cap V$ é um aberto de $f^{-1}(a)$ e a aplicação $X : U_0 \rightarrow f^{-1}(a) \cap V$, dada por $X(x, y) = (x, y, h(x, y))$ é, pela proposição 1.1, uma parametrização de $f^{-1}(a)$ em p_0 .

Portanto, $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular, pois todo ponto $p \in f^{-1}(a)$ pode ser coberto por uma vizinhança coordenada. \blacksquare

Exemplo 1.5 O *elipsóide*

$$\mathcal{E} : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1,$$

é uma superfície regular.

De fato, considere a função diferenciável $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x, y, z) = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} - 1.$$

Então

$$\text{grad } F(x, y, z) = \left(\frac{2(x - x_0)}{a^2}, \frac{2(y - y_0)}{b^2}, \frac{2(z - z_0)}{c^2} \right) = (0, 0, 0)$$

se, e somente se, $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$.

Logo, $F^{-1}(0) = \mathcal{E}$ é uma superfície regular, pois 0 é um valor regular de F , uma vez que o único ponto crítico de F , (x_0, y_0, z_0) , não pertence a $F^{-1}(0)$.

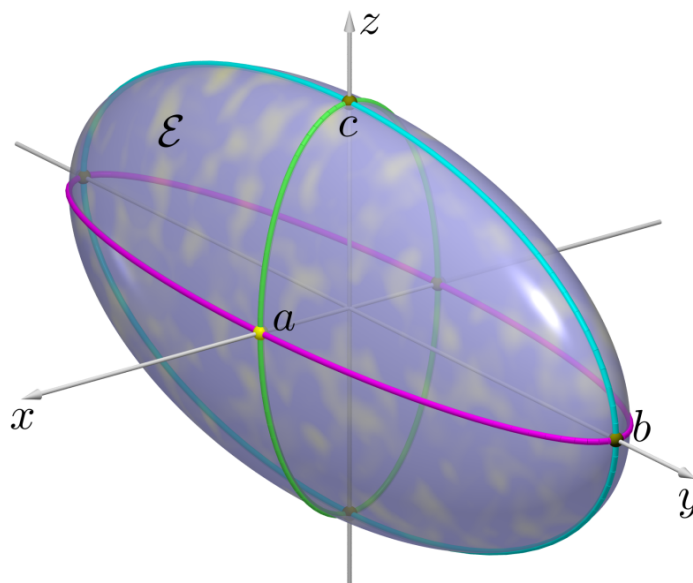


Fig. 10: Elipsóide \mathcal{E}

Em particular, \mathcal{E} é a esfera de centro (x_0, y_0, z_0) e raio $r > 0$ quando $a = b = c = r$. \square

Vamos rever agora algumas noções da Topologia de \mathbb{R}^n .

Definição 1.3 Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é *conexo* se X não pode ser escrito como uma reunião de dois abertos (em X) disjuntos e não-vazios.

Ou seja, se $X = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$, onde $A = X \cap U$, $B = X \cap V$, U e V abertos em \mathbb{R}^n , então $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

Definição 1.4 Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é *conexo por caminhos* se para todo par de pontos $p, q \in X$ existe um caminho contínuo $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$.

Definição 1.5 Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é *localmente conexo por caminhos* se para todo $p \in X$ existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $p \in V$ e $V \cap X$ é conexo por caminhos.

Observação 1.4 Toda superfície regular S é localmente conexa por caminhos.

De fato, dado $p \in S$, existem um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, um aberto $V \subset \mathbb{R}^3$ e $X : U \rightarrow V \cap S$ uma parametrização de S em p .

Seja $\delta > 0$ tal que $B(q; \delta) \subset U$, onde $X(q) = p$. Então $X(B(p; \delta))$ é um aberto em S conexo por caminhos de S , pois $B(p; \delta)$ é convexo (logo, conexo por caminhos) e X é uma aplicação aberta, uma vez que é um homeomorfismo.

Teorema 1.2 Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ localmente conexo por caminhos. Então

$$X \text{ é conexo} \iff X \text{ é conexo por caminhos.}$$

Corolário 1.1 Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Então

$$S \text{ é conexa} \iff S \text{ é conexa por caminhos.}$$

Observação 1.5 Seja S uma superfície regular conexa. Se a função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então $f(S)$ é um intervalo. Logo, se $f(p) \neq 0$ para todo $p \in S$, então f não muda de sinal em S .

De fato, sejam $t_0, t_1 \in f(S)$, com $t_0 < t_1$ e $p_0, p_1 \in S$ tais que $f(p_0) = t_0$ e $f(p_1) = t_1$. Como S é conexa por caminhos, existe um caminho $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$ contínuo tal que $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha(1) = p_1$.

Então, como $f \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, $f \circ \alpha(0) = t_0$ e $f \circ \alpha(1) = t_1$, temos, pelo Teorema do Valor Intermediário, que

$$[t_0, t_1] \subset f \circ \alpha([0, 1]) = f(\alpha([0, 1])) \subset f(S),$$

provando, assim, que $f(S)$ é um intervalo da reta.

Exemplo 1.6 O *hiperbolóide de duas folhas*

$$\mathcal{H} : -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

é uma superfície regular desconexa.

De fato, consideremos a função diferenciável $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Como

$$\text{grad } f(x, y, z) = \left(-\frac{2x}{a^2}, -\frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2} \right) = (0, 0, 0)$$

se, e somente se, $x = y = z = 0$, e $(0, 0, 0) \notin f^{-1}(0)$, temos que 0 é valor regular de f .

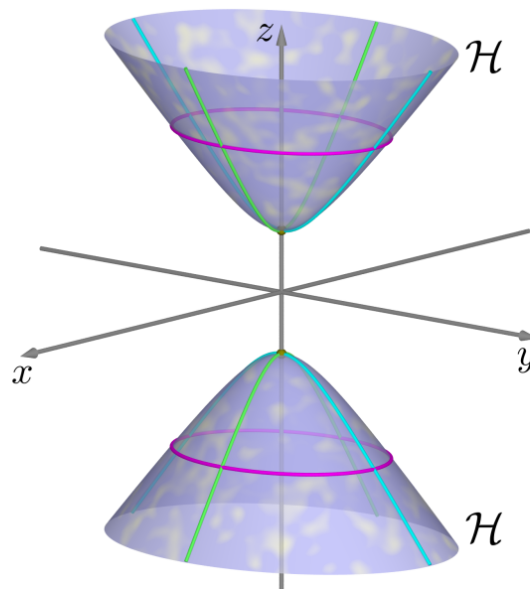


Fig. 11: Hiperbolóide de duas folhas \mathcal{H}

Portanto, $\mathcal{H} = f^{-1}(0)$ é uma superfície regular que é desconexa, pois

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \cup \mathcal{H}^-,$$

onde

$$\mathcal{H}^+ = \mathcal{H} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}^- = \mathcal{H} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\}$$

são abertos disjuntos de \mathcal{H} . \square

Exemplo 1.7 O *toro de revolução* \mathcal{T} é a "superfície" obtida pela rotação do círculo

$$C : \begin{cases} (y - a)^2 + z^2 = r^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

de centro $(0, a, 0)$ e raio $r > 0$, $a > r$, no plano- yz , em torno do eixo- Oz .

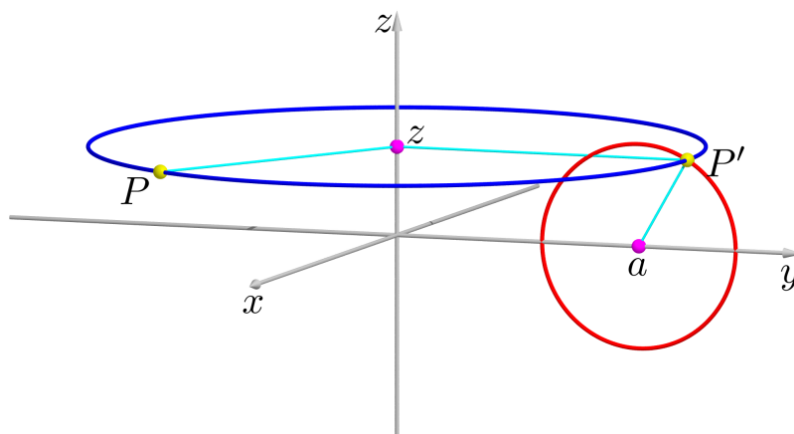


Fig. 12: Construção do toro de revolução

Então $P = (x, y, z) \in \mathcal{T}$ se, e só se, existe $P' = (0, y', z') \in \mathcal{C}$ tal que P e P' estão sobre o mesmo paralelo de centro $c' = (0, 0, z) = (0, 0, z')$.

Logo $z = z'$ e $d(P, c') = d(P', c')$, ou seja, $\sqrt{x^2 + y^2} = |y'| = y'$, pois $y' > 0$ para todo $(0, y', z') \in \mathcal{C}$.

Assim, como $(y' - a)^2 + (z')^2 = r^2$, temos que

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2 + z^2 = r^2$$

é a equação cartesiana de \mathcal{T} .

Consideremos a função $F : \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ dada por

$$F(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2 + z^2.$$

Então, como

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = \frac{2\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = \frac{2\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 2z,$$

segue que $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 0$ se, e só se, $x^2 + y^2 = a^2$ e $z = 0$, ou seja, se, e só se, $F(x, y, z) = 0$.

Logo, r^2 é um valor regular de F e $F^{-1}(r^2) = \mathcal{T}$ é uma superfície regular. \square

A proposição abaixo fornece uma recíproca local da proposição 1.1, isto é, toda superfície regular é localmente o gráfico de uma função diferenciável.

Proposição 1.3 *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$. Então existe um aberto V em S , com $p \in V$, tal que V é o gráfico de uma função diferenciável que tem uma das seguintes formas:*

$$z = f(x, y), \quad y = g(x, z), \quad x = h(y, z).$$

Prova.

Seja $X : U \rightarrow S$ uma parametrização de S em p . Então um dos Jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q), \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}(q) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}(q)$$

é diferente de zero, onde $X(q) = p$.

Suponhamos que $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$ e consideremos a aplicação diferenciável

$$\pi \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \pi \circ X(u, v) = (x(u, v), y(u, v)).$$

Como $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$, temos que $d_q(\pi \circ X) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um isomorfismo. Logo, pelo Teorema da Aplicação Inversa, existem abertos $V_1 \subset U$ e $V_2 \subset \mathbb{R}^2$, com $q \in V_1$ e $\pi \circ X(q) \in V_2$ tais que $\pi \circ X : V_1 \rightarrow V_2$ é um difeomorfismo de classe C^∞

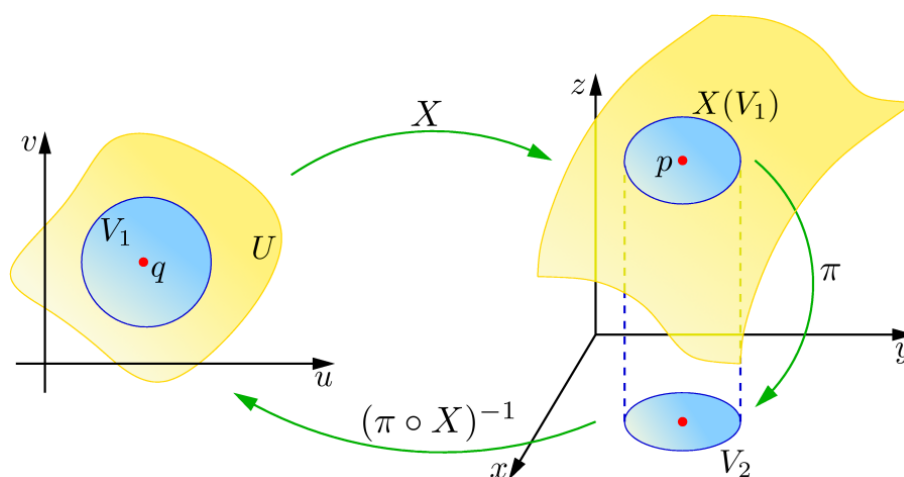


Fig. 13:

Então $X(V_1) = V$ é um aberto de S com $p \in V$ e $\pi|_{X(V_1)} : X(V_1) \rightarrow V_2$ é um homeomorfismo, pois $X : V_1 \rightarrow X(V_1) = V$ é um homeomorfismo.

Seja $(\pi \circ X)^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$, $(\pi \circ X)^{-1}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$.

Como $(\pi \circ X)^{-1}$ é um difeomorfismo C^∞ , $\varphi = X \circ (\pi \circ X)^{-1} : V_2 \rightarrow X(V_1) = V$ é um homeomorfismo diferenciável sobre $X(V_1) = V$, tal que

$$\varphi(x, y) = (x, y, z(u(x, y), v(x, y))),$$

para todo $(x, y) \in V_2$.

Isto é, V é o gráfico da função diferenciável $f : V_2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = z(u(x, y), v(x, y)). \blacksquare$$

A proposição abaixo, que já utilizamos no exemplo 1.1, só será provada na seção 2.

Proposição 1.4 *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$. Seja $X : U \rightarrow S$ uma aplicação definida no aberto U de \mathbb{R}^2 com $p \in X(U)$, tal que:*

- $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é diferenciável;
- $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora para todo $q \in U$;
- $X : U \rightarrow X(U)$ é uma bijeção.

Então $X(U) = V$ é um aberto de S e $X^{-1} : X(U) \rightarrow U$ é contínua, isto é, $X : U \rightarrow X(U)$ é uma parametrização de S em p .

Exemplo 1.8 O cone C de uma folha dado por

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

não é uma superfície regular

Não podemos concluir isto só pelo fato da "parametrização natural" de C dada por

$$(x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$$

não ser diferenciável na origem, pois poderia existir outra parametrização em $p = (0, 0, 0)$ satisfazendo as condições da definição 1.1. Provaremos que isto não ocorre, utilizando a proposição 1.3.

De fato, se C fosse uma superfície regular, existiria, pela proposição 1.3, um aberto $V \subset S$ com $(0, 0, 0) \in V$, que seria o gráfico de uma função diferenciável de uma das três formas:

$$z = f(x, y), \quad y = g(x, z), \quad \text{ou} \quad x = h(y, z),$$

definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ com $(0, 0) \in U$.

A função não pode ser da forma $y = g(x, z)$ nem da forma $x = h(y, z)$, pois numa vizinhança da origem $(0, 0, 0)$ as projeções de C sobre os planos xz e yz não são injetoras. E também não

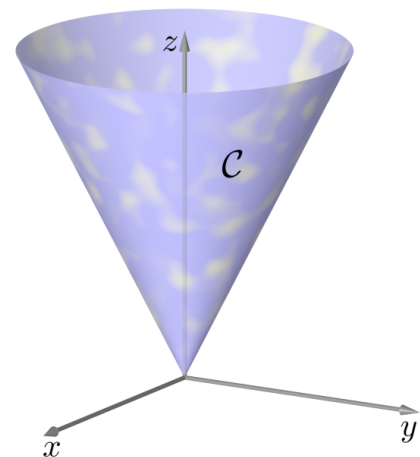


Fig. 14: Cone de uma folha C

pode ser da forma $z = f(x, y)$ numa vizinhança da origem, pois teríamos $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ que não é diferenciável em $(0, 0)$. \square

Exemplo 1.9 Uma parametrização para o toro \mathcal{T} do exemplo 1.7 pode ser dada pela aplicação $X : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde

$$X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u).$$

De fato, X é diferenciável e

$$dX_{(u,v)} = \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v & -(a + r \cos u) \sin v \\ -r \sin u \sin v & (a + r \cos u) \cos v \\ r \cos u & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \|X_u \wedge X_v\|^2 &= \|(-(a + r \cos u)r \cos u \cos v, -(a + r \cos u)r \cos u \sin v, -(a + r \cos u)r \sin u)\|^2 \\ &= (a + r \cos u)^2 r^2 > 0, \end{aligned}$$

para todo $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$, pois $a > r > 0$.

Portanto, $dX_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora para todo (u, v) .

Provaremos agora que X é injetora.

Sejam $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ tais que $X(u_1, v_1) = X(u_2, v_2)$, isto é,

$$(a + r \cos u_1) \cos v_1 = (a + r \cos u_2) \cos v_2 \quad (1)$$

$$(a + r \cos u_1) \sin v_1 = (a + r \cos u_2) \sin v_2 \quad (2)$$

$$r \sin u_1 = r \sin u_2. \quad (3)$$

Então, por (1) e (2), temos que:

$$\begin{aligned} (a + r \cos u_1)^2 (\cos^2 v_1 + \sin^2 v_1) &= (a + r \cos u_2)^2 (\cos^2 v_2 + \sin^2 v_2) \\ \iff (a + r \cos u_1)^2 &= (a + r \cos u_2)^2 \\ \stackrel{a > r}{\iff} a + r \cos u_1 &= a + r \cos u_2 \\ \iff \cos u_1 &= \cos u_2 \end{aligned}$$

Logo $u_1 = u_2$, pois $\sin u_1 = \sin u_2$, por (3) e $u_1, u_2 \in (0, 2\pi)$.

Assim, como $a + r \cos u_1 = a + r \cos u_2 \neq 0$, temos, por (1) e (2), que $\cos v_1 = \cos v_2$ e $\sin v_1 = \sin v_2$. Logo $v_1 = v_2$, pois $v_1, v_2 \in (0, 2\pi)$.

Como já provamos que \mathcal{T} é uma superfície regular no exemplo 1.7, temos, pela proposição 1.4, que $X : U \rightarrow V_1 = \mathcal{T} - (C_1 \cup C_2)$ é uma parametrização de \mathcal{T} , onde

$$C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \text{ e } (x - a)^2 + z^2 = r^2\},$$

e
$$C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \text{ e } x^2 + y^2 = (a + r)^2\}. \quad \square$$

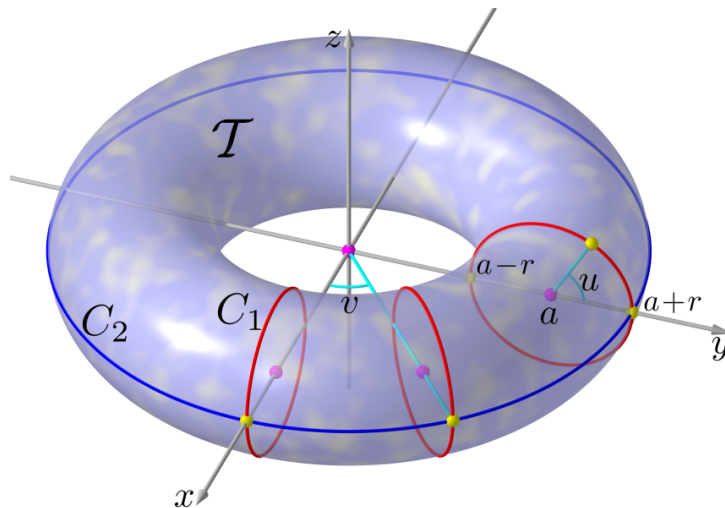


Fig. 15: As curvas $u = \text{const}$ são os paralelos e as curvas $v = \text{const}$ são os meridianos do toro \mathcal{T} . O paralelo $u = u_0$ é o círculo de centro $(0, 0, r \text{ sen } u_0)$ e raio $a + r \text{ cos } u_0$ contido no plano $z = r \text{ sen } u_0$. Se $u_0 \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $a + r \text{ cos } u_0 \in [a - r, a]$, e se $u_0 \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, $a + r \text{ cos } u_0 \in [a, a + r]$

Observação 1.6 O toro \mathcal{T} pode ser coberto por três parametrizações do tipo acima.

De fato, a aplicação $X_2 : (\pi, 3\pi) \times (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi) \rightarrow V_2$, dada por

$$X_2(u, v) = ((a + r \text{ cos } u) \text{ cos } v, (a + r \text{ cos } u) \text{ sen } v, r \text{ sen } u),$$

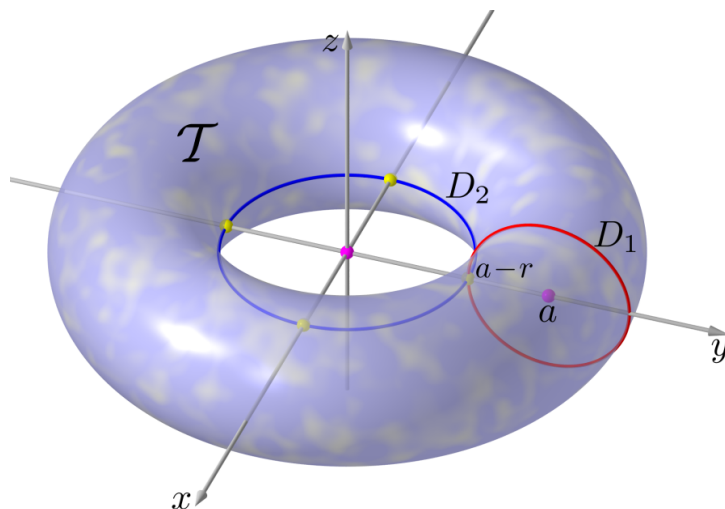


Fig. 16: Parametrização X_2 de \mathcal{T} com $V_2 = \mathcal{T} - (D_1 \cup D_2)$. A parametrização X_3 é visualizada de maneira similar

é uma parametrização de \mathcal{T} tal que $V_2 = \mathcal{T} - (D_1 \cup D_2)$, onde

$$D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ e } (y - a)^2 + z^2 = r^2\}$$

$$D_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \text{ e } x^2 + y^2 = (a - r)^2\}.$$

Logo, $V_1 \cap V_2 = \{(a - r, 0, 0), (0, a + r, 0)\}$. Para cobrir todo o toro, basta tomar a parametrização

$$X_3 : \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right) \times (\pi, 3\pi) \longrightarrow V_3,$$

$$X_3(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u),$$

onde $V_3 = \mathcal{T} - (E_1 \cup E_2)$, onde

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = r \text{ e } x^2 + y^2 = a^2\}$$

$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \text{ e } (x + a)^2 + z^2 = 0\}. \quad \square$$

2. Mudança de Parâmetros; Funções Diferenciáveis sobre Superfícies

Pela definição de superfície regular, cada ponto P de uma superfície regular S pertence a uma vizinhança coordenada. Os pontos de uma tal vizinhança coordenada são caracterizados pelas suas coordenadas. Assim sendo, deveríamos, em princípio, poder definir as propriedades locais de uma superfície em termos dessas coordenadas.

Mas, como um ponto p de S pode pertencer a várias vizinhanças coordenadas, para que uma definição dada em função de suas coordenadas locais faça sentido, é necessário que ela não dependa do sistema de coordenadas escolhido. Para isto, é fundamental mostrar que quando um ponto pertence a duas vizinhanças coordenadas, com parâmetros (u, v) e (ξ, η) , é possível passar de um destes pares de coordenadas ao outro através de uma aplicação diferenciável.

Seja p um ponto de uma superfície regular S e sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ duas parametrizações de S tais que $p \in X(U) \cap Y(V) = W$.

Como X e Y são homeomorfismos, temos que W é um aberto de S e, portanto, $X^{-1}(W)$ e $Y^{-1}(W)$ são abertos de \mathbb{R}^2 .

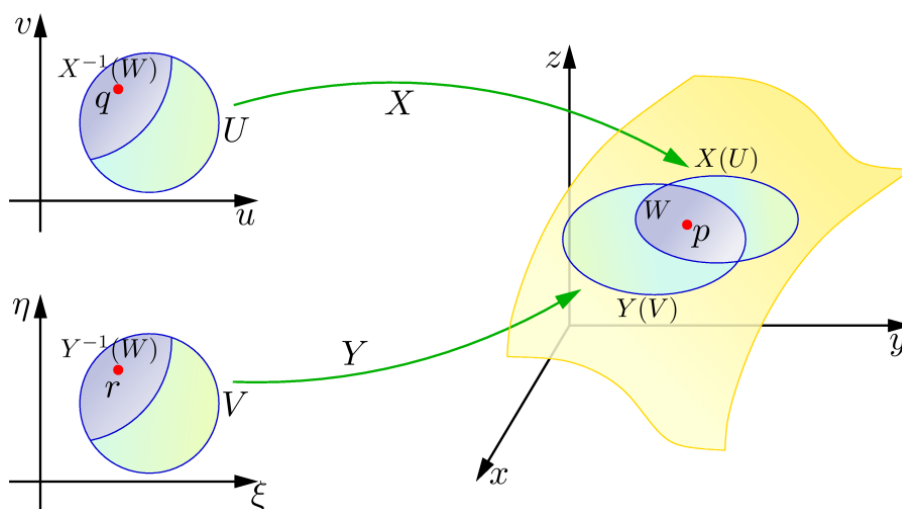


Fig. 17: Coordenadas diferentes em torno do ponto p

Se X e Y são dadas por

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U, \\ Y(\xi, \eta) &= (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)), \quad (\xi, \eta) \in V, \end{aligned}$$

então a *mudança de parâmetros* $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$, dada por

$$h(\xi, \eta) = (u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)),$$

é um homeomorfismo com *inversa* $h^{-1} = Y^{-1} \circ X : X^{-1}(W) \rightarrow Y^{-1}(W)$,

$$h^{-1}(u, v) = (\xi(u, v), \eta(u, v)).$$

Proposição 2.1 (Mudança de Parâmetros)

A aplicação $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$ é um difeomorfismo C^∞ .

Prova.

Seja $r \in Y^{-1}(W)$ e tome $q = h(r) \in X^{-1}(W)$. Então $Y(r) = X(q) \in W$.

Como $X : U \rightarrow X(U)$ é uma parametrização, temos que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Suponhamos que $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$.

Estendemos X a uma aplicação $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t).$$

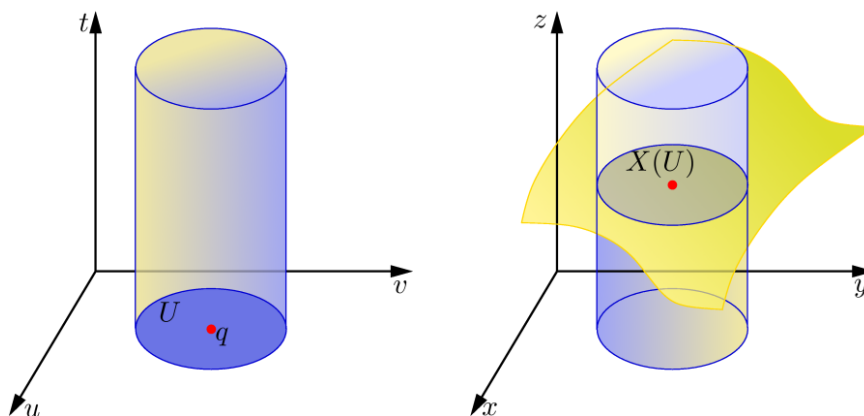


Fig. 18: Extensão de X a F

Geometricamente, F aplica um cilindro vertical C sobre U em um "cilindro vertical" sobre X(U), levando cada seção de C com altura t na superfície $X(u, v) + te_3$, onde $e_3 = (0, 0, 1)$.

Então F é diferenciável, $F(u, v, 0) = X(u, v)$ para todo $(u, v) \in U$, e o determinante da diferencial $dF_{(q,0)}$ é diferente de zero, pois

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{vmatrix} (q) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Aplicação Inversa, existem um aberto $U_0 \subset U \subset \mathbb{R}^2$, com $q \in U_0$, $\varepsilon > 0$ e um aberto $M \subset \mathbb{R}^3$ tais que

$$F : U_0 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$$

é um difeomorfismo C^∞ .

Então $X(U_0) = F(U_0 \times \{0\})$ é um aberto de S contido no aberto M de \mathbb{R}^3 , tal que $X(q) \in X(U_0)$.

Além disso, $X^{-1} = \pi \circ F^{-1}|_{X(U_0)} : X(U_0) \longrightarrow U_0$, onde $\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\pi(u, v, t) = (u, v)$, pois

$$(\pi \circ F^{-1}|_{X(U_0)}) \circ X(u, v) = \pi \circ F^{-1}|_{X(U_0)}(F(u, v, 0)) = \pi(u, v, 0) = (u, v).$$

Logo $X^{-1} : X(U_0) \longrightarrow U_0$ é a restrição a $X(U_0)$ da aplicação $\pi \circ F^{-1}$ diferenciável definida no aberto $M \subset \mathbb{R}^3$.

Tomemos $U_1 = X^{-1}(W) \cap U_0$.

Então $q \in U_1$, $W_1 = X(U_1) \subset W$ é um aberto de S e $V_1 = Y^{-1}(W_1)$ é um aberto de \mathbb{R}^2 tal que $V_1 \subset Y^{-1}(W)$, $r \in V_1$ e $Y(V_1) = X(U_1) = W_1$.

Logo, $h : V_1 \longrightarrow U_1$ é dada por $h = \pi \circ F^{-1} \circ Y$.

Como $Y : V_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $\pi \circ F^{-1} : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ são aplicações diferenciáveis (C^∞) tais que $Y(V_1) =$

$W_1 \subset M$, temos que h é diferenciável em V_1 , com $r \in V_1$.

Sendo $r \in Y^{-1}(W)$ arbitrário, $h : Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$ é diferenciável em $Y^{-1}(W)$.

De modo análogo, podemos provar que $h^{-1} = Y^{-1} \circ X : X^{-1}(W) \rightarrow Y^{-1}(W)$ é diferenciável em $X^{-1}(W)$. Logo $h : Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$ é um difeomorfismo C^∞ . ■

Daremos agora uma definição do que se entende por função diferenciável em uma superfície regular.

Definição 2.1 Seja $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num subconjunto aberto V de uma superfície regular S . Dizemos que $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é *diferenciável em* $p \in V$ se, para alguma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de S em p , com $X(q) = p$, $q \in U$, e $X(U) \subset V$, a composta $f \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $q = X^{-1}(p)$.

A função $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é *diferenciável em* V se é diferenciável em todos os pontos de V .

Observação 2.1 A definição acima independe da escolha da parametrização X .

De fato, seja $Y : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma outra parametrização de S em p , com $Y(r) = p$, $r \in U_1$ e $Y(U_1) \subset V$.

Sejam $W = X(U) \cap Y(U_1)$, $p \in W$, $U'_1 = Y^{-1}(W)$ e $U' = X^{-1}(W)$.

Então, se $h = X^{-1} \circ Y : U'_1 \rightarrow U'$, temos que $f \circ Y = f \circ X \circ h$ em U'_1 , com $r \in U'_1$.

Como, por hipótese, $f \circ X : U' \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em q e, pela proposição 2.1, $h : U'_1 \rightarrow U'$ é um difeomorfismo C^∞ , temos que $f \circ Y : U'_1 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em r . Portanto, $f \circ Y : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em r .

Observação 2.2 Na demonstração da proposição 2.1, utilizamos o fato de que a inversa de uma parametrização é contínua. Como precisamos da proposição 2.1 para podermos definir funções diferenciáveis em superfícies, não podemos prescindir desta condição na definição de uma superfície regular.

Observação 2.3 Sejam S uma superfície regular, V um subconjunto aberto de \mathbb{R}^3 tal que $S \subset V$ e $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

Então $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável.

De fato, sejam $p \in S$ e $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S em p .

Então $f \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, pois é a composta de duas funções diferenciáveis definidas em abertos do espaço euclidiano (\mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , respectivamente).

Exemplo 2.1 A *função altura relativa a um vetor unitário* $v \in \mathbb{R}^3$, $h : S \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(p) = \langle p, v \rangle$, é uma função diferenciável em qualquer superfície regular S de \mathbb{R}^3 , pois $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em \mathbb{R}^3 .

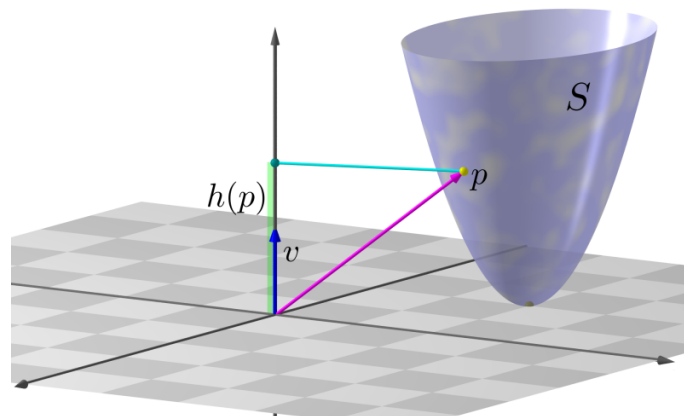


Fig. 19: Altura $h(p)$ do ponto $p \in S$

$h(p)$ é a altura de $p \in S$ relativa ao plano normal a v que passa pela origem. \square

Exemplo 2.2 A função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $f(p) = \|p - p_0\|^2$, que mede o quadrado da distância de p a um ponto fixo $p_0 \in \mathbb{R}^3$, é diferenciável em toda superfície regular S de \mathbb{R}^3 , pois $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em \mathbb{R}^3 .

Mas a função $g : S \rightarrow \mathbb{R}$, $g(p) = \|p - p_0\|$, é diferenciável na superfície S se, e só se, $p_0 \notin S$, pois $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em todos os pontos $p \in \mathbb{R}^3 - \{p_0\}$ e não é diferenciável em p_0 .

\square

A definição de diferenciabilidade pode ser estendida a aplicações entre superfícies.

Definição 2.2 Sejam S_1, S_2 superfícies regulares e V_1 um subconjunto aberto de S_1 . Dizemos que uma aplicação contínua $\varphi : V_1 \rightarrow S_2$ é *diferenciável em* $p \in V_1$ se existem parametrizações

$$X_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1 \text{ e } X_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2$$

tais que $p \in X_1(U_1)$, $X_1(U_1) \subset V_1$, $\varphi(X_1(U_1)) \subset X_2(U_2)$ e a aplicação

$$X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

é diferenciável em $q = X_1^{-1}(p)$.

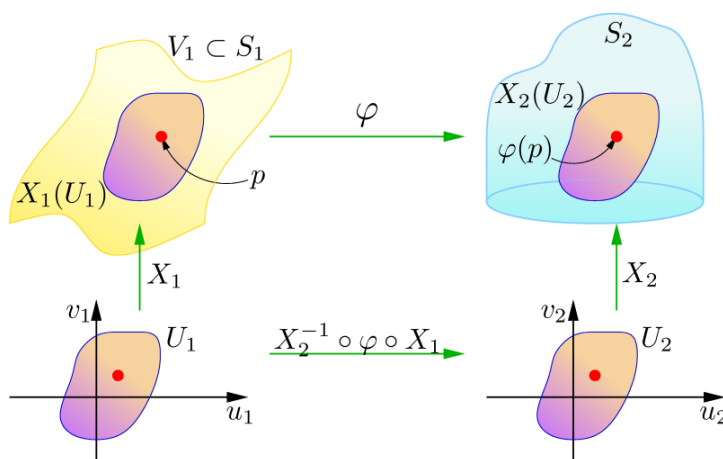


Fig. 20: Diferenciabilidade de φ em p .

Observação 2.4 A existência de parametrizações X_1 e X_2 que satisfazem a condição $\varphi(X_1(U_1)) \subset X_2(U_2)$ segue da continuidade da aplicação φ .

De fato, sejam $X_1 : U \rightarrow X_1(U)$ uma parametrização de S_1 em p e $X_2 : U_2 \rightarrow X_2(U_2)$ uma parametrização de S_2 em $\varphi(p)$.

Como φ é contínua e $X_2(U_2)$ é um aberto de S_2 que contém $\varphi(p)$, existe um aberto $V'_1 \subset V_1$ tal que $p \in V'_1$ e $\varphi(V'_1) \subset X_2(U_2)$. Basta, então, considerar o aberto $U_1 = X_1^{-1}(X_1(U) \cap V'_1)$ para termos $p \in X_1(U_1)$, $X_1(U_1) \subset V_1$ e

$$\varphi(X_1(U_1)) = \varphi(X_1(U) \cap V'_1) \subset \varphi(V'_1) \subset X_2(U_2).$$

Observação 2.5 A definição dada acima não depende das parametrizações X_1 e X_2 .

De fato, sejam $Y_1 : W_1 \rightarrow Y_1(W_1)$ uma parametrização de S_1 em p e $Y_2 : W_2 \rightarrow Y_2(W_2)$ uma parametrização de S_2 em $\varphi(p)$ tais que $\varphi(Y_1(W_1)) \subset Y_2(W_2)$.

Seja $W'_1 = Y_1^{-1}(Y_1(W_1) \cap X_1(U_1))$. Então W'_1 é um subconjunto aberto de W_1 que contém $Y_1^{-1}(p)$ e $(Y_2^{-1} \circ X_2) \circ X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1 \circ (X_1^{-1} \circ Y_1)$ está bem definida em $W'_1 = Y_1^{-1}(W_0)$, onde $W_0 = Y_1(W_1) \cap X_1(U_1)$, pois $X_1^{-1} \circ Y_1$ está definida em $W'_1 = Y_1^{-1}(W_0)$, e $Y_2^{-1} \circ X_2$ está definida em $X_2^{-1}(\widetilde{W}_0)$, onde $\widetilde{W}_0 = Y_2(W_2) \cap X_2(U_2)$,

$$X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1 \circ (X_1^{-1} \circ Y_1)(W'_1) = X_2^{-1} \circ \varphi(W_0) \subset X_2^{-1}(\widetilde{W}_0),$$

já que

$$\varphi(W_0) = \varphi(Y_1(W_1) \cap X_1(U_1)) \subset Y_2(W_2) \cap X_2(U_2) = \widetilde{W}_0.$$

Então, como

$$Y_2^{-1} \circ \varphi \circ Y_1 = (Y_2^{-1} \circ X_2) \circ X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1 \circ (X_1^{-1} \circ Y_1), \quad \text{em } W'_1 = Y_1^{-1}(W_0),$$

$X_1^{-1} \circ Y_1$ é diferenciável em $W'_1 = Y_1^{-1}(W_0)$, $Y_2^{-1} \circ X_2$ é diferenciável em $X_2^{-1}(\widetilde{W}_0)$ e, por hipótese, $X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1$ é diferenciável em $q = X_1^{-1}(p)$, temos que $Y_2^{-1} \circ \varphi \circ Y_1 : W'_1 \rightarrow X_2^{-1}(\widetilde{W}_0)$ é diferenciável em $(X_1^{-1} \circ Y_1)^{-1}(q) = Y_1^{-1}(X_1(q)) = Y_1^{-1}(p)$.

Logo, $Y_2 \circ \varphi \circ Y_1 : W_1 \rightarrow W_2$ é diferenciável em $Y_1^{-1}(p)$.

Definição 2.3 Dizemos que duas superfícies regulares S_1 e S_2 são *difeomorfas* quando existe uma bijeção diferenciável $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ com inversa $\varphi^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$ diferenciável. Uma tal φ é chamada um *difeomorfismo* de S_1 em S_2 .

Observação 2.6 Toda parametrização $X : U \rightarrow X(U)$ de S é um difeomorfismo entre o aberto U de \mathbb{R}^2 e o aberto $X(U)$ de S .

De fato, como $X : U \rightarrow X(U)$ é uma parametrização de S e $\text{id} : U \rightarrow U$, $\text{id}(x) = x$, é parametrização de \mathbb{R}^2 , temos que $X : U \rightarrow X(U)$ é diferenciável em U , pois a aplicação $X^{-1} \circ X \circ \text{id} = \text{id} : U \rightarrow U$ é diferenciável, e $X^{-1} : X(U) \rightarrow U$ é diferenciável em $X(U)$, pois $\text{id} \circ X^{-1} \circ X = \text{id} : U \rightarrow U$ é diferenciável.

Isto mostra que toda superfície regular é localmente difeomorfa ao plano \mathbb{R}^2 .

Observação 2.7 Sejam S_1, S_2 superfícies regulares, V um aberto de \mathbb{R}^3 e $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação diferenciável tais que $S_1 \subset V$ e $f(S_1) \subset S_2$. Então a restrição $f : S_1 \rightarrow S_2$ é uma aplicação diferenciável de S_1 em S_2 .

De fato, como $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ é diferenciável, temos que $f : S_1 \rightarrow S_2$ é contínua.

Sejam $p_1 \in S_1$, $X_1 : U_1 \rightarrow X_1(U_1)$ parametrização de S_1 em p_1 e $X_2 : U_2 \rightarrow X_2(U_2)$ parametrização de S_2 em $f(p_1)$ tais que $f(X_1(U_1)) \subset X_2(U_2)$.

Podemos supor (ver demonstração da proposição 2.1) que $X_2^{-1} = F|_{X_2(U_2)}$, onde $F : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação diferenciável definida num aberto W de \mathbb{R}^3 tal que $X_2(U_2) \subset W$.

Logo, $X_2^{-1} \circ f \circ X_1 = F \circ f \circ X_1$ é diferenciável em U_1 , pois é a composta de aplicações diferenciáveis definidas em abertos de \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^3 respectivamente.

Exemplo 2.3 Seja S uma superfície regular simétrica em relação ao plano xy , isto é,

$$(x, y, z) \in S \text{ se, e só se, } (x, y, -z) \in S.$$

Seja $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação dada por $\varphi(x, y, z) = (x, y, -z)$.

Então φ é um difeomorfismo tal que $\varphi^{-1} = \varphi$.

Como $\varphi(S) = S$, temos que $\varphi : S \rightarrow S$ é também um difeomorfismo. \square

Exemplo 2.4 Seja $R_{\theta, z} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a rotação de um ângulo θ em torno do eixo Oz , e seja S uma superfície regular invariante por esta rotação, isto é, se $p \in S$ então $R_{\theta, z}(p) \in S$.

Então a restrição $R_{\theta, z} : S \rightarrow S$ é uma aplicação diferenciável. \square

Exemplo 2.5 Seja $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação dada por

$$\varphi(x, y, z) = (ax, by, cz),$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Então $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um difeomorfismo.

Sejam

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

a esfera unitária e

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

o elipsóide, duas superfícies regulares. Como $\varphi(S^2) = \mathcal{E}$, temos que a restrição $\varphi : S^2 \rightarrow \mathcal{E}$ é um difeomorfismo. \square

Observação 2.8 (Exercício 13, pág. 97)

Seja $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num aberto V de uma superfície regular S .

Então $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $p \in V$ se, e só se, existem um aberto W de \mathbb{R}^3 , $p \in W$, e uma função $F : W \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em p tal que $f|_{V \cap W} = F|_{V \cap W}$.

De fato, suponhamos que existem um aberto $W \subset \mathbb{R}^3$, com $p \in W$, e uma função $F : W \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em p tal que $f|_{V \cap W} = F|_{V \cap W}$.

Seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S em p tal que $X(U) \subset V \cap W$. Então $f \circ X = F \circ X$ é diferenciável em $X^{-1}(p)$ e, portanto, pela definição 2.1, f é diferenciável em p .

Suponhamos agora que $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em p , e seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S em p tal que $X(U) \subset V$ e $X^{-1} = G|_{X(U)}$, onde $G : W_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação diferenciável definida num aberto W_0 de \mathbb{R}^3 tal que $X(U) \subset W_0$. Seja $W = W_0 \cap V_0$, onde $V_0 \cap S = X(U)$ e V_0 é um aberto de \mathbb{R}^3 . Então $V \cap W = V \cap V_0 \cap W = X(U) \cap W$.

Logo, como $f|_{V \cap W} = f|_{X(U) \cap W} = f \circ X \circ X^{-1}|_{X(U) \cap W}$, temos que $f|_{V \cap W} = f \circ X \circ G|_{V \cap W}$, ou seja, $f|_{V \cap W}$ é a restrição a $V \cap W$ da função diferenciável $f \circ X \circ G : W \rightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto W de \mathbb{R}^3 . \square

- Se tivéssemos começado com essa definição de diferenciabilidade, poderíamos ter definido uma superfície regular S como um conjunto localmente difeomorfo ao \mathbb{R}^2 , isto é, para todo $p \in S$, existem um aberto V de S com $p \in V$, um aberto U de \mathbb{R}^2 e uma aplicação $X : U \rightarrow X(U) = V$ que é um difeomorfismo.

Vamos agora voltar à teoria das curvas a fim de tratá-las do ponto de vista deste capítulo, isto é, como subconjuntos de \mathbb{R}^3 (ou de \mathbb{R}^2).

Definição 2.4 Uma *curva regular* em \mathbb{R}^3 (ou em \mathbb{R}^2) é um subconjunto \mathcal{C} de \mathbb{R}^3 (resp. \mathbb{R}^2) com a seguinte propriedade: para cada ponto $p \in \mathcal{C}$ existem um aberto V de \mathbb{R}^3 (de \mathbb{R}^2), com

$p \in V$, um intervalo aberto I e um homeomorfismo diferenciável $\alpha : I \rightarrow V \cap \mathcal{C}$ tal que $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Observação 2.9 A mudança de parâmetro é um difeomorfismo.

Vamos provar este resultado para o caso em que \mathcal{C} é uma curva de \mathbb{R}^3 . Quando \mathcal{C} é uma curva plana, a demonstração é similar e fica como exercício.

De fato, sejam $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \alpha(I)$ e $\beta : J \rightarrow \beta(J)$ parametrizações de \mathcal{C} em p e $W = \alpha(I) \cap \beta(J)$ um aberto de \mathcal{C} que contém p .

Mostraremos que $h = \beta^{-1} \circ \alpha : \alpha^{-1}(W) \rightarrow \beta^{-1}(W)$ é um difeomorfismo C^∞ do aberto $\alpha^{-1}(W)$ da reta sobre o aberto $\beta^{-1}(W)$ da reta.

Seja $t_0 \in \alpha^{-1}(W)$ e considere $s_0 = h(t_0) \in \beta^{-1}(W) \subset J$.

Como $\beta'(s_0) = (x'(s_0), y'(s_0), z'(s_0)) \neq (0, 0, 0)$, temos que $x'(s_0) \neq 0$, $y'(s_0) \neq 0$ ou $z'(s_0) \neq 0$. Vamos supor que $z'(s_0) \neq 0$.

Estendemos β a uma aplicação $F : J \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $F(s, \xi, \eta) = (x(s) + \xi, y(s) + \eta, z(s))$.

Então F é diferenciável, $F(s, 0, 0) = \beta(s)$ para todo $s \in J$ e o determinante da diferencial $dF_{(s_0, 0, 0)}$ é diferente de zero, pois

$$\begin{vmatrix} x'(s_0) & 1 & 0 \\ y'(s_0) & 0 & 1 \\ z'(s_0) & 0 & 0 \end{vmatrix} = z'(s_0) \neq 0$$

Logo, pelo Teorema da Aplicação inversa, existem um intervalo aberto $J_0 \subset J$, com $s_0 \in J_0$, um aberto U de \mathbb{R}^2 com $(0, 0) \in U$ e um aberto M de \mathbb{R}^3 tais que $F : J_0 \times U \rightarrow M$ é um difeomorfismo de classe C^∞ .

Então $\beta(J_0) = F(J_0 \times \{(0, 0)\})$ é um aberto de \mathcal{C} contido no aberto M de \mathbb{R}^3 tal que $\beta(s_0) \in \beta(J_0)$.

Além disso, $\beta^{-1} = \pi \circ F^{-1}|_{\beta(J_0)} : \beta(J_0) \rightarrow J_0$, onde $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi(x, y, z) = x$, pois $\pi \circ F^{-1}|_{\beta(J_0)}(\beta(s)) = (\pi \circ F^{-1})(F(s, 0, 0)) = \pi(s, 0, 0) = s$. Ou seja, $\beta^{-1} : \beta(J_0) \rightarrow J_0$ é a restrição a $\beta(J_0)$ da aplicação diferenciável $\pi \circ F^{-1}$ definida no aberto M de \mathbb{R}^3 .

Podemos tomar o intervalo aberto J_0 de modo que $J_0 \subset \beta^{-1}(W)$ e $s_0 \in J_0$. Então $W_0 = \beta(J_0)$ é um aberto de \mathcal{C} , pois $\beta : \beta^{-1}(W) \rightarrow W$ é um homeomorfismo.

Seja $I_0 = \alpha^{-1}(W_0)$. Então I_0 é um subconjunto aberto de \mathbb{R} tal que $I_0 \subset \alpha^{-1}(W)$, $t_0 \in I_0$ e $\alpha(I_0) = W_0 = \beta(J_0)$.

Logo, como $h = \beta^{-1} \circ \alpha = \pi \circ F^{-1} \circ \alpha$ em I_0 , temos que h é diferenciável em t_0 .

Como $t_0 \in \alpha^{-1}(W)$ é arbitrário, temos que $h = \beta^{-1} \circ \alpha : \alpha^{-1}(W) \rightarrow \beta^{-1}(W)$ é diferenciável. De modo análogo, podemos provar que $h^{-1} = \alpha^{-1} \circ \beta : \beta^{-1}(W) \rightarrow \alpha^{-1}(W)$ é diferenciável, e, portanto, a mudança de parâmetro $h : \alpha^{-1} \rightarrow \beta^{-1}(W)$ é um difeomorfismo C^∞ .

Observação 2.10 Se uma propriedade de uma curva regular obtida a partir de uma parametrização independe desta parametrização, dizemos que ela é uma *propriedade local da curva*.

Observação 2.11 (Exemplo 15, pág. 97)

O comprimento de arco, definido nos capítulos 1 e 2, independe da parametrização escolhida, e é, portanto, uma propriedade local da curva.

De fato, sejam $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \alpha(I)$ e $\beta : J \rightarrow \beta(J)$ parametrizações de uma curva \mathcal{C} num ponto $p \in \mathcal{C}$ e seja $W = \alpha(I) \cap \beta(J)$.

Sejam $p_0 \neq p_1$ pontos distintos de uma das componentes conexas de W ; $t_0, t_1 \in \alpha^{-1}(W)$; $s_0, s_1 \in \beta^{-1}(W)$ tais que $\alpha(t_0) = \beta(s_0) = p_0$ e $\alpha(t_1) = \beta(s_1) = p_1$.

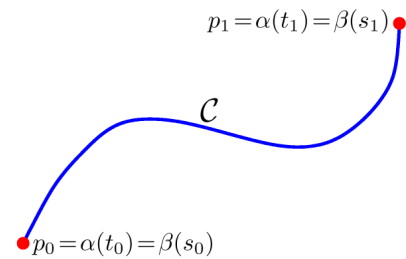


Fig. 21: p_0 e p_1 na mesma componente conexa de W

Seja $h = \beta^{-1} \circ \alpha : \alpha^{-1}(W) \rightarrow \beta^{-1}(W)$ a mudança de parâmetro. Vamos supor $t_0 < t_1$ e definir $I' = [t_0, t_1]$, $J' = [s_0, s_1]$ ou $J' = [s_1, s_0]$, conforme $h'(t) > 0$ para todo $t \in I'$ ou $h'(t) < 0$ para todo $t \in I'$.

Como $\alpha(t) = \beta \circ h(t)$ para todo $t \in I'$, temos que $\alpha'(t) = \beta'(h(t)) h'(t)$ e, portanto,

$$\bullet \ell(\alpha[t_0, t_1]) = \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \|\beta'(h(t))\| |h'(t)| dt$$

e $\bullet \ell(\beta[s_0, s_1]) = \int_{s_0}^{s_1} \|\beta'(s)\| ds$, se $s_0 < s_1$, ou $\int_{s_1}^{s_0} \|\beta'(s)\| ds$, se $s_0 > s_1$.

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^{s_1} \|\beta'(s)\| ds &= \int_{h(t_0)}^{h(t_1)} \|\beta'(s)\| ds = \int_{t_0}^{t_1} \|\beta'(h(u))\| |h'(u)| du \\ &= \begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(\xi)\| d\xi, & \text{se } h'(u) > 0 \text{ para todo } u \in I' \\ \text{ou} \\ -\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(\xi)\| d\xi, & \text{se } h'(u) < 0 \text{ para todo } u \in I'. \end{cases} \end{aligned}$$

Em qualquer caso, os comprimentos coincidem.

Definição 2.5 Sejam \mathcal{C} uma curva regular de \mathbb{R}^3 , $p \in \mathcal{C}$ e $\alpha : I \rightarrow \alpha(I)$ uma parametrização de \mathcal{C} em p , com $\alpha(t_0) = p$, $t_0 \in I$. Dizemos, então, que $\kappa_\alpha(t_0)$ é a *curvatura $\kappa(p)$ de \mathcal{C} em p* e $\tau_\alpha(t_0)$ é a *torsão $\tau(p)$ de \mathcal{C} em p* .

Observação 2.12 As definições acima independem da parametrização α em p .

Com efeito, seja $\beta : J \rightarrow \beta(J)$ outra parametrização da curva \mathcal{C} em p com $\beta(s_0) = p$.

Seja $W = \alpha(I) \cap \beta(J)$ (um aberto em \mathcal{C} que contém p), I' o intervalo aberto de $\alpha^{-1}(W)$ que contém t_0 e $J' = h(I')$, onde $h = \beta^{-1} \circ \alpha : \alpha^{-1}(W) \rightarrow \beta^{-1}(W)$ é a função de mudança de parâmetro, com $h(t_0) = s_0$, isto é, $\alpha(t_0) = \beta(s_0) = p$.

Afirmção. $\kappa_\alpha(t_0) = \kappa_\beta(s_0)$ e $\tau_\alpha(t_0) = \tau_\beta(s_0)$.

De fato, como $\alpha'(t) = \beta'(h(t)) h'(t)$, temos que $\alpha''(t) = \beta''(h(t)) h'(t)^2 + \beta'(h(t)) h''(t)$.

Então, $\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = (\beta'(h(t)) \wedge \beta''(h(t))) h'(t)^3$ e $\|\alpha'(t)\| = \|\beta'(h(t))\| |h'(t)|$.

Logo,

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha(t_0) &= \frac{\|\alpha'(t_0) \wedge \alpha''(t_0)\|}{\|\alpha'(t_0)\|^3} \\ &= \frac{\|\beta'(h(t_0)) \wedge \beta''(h(t_0))\| |h'(t_0)|^3}{\|\beta'(h(t_0))\|^3 |h'(t_0)|^3} \\ &= \frac{\|\beta'(s_0) \wedge \beta''(s_0)\|}{\|\beta'(s_0)\|^3} = \kappa_\beta(s_0). \end{aligned}$$

Temos, também,

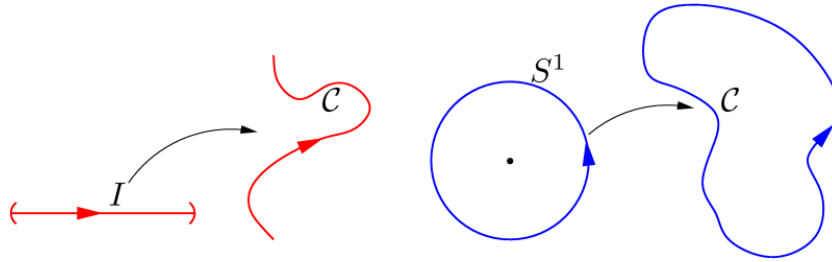
$$\alpha'''(t) = \beta'''(h(t)) h'(t)^3 + 2\beta''(h(t)) h'(t) h''(t) + \beta'(h(t)) h'(t) h''(t) + \beta'(h(t)) h'''(t).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \tau_\alpha(t_0) &= \frac{-\langle \alpha'(t_0) \wedge \alpha''(t_0), \alpha'''(t_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0) \wedge \alpha''(t_0)\|^2} \\ &= \frac{-\langle \beta'(h(t_0)) \wedge \beta''(h(t_0)), \beta'''(h(t_0)) \rangle |h'(t_0)|^6}{\|\beta'(h(t_0)) \wedge \beta''(h(t_0))\|^2 |h'(t_0)|^6} \\ &= \frac{-\langle \beta'(s_0) \wedge \beta''(s_0), \beta'''(s_0) \rangle}{\|\beta'(s_0) \wedge \beta''(s_0)\|^2} = \tau_\beta(s_0). \end{aligned}$$

Um breve comentário: é um fato conhecido que *toda curva regular é difeomorfa a um intervalo aberto ou ao círculo S^1* .

Usando esse resultado podemos construir uma aplicação $t : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ (ou \mathbb{R}^2) de classe C^∞ tal que $t(p)$ é tangente a \mathcal{C} em p e $\|t(p)\| = 1$ para todo $p \in \mathcal{C}$. Isto é, podemos orientar a curva \mathcal{C} .

Fig. 22: \mathcal{C} não-compacta (esquerda) e compacta (direita)

De fato, se $f : I \rightarrow \mathcal{C}$ é um difeomorfismo, definimos $\mathbf{t}(p) = \frac{f'(f^{-1}(p))}{\|f'(f^{-1}(p))\|}$ para todo $p \in \mathcal{C}$, no caso em que \mathcal{C} não é compacto. Quando \mathcal{C} é compacta, existe um difeomorfismo $g : S^1 \rightarrow \mathcal{C}$.

Definimos, então $\mathbf{t}(p) = \frac{(g \circ \exp)'(t)}{\|(g \circ \exp)'(t)\|}$, onde $\exp(t) = (\cos t, \sin t)$ e $g(\exp(t)) = p$.

Pode-se provar, usando o fato, que g é um difeomorfismo e que as funções \sin e \cos são periódicas de período 2π , que a função $\mathbf{t} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ (ou \mathbb{R}^2) está bem definida.

Com isto, no caso de \mathcal{C} ser uma curva plana, podemos definir um campo normal unitário $\mathbf{n} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciável, isto é, $\mathbf{n}(p) \perp \mathbf{t}(p)$ e $\|\mathbf{n}(p)\| = 1$ para todo $p \in \mathcal{C}$, tal que $\{\mathbf{t}(p), \mathbf{n}(p)\}$ é uma base ortonormal positiva para todo $p \in \mathcal{C}$.

Assim, definimos a *curvatura da curva \mathcal{C} em p com sinal* como sendo $\kappa(p) = \kappa_\alpha(s_0)$, onde $\alpha : I \rightarrow \alpha(I)$ é uma parametrização de \mathcal{C} em p pelo comprimento de arco tal que $\alpha(s_0) = p$ e $\alpha'(s) = \mathbf{t}(\alpha(s))$ para todo $s \in I$.

Se \mathcal{C} é uma curva regular em \mathbb{R}^3 tal que $\kappa(p) \neq 0$ para todo $p \in \mathcal{C}$, definimos um campo normal unitário diferenciável $\mathbf{n} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ e um campo binormal diferenciável $\mathbf{b} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ fazendo $\mathbf{n}(p) = \mathbf{n}_\alpha(s_0)$ e $\mathbf{b}(p) = \mathbf{b}_\alpha(s_0)$, onde $\alpha : I \rightarrow \alpha(I)$ é uma parametrização de \mathcal{C} em p pelo comprimento de arco tal que $\alpha(s_0) = p$ e $\alpha'(s) = \mathbf{t}(\alpha(s))$ para todo $s \in I$.

Atividade 2.1 Mostre que:

(a) A imagem inversa de um valor regular de uma função diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, definida em um aberto U de \mathbb{R}^2 , é uma curva regular plana. Dê um exemplo de uma curva obtida desta maneira que não é conexa.

(b) A imagem inversa de um valor regular de uma função diferenciável $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida num aberto U de \mathbb{R}^3 , é uma curva regular em \mathbb{R}^3 . Mostre a relação entre este fato e a maneira clássica de definir uma curva em \mathbb{R}^3 como a interseção de duas superfícies regulares.

(c) Toda curva regular plana \mathcal{C} é localmente o gráfico de uma função diferenciável, isto é, para todo $p \in \mathcal{C}$, existem um intervalo aberto I , um aberto V de \mathbb{R}^2 , com $p \in V$, e uma função

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável tais que $V \cap \mathcal{C} = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I\}$ ou $V \cap \mathcal{C} = \{(f(x), x) \mid x \in I\}$.

(d) O conjunto $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^3\}$ não é uma curva regular.

Exemplo 2.6 (Superfícies de Revolução) Sejam π um plano, $L \subset \pi$ uma reta e $\mathcal{C} \subset \pi$ uma curva regular que não intersecta a reta L .

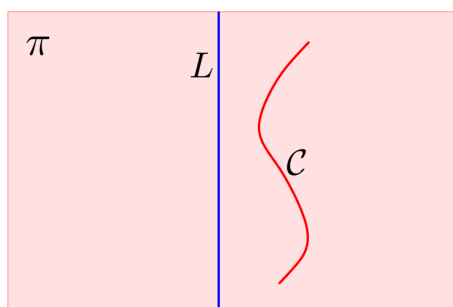


Fig. 23: Curva \mathcal{C} e reta L no plano π

A superfície S obtida girando a curva \mathcal{C} em torno da reta L é chamada *superfície de revolução com geratriz \mathcal{C} e eixo de revolução L* . Os círculos descritos pelos pontos de \mathcal{C} são os *paralelos de S* e as várias posições de \mathcal{C} sobre a superfície S (interseções de S com os planos que contêm o eixo de revolução) são denominadas *meridianos de S* .

Vamos considerar o caso em que $\pi =$ plano xz e $L =$ eixo Oz .

Seja $\alpha : (a, b) \rightarrow \alpha((a, b)) = V \cap \mathcal{C}$, $\alpha(v) = (f(v), 0, g(v))$, $f(v) > 0$, uma parametrização de \mathcal{C} , onde V é um aberto de \mathbb{R}^3 , e designamos por u o ângulo de rotação em torno do eixo Oz .

Consideremos a aplicação $X : (0, 2\pi) \times (a, b) \rightarrow S$ dada por:

$$X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)).$$

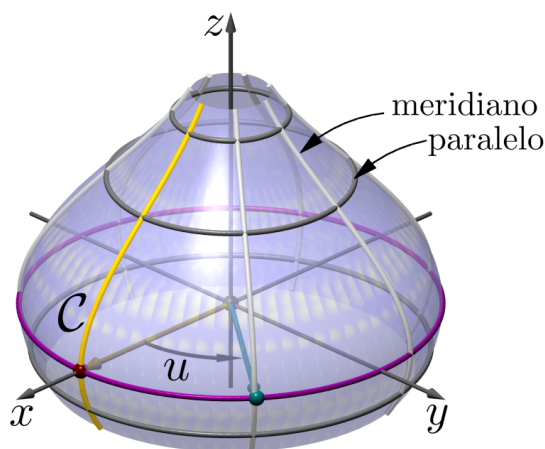


Fig. 24: As curvas $v = \text{const.}$ são os paralelos e as curvas $u = \text{const.}$ são os meridianos de S

Afirmção. $X : U \rightarrow X(U)$ é uma parametrização de S , onde $U = (0, 2\pi) \times (a, b)$.

De fato:

(1) $X(U) = S \cap (\mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \text{ e } x \geq 0\})$ é um aberto de S .

(2) X é diferenciável, pois $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis.

(3) $dX_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora para todo $(u, v) \in U$, pois

$$\begin{aligned} \|X_u \wedge X_v\|^2(u, v) &= \|(-f(v) \operatorname{sen} u, f(v) \cos u, 0) \wedge (f'(v) \cos u, f'(v) \operatorname{sen} u, g'(v))\|^2 \\ &= \|(f(v) g'(v) \cos u, f(v) g'(v) \operatorname{sen} u, -f(v) f'(v))\|^2 \\ &= f(v)^2 (f'(v)^2 + g'(v)^2) > 0, \end{aligned}$$

para todo $(u, v) \in U$.

(4) $X : U \rightarrow X(U)$ é injetora e $X^{-1} : X(U) \rightarrow U$ é contínua.

De fato, seja $(x, y, z) = (f(v) \cos u, f(v) \operatorname{sen} u, g(v))$.

Então $z = g(v)$ e $f(v) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Como $\alpha : (a, b) \rightarrow \alpha((a, b))$, $\alpha(v) = (f(v), 0, g(v))$, é um homeomorfismo, v é determinado de maneira única por $v = \alpha^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z)$ e é uma função contínua de $\sqrt{x^2 + y^2}$ e z e, portanto, uma função contínua de x, y e z .

Além disso, como $\cos u = \frac{x}{f(v)} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\operatorname{sen} u = \frac{y}{f(v)} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ e $u \in (0, 2\pi)$, o parâmetro u é determinado de modo único.

Logo, X é injetora.

Para provar que X^{-1} é contínua, temos que mostrar ainda que u é uma função contínua de x, y e z .

Seja $(x, y, z) = (f(v) \cos u, f(v) \operatorname{sen} u, g(v)) \in X(U)$. Como $u \in (0, 2\pi)$, temos que $\frac{u}{2} \in (0, \pi)$ e, portanto, $\operatorname{cotg} \frac{u}{2}$ está definida para todo $u \in (0, 2\pi)$ e

$$\operatorname{cotg} \frac{u}{2} = \frac{\cos \frac{u}{2}}{\operatorname{sen} \frac{u}{2}} = \frac{2 \cos \frac{u}{2} \operatorname{sen} \frac{u}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{u}{2} \operatorname{sen} \frac{u}{2}} = \frac{\operatorname{sen} u}{1 - \cos u} = \frac{\frac{y}{f(v)}}{1 - \frac{x}{f(v)}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} - x}.$$

Observe que $\sqrt{x^2 + y^2} - x \neq 0$, pois $X(U) \subset \mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \text{ e } x \geq 0\}$.

Então $u = 2 \operatorname{arc} \operatorname{cotg} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} - x} \right)$ é uma função contínua de x, y e z .

Como S pode ser coberta inteiramente por parametrizações similares, segue-se que S é uma superfície regular. \square

Observação 2.13 Seja \mathcal{C} uma curva regular situada no semi-plano

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0 \text{ e } y = 0\}$$

tal que $\mathcal{C} \cap \text{eixo } Oz = \{p, q\}$

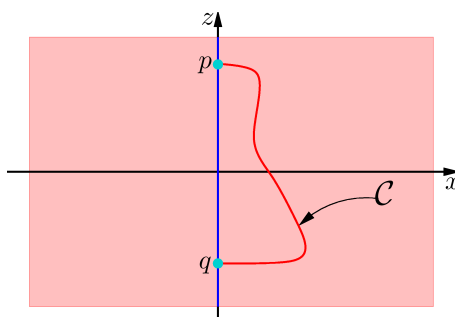


Fig. 25: \mathcal{C} corta o eixo Oz nos pontos p e q

Que condições devem ser satisfeitas por \mathcal{C} para garantir que a rotação de \mathcal{C} em torno do eixo Oz gere uma superfície regular?

Já sabemos que toda superfície regular é localmente o gráfico de uma função diferenciável sobre o plano xy ou sobre o plano xz ou sobre o plano yz .

Como numa vizinhança de p (ou de q) S não pode ser o gráfico de uma função sobre os planos xz e yz , deve existir um aberto V de S com $p \in V$ (ou $q \in V$), um disco aberto D de centro na origem e raio $\varepsilon > 0$ e uma função diferenciável $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$V = \text{Graf } F = \{(x, y, F(x, y)) \mid (x, y) \in D\}.$$

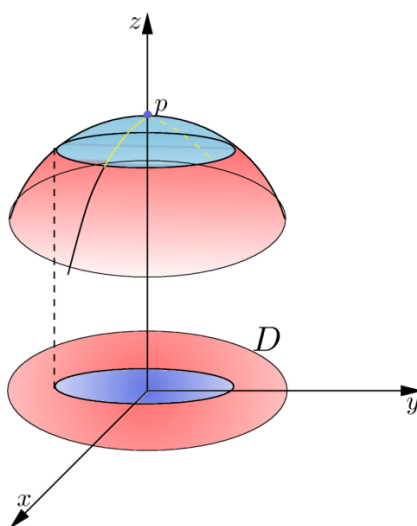


Fig. 26: V é um gráfico perto de p

Seja $f(x) = F(x, 0)$, $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Então $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e $F(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ para todo $(x, y) \in D$, pois $F(x, y) = F(\sqrt{x^2 + y^2}, 0)$, já que os pontos $(x, y, F(x, y))$ e

$(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, F(\sqrt{x^2 + y^2}, 0))$ estão sobre o mesmo paralelo.

Logo $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, isto é, f é simétrica em relação ao eixo Oz e $x \mapsto (x, 0, f(x))$, $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, é uma parametrização de C' em p , onde $C' = C \cup C_s$ e C_s é o simétrico de C em relação ao eixo Oz .

Como $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, temos que todas as derivadas de ordem ímpar de f na origem são nulas. Em particular, o vetor tangente à curva C no ponto p (ou q) é perpendicular ao eixo Oz .

Reciprocamente, a curva C gera uma superfície regular S se existe uma vizinhança V de p (e de q) em C que é o gráfico sobre o eixo Ox de uma função $f : [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, isto é, $V = \{(x, 0, f(x)) \mid x \in [0, \varepsilon)\}$, e a função $F(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$, $(x, y) \in D_\varepsilon(0)$ é diferenciável.

Por exemplo, se $C = \{(x, 0, z) \mid x^2 + z^2 = 1 \text{ e } x \geq 0\}$ é o semi-círculo de centro $(0, 0, 0)$ e raio 1 contido no semi-plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \text{ e } x \geq 0\}$, então a superfície S obtida girando C em torno do eixo Oz é uma superfície regular, pois S é a esfera de centro na origem e raio 1.

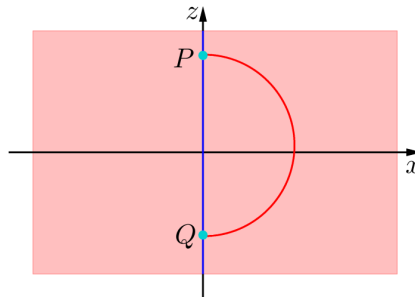


Fig. 27: Superfície S é obtida girando o semi-círculo em torno do eixo Oz

Neste exemplo, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0, 1)$, é uma função diferenciável cujo gráfico,

$$\{(x, 0, f(x)) \mid x \in [0, 1)\},$$

é uma vizinhança do ponto $p = (1, 0, 0)$, e

$$F(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}, \quad (x, y) \in D_1(0),$$

é uma função diferenciável.

Para $Q = (-1, 0, 0)$, $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0, 1)$, e $F(x, y) = -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$, para todo $(x, y) \in D_1(0)$.

Uma superfície regular obtida girando uma curva C de um plano π em torno de uma reta $r \subset \pi$, tal que $r \cap C \neq \emptyset$ será chamada *superfície de revolução estendida*.

Definimos uma superfície regular como um subconjunto de \mathbb{R}^3 . Mas de modo análogo ao caso das curvas, podemos definir uma superfície como uma superfície parametrizada. Não há problema com esse ponto de vista, desde que apenas questões locais sejam consideradas.

Definição 2.6 Uma aplicação $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciável, definida num subconjunto aberto U de \mathbb{R}^2 , é uma *superfície parametrizada*. O conjunto $X(U)$ é o *traço de X* e X é *regular* se a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora para todo $q \in U$. Um ponto $q \in U$ onde dX_q não é injetora é chamado um *ponto singular* de X .

Observação 2.14 Uma superfície parametrizada, mesmo quando é regular, pode ter um traço com auto-interseções.

Exemplo 2.7 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada regular. Defina $X : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$X(t, v) = \alpha(t) + v\alpha'(t).$$

Então X é uma superfície parametrizada, chamada *superfície tangente de α* .

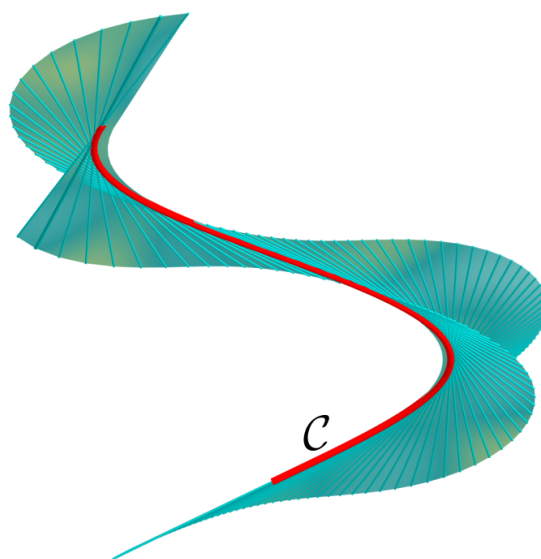


Fig. 28: Superfície tangente à curva C

Suponhamos que $\kappa(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Então

$$\frac{\partial X}{\partial t}(t, v) = \alpha'(t) + v\alpha''(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial X}{\partial v}(t, v) = \alpha'(t)$$

e, portanto,

$$\left(\frac{\partial X}{\partial t} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right) (t, v) = v(\alpha''(t) \wedge \alpha'(t)).$$

Como $\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} \neq 0$ para todo $t \in I$, temos que

$$\left(\frac{\partial X}{\partial t} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}\right)(t, v) \neq 0,$$

para todo $t \in I$ e todo $v \in \mathbb{R} - \{0\}$. Ou seja, $X : I \times (\mathbb{R} - \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada regular, cujo traço tem duas componentes conexas, tendo $\alpha(I)$ como fronteira comum. \square

A proposição abaixo diz que podemos estender os conceitos e propriedades locais da geometria diferencial a superfícies parametrizadas regulares.

Proposição 2.2 *Sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e $q \in U$. Então existe um aberto $V \subset U$, com $q \in V$ tal que $X : V \rightarrow X(V)$ é um homeomorfismo, isto é, $X(V)$ é uma superfície regular.*

Prova.

Se $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, temos, pela regularidade de X , que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Suponhamos que $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$, e consideremos a aplicação $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t).$$

Então F é diferenciável e $\det(dF_{(q,0)}) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$.

Logo, pelo Teorema da Aplicação Inversa, existem um aberto $U_0 \subset U$, $q \in U_0$, $\varepsilon > 0$ e um aberto W de \mathbb{R}^3 tais que $F : U_0 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow W$ é um difeomorfismo (C^∞).

Sendo $X(u, v) = F(u, v, 0)$ para todo $(u, v) \in U_0$, temos que $X : U_0 \rightarrow X(U_0)$ é uma bijeção e $X^{-1} : X(U_0) \rightarrow U_0$ é contínua, pois $X^{-1} = \pi \circ F^{-1}|_{X(U_0)}$, onde $\pi(u, v, t) = (u, v)$. \blacksquare

3. Plano Tangente; Diferencial de uma Aplicação

Nesta seção, utilizaremos a condição 3 da definição de uma superfície regular S para definir o plano tangente a S em cada ponto $p \in S$.

Definição 3.1 Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$. Dizemos que $v \in \mathbb{R}^3$ é um *vetor tangente a S em p* se $v = \alpha'(0)$, onde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ é uma curva parametrizada diferenciável em 0 e $\alpha(0) = p$.

Observação 3.1 Uma curva $\alpha : I \rightarrow S$ é diferenciável em $t_0 \in I$ se, e só se, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é diferenciável em $t_0 \in I$.

Mais geralmente, uma aplicação $f : V \rightarrow S$, definida num aberto V de \mathbb{R}^n , é diferenciável em $x_0 \in V$ se, e só se, $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ é diferenciável em x_0 .

De fato, seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S em $f(x_0)$.

Se $f : V \rightarrow S$ é diferenciável em x_0 , então, por definição, f é contínua em x_0 . Portanto, existe um aberto $V_0 \subset V$, $x_0 \in V_0$, tal que $f(V_0) \subset X(U)$. Logo, $X^{-1} \circ f : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ está bem definida e é diferenciável em x_0 . Assim, $f = X \circ (X^{-1} \circ f) : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é diferenciável em x_0 .

Reciprocamente, se $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ é diferenciável em x_0 , então $f : V \rightarrow S$ é contínua em x_0 .

Sabemos que existe U_0 aberto, $U_0 \subset U$, com $f(x_0) \in X(U_0)$, tal que $X^{-1}|_{X(U_0)} = F|_{X(U_0)}$, onde $F : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função diferenciável definida num aberto W de \mathbb{R}^3 com $X(U_0) \subset W$. Seja $V_0 \subset V$ aberto tal que $x_0 \in V_0$ e $f(V_0) \subset X(U_0)$. Então $X^{-1} \circ f = F \circ f : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é diferenciável em x_0 .

Proposição 3.1 Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S em p , com $X(q) = p$, $q \in U$. Então o subespaço vetorial de dimensão 2

$$dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$$

é o conjunto de todos os vetores tangentes a S em p .

Prova.

Sejam v um vetor tangente a S em p e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ uma curva parametrizada diferenciável em 0 tais que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.

Podemos supor que $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subset X(U)$ e $X^{-1} = F|_{X(U)}$, onde $F : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função diferenciável definida num aberto V de \mathbb{R}^3 tal que $X(U) \subset V$.

Logo $\beta = X^{-1} \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, $\beta(t) = (u(t), v(t))$, é uma curva diferenciável e

$$\alpha(t) = X \circ \beta(t) = X(u(t), v(t))$$

para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Assim, $\beta(0) = q$ e $v = \alpha'(0) = dX_q(\beta'(0)) = u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q)$.

Seja agora $v = dX_q(w)$, $w \in \mathbb{R}^2$, e considere a curva diferenciável $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ dada por $\beta(t) = q + tw$. Então $\beta(0) = q$ e $\beta'(0) = w$.

Logo $\alpha = X \circ \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X(U) \subset S$ é uma curva diferenciável com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = dX_q(\beta'(0)) = dX_q(w) = v$. ■

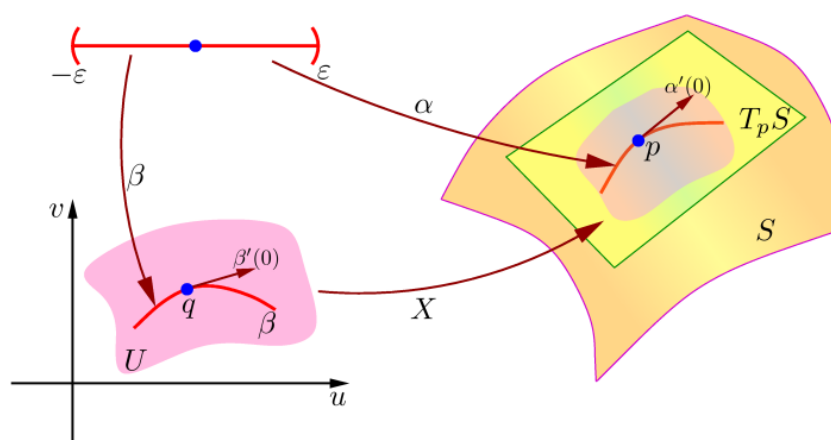


Fig. 29: Representação da curva diferenciável $\alpha = X \circ \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X(U) \subset S$

Observação 3.2 Provamos, assim, que o conjunto dos vetores tangentes a S em p é um espaço vetorial de dimensão dois, e que o subespaço $dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ independe da parametrização $X : U \rightarrow X(U)$, com $X(q) = p$, ou seja, se $Y : V \rightarrow Y(V)$ é outra parametrização de S em p com $Y(r) = p$, $r \in V$, então $dY_r(\mathbb{R}^2) = dX_q(\mathbb{R}^2) =$ conjunto dos vetores tangentes a S em p .

Definição 3.2 O *plano tangente a S em p* , designado por $T_p S$, é o plano que passa por p e é paralelo ao plano que passa pela origem formado pelos vetores tangentes a S em p .

Seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S em p , com $X(q) = p$. Fazendo a identificação $T_p S = dX_q(\mathbb{R}^2)$, temos que $\{X_u(q), X_v(q)\}$ é uma base de $T_p S$ chamada a *base de $T_p S$ associada a X* .

Seja $v = dX_q(w)$. Então

$$v = w_1 dX_q(1, 0) + w_2 dX_q(0, 1) = w_1 X_u(q) + w_2 X_v(q),$$

onde $w = (w_1, w_2)$. Isto é, (w_1, w_2) são as coordenadas do vetor v em relação à base $\{X_u(q), X_v(q)\}$ de $T_p S$ associada à parametrização X .

Observação 3.3 Seja S_i , $i = 1, 2, 3$, uma superfície regular ou uma curva regular. Se $f : S_1 \rightarrow S_2$ é uma aplicação diferenciável em $p \in S_1$ e $g : S_2 \rightarrow S_3$ é uma aplicação diferenciável em $f(p)$, então $g \circ f : S_1 \rightarrow S_3$ é uma aplicação diferenciável em p .

De fato, existem uma parametrização $X_1 : U_1 \rightarrow X_1(U_1)$ de S_1 em p , uma parametrização $X_2 : U_2 \rightarrow X_2(U_2)$ de S_2 em $f(p)$ e $X_3 : U_3 \rightarrow X_3(U_3)$ uma parametrização de S_3 em $g(f(p))$ tais que: $f(X_1(U_1)) \subset X_2(U_2)$, $g(X_2(U_2)) \subset X_3(U_3)$, $X_2^{-1} \circ f \circ X_1 : U_1 \rightarrow U_2$ é diferenciável em $X_1^{-1}(p)$ e $X_3^{-1} \circ g \circ X_2 : U_2 \rightarrow U_3$ é diferenciável em $X_2^{-1}(f(p))$. Logo

$$X_3^{-1} \circ g \circ f \circ X_1 = X_3^{-1} \circ g \circ X_2 \circ X_2^{-1} \circ f \circ X_1 : U_1 \rightarrow U_3$$

é diferenciável em $X_1^{-1}(p)$.

Assim, $g \circ f : S_1 \rightarrow S_3$ é diferenciável em p .

Vamos agora definir a diferencial de uma aplicação diferenciável entre superfícies regulares.

Sejam S_1 e S_2 superfícies regulares e seja $f : V \rightarrow S_2$ uma aplicação diferenciável em $p \in V$, onde V é um aberto de S_1 . Sejam $v \in T_p S_1$ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$ uma curva diferenciável em 0 com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Então, pela observação 3.3, $\gamma = f \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_2$ é uma curva diferenciável em 0 com $\gamma(0) = f(p)$.

Portanto, $\gamma'(0)$ é um vetor tangente a S_2 em $f(p)$

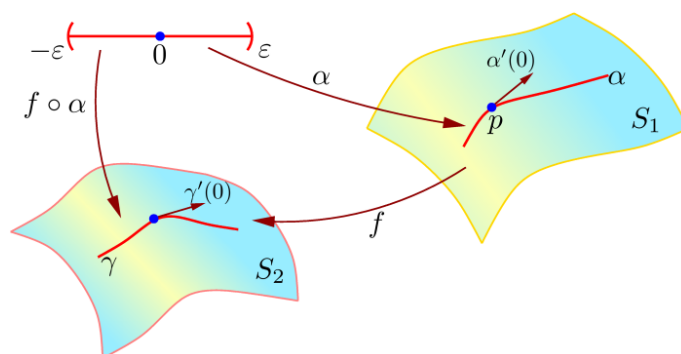


Fig. 30: Representação da curva diferenciável $\gamma = f \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_2$

Proposição 3.2 Dado $v \in T_p S_1$, o vetor $\gamma'(0)$ não depende de α . Além disso, a aplicação $df_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$ definida por $df_p(v) = \gamma'(0)$ é linear.

Prova.

Como $f : V \rightarrow S_2$ é diferenciável em p , existem uma parametrização $X : U \rightarrow X(U) \subset V$ de S_1 em p , com $X(q) = p$, e uma parametrização $\bar{X} : \bar{U} \rightarrow \bar{X}(\bar{U}) \subset S_2$ de S_2 em $f(p)$, com $\bar{X}(\bar{q}) = f(p)$, tais que $f(X(U)) \subset \bar{X}(\bar{U})$.

Seja $\tilde{f} = (\bar{X})^{-1} \circ f \circ X : U \rightarrow \bar{U}$. Então \tilde{f} é diferenciável em q e $\tilde{f}(q) = \bar{q}$.

Podemos supor que $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subset X(U)$.

Então $X^{-1} \circ \alpha(t) = (u(t), v(t))$ é diferenciável em $t = 0$ e $v = \alpha'(0) = u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q)$.

Como $\gamma(t) = f \circ \alpha(t)$, temos que

$$\gamma(t) = \bar{X} \circ ((\bar{X})^{-1} \circ f \circ X) \circ (X^{-1} \circ \alpha)(t) = (\bar{X} \circ \tilde{f})(u(t), v(t)) = \bar{X}(f_1(u(t), v(t)), f_2(u(t), v(t))),$$

onde $\tilde{f}(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v))$.

Logo,

$$\gamma'(0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}(q)u'(0) + \frac{\partial f_1}{\partial v}(q)v'(0) \right) \bar{X}_{\bar{u}}(\bar{q}) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u}(q)u'(0) + \frac{\partial f_2}{\partial v}(q)v'(0) \right) \bar{X}_{\bar{v}}(\bar{q}) \quad (4)$$

Então $\gamma'(0)$ só depende das coordenadas $(u'(0), v'(0))$ de $v = \alpha'(0)$ em relação à base $\{X_u(q), X_v(q)\}$, ou seja, $\gamma'(0)$ independe da curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$ diferenciável em p tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.

Além disso, por (4), a aplicação $df_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$ é dada por:

$$\begin{aligned} df_p(v) &= df_p(aX_u(q) + bX_v(q)) = \gamma'(0) \\ &= a \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}(q)\bar{X}_{\bar{u}}(\bar{q}) + \frac{\partial f_2}{\partial u}(q)\bar{X}_{\bar{v}}(\bar{q}) \right) + b \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(q)\bar{X}_{\bar{u}}(\bar{q}) + \frac{\partial f_2}{\partial v}(q)\bar{X}_{\bar{v}}(\bar{q}) \right). \end{aligned}$$

Portanto $df_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$ é linear e a sua matriz em relação às bases $\{X_u(q), X_v(q)\}$ de $T_p S_1$ e $\{\bar{X}_{\bar{u}}(\bar{q}), \bar{X}_{\bar{v}}(\bar{q})\}$ de $T_{f(p)} S_2$ é dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(q) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(q) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(q) \end{pmatrix}$$

■

Definição 3.3 A aplicação linear $df_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$ é chamada a *diferencial de f em p*

De maneira análoga, podemos definir a diferencial em p de uma função $f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $p \in V$ como sendo uma aplicação linear $df_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemplo 3.1 Seja $h : S \rightarrow \mathbb{R}$, $h(p) = \langle p, v \rangle$, a função altura relativa ao vetor unitário $v \in \mathbb{R}^3$.

Sejam $w \in T_p S$, $p \in S$, e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ uma curva diferenciável em 0 tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$.

Então $\gamma(t) = h \circ \alpha(t) = \langle \alpha(t), v \rangle$ e, portanto, $dh_p(w) = \gamma'(0) = \langle \alpha'(0), v \rangle = \langle w, v \rangle$. \square

Exemplo 3.2 Seja $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ a esfera unitária

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

e seja $R_{z,\theta} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a rotação de um ângulo θ em torno do eixo Oz . Já sabemos que $R_{z,\theta} : S^2 \rightarrow S^2$ é uma função diferenciável. Na realidade, $R_{z,\theta}$ é um difeomorfismo de S^2 sobre S^2 , onde $R_{z,\theta}^{-1} = R_{z,-\theta}$.

Sejam $p \in S^2$, $v \in T_p S^2$, $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S^2$ uma curva diferenciável em 0, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, e $\gamma = R_{z,\theta} \circ \alpha$. Então, como $R_{z,\theta}$ é linear,

$$d(R_{z,\theta})_p(v) = \gamma'(0) = (R_{z,\theta} \circ \alpha)'(0) = R_{z,\theta}(\alpha'(0)) = R_{z,\theta}(v),$$

isto é, $d(R_{z,\theta})_p : T_p S^2 \rightarrow T_{R_{z,\theta}(p)} S^2$ é dada por $d(R_{z,\theta})_p(v) = R_{z,\theta}(v)$.

Como $R_{z,\theta}(N) = N$, onde $N = (0, 0, 1)$ é o **pólo norte** de S^2 , temos que $d(R_{z,\theta})_N : T_N S^2 \rightarrow T_N S^2$ é a rotação de um ângulo θ em torno do ponto N , no plano $T_N S^2$ que é paralelo ao plano xy . \square

Definição 3.4 Sejam S_1, S_2 superfícies regulares e U um aberto de S_1 . Dizemos que uma aplicação $f : U \rightarrow S_2$ é um **difeomorfismo local em $p \in U$** se existe um aberto $V \subset U$, com $p \in V$, tal que $f : V \rightarrow f(V)$ é um difeomorfismo sobre o aberto $f(V)$ de S_2 .

Assim, a versão do Teorema da Aplicação Inversa para superfícies é expressa da seguinte maneira:

Teorema 3.1 (Teorema da Aplicação Inversa)

Sejam S_1, S_2 superfícies regulares, U um aberto de S_1 com $p \in U$, e $f : U \rightarrow S_2$ uma aplicação diferenciável tal que $df_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$ é um isomorfismo. Então existe um aberto $V \subset U$, com $p \in V$, tal que $f : V \rightarrow f(V)$ é um difeomorfismo sobre o aberto $f(V)$ de S_2 , isto é, f é um difeomorfismo local em p .

Antes de provarmos este teorema, vamos fazer algumas observações.

Observação 3.4 Seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S em p , com $X(q) = p$. Então

$$dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p S$$

é um isomorfismo, pois dX_q é injetora e $dX_q(\mathbb{R}^2) = T_p S$.

Observação 3.5 Sejam $f : V \subset S_1 \rightarrow S_2$ e $g : W \subset S_2 \rightarrow S_3$ funções diferenciáveis em $p \in V$ e $f(p) \in W$, respectivamente, tais que $f(V) \subset W$, onde V é um aberto de S_1 e W é um aberto de S_2 . Então $d(g \circ f)_p(v) = dg_{f(p)}(df_p(v))$ para todo vetor $v \in T_p S$.

De fato, seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$ uma curva diferenciável em 0 tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, onde $v \in T_p S$.

Então $df_p(v) = \gamma'(0)$, onde $\lambda = f \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow W$ é uma curva diferenciável em 0 com $\lambda(0) = f(p)$, e, portanto, $dg_{f(p)}(df_p(v)) = \lambda'(0)$, onde $\gamma = g \circ \lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_3$ é uma curva diferenciável em 0 com $\lambda(0) = g \circ f(p)$.

Por outro lado, $d(g \circ f)_p(v) = \lambda'(0)$, pois

$$(g \circ f) \circ \alpha(t) = g \circ (f \circ \alpha)(t) = g \circ \lambda(t) = \gamma(t)$$

para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Logo $d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$, isto é, vale a regra da cadeia para a composta de aplicações diferenciáveis entre superfícies.

Em particular, se $X : U \rightarrow X(U)$ é uma parametrização de uma superfície S em p , então $X^{-1} : X(U) \rightarrow U$ é diferenciável e $X^{-1} \circ X = \text{id}$. Logo,

$$dX_{X(q)}^{-1} \circ dX_q = d(X^{-1} \circ X)_q = \text{id} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Isto é, $dX_{X(q)}^{-1} : T_{X(q)} S \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um isomorfismo e $dX_{X(q)}^{-1} = (dX_q)^{-1}$.

Prova.

(do Teorema da Aplicação Inversa) Sejam $X_1 : U_1 \rightarrow X_1(U_1) \subset S_1$ uma parametrização de S_1 em p e $X_2 : U_2 \rightarrow X_2(U_2) \subset S_2$ uma parametrização de S_2 em $f(p)$ tais que $f(X_1(U_1)) \subset X_2(U_2)$.

Então $\tilde{f} = X_2^{-1} \circ f \circ X_1 : U_1 \rightarrow U_2$ é diferenciável e, pela observação 3.5,

$$d\tilde{f}_q = d(X_2^{-1})_{f(p)} \circ df_p \circ d(X_1)_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Portanto, pela observação 3.4, $d\tilde{f}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um isomorfismo.

Logo, pelo Teorema da Aplicação Inversa, existem um aberto $W_1 \subset U_1$, $q \in W_1$, e um aberto $W_2 \subset U_2$, $\tilde{q} = X_2^{-1}(f(p)) \in W_2$, tais que

$$X_2^{-1} \circ f \circ X_1 : W_1 \rightarrow W_2$$

é um difeomorfismo, isto é, $X_2^{-1} \circ f \circ X_1 : W_1 \rightarrow W_2$ é uma bijeção diferenciável e $X_1^{-1} \circ f^{-1} \circ X_2 : W_2 \rightarrow W_1$ é diferenciável.

Como, pela observação 2.6, $X_1 : W_1 \rightarrow X_1(W_1)$ e $X_2 : W_2 \rightarrow X_2(W_2)$ são difeomorfismos, temos, pela observação 3.3, que $f : X_1(W_1) \rightarrow X_2(W_2)$ é um difeomorfismo, onde $X_1(W_1)$ é um aberto de S_1 que contém p e $X_2(W_2)$ é um aberto de S_2 que contém $f(p)$. ■

Podemos agora provar a proposição 1.4.

”Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação diferenciável definida num aberto U de \mathbb{R}^2 tal que $X(U) \subset S$, $X : U \rightarrow X(U)$ é uma bijeção e $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora para todo $q \in U$. Então $X(U)$ é um aberto de S e $X : U \rightarrow X(U)$ é um homeomorfismo, isto é, $X : U \rightarrow X(U)$ é uma parametrização de S ”

Prova.

Como $X(U) \subset S$, temos, pela observação 3.1, que $X : U \rightarrow S$ é uma aplicação diferenciável de U em S .

Sejam $w \in \mathbb{R}^2$ e $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ uma curva diferenciável em 0 com $\beta(0) = q \in U$ e $\beta'(0) = w$. Então $\alpha = X \circ \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X(U) \subset S$ é diferenciável em 0 , $\alpha(0) = X(q)$ e $\alpha'(0) = v \in dX_q(\mathbb{R}^2)$. Logo, pela definição de plano tangente, $v = \alpha'(0) \in T_p S$.

Portanto $dX_q(\mathbb{R}^2) \subset T_p S$. Como $\dim dX_q(\mathbb{R}^2) = \dim T_p S = 2$, temos que $dX_q(\mathbb{R}^2) = T_p S$ e

$$dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p S$$

é um isomorfismo para todo $q \in U$, pois $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora.

Dado $q \in U$, existem, pelo Teorema da Aplicação inversa, um aberto $U_q \subset U$, $q \in U_q$, e um aberto $W_p \subset X(U) \subset S$ de S , onde $X(q) = p \in W_p$, tais que

$$X : U_q \rightarrow W_p$$

é um difeomorfismo.

Logo, $X(U) = \bigcup_{p \in X(U)} W_p$ é um aberto de S . Além disso, $X^{-1} : X(U) \rightarrow U$ é contínua. De fato, seja $Y : V \rightarrow Y(V)$ uma parametrização de S em $X(q) = p$, $q \in U$, tal que $Y(V) \subset X(U_q) = W_p$. Então

$$X^{-1} \circ Y : V \rightarrow U_q$$

é diferenciável e, portanto, é contínua.

Logo, como $Y^{-1} : V \rightarrow Y(V)$ é contínua, temos que

$$X^{-1} = X^{-1} \circ Y \circ Y^{-1} : Y(V) \rightarrow X^{-1}(Y(V))$$

é contínua, onde $Y(V)$ é um aberto de S tal que $Y(V) \subset X(U)$ e $p = X(q) \in Y(V)$.

Então, como $p \in X(U)$ é arbitrário, $X^{-1} : X(U) \rightarrow U$ é contínua, ou seja, $X : U \rightarrow X(U)$ é um homeomorfismo e, portanto, $X : U \rightarrow X(U)$ é uma parametrização de S . ■

Faremos agora algumas observações antes de finalizar esta seção.

Observação 3.6 O plano tangente nos permite falar do ângulo entre duas superfícies, que se intersectam, em um ponto de interseção.

De fato, dado um ponto p em uma superfície regular, existem dois vetores unitários em \mathbb{R}^3 que são normais ao plano tangente $T_p S$. Cada um deles é chamado *vetor unitário normal a S em p* , e a reta que passa por p e tem a direção dada por esses vetores normais a S em p é chamada *reta normal a S em p* .

O ângulo entre duas superfícies que se intersectam em um ponto p é o ângulo entre os respectivos planos tangentes (ou entre as retas normais) em p .

Dada uma parametrização $X : U \rightarrow X(U)$ de S em p , podemos escolher um vetor unitário normal em cada ponto $p \in X(U)$ da seguinte maneira:

$$N(p) = \frac{X_u(q) \wedge X_v(q)}{\|X_u(q) \wedge X_v(q)\|},$$

onde $X(q) = p$, $q \in U$. Obtemos, assim,

uma aplicação $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciável. Veremos na seção 5 que nem sempre é possível estender essa aplicação, de maneira contínua, à superfície S .

Observação 3.7 A definição dada para superfície regular exige que as parametrizações sejam de classe C^∞ , isto é, que possuam derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

Para questões em Geometria Diferencial, em geral, precisamos da existência e da continuidade das derivadas parciais até uma certa ordem, que varia com a natureza do problema (raramente precisamos que as parametrizações sejam de classe C^k , com $k \geq 5$).

A hipótese C^∞ , na definição, foi adotada para evitarmos o estudo das condições mínimas de diferenciabilidade em cada caso particular, que podem obscurecer a natureza geométrica do problema.

Exemplo 3.3 (Exemplo de uma superfície de classe C^1).

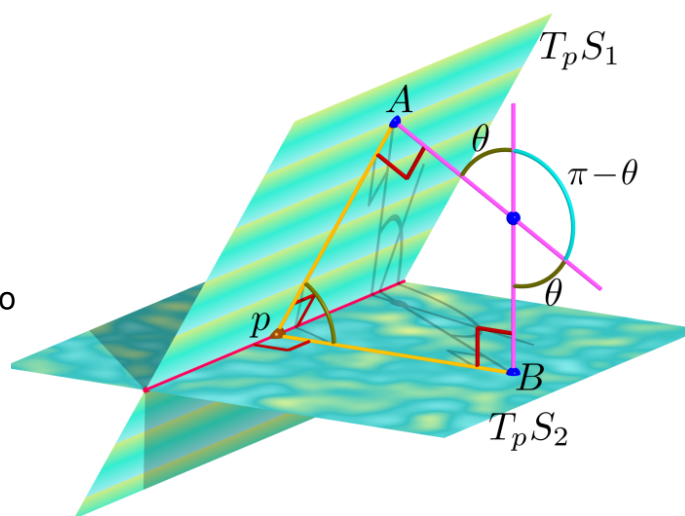


Fig. 31: O ângulo entre S_1 e S_2 é o ângulo entre $T_p S_1$ e $T_p S_2$

Sejam a curva regular de classe C^1

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ e } z = y^{4/3}\}$$

e a superfície S de revolução obtida girando a curva C em torno do eixo Oz .

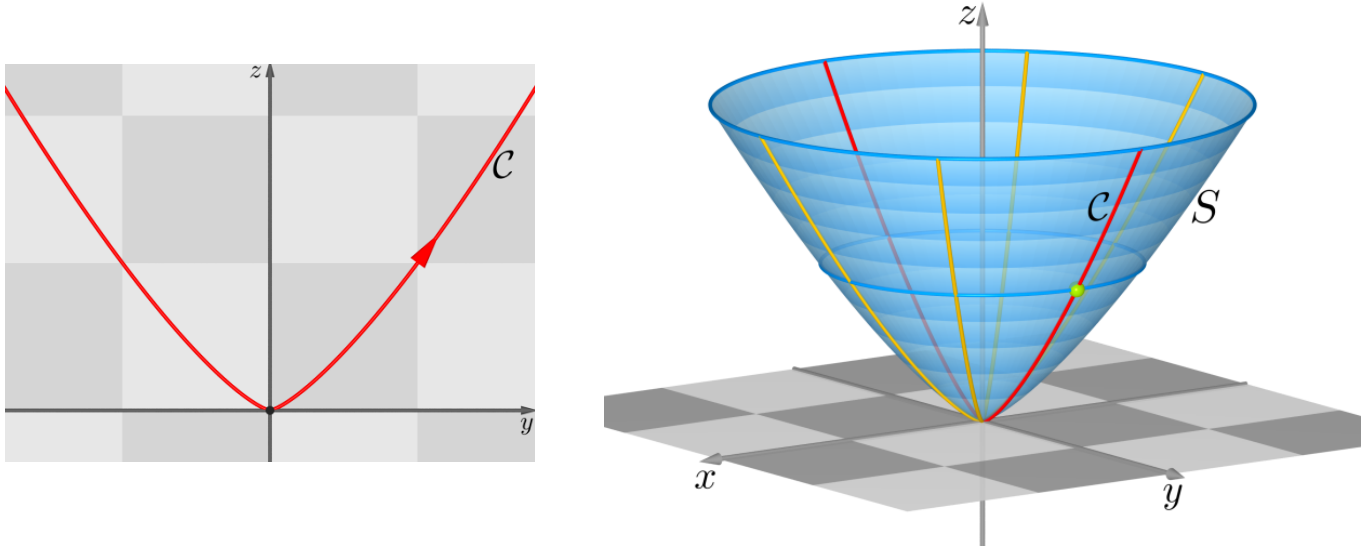


Fig. 32: A curva C e a superfície S que ela produz pela sua rotação em torno do eixo Oz

Então

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}\},$$

isto é, S é o gráfico da função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 dada por $f(x, y, z) = \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}$.

Como $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, temos que $T_0S = \text{plano } xy$, pois $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$ é uma parametrização de S e $\{X_x(0, 0), X_y(0, 0)\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ gera o espaço tangente a S em $(0, 0, 0)$. \square

4. Primeira Forma Fundamental; Área

Até aqui, tratamos as superfícies sob o ponto de vista da diferenciabilidade. Nesta seção começaremos o estudo das estruturas geométricas associadas a uma superfície.

O produto interno canônico de \mathbb{R}^3 induz em cada plano tangente T_pS de uma superfície regular S um produto interno que denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$.

Assim, se $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in T_pS \subset \mathbb{R}^3$, então $\langle u, v \rangle_p$ é igual ao produto interno

de u e v como vetores em \mathbb{R}^3 , isto é,

$$\langle u, v \rangle_p = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

A esse produto interno, que é uma forma bilinear simétrica (isto é, $\langle u, v \rangle_p = \langle v, u \rangle_p$ e $\langle u, v \rangle_p$ é linear em u e em v), corresponde uma forma quadrática $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(v) = \langle v, v \rangle_p = \|v\|^2 \geq 0.$$

Definição 4.1 A forma quadrática $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, $I_p(v) = \langle v, v \rangle_p$, é chamada a *primeira forma fundamental da superfície regular S em $p \in S$* .

A primeira forma fundamental vai nos permitir fazer medidas sobre a superfície (comprimento de curvas, ângulos de vetores tangentes, áreas de regiões etc.), sem fazer menção ao espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , onde a superfície S está "mergulhada".

Vamos agora expressar a primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ associada a uma parametrização $X : U \rightarrow X(U) \subset S$ de S em p .

Seja $v \in T_p S$. Então existe uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X(U)$ diferenciável em 0 tal que $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, com $\alpha(0) = p$ e $v = \alpha'(0) = u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q)$, onde $X(q) = p$ e $q \in U$.

Então

$$\begin{aligned} I_p(v) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q), u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q) \rangle_p \\ &= u'(0)^2 \langle X_u(q), X_u(q) \rangle_p + 2u'(0)v'(0) \langle X_u(q), X_v(q) \rangle_p + v'(0)^2 \langle X_v(q), X_v(q) \rangle_p \\ &= u'(0)^2 E(q) + 2u'(0)v'(0)F(q) + v'(0)^2 G(q), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle X_u(u, v), X_u(u, v) \rangle_p, \\ F(u, v) &= \langle X_u(u, v), X_v(u, v) \rangle_p, \\ G(u, v) &= \langle X_v(u, v), X_v(u, v) \rangle_p. \end{aligned}$$

são os *coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_u(u, v), X_v(u, v)\}$ de $T_p S$* , sendo $q = (u, v)$ e $X(u, v) = X(q) = p$.

Observação 4.1 As funções $E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^∞ , $E(u, v) > 0$, $G(u, v) > 0$ e $(EG - F^2)(u, v) > 0$ para todo $(u, v) \in U$, pois

$$\|X_u \wedge X_v\|^2 = \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = EG - F^2 > 0,$$

já que $X_u(u, v)$ e $X_v(u, v)$ são LI.

Exemplo 4.1 Seja π o plano de \mathbb{R}^3 que passa pelo ponto $p = (x_0, y_0, z_0)$ e é paralelo aos vetores ortonormais $w_1 = (a_1, a_2, a_3)$ e $w_2 = (b_1, b_2, b_3)$.

Então $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \pi$, $X(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2$ é uma parametrização de π que cobre todo o plano.

Como $X_u(u, v) = w_1$ e $X_v(u, v) = w_2$ para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, temos que $E \equiv G \equiv 1$ e $F \equiv 0$ em \mathbb{R}^2 . Então,

$$I_p(aX_u + bX_v) = a^2 + b^2,$$

para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. \square

Exemplo 4.2 Seja C o cilindro reto sobre o círculo $x^2 + y^2 = 1$, ou seja,

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

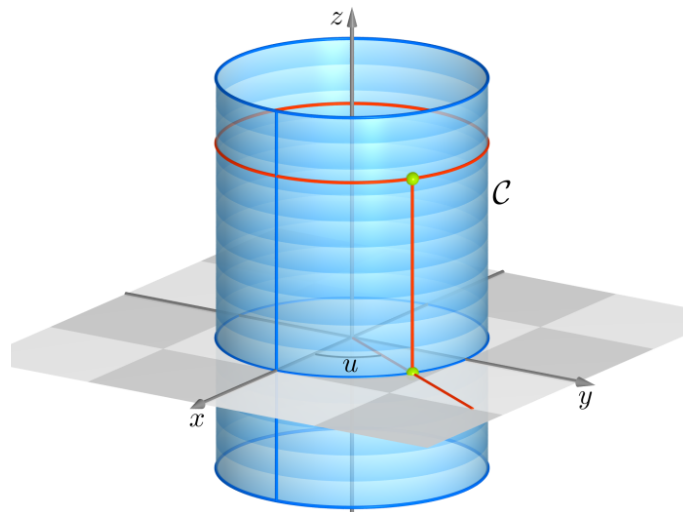


Fig. 33: Cilindro reto sobre o círculo $x^2 + y^2 = 1$

Então $X : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow C$, $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ é uma parametrização do cilindro tal que $X((0, 2\pi) \times \mathbb{R}) = C - \{(1, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$, $X_u(u, v) = (-\sin u, \cos u, 0)$ e $X_v(u, v) = (0, 0, 1)$.

Portanto, $E \equiv G \equiv 1$ e $F \equiv 0$ em $(0, 2\pi) \times \mathbb{R}$. \square

Exemplo 4.3 Considere a *hélice circular* $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\alpha(u) = (\cos u, \sin u, au), \quad a \neq 0.$$

Para cada ponto $\alpha(u)$ pertencente à hélice, trace uma reta paralela ao plano xy que intersecta o eixo Oz , ou seja, a reta $r_u = \{v(\cos u, \sin u, 0) + (0, 0, au)\}$, $v \in \mathbb{R}$. A superfície \mathcal{H} gerada por essas retas é chamada um *helicóide*.

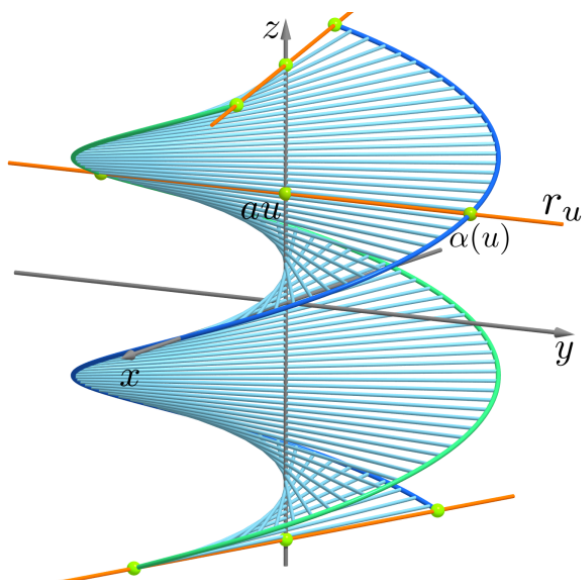


Fig. 34: Helicóide

A aplicação $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{H}$, dada por $X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \alpha u)$ é uma parametrização que cobre todo o helicóide, isto é, X é de classe C^∞ , $X(\mathbb{R}^2) = \mathcal{H}$, $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{H}$ é um homeomorfismo e $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora para todo $q \in \mathbb{R}^2$ (exercício). Logo \mathcal{H} é uma superfície regular.

Como $X_u(u, v) = (-v \sin u, v \cos u, \alpha)$ e $X_v(u, v) = (\cos u, \sin u, 0)$, temos que

$$E(u, v) = \alpha^2 + v^2, G \equiv 1 \text{ e } F \equiv 0.$$

Logo, em $p = X(u, v)$,

$$I_p(AX_u + BX_v) = (\alpha^2 + v^2)A^2 + B^2. \quad \square$$

- Como mencionamos anteriormente, a importância da primeira forma fundamental I vem do fato de que, conhecendo I , podemos resolver problemas métricos de uma superfície regular sem fazer referência ao ambiente \mathbb{R}^3 no qual S está mergulhada.

Assim, o *comprimento de arco* s de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ é dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{I(\alpha'(t))} dt.$$

Em particular, se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ está contida numa vizinhança coordenada de uma parametrização $X : U \rightarrow X(U) \subset S$, temos que

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{u'(t)^2 E(u(t), v(t)) + 2u'(t)v'(t) F(u(t), v(t)) + v'(t)^2 G(u(t), v(t))}, dt.$$

O *ângulo* θ que duas curvas parametrizadas regulares $\alpha, \beta : I \rightarrow S$ que se intersectam em

$\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ fazem neste ponto é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_0)\|}.$$

Em particular, o ângulo φ de interseção das curvas coordenadas de uma parametrização $X : U \rightarrow X(U)$ é:

$$\cos \varphi = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{\|X_u\| \|X_v\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

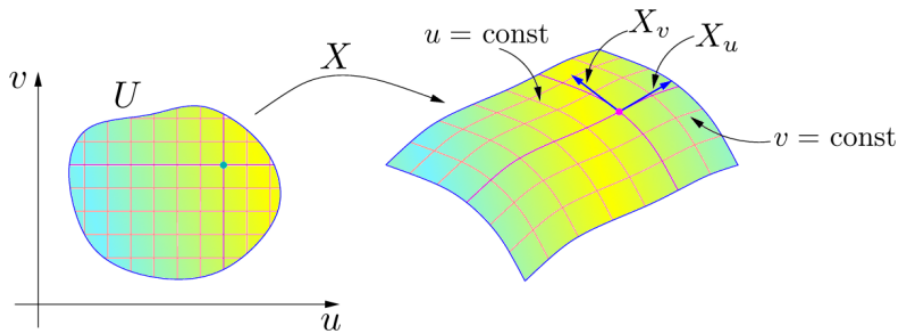


Fig. 35: Curvas coordenadas

Então, as curvas coordenadas de uma parametrização são ortogonais se, e somente se, $F(u, v) = 0$ para todo $(u, v) \in U$. Uma tal parametrização é chamada uma *parametrização ortogonal*.

Exemplo 4.4 Seja $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a *esfera unitária de centro na origem* e seja

$$X : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow S^2,$$

$X(\theta, \varphi) = (\text{sen } \theta \cos \varphi, \text{sen } \theta \text{ sen } \varphi, \cos \theta)$, uma parametrização de S^2 dada por suas coordenadas esféricas.

Como

$$\begin{aligned} X_\theta(\theta, \varphi) &= (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \text{ sen } \varphi, -\text{sen } \theta) \\ X_\varphi(\theta, \varphi) &= (-\text{sen } \theta \text{ sen } \varphi, \text{sen } \theta \cos \varphi, 0), \end{aligned}$$

temos que

$$E \equiv 1, \quad G(\theta, \varphi) = \text{sen}^2 \theta \quad \text{e} \quad F \equiv 0. \tag{5}$$

Logo X é uma parametrização ortogonal de S^2 e

$$I_{X(\theta, \varphi)}(aX_\theta + bX_\varphi) = a^2E + 2abF + b^2G = a^2 + b^2 \text{sen}^2 \theta. \tag{6}$$

□

- Como aplicação, vamos determinar as curvas nesta vizinhança coordenada da esfera que fazem um ângulo constante β com os meridianos $\varphi = \text{const.}$ que são chamadas *curvas loxodrômicas* da esfera.

Podemos supor que a curva procurada $\alpha(t)$ é a imagem por X de uma curva $t \mapsto (\theta(t), \varphi(t))$, isto é, $\alpha(t) = X(\theta(t), \varphi(t))$.

No ponto $X(\theta(t), \varphi(t))$ a curva intersecta o meridiano $\varphi = \varphi(t) = \text{const.}$ Então, por (5) e (6),

$$\cos \beta = \frac{\langle X_{\theta}(\theta(t), \varphi(t)), \alpha'(t) \rangle}{\|X_{\theta}(\theta(t), \varphi(t))\| \|\alpha'(t)\|} = \frac{\theta'(t)}{\sqrt{\theta'(t)^2 + \varphi'(t)^2 \text{sen}^2 \theta(t)}},$$

pois $\|X_{\theta}(\theta(t), \varphi(t))\| = 1$ e $\alpha'(t) = \theta'(t) X_{\theta}(\theta(t), \varphi(t)) + \varphi'(t) X_{\varphi}(\theta(t), \varphi(t))$.

Logo, para $\beta \in [0, \pi] - \{0, \pi/2, \pi\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\theta'(t)}{\cos \beta} &= \sqrt{\theta'(t)^2 + \varphi'(t)^2 \text{sen}^2 \theta(t)} \\ \iff \theta'(t)^2 \sec^2 \beta - \theta'(t)^2 - \varphi'(t)^2 \text{sen}^2 \theta(t) &= 0 \\ \iff \theta'(t)^2 \tan^2 \beta - \varphi'(t)^2 \text{sen}^2 \theta(t) &= 0 \\ \iff \frac{\theta'(t)}{\text{sen} \theta(t)} &= \pm \frac{\varphi'(t)}{\tan \beta}. \end{aligned}$$

Por integração, obtemos que

$$\log \left(\tan \left(\frac{\theta(t)}{2} \right) \right) = \pm \cotg \beta (\varphi(t) + C),$$

onde C é uma constante.

Fazendo $\theta(t) = \frac{\pi}{2} - t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, temos

$$\pm \cotg \beta (\varphi(t) + C) = \log \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \right) \right).$$

Logo,

$$\pm \cotg \beta (\varphi(0) + C) = \log \left(\tan \frac{\pi}{4} \right) = 0,$$

isto é, $C = -\varphi(0)$.

Assim, C é determinada pelo meridiano como o qual α se encontra quando ela passa pelo equador ($\theta(0) = \pi/2$).

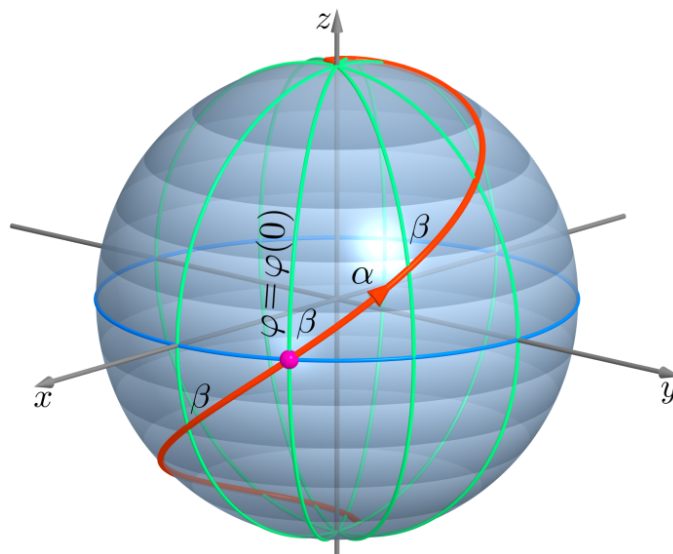


Fig. 36: Curva loxodrômica α

- Uma outra questão métrica que pode ser tratada com a primeira forma fundamental é o cálculo da área de uma região limitada de uma superfície regular S .

Definição 4.2 Um *domínio (regular)* em S é um subconjunto aberto e conexo de S tal que sua fronteira é a imagem de um círculo por uma aplicação que é um homeomorfismo diferenciável regular (isto é, sua diferencial não se anula) exceto num número finito de pontos.

Uma *região* de S é a união de um domínio com a sua fronteira. Uma região de S é *limitada* se está contida em alguma bola de \mathbb{R}^3 .

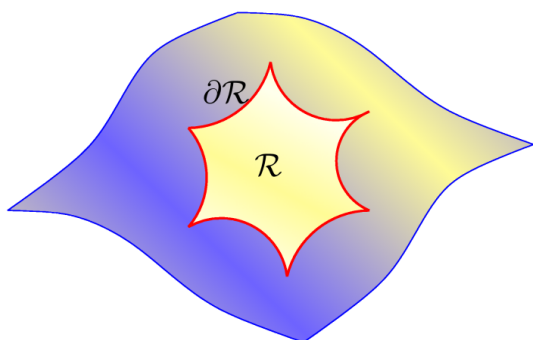


Fig. 37: Região limitada

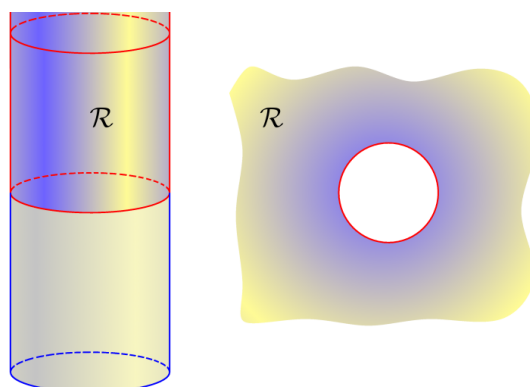


Fig. 38: Regiões ilimitadas

Vamos considerar regiões limitadas R que estão contidas em uma vizinhança coordenada $X(U)$ de uma parametrização $X : U \rightarrow X(U)$ de S . Isto é, $R = X(Q)$, onde Q é uma região limitada de \mathbb{R}^2 contida em U .

Definição 4.3 Seja $R \subset S$ uma região limitada de uma superfície S contida em uma vizinhança

coordenada $X(U)$ de uma parametrização $X : U \rightarrow X(U) \subset S$. O número positivo

$$A(R) = \iint_Q \|X_u \wedge X_v\| \, du \, dv$$

é chamado *área de R*, onde $Q = X^{-1}(R)$.

Observação 4.2 Na seção 6 daremos uma justificativa geométrica para esta definição.

Observação 4.3 A integral

$$\iint_Q \|X_u \wedge X_v\| \, du \, dv$$

independe da parametrização $X : U \rightarrow X(U)$ de S com $R \subset X(U)$.

De fato, seja $\bar{X} : \bar{U} \rightarrow \bar{X}(\bar{U})$ uma outra parametrização de S tal que $R \subset \bar{X}(\bar{U})$ e seja $\bar{Q} = (\bar{X})^{-1}(R)$, isto é, $\bar{X}(\bar{Q}) = R$.

Seja $h = X^{-1} \circ \bar{X} : (\bar{X})^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$, $h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$, a mudança de parâmetros, onde $W = X(U) \cap \bar{X}(\bar{U})$. Então h é um difeomorfismo tal que $h(\bar{Q}) = Q$, pois $R \subset W$.

Logo, como $\bar{X}(\bar{u}, \bar{v}) = X(h(\bar{u}, \bar{v})) = X(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$, temos que

$$\bar{X}_{\bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) = X_u(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) + X_v(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}),$$

e

$$\bar{X}_{\bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) = X_u(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) + X_v(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}})(\bar{u}, \bar{v}) &= (X_u \wedge X_v)(h(\bar{u}, \bar{v})) \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} - \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) (\bar{u}, \bar{v}) \\ &= (X_u \wedge X_v)(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \\ &= (X_u \wedge X_v)(h(\bar{u}, \bar{v})) \det(dh_{(\bar{u}, \bar{v})}). \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema de Mudança de Variáveis para integrais múltiplas, temos que

$$\begin{aligned} \iint_{\bar{Q}} \|\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}\|(\bar{u}, \bar{v}) \, d\bar{u} \, d\bar{v} &= \iint_{\bar{Q}} \|X_u \wedge X_v\| h((\bar{u}, \bar{v})) \cdot \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{u}, \bar{v}) \right| \, d\bar{u} \, d\bar{v} \\ &= \iint_Q \|X_u \wedge X_v\|(u, v) \, du \, dv. \end{aligned}$$

Exemplo 4.5 Seja \mathcal{T} o toro de revolução obtido girando o círculo

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y - a)^2 + z^2 = r^2 \text{ e } x = 0\}, \quad a > r > 0,$$

em torno do eixo Oz .

Seja $X : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathcal{T}$ a parametrização de \mathcal{T} dada por

$$X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u),$$

que cobre o toro \mathcal{T} menos um meridiano ($v = 0$) e um paralelo ($u = 0$).

Como

$$X_u(u, v) = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u)$$

e

$$X_v(u, v) = (-(a + r \cos u) \sin v, (a + r \cos u) \cos v, 0),$$

temos que:

$$E(u, v) = r^2, \quad G(u, v) = (a + r \cos u)^2 \quad \text{e} \quad F(u, v) = 0.$$

Seja $R_\varepsilon = X(Q_\varepsilon)$, onde $\varepsilon > 0$ (e pequeno) e

$$Q_\varepsilon = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon \leq u \leq 2\pi - \varepsilon \text{ e } \varepsilon \leq v \leq 2\pi - \varepsilon\}$$

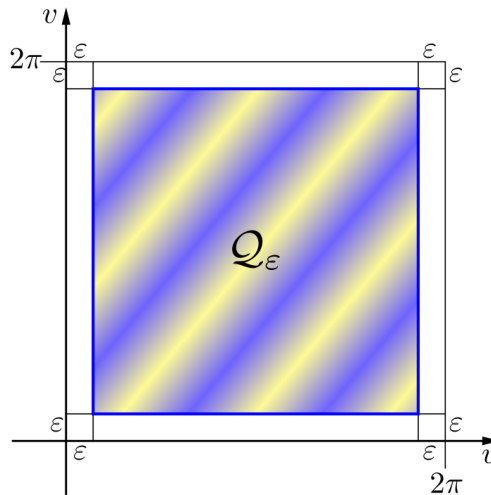


Fig. 39: Domínio Q_ε

Então, como $\|X_u \wedge X_v\| = \sqrt{EG - F^2} = r(a + r \cos u)$, obtemos:

$$\begin{aligned} A(R_\varepsilon) &= \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \|X_u \times X_v\|(u, v) \, du \, dv = \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} r(a + r \cos u) \, du \, dv \\ &= (2\pi - 2\varepsilon)^2 ar + (2\pi - 2\varepsilon)r^2(\sin(2\pi - \varepsilon) - \sin \varepsilon). \end{aligned}$$

Portanto,

$$A(\mathcal{T}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(R_\varepsilon) = 4\pi^2 ar. \quad \square$$

5. Orientação de Superfícies

Sejam S uma superfície regular e $X : U \rightarrow X(U)$, $\bar{X} : \bar{U} \rightarrow \bar{X}(\bar{U})$ parametrizações de S em p .

As bases $\{X_u(q), X_v(q)\}$, $X(q) = p$ e $\{\bar{X}_{\bar{u}}(\bar{q}), \bar{X}_{\bar{v}}(\bar{q})\}$, $\bar{X}(\bar{q}) = p$, determinam orientações do plano tangente $T_p S$.

Se $W = X(U) \cap \bar{X}(\bar{U})$ e $h = X^{-1} \circ \bar{X} : \bar{X}^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$, $h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$, $h(\bar{q}) = q$, temos que:

$$\begin{aligned} \bar{X}_{\bar{u}}(\bar{q}) &= X_u(q) \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{q}) + X_v(q) \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{q}) \\ \text{e} \\ \bar{X}_{\bar{v}}(\bar{q}) &= X_u(q) \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\bar{q}) + X_v(q) \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}(\bar{q}). \end{aligned} \quad (7)$$

Então a matriz de mudança de base é

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{q}) & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\bar{q}) \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{q}) & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}(\bar{q}) \end{pmatrix},$$

que é a matriz Jacobiana de h em \bar{q} .

Portanto, $\{X_u(q), X_v(q)\}$ e $\{\bar{X}_{\bar{u}}(\bar{q}), \bar{X}_{\bar{v}}(\bar{q})\}$ determinam *a mesma orientação no plano tangente $T_p S$* se, e só se,

$$\det(dh_{\bar{q}}) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{q}) > 0.$$

Definição 5.1 Uma superfície regular S é orientável quando existe uma família de parametrizações de S , $\{X_\alpha : U_\alpha \rightarrow X(U_\alpha) \mid \alpha \in A\}$, tal que:

(1) $S = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha(U_\alpha)$;

(2) se $W_{\alpha\beta} = X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, a aplicação de mudança de coordenadas

$$h_{\alpha\beta} = X_\alpha^{-1} \circ X_\beta : X_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta}) \rightarrow X_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta})$$

tem Jacobiano positivo em todo ponto $q \in X_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta})$.

A escolha de uma tal família é chamada *uma orientação de S* , e a superfície S , neste caso, é dita *orientada*.

Se não existir uma família de parametrizações de S satisfazendo as condições (1) e (2), diremos que S é uma superfície *não-orientável*.

Se S é orientada, uma parametrização $X : U \rightarrow X(U)$ de S é *compatível com a orientação de S* se, juntando X à família de parametrizações dada pela orientação, obtém-se ainda uma (portanto, a mesma) orientação de S .

Exemplo 5.1 Uma superfície que é o gráfico de uma função diferenciável é uma superfície orientável, pois toda superfície que é coberta por uma única vizinhança coordenada é orientável. \square

Exemplo 5.2 Se uma superfície S pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas, cuja interseção é conexa, então S é orientável.

De fato, sejam $X : U \rightarrow X(U)$ e $Y : V \rightarrow Y(V)$ parametrizações de S tais que $S = X(U) \cup Y(V)$ e $W = X(U) \cap Y(V)$ é conexo. Seja $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$ a aplicação de mudança de coordenadas.

Como $Y^{-1}(W)$ é conexo e $\det(dh_q) \neq 0$ para todo $q \in Y^{-1}(W)$, temos que $\det(dh_q) > 0$ para todo $q \in Y^{-1}(W)$ ou $\det(dh_q) < 0$ para todo $q \in Y^{-1}(W)$.

Quando $\det(dh_q) < 0$ para todo $q \in Y^{-1}(W)$, procedemos da seguinte maneira para obter uma família de duas parametrizações $\{X, Y_1\}$ que satisfazem as condições (1) e (2) da definição 5.1.

Seja o difeomorfismo $\pi : V \rightarrow V_1 = \pi(V)$ dado por $\pi(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v}, \bar{u})$, onde $\pi^{-1} = \pi$.

Tomemos $Y_1 = Y \circ \pi^{-1} = Y \circ \pi : V_1 \rightarrow Y(V)$. Então $Y_1(V_1) = Y(V)$ e Y_1 é uma parametrização de S .

Como $d\pi_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, a aplicação de mudança de parâmetros

$$h_1 = X^{-1} \circ Y_1 = X^{-1} \circ Y \circ \pi = h \circ \pi : Y_1^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$$

tem Jacobiano positivo, pois

$$d(h_1)_q = dh_{\pi(q)} \circ d\pi_q,$$

e, portanto,

$$\det(d(h_1)_q) = \det(dh_{\pi(q)}) \det(d\pi_q) > 0,$$

para todo $q \in Y_1^{-1}(W)$. \square

Exemplo 5.3 A esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas (por exemplo, $S^2 - \{N\}$ e $S^2 - \{-N\}$ dadas pelas projeções estereográficas sobre o pólo norte

$N = (0, 0, 1)$ e sobre o pólo sul $-N = (0, 0, -1)$) tais que a interseção W dessas vizinhanças $(S^2 - \{N, -N\})$ é conexa. Logo, pela observação anterior, S^2 é orientável. \square

Daremos agora uma interpretação geométrica para a definição de orientabilidade de uma superfície regular em \mathbb{R}^3 .

Definição 5.2 Um *campo de vetores normais unitários* diferenciável (resp. contínuo) em um aberto V de uma superfície S é uma aplicação $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciável (resp. contínua) tal que $\|N(p)\| = 1$ e $N(p) \perp T_p S$ para todo $p \in V$.

Como vimos na seção 3, dada uma parametrização $X : U \rightarrow X(U)$, existe um campo de vetores normais unitários diferenciável em $X(U)$, $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$, dado por

$$N(X(u, v)) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} (u, v).$$

Escolhendo outra parametrização $\bar{X} : \bar{U} \rightarrow \bar{X}(\bar{U})$, tal que $W = X(U) \cap \bar{X}(\bar{U}) \neq \emptyset$, existe um campo de vetores normais diferenciável em $\bar{X}(\bar{U})$, $\bar{N} : \bar{X}(\bar{U}) \rightarrow \mathbb{R}^3$, dado por:

$$\bar{N}(\bar{X}(\bar{u}, \bar{v})) = \frac{\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}}{\|\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}\|} (\bar{u}, \bar{v}).$$

Seja $h = X^{-1} \circ \bar{X} : \bar{X}^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$, $h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$, a aplicação de mudança de coordenadas. Então, como, por (7),

$$\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) = (X_u \wedge X_v)(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} (\bar{u}, \bar{v}), \quad (8)$$

temos que:

$$\bar{N}(\bar{X}(\bar{u}, \bar{v})) = N(X(h(\bar{u}, \bar{v}))) \frac{\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} (\bar{u}, \bar{v})}{\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} (\bar{u}, \bar{v}) \right|} \quad (9)$$

Logo,

$$\bar{N}(\bar{X}(\bar{u}, \bar{v})) = \begin{cases} N(X(h(\bar{u}, \bar{v}))), & \text{se } \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} (\bar{u}, \bar{v}) > 0 \\ -N(X(h(\bar{u}, \bar{v}))), & \text{se } \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} (\bar{u}, \bar{v}) < 0 \end{cases}$$

Proposição 5.1 Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se, e só se, existe um campo de vetores normais unitários $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciável em S .

Prova.

(\Rightarrow) Suponhamos que S é orientável. Seja $\{X_\alpha : U_\alpha \rightarrow X_\alpha(U_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ uma família de parametrizações de S tal que $S = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha(U_\alpha)$ e $h_{\alpha\beta} = X_\alpha^{-1} \circ X_\beta : X_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta}) \rightarrow X_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta})$ tem Jacobiano positivo em todos os pontos de $X_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta})$, onde $W_{\alpha\beta} = X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$.

Definimos, então,

$$N(p) = \frac{(X_\alpha)_u \wedge (X_\alpha)_v}{\|(X_\alpha)_u \wedge (X_\alpha)_v\|} (q),$$

onde $X_\alpha(q) = p$.

Afirmação: $N(p)$ está bem definido e a aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é diferenciável.

De fato, seja $X_\beta : U_\beta \rightarrow X_\beta(U_\beta)$ outra parametrização da família tal que $X_\beta(\bar{q}) = p$.

Como $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{q}) > 0$, temos, por (8), que

$$\frac{(X_\alpha)_u \wedge (X_\alpha)_v}{\|(X_\alpha)_u \wedge (X_\alpha)_v\|} (q) = \frac{(X_\alpha)_u \wedge (X_\alpha)_v}{\|(X_\alpha)_u \wedge (X_\alpha)_v\|} (h_{\alpha\beta}(\bar{q})) \cdot \frac{\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{q})}{\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{q}) \right|} = \frac{(X_\beta)_{\bar{u}} \wedge (X_\beta)_{\bar{v}}}{\|(X_\beta)_{\bar{u}} \wedge (X_\beta)_{\bar{v}}\|} (\bar{q}).$$

Logo $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ está bem definida e é diferenciável, pois $N \circ X_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^3$ é diferenciável.

(\Leftarrow) Seja $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de vetores normais unitários contínuo em S .

Afirmação: Existe uma família de parametrizações $\{X_\alpha : U_\alpha \rightarrow X_\alpha(U_\alpha) \mid \alpha \in A\}$, com U_α conexo para todo $\alpha \in A$, tal que $S = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha(U_\alpha)$ e

$$N(X_\alpha(u, v)) = \frac{(X_\alpha)_u \wedge (X_\alpha)_v}{\|(X_\alpha)_u \wedge (X_\alpha)_v\|} (u, v), \quad (10)$$

para todo $(u, v) \in U_\alpha$ e para todo $\alpha \in A$.

De fato, sejam $p \in S$ e $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S em p tal que U é conexo.

Considere a função contínua $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(u, v) = \langle N(X(u, v)), \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} (u, v) \rangle.$$

Como U é conexo e $f(u, v) = \pm 1$, temos que:

- $f(u, v) = 1$ para todo $(u, v) \in U$, isto é, $N(X(u, v)) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} (u, v)$ para todo $(u, v) \in U$;

ou

- $f(u, v) = -1$ para todo $(u, v) \in U$, isto é, $N(X(u, v)) = -\frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(u, v)$ para todo $(u, v) \in U$.

No segundo caso, tomemos a parametrização $\bar{X} = X \circ \pi : \bar{U} \rightarrow \bar{X}(\bar{U}) = X(U)$ de S , onde $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é o difeomorfismo $\pi(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v}, \bar{u})$ e $\bar{U} = \pi(U)$. Observe que \bar{U} é aberto conexo e $\pi(\bar{U}) = U$, pois $\pi^2 = \text{id}$.

Como $\det(d\pi_{(\bar{u}, \bar{v})}) = -1$ para todo $(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{U}$, e, por (8),

$$(\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}})(\bar{u}, \bar{v}) = (X_u \wedge X_v)(\pi(\bar{u}, \bar{v})) \det(d\pi_{(\bar{u}, \bar{v})}),$$

temos que:

$$\frac{\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}}{\|\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}\|}(\bar{u}, \bar{v}) = -\frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(\pi(\bar{u}, \bar{v})),$$

para todo $(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{U}$.

Logo

$$N(\bar{X}(\bar{u}, \bar{v})) = N(X(\pi(\bar{u}, \bar{v}))) = -\frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(\pi(\bar{u}, \bar{v})) = \frac{\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}}{\|\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}\|}(\bar{u}, \bar{v}).$$

Conseguimos, assim, uma parametrização $\bar{X} : \bar{U} \rightarrow \bar{X}(\bar{U})$, tal que \bar{U} é conexo, $\bar{X}(\bar{U}) = X(U)$

e $N(\bar{X}(\bar{u}, \bar{v})) = \frac{\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}}{\|\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}\|}(\bar{u}, \bar{v})$ para todo $(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{U}$.

Provamos, então, que todo ponto $p \in S$ pertence a uma vizinhança coordenada conexa que satisfaz a relação (10).

Logo $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é diferenciável e S é orientável, pois se $X_\alpha : U_\alpha \rightarrow X_\alpha(U_\alpha)$ e $X_\beta : U_\beta \rightarrow X_\beta(U_\beta)$ são duas parametrizações da família acima, tais que $W_{\alpha\beta} = X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, e $h_{\alpha\beta} = X_\alpha^{-1} \circ X_\beta : X_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta}) \rightarrow X_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta})$ é a aplicação de mudança de parâmetros, temos, por (10) e (8), respectivamente, que

$$\frac{(X_\beta)_{\bar{u}} \wedge (X_\beta)_{\bar{v}}}{\|(X_\beta)_{\bar{u}} \wedge (X_\beta)_{\bar{v}}\|}(\bar{u}, \bar{v}) = N(X_\beta(\bar{u}, \bar{v})) = N(X_\alpha(h_{\alpha\beta}(\bar{u}, \bar{v}))) = \frac{(X_\alpha)_u \wedge (X_\alpha)_v}{\|(X_\alpha)_u \wedge (X_\alpha)_v\|}(h_{\alpha\beta}(\bar{u}, \bar{v})),$$

$$\text{e } \frac{(X_\beta)_{\bar{u}} \wedge (X_\beta)_{\bar{v}}}{\|(X_\beta)_{\bar{u}} \wedge (X_\beta)_{\bar{v}}\|}(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{(X_\alpha)_u \wedge (X_\alpha)_v}{\|(X_\alpha)_u \wedge (X_\alpha)_v\|}(h_{\alpha\beta}(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}}{\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right|}(\bar{u}, \bar{v});$$

portanto, $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} > 0$ para todo $(\bar{u}, \bar{v}) \in X_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta})$. Assim, S é orientável. ■

Observação 5.1 A escolha de um campo diferenciável de vetores normais unitários $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é chamada uma *orientação de S*.

Observação 5.2 A demonstração acima mostra que para S ser orientável, precisamos supor apenas a existência de um campo de vetores normais unitários contínuo em S e que um tal campo de vetores é de fato diferenciável.

Proposição 5.2 *Toda superfície regular S que é a imagem inversa de um valor regular de uma função diferenciável, definida num aberto de \mathbb{R}^3 , é orientável.*

Prova.

Sejam $f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, $\alpha \in f(V)$ um valor regular de f e $S = f^{-1}(\alpha)$.

Como $\text{grad } f(p) \neq 0$ para todo $p \in S$, existe um aberto $W_p \subset V$ tal que $p \in W_p$ e $\text{grad } f(q) \neq 0$ para todo $q \in W_p$.

Logo $W = \bigcup_{p \in S} W_p$ é um aberto de \mathbb{R}^3 tal que $S \subset W \subset V$ e $\frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|} : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável.

Sejam $p \in S$, $v \in T_p S$ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, uma curva diferenciável em 0 tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.

Como $\alpha(t) \in S$,

$$f(x(t), y(t), z(t)) = \alpha$$

para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Derivando ambos os membros desta expressão em relação a t , obtemos que em $t = 0$

$$f_x(p)x'(0) + f_y(p)y'(0) + f_z(p)z'(0) = 0,$$

isto é, $\langle \text{grad } f(p), v \rangle = 0$. Como $v \in T_p S$ é arbitrário e $\text{grad } f(p) \neq 0$, temos que $\frac{\text{grad } f(p)}{\|\text{grad } f(p)\|}$ é um vetor normal unitário a S em p .

Logo $N : S \subset W \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$N(x, y, z) = \frac{\text{grad } f(x, y, z)}{\|\text{grad } f(x, y, z)\|} = \frac{(f_x, f_y, f_z)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}(x, y, z),$$

é um campo de vetores normais unitários diferenciável em S , e, pela proposição anterior, S é orientável. ■

Exemplo 5.4 Seja $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Sendo que $S^2 = f^{-1}(0)$, onde $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ e 0 é um valor regular de f , temos, pela proposição 5.2, que S^2 é orientável e $N : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dado por

$$N(x, y, z) = \frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|}(x, y, z) = (x, y, z),$$

é um campo de vetores normais unitários diferenciável em S^2 .

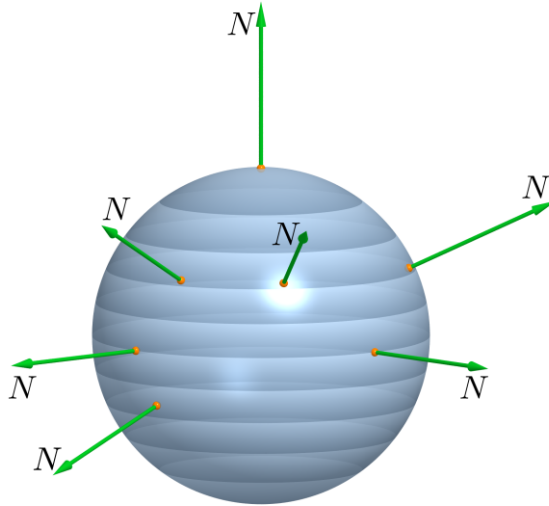


Fig. 40: Campo de vetores normais unitários diferenciável em S^2

Obtemos assim que $T_p S^2$ é o plano que passa pela origem e é ortogonal ao vetor posição \overrightarrow{Op} , isto é,

$$T_p S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, p \rangle = 0\}.$$

Temos também que $\tilde{N}(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ é um campo de vetores normais unitários diferenciável em S^2 , que determina uma orientação em S^2 oposta à orientação dada por N . \square

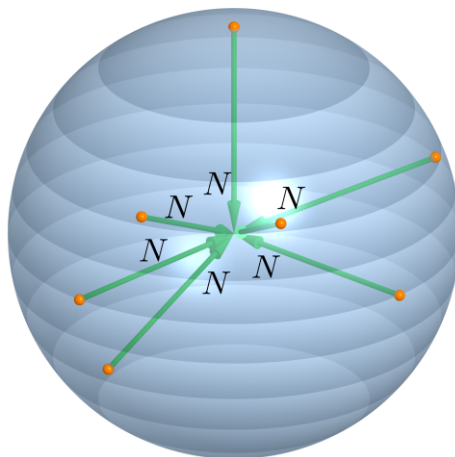


Fig. 41: Campo de vetores normais unitários diferenciável em S^2

Observação 5.3 Localmente, toda superfície regular é difeomorfa a um conjunto aberto do plano e é, portanto, orientável. Mas orientação é uma propriedade global no sentido de envolver toda a superfície.

Observação 5.4 (Exercício 1, pag. 129)

Seja S uma superfície regular que pode ser coberta por duas parametrizações $X : U \rightarrow X(U)$ e $Y : V \rightarrow Y(V)$, isto é, $S = X(U) \cup Y(V)$, onde U e V são abertos conexos, tais que $W = X(U) \cap Y(V) = W_1 \cup W_2$ possui duas componentes conexas W_1 e W_2 .

Seja $h = Y^{-1} \circ X : U_1 \cup U_2 \rightarrow V_1 \cup V_2$ a aplicação de mudança de coordenadas, onde $U_i = X^{-1}(W_i)$ e $V_i = Y^{-1}(W_i)$, $i = 1, 2$.

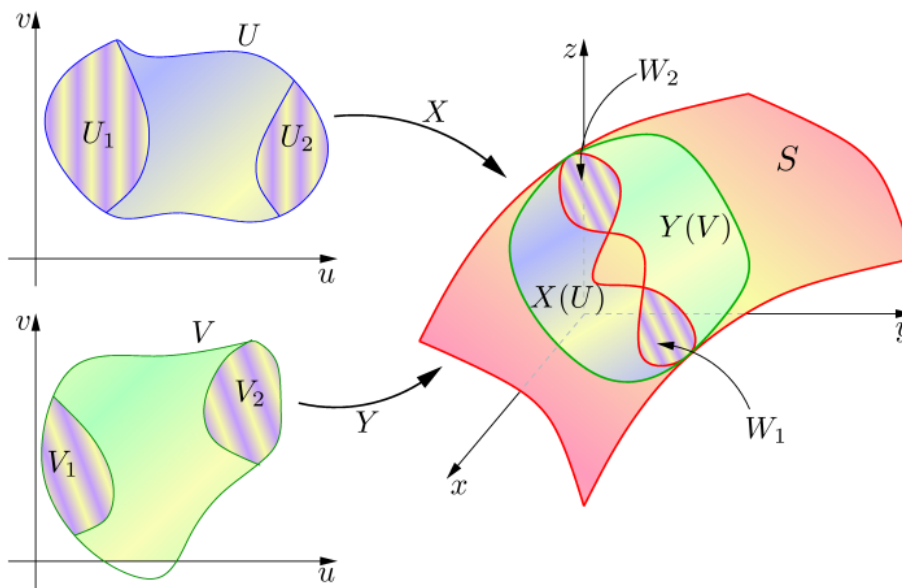


Fig. 42:

Se $\det(dh) > 0$ em U_1 e $\det(dh) < 0$ em U_2 , então S é não-orientável.

De fato, suponhamos que S é orientável. Então, pela proposição 5.1, existe um campo de vetores normais diferenciável em S .

Como U é conexo, temos que

$$N(X(\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in U,$$

ou

$$N(X(\mathbf{u}, \mathbf{v})) = -\frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in U.$$

E também, como V é conexo,

$$N(Y(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})) = \frac{Y_{\bar{u}} \wedge Y_{\bar{v}}}{\|Y_{\bar{u}} \wedge Y_{\bar{v}}\|}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}), \quad \forall (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \in V,$$

ou

$$N(Y(\bar{u}, \bar{v})) = -\frac{Y_{\bar{u}} \wedge Y_{\bar{v}}}{\|Y_{\bar{u}} \wedge Y_{\bar{v}}\|}(\bar{u}, \bar{v}), \quad \forall(\bar{u}, \bar{v}) \in V.$$

Logo,

$$\frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(u, v) = \frac{Y_{\bar{u}} \wedge Y_{\bar{v}}}{\|Y_{\bar{u}} \wedge Y_{\bar{v}}\|}(h(u, v)), \quad \forall(u, v) \in U_1 \cup U_2,$$

ou

$$\frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(u, v) = -\frac{Y_{\bar{u}} \wedge Y_{\bar{v}}}{\|Y_{\bar{u}} \wedge Y_{\bar{v}}\|}(h(u, v)), \quad \forall(u, v) \in U_1 \cup U_2.$$

Então, por (9), $\det(dh_{(u,v)}) > 0$ para todo $(u, v) \in U_1 \cup U_2$, ou $\det(dh_{(u,v)}) < 0$ para todo $(u, v) \in U_1 \cup U_2$, isto é, $\det(dh)$ não muda de sinal, uma contradição.

Exemplo 5.5 Daremos agora um exemplo de uma superfície não-orientada chamada *faixa de Möbius*.

Seja $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ e } z = 0\}$ o círculo de raio 2 e centro na origem, contido no plano $z = 0$, e $AB = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, y = 2 \text{ e } z \in (-1, 1)\}$ um segmento aberto centrado no ponto $C = (0, 2, 0)$ contido no plano $x = 0$.

A faixa de Möbius é obtida quando deslocamos o centro C de AB ao longo de \mathcal{C} ao mesmo tempo que giramos o segmento AB em torno de C , no plano formado pelo eixo Oz e pelo ponto C , de tal modo que quando C descreve um ângulo u , AB tenha girado $u/2$. Quando C completa uma volta ao longo de \mathcal{C} , o segmento AB retorna à sua posição inicial, só que com os seus extremos A e B invertidos.

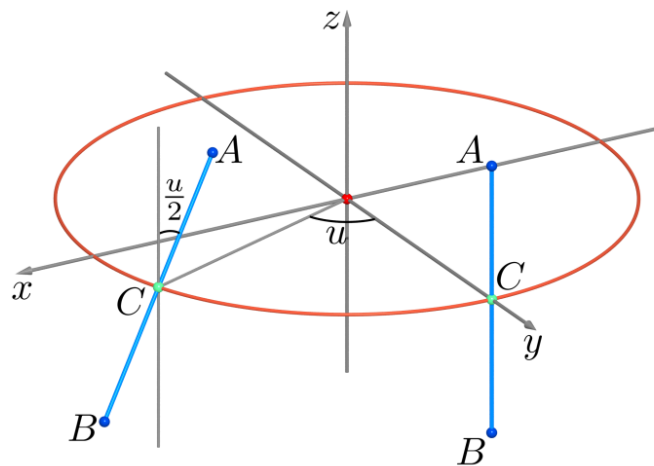


Fig. 43: Formação da faixa de Möbius

Do ponto de vista topológico, é como se estivéssemos identificando os lados opostos (verticais) de um retângulo, após dar uma torção no retângulo, de modo a identificar cada ponto do lado AB com o seu simétrico do outro lado em relação ao ponto médio C .

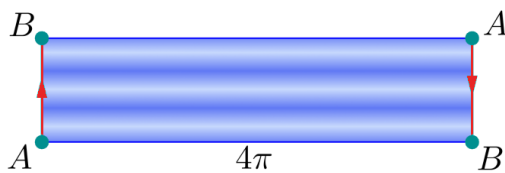


Fig. 44: Identificação de dois lados de uma faixa retangular para obter a faixa de Möbius

Observação 5.5 É fácil ver geometricamente que a faixa de Möbius M é uma superfície regular não-orientável.

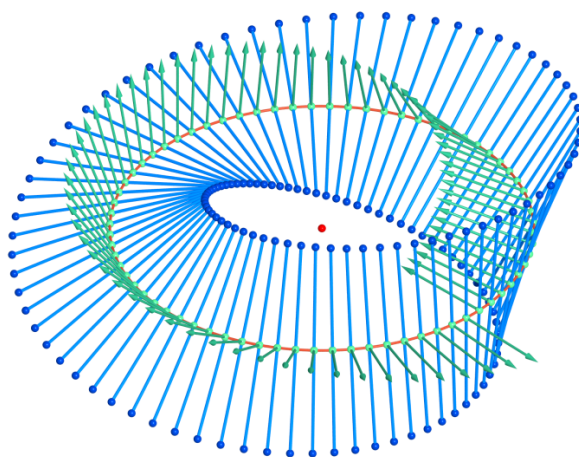


Fig. 45: Formação da faixa de Möbius

De fato, se M fosse orientável, existiria um campo diferenciável $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores normais unitários. Tomando esses vetores ao longo do círculo $x^2 + y^2 = 4$, veremos que, depois de uma volta completa, N voltaria à sua posição inicial como $-N$, o que é uma contradição.

Intuitivamente, não se pode, sobre a faixa de Möbius, fazer uma escolha do que seria um "lado", pois, movendo-se sobre a superfície, podemos passar de maneira contínua para o outro "lado" sem sair da superfície.

- Provaremos agora que M é uma superfície regular que não é orientável.

Afirmção: A aplicação diferenciável $X : (0, 2\pi) \times (-1, 1) \rightarrow X(U) \subset M$ dada por

$$X(u, v) = \left(\left(2 - v \sin \frac{u}{2}\right) \sin u, \left(2 - v \sin \frac{u}{2}\right) \cos u, v \cos \frac{u}{2} \right),$$

é uma parametrização de M tal que

$$X(U) = M - AB = M \cap (\mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ e } y \geq 0\}),$$

onde $U = (0, 2\pi) \times (-1, 1)$ e $V = \mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ e } y \geq 0\}$ é um aberto de \mathbb{R}^3 .

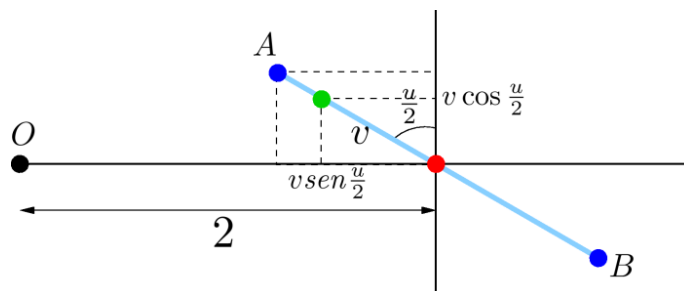


Fig. 46:

De fato, como

$$X_u(u, v) = \left(-\frac{v}{2} \cos \frac{u}{2} \operatorname{sen} u + \left(2 - v \operatorname{sen} \frac{u}{2}\right) \cos u, -\frac{v}{2} \cos \frac{u}{2} \cos u - \left(2 - v \operatorname{sen} \frac{u}{2}\right) \operatorname{sen} u, -\frac{v}{2} \operatorname{sen} \frac{u}{2} \right) \text{ e}$$

$$X_v(u, v) = \left(-\operatorname{sen} \frac{u}{2} \operatorname{sen} u, -\operatorname{sen} \frac{u}{2} \cos u, \cos \frac{u}{2} \right),$$

temos que:

- $$E(u, v) = \frac{v^2}{4} \cos^2 \frac{u}{2} \operatorname{sen}^2 u + \left(2 - v \operatorname{sen} \frac{u}{2}\right)^2 \cos^2 u - v \cos \frac{u}{2} \operatorname{sen} u \cos u \left(2 - v \operatorname{sen} \frac{u}{2}\right) + \frac{v^2}{4} \cos^2 \frac{u}{2} \cos^2 u + \left(2 - v \operatorname{sen} \frac{u}{2}\right)^2 \operatorname{sen}^2 u + v \cos \frac{u}{2} \cos u \operatorname{sen} u \left(2 - v \operatorname{sen} \frac{u}{2}\right) + \frac{v^2}{4} \operatorname{sen}^2 \frac{u}{2} = \frac{v^2}{4} \cos^2 \frac{u}{2} + \left(2 - v \operatorname{sen} \frac{u}{2}\right)^2 + \frac{v^2}{4} \operatorname{sen}^2 \frac{u}{2} = \frac{v^2}{4} + \left(2 - v \operatorname{sen} \frac{u}{2}\right)^2$$
- $$G(u, v) = \operatorname{sen}^2 \frac{u}{2} \operatorname{sen}^2 u + \operatorname{sen}^2 \frac{u}{2} \cos^2 u + \cos^2 \frac{u}{2} = 1$$

- $$F(u, v) = \frac{v}{2} \operatorname{sen} \frac{u}{2} \operatorname{sen}^2 u \cos \frac{u}{2} - \operatorname{sen} \frac{u}{2} \operatorname{sen} u \cos u \left(2 - v \cos \frac{u}{2}\right) + \frac{v}{2} \operatorname{sen} \frac{u}{2} \cos^2 u \cos \frac{u}{2} + \operatorname{sen} \frac{u}{2} \cos u \operatorname{sen} u \left(2 - v \operatorname{sen} \frac{u}{2}\right) - \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2} \operatorname{sen} \frac{u}{2} = 0.$$

Logo,

$$\|X_u \wedge X_v\|^2(u, v) = (EG - F^2)(u, v) = \frac{v^2}{4} + \left(2 - v \operatorname{sen} \frac{u}{2}\right)^2 > 0,$$

para todo $(u, v) \in U$ e, portanto, $dX_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora para todo $(u, v) \in U$.

- Resta ainda provar que $X : U \rightarrow X(U)$ é uma bijeção e que $X^{-1} : X(U) \rightarrow U$ é contínua.

Seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $(x, y, z) = X(u, v)$. Então $x^2 + y^2 = \left(2 - v \operatorname{sen} \frac{u}{2}\right)^2$ e, portanto,

$$2 - v \operatorname{sen} \frac{u}{2} = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{sen} u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{e} \quad \cos u = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Como $u \in (0, 2\pi)$, temos que u é determinado de modo único e, portanto, v também.

Além disso, como $\frac{u}{2} \in (0, \pi)$,

$$\operatorname{cotg} \frac{u}{2} = \frac{\cos \frac{u}{2}}{\operatorname{sen} \frac{u}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos u}{1 - \cos u}} = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{\sqrt{x^2 + y^2} - y}},$$

$$\operatorname{sen} \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}$$

$$\text{e} \quad 2 - v \operatorname{sen} \frac{u}{2} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

temos que $u : X(U) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$u(x, y, z) = 2 \operatorname{arc} \operatorname{cotg} \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{\sqrt{x^2 + y^2} - y}},$$

é contínua, e $v : X(U) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$v(x, y, z) = \frac{(2 - \sqrt{x^2 + y^2}) \sqrt{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - y}},$$

é contínua. Logo $X^{-1} : X(U) \rightarrow U$ é contínua.

De modo análogo, podemos provar que a aplicação $\bar{X} : U \rightarrow \bar{X}(U)$, dada por

$$\bar{X}(\bar{u}, \bar{v}) = \left(\left(2 - \bar{v} \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{u}}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \operatorname{sen} \left(\bar{u} + \frac{\pi}{2}\right), \left(2 - \bar{v} \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{u}}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \cos \left(\bar{u} + \frac{\pi}{2}\right), \bar{v} \cos \left(\frac{\bar{u}}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right),$$

é uma parametrização de M tal que

$$\bar{X}(U) = M \cap (\mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \text{ e } x \geq 0\}).$$

Como essas duas vizinhanças coordenadas cobrem a faixa de Möbius M , isto é, $M = X(U) \cup \bar{X}(\bar{U})$, mostramos que M é uma superfície regular.

A interseção das duas vizinhanças coordenadas, $W = X(U) \cap \bar{X}(\bar{U}) = W_1 \cup W_2$ possui duas componentes conexas W_1 e W_2 , onde:

$$W_1 = \left\{ X(u, v) \mid u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ e } v \in (-1, 1) \right\}$$

e

$$W_2 = \left\{ X(u, v) \mid u \in \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right) \text{ e } v \in (-1, 1) \right\}.$$

Então

$$U_1 = X^{-1}(W_1) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times (-1, 1), \quad U_2 = X^{-1}(W_2) = \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right) \times (-1, 1),$$

$$\bar{U}_1 = \bar{X}^{-1}(W_1) = \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \times (-1, 1), \quad \bar{U}_2 = \bar{X}^{-1}(W_2) = \left(0, \frac{3\pi}{2}\right) \times (-1, 1),$$

e a aplicação de mudança de parâmetros, $h = \bar{X}^{-1} \circ X : U_1 \cup U_2 \rightarrow \bar{U}_1 \cup \bar{U}_2$, é dada por:

$$h(u, v) = \begin{cases} \left(u + \frac{3\pi}{2}, -v\right), & \text{para } (u, v) \in U_1 \\ \left(u - \frac{\pi}{2}, v\right), & \text{para } (u, v) \in U_2. \end{cases}$$

Como $\det(dh_{(u,v)}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 < 0$ em U_1 e $\det(dh_{(u,v)}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0$ em U_2 ,

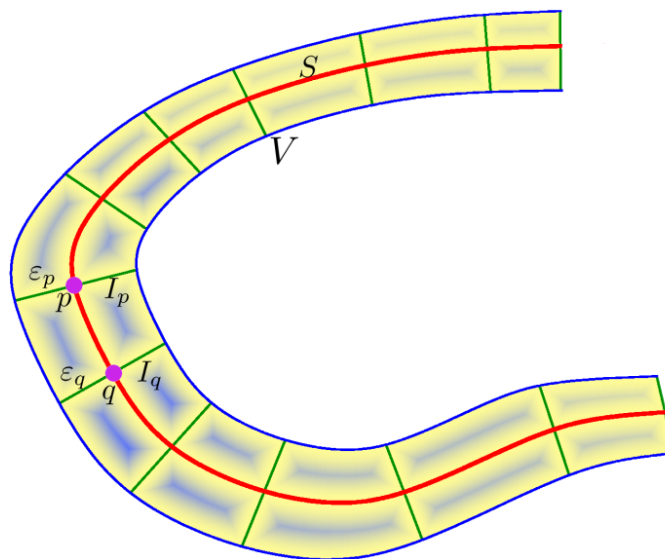
temos, pela observação 5.4, que M não é orientável. \square

6. Uma Caracterização das Superfícies Compactas Orientáveis

Nesta seção, provaremos a recíproca da proposição 5.2, no caso em que S é uma superfície compacta orientável. Mas ela é válida para qualquer superfície regular orientável, isto é, "toda superfície regular orientável S em \mathbb{R}^3 é a imagem inversa de um valor regular de alguma função diferenciável definida num aberto de \mathbb{R}^3 que contém S ". Mas a prova quando S é não-compacta é não-trivial e, portanto, não será feita aqui.

- Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientável. O ponto crucial da demonstração consiste em provar que é possível escolher, para cada $p \in S$, um intervalo aberto I_p centrado em p de comprimento $2\varepsilon_p$ sobre a reta normal a S em p de modo que se $p \neq q$, $p, q \in S$, então $I_p \cap I_q = \emptyset$ e $V = \bigcup_{p \in S} I_p$ é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^3 que contém S .

O conjunto aberto V , chamado uma *vizinhança tubular de S* , tem a propriedade de que por cada ponto de V passa uma única reta normal a S .

Fig. 47: Vizinhança tubular de S

- Supondo a existência de uma vizinhança tubular V de uma superfície orientável S podemos definir uma função $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte maneira.

Primeiro escolha um campo normal unitário diferenciável em S , $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, para fixar uma orientação para S . Como nenhum par de segmentos I_p e I_q , $p \neq q$, da vizinhança tubular V se intersectam, por cada ponto $P \in V$ passa uma única reta normal a S que encontra S em um ponto p .

Por definição, $g(P)$ é a distância de p a P , com um sinal dado pela direção do vetor normal unitário $N(p)$ em p .

Se provarmos que g é diferenciável e que 0 é um valor regular de g , teremos que $S = g^{-1}(0)$, que é o que queremos demonstrar.

- Mostraremos primeiro que cada ponto p de uma superfície regular possui uma vizinhança que tem uma vizinhança tubular.

Proposição 6.1 *Sejam S uma superfície regular e $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S em p , com $X(u_0, v_0) = p$. Então existem um aberto $W \subset X(U)$ de S , com $p \in W$, e um número $\varepsilon > 0$ tais que os segmentos das retas normais passando pelos pontos $q \in W$, com centro em q e comprimento 2ε , são disjuntos e $V = \bigcup_{q \in W} I_q$ é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^3 . Isto é, W tem uma vizinhança tubular.*

Prova.

Consideremos a aplicação diferenciável $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$F(u, v, t) = X(u, v) + t N(u, v),$$

onde $N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(u, v)$ é um vetor normal unitário a S em $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

Geometricamente, F aplica o ponto (u, v, t) do cilindro $U \times \mathbb{R}$ no ponto da reta normal a S a uma distância (orientada) t de $X(u, v)$.

O Jacobiano de F em $(u_0, v_0, 0)$ é dado por

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & N_1 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & N_2 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & N_3 \end{vmatrix}(u_0, v_0) = \langle X_u \wedge X_v, N \rangle(u_0, v_0) = \|X_u \wedge X_v\|(u_0, v_0) \neq 0,$$

onde $N = (N_1, N_2, N_3)$.

Pelo teorema da aplicação inversa, existem $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ e um aberto V de \mathbb{R}^3 , tais que

$$F : (u_0 - \delta, u_0 + \delta) \times (v_0 - \delta, v_0 + \delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow V$$

é um difeomorfismo C^∞ . Isto significa que se $p, q \in W = X((u_0 - \delta, u_0 + \delta) \times (v_0 - \delta, v_0 + \delta))$, $p \neq q$, então os segmentos I_p e I_q das retas normais centrados em p e q , respectivamente, com comprimento 2ε , não se intersectam, e $\bigcup_{p \in W} I_p = V$ é um aberto de \mathbb{R}^3 que contém W . Isto é, V é uma vizinhança tubular de W , onde W é um aberto de S que contém p . ■

Proposição 6.2 *Suponhamos a existência de uma vizinhança tubular V de uma superfície regular orientável S . Seja $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de vetores normais unitários diferenciável em S , que determina uma orientação para S . Então a função $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como sendo a distância orientada de um ponto de V ao pé da perpendicular da única reta normal a S passando por esse ponto, é diferenciável e tem zero como um valor regular em um aberto $V' \subset V$ de \mathbb{R}^3 que contém S .*

Prova.

Seja $X : U \longrightarrow X(U)$ uma parametrização de S em $p = X(u_0, v_0)$ compatível com a orientação escolhida, isto é,

$$N(X(u, v)) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(u, v),$$

para todo $u, v \in U$.

Seja $F : (u_0 - \delta, u_0 + \delta) \times (v_0 - \delta, v_0 + \delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow V_p$ o difeomorfismo C^∞ dado pela proposição anterior, onde $F(u, v, t) = X(u, v) + tN(u, v)$. Podemos escolher $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ de modo que $V_p \subset V$.

Como $F^{-1} : V_p \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F^{-1}(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), t(x, y, z))$, é diferenciável e $g|_{V_p} = t : V_p \rightarrow \mathbb{R}$, temos que $g|_{V_p}$ é diferenciável. Além disso, 0 é um valor regular de $g|_{V_p}$, pois, caso contrário, existiria $(x_0, y_0, z_0) \in V_p$ tal que $t(x_0, y_0, z_0) = 0$ e

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0,$$

em (x_0, y_0, z_0) , o que é uma contradição, já que a diferencial de F^{-1} seria singular em (x_0, y_0, z_0) .

Como $p \in S$ é arbitrário, provamos que existe um aberto $V' = \bigcup_{p \in S} V_p \subset V$ de \mathbb{R}^3 tal que $S \subset V'$, $g : V' \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e tem zero como valor regular. ■

- Para passarmos do local ao global, isto é, para provar a existência de uma vizinhança tubular de uma superfície orientável inteira, e não apenas de uma vizinhança de um ponto desta superfície, precisamos rever alguns conceitos e resultados topológicos.

Definição 6.1 Um subconjunto F de \mathbb{R}^3 é *fechado* se toda seqüência convergente de pontos de F tem seu limite pertencente a F .

Definição 6.2 Um subconjunto A de \mathbb{R}^3 é *limitado* se está contido em alguma bola de \mathbb{R}^3 , isto é, se existem $a \in \mathbb{R}^3$ e $r > 0$ tais que $\|p - a\| \leq r$ para todo $p \in A$.

Definição 6.3 Um subconjunto K de \mathbb{R}^3 é *compacto* se é fechado e limitado.

Exemplo 6.1 A esfera e o toro são superfícies compactas. O parabolóide de revolução $z = x^2 + y^2$ é uma superfície fechada e ilimitada e, portanto, não é uma superfície compacta. O disco aberto $x^2 + y^2 < 1$ e a faixa de Möbius são superfícies limitadas, mas não são fechadas e, portanto, não são compactas. □

Proposição 6.3 (Bolzano-Weierstrass) *Seja $K \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto compacto. Então toda seqüência de pontos de K possui uma subseqüência convergente cujo limite pertence a K .*

Proposição 6.4 (Heine-Borel) *Sejam $K \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto compacto e $\{U_\alpha\}$ uma família de conjuntos abertos de K tal que $K = \bigcup U_\alpha$. Então é possível escolher um número finito $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ de elementos de $\{U_\alpha\}$ tais que $K = U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$.*

Definição 6.4 Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto limitado. O *diâmetro de B* , denotado $\text{diam}(B)$, é o supremo das distâncias entre dois pontos quaisquer de B , isto é,

$$\text{diam}(B) = \sup\{\|p - q\| \mid p, q \in B\}.$$

Proposição 6.5 (Lebesgue) *Sejam K um conjunto compacto e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma família de abertos de K tal que $\bigcup U_\alpha = K$. Então existe um número $\delta > 0$, chamado o **número de Lebesgue da família $\{U_\alpha\}$** , tal que para todo subconjunto A de K com diâmetro menor que δ existe $\alpha \in I$ tal que $A \subset U_\alpha$.*

Prova.

Vamos supor que não existe $\delta > 0$ satisfazendo as condições da proposição. Então, dado $n \in \mathbb{N}$, existe um subconjunto A_n de K com $\text{diam}(A_n) < \frac{1}{2n}$ que não está contido em aberto algum da família $\{U_\alpha\}$.

Tomemos em cada A_n um ponto p_n . Como $\{p_n\}$ é uma seqüência de pontos de K , existe, pela proposição 6.3, um subconjunto $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito tal que a subseqüência $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}'}$ converge para um ponto $p \in K$.

Seja $\alpha_0 \in I$ tal que $p \in U_{\alpha_0}$. Como U_{α_0} é aberto em K , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$B\left(p; \frac{1}{n_0}\right) \cap K \subset U_{\alpha_0}.$$

Seja $n_1 \in \mathbb{N}'$, $n_1 \geq n_0$, tal que $\|p_n - p\| < \frac{1}{2n_0}$ para todo $n \geq n_1$, $n \in \mathbb{N}'$.

Então, para todo $n \in \mathbb{N}'$, $n \geq n_1$, se $q \in A_n$, temos

$$\|q - p\| \leq \|q - p_n\| + \|p_n - p\| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n_0} < \frac{1}{n_0},$$

isto é, $A_n \subset B\left(p; \frac{1}{n_0}\right) \cap K \subset U_{\alpha_0}$, $n \geq n_1$, o que é uma contradição. ■

Usando as proposições 6.1, 6.4 e 6.5, provaremos a existência de uma vizinhança tubular de uma superfície compacta orientável.

Proposição 6.6 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, compacta e orientável. Então existe um número $\varepsilon > 0$ tal que se $p, q \in S$, $p \neq q$, os segmentos I_p e I_q das retas normais de comprimento 2ε , centrados em p e q , respectivamente, são disjuntos, e $V = \bigcup_{p \in S} I_p$ é um aberto de \mathbb{R}^3 .*

Prova.

Pela proposição 6.1, existem, para cada $p \in S$, um aberto W_p de S , com $p \in W_p$, e um número $\varepsilon_p > 0$ tais que a proposição vale para os pontos de W_p com $\varepsilon = \varepsilon_p$, e se tomarmos $0 < \varepsilon'_p < \varepsilon_p$, a proposição também continua valendo em W_p com $\varepsilon = \varepsilon'_p$.

Considerando todos os pontos $p \in S$, obtemos uma família $\{W_p\}$ de subconjuntos abertos de S com $S = \bigcup_{p \in S} W_p$.

Pela proposição 6.4, é possível escolher um número finito W_{p_1}, \dots, W_{p_k} de elementos da família $\{W_p\}$ tais que $S = W_{p_1} \cup \dots \cup W_{p_k}$.

Seja $0 < \varepsilon < \min \left\{ \varepsilon_{p_1}, \dots, \varepsilon_{p_k}, \frac{\delta}{2} \right\}$, onde $\delta > 0$ é o número de Lebesgue da família $\{W_{p_i}\}_{1 \leq i \leq k}$.

Sejam dois pontos distintos $p, q \in S$. Se ambos pertencerem a algum W_{p_i} , $i = 1, \dots, k$, os segmentos das retas normais centrados em p e q com comprimento 2ε não se intersectam, pois $\varepsilon < \varepsilon_{p_i}$.

Se p e q não pertencem a um mesmo W_{p_i} , temos, pela escolha de $\delta > 0$, que $\|p - q\| \geq \delta$. Neste caso, se os segmentos das retas normais, centrados em p e q com comprimentos 2ε , se encontrassem em um ponto $Q \in \mathbb{R}^3$, teríamos

$$\delta \leq d(p, q) \leq d(p, Q) + d(Q, q) \leq 2\varepsilon,$$

contradizendo a escolha de ε .

Observe, também, que, para todo $i = 1, \dots, k$, $\bigcup_{p \in W_{p_i}} I_p$, onde I_p é o segmento de reta normal centrada em p com comprimento 2ε , é, pela proposição 6.1, um aberto de \mathbb{R}^3 , pois $0 < \varepsilon < \varepsilon_{p_i}$.

Portanto, $V = \bigcup_{p \in W_{p_1} \cup \dots \cup W_{p_k}} I_p$ é um aberto de \mathbb{R}^3 que contém S . ■

Juntando as proposições 6.2 e 6.6, obtemos o seguinte teorema, que é o objetivo central desta seção.

Teorema 6.1 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, compacta e orientável. Então existe uma função diferenciável $g : V \rightarrow \mathbb{R}$, definida em um aberto V de \mathbb{R}^3 , com $S \subset V$ (uma vizinhança tubular de S), que tem zero como valor regular e é tal que $S = g^{-1}(0)$.*

Observação 6.1 É possível provar a existência de uma vizinhança tubular para uma superfície orientável qualquer, isto é, mesmo se a superfície não é compacta. Portanto, o teorema acima é válido sem a restrição de compacidade. A demonstração, no entanto, é mais técnica, pois, no caso geral, o $\varepsilon_p > 0$ não é uma constante como no caso compacto, isto é, pode variar com p . Uma demonstração deste fato pode ser encontrada no livro de [Elon L. Lima](#), *Variedades Diferenciáveis*, Capítulo 3.

Observação 6.2 É possível provar que toda superfície regular compacta em \mathbb{R}^3 é *orientável*. Portanto, a hipótese de orientabilidade no teorema acima (caso compacto) é desnecessária.

Uma demonstração simples deste resultado pode ser vista no artigo de [Elon L. Lima](#), *Duas novas demonstrações do Teorema de Jordan-Brouwer no caso diferenciável*, Matemática Universitária, Nº 4, Sociedade Brasileira de Matemática, 1986, 89-105.

7. Uma Definição Geométrica da Área

Nesta seção daremos uma justificativa geométrica para a definição de área dada na seção 4. Seja R uma região limitada de uma superfície regular S e considere uma partição \mathcal{P} de R por um número finito de regiões R_i , isto é, $R = \bigcup R_i$, onde a interseção de duas regiões R_i ou é vazia ou é constituída de pontos da fronteira de ambas.

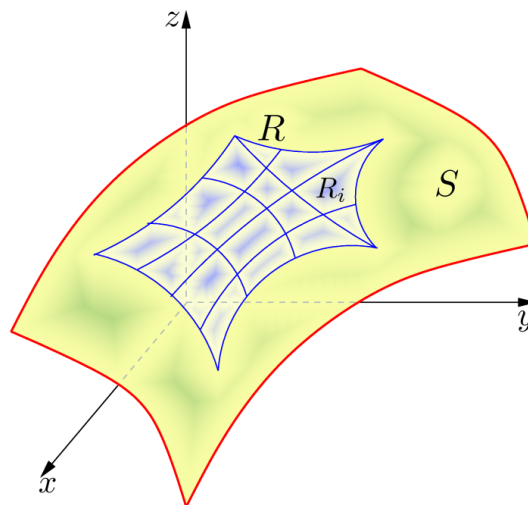


Fig. 48: Divisão da região R em sub-regiões, R_i , disjuntas dois a dois

O *diâmetro de R_i* é o supremo das distâncias em \mathbb{R}^3 de dois pontos quaisquer de R_i , e o maior dos diâmetros dos R_i de uma partição é chamada a *norma da partição* e se designa por $\mu(\mathcal{P})$.

Considerando uma partição de cada R_i , obtemos outra partição de R , chamada *refinamento da partição \mathcal{P}* .

Dada uma partição \mathcal{P} , $R = \bigcup R_i$, de R , escolhemos, para cada i , um ponto $p_i \in R_i$.

Seja \bar{R}_i a projeção de R_i sobre o plano tangente a S em p_i na direção da reta normal a S em p_i e seja $A(\bar{R}_i)$ sua área.

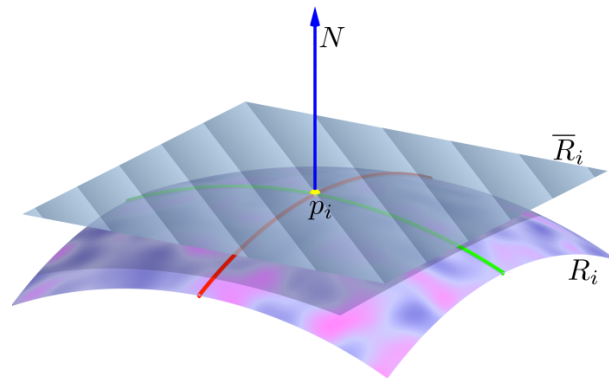


Fig. 49: Projeção ortogonal \bar{R}_i de R_i sobre o plano tangente a S em p_i

A soma $\sum_i A(\bar{R}_i)$ é uma aproximação do que entendemos intuitivamente por área de R .

Se, escolhendo partições $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n, \dots$ cada vez mais refinadas de \mathcal{P} tais que a norma $\mu_n = \mu(\mathcal{P}_n)$ tende a zero, existir o limite de $\sum_i A(\bar{R}_i)$ e esse limite for independente das escolhas feitas, dizemos que R tem área $A(R)$ dada por

$$A(R) = \lim_{\mu_n \rightarrow 0} \sum_i A(\bar{R}_i).$$

Mostraremos que toda região limitada de uma superfície regular contida numa vizinhança coordenada possui de fato uma área.

Proposição 7.1 *Seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de uma superfície regular S e seja $R = X(Q)$ uma região limitada de S contida em $X(U)$. Então R tem uma área dada por*

$$A(R) = \iint_Q \|X_u \wedge X_v\| \, du \, dv.$$

Prova.

Seja $R = \bigcup_i R_i$ uma partição de R . Como cada R_i é compacto (isto é, limitado e fechado) podemos refinar a partição dada de modo que as normais à superfície em dois pontos quaisquer de R_i , onde $R_i = \bigcup_j R_{ij}$, não sejam ortogonais.

De fato, como a aplicação $F : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$F((u, v), (\bar{u}, \bar{v})) = \left\langle \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(u, v), \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(\bar{u}, \bar{v}) \right\rangle,$$

é contínua, dado $(u_0, v_0) \in U$ existe um disco aberto $D(u_0, v_0)$ de centro (u_0, v_0) e raio $\delta(u_0, v_0) > 0$ contido em U , tal que $\langle N \circ X(u, v), N \circ X(\bar{u}, \bar{v}) \rangle \neq 0$ para todos $(u, v), (\bar{u}, \bar{v}) \in D(u_0, v_0)$, pois $F((u_0, v_0), (u_0, v_0)) = 1 \neq 0$.

Logo $R \subset \bigcup_{(u,v) \in Q} X(D(u,v))$, onde $X(D(u,v))$ é um aberto de S para todo $(u,v) \in Q$.

Seja $\delta > 0$ o número de Lebesgue da cobertura aberta $\{X(D(u,v)) \mid (u,v) \in Q\}$ do compacto R e seja $R_i = \bigcup_j R_{ij}$, para cada i , uma partição de R_i cuja norma μ_i seja menor que o número de Lebesgue δ .

Então, para cada i_j , existe $(u_{ij}, v_{ij}) \in Q$ tal que $R_{ij} \subset X(D(u_{ij}, v_{ij}))$. Portanto $\langle N(p), N(q) \rangle \neq 0$ para todos $p, q \in R_{ij}$.

Seja $R = \bigcup_k R_k$ um refinamento \mathcal{P}' da partição \mathcal{P} com a propriedade acima. E, para cada k , escolha um ponto $p_k \in R_k = X(Q_k)$.

Vamos agora calcular a área da projeção ortogonal \bar{R}_k de R_k sobre o plano tangente a S em p_k .

Para isso, seja N_k o vetor unitário normal a S em p_k dado por $N_k = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(u_k, v_k)$, onde $p_k = X(u_k, v_k)$ e sejam w_1^k, w_2^k vetores ortonormais de \mathbb{R}^3 tais que $\{w_1^k, w_2^k, N_k\}$ é uma base ortonormal positiva de \mathbb{R}^3 .

Então, para todo $(u, v) \in U$,

$$X(u, v) = p_k + \bar{x}(u, v) w_1^k + \bar{y}(u, v) w_2^k + \bar{z}(u, v) N_k,$$

onde $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} : U \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por

$$\begin{aligned} \bar{x}(u, v) &= \langle X(u, v) - p_k, w_1^k \rangle \\ \bar{y}(u, v) &= \langle X(u, v) - p_k, w_2^k \rangle \\ \bar{z}(u, v) &= \langle X(u, v) - p_k, N_k \rangle, \end{aligned}$$

são funções diferenciáveis em U .

Afirmção: $\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)} \neq 0$ em Q_k .

De fato, como

$$X_u = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \cdot w_1^k + \frac{\partial \bar{y}}{\partial u} \cdot w_2^k + \frac{\partial \bar{z}}{\partial u} \cdot N_k \quad e$$

$$X_v = \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \cdot w_1^k + \frac{\partial \bar{y}}{\partial v} \cdot w_2^k + \frac{\partial \bar{z}}{\partial v} \cdot N_k,$$

temos que:

$$\begin{aligned} X_u \wedge X_v &= \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \frac{\partial \bar{y}}{\partial v} - \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \frac{\partial \bar{y}}{\partial u} \right) w_1^k \wedge w_2^k + \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \frac{\partial \bar{z}}{\partial v} - \frac{\partial \bar{z}}{\partial u} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right) w_1^k \wedge N_k \\ &+ \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial u} \frac{\partial \bar{z}}{\partial v} - \frac{\partial \bar{z}}{\partial u} \frac{\partial \bar{y}}{\partial v} \right) w_2^k \wedge N_k \\ &= \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)} N_k - \frac{\partial(\bar{x}, \bar{z})}{\partial(u, v)} w_2^k + \frac{\partial(\bar{y}, \bar{z})}{\partial(u, v)} w_1^k. \end{aligned} \quad (11)$$

Logo, se $\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)}(u_0, v_0)$ fosse igual a zero para algum $(u_0, v_0) \in Q_k$, teríamos

$$X_u \wedge X_v(u_0, v_0) = -\frac{\partial(\bar{x}, \bar{z})}{\partial(u, v)}(u_0, v_0) w_2^k + \frac{\partial(\bar{y}, \bar{z})}{\partial(u, v)}(u_0, v_0) w_1^k,$$

e, portanto, o vetor normal a S em $X(u_0, v_0)$ seria ortogonal a N_k , contradizendo a hipótese sobre a direção das normais em R_k . A área de \bar{R}_k é dada por

$$A(\bar{R}_k) = \iint_{\bar{R}_k} d\bar{x} d\bar{y},$$

onde $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ são as coordenadas de um ponto com respeito ao sistema de eixos ortogonais $p_k \bar{x} \bar{y} \bar{z}$ em \mathbb{R}^3 com origem em p_k e eixos paralelos e com o mesmo sentido de w_1^k , w_2^k e N_k , respectivamente.

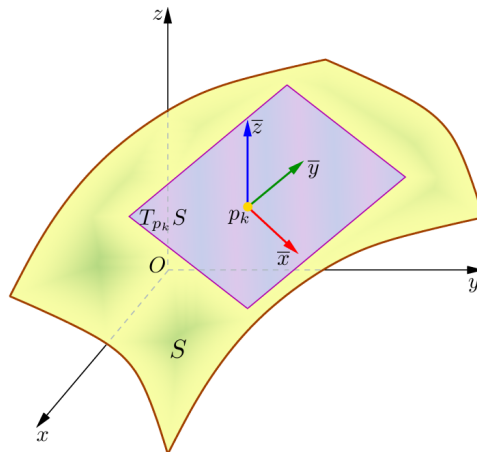


Fig. 50: Sistema $p_k \bar{x} \bar{y} \bar{z}$

Como $\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)}(u, v) > 0$ para todo $(u, v) \in Q_k$, pois, por (11),

$$\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)}(u_k, v_k) = \|X_u \wedge X_v\|(u_k, v_k) > 0, \quad (12)$$

podemos considerar a mudança de coordenadas $h : Q_k \longrightarrow \bar{R}_k$, dada por

$$h(u, v) = p_k + \bar{x}(u, v) w_1^k + \bar{y}(u, v) w_2^k,$$

e transformar a integral acima em

$$A(\bar{R}_k) = \iint_{Q_k} \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)} du dv.$$

Consideremos a aplicação contínua $L_k : Q_k \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$L_k(u, v) = \langle (X_u \wedge X_v)(u, v), N_k \rangle - \|X_u \wedge X_v\|(u, v) = \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)}(u, v) - \|X_u \wedge X_v\|(u, v), \quad (13)$$

onde $L_k(u_k, v_k) = 0$ por (12).

Sejam M_k e m_k o máximo e o mínimo da função contínua L_k na região compacta Q_k . Então,

$$m_k \leq \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)}(u, v) - \left| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right|(u, v) \leq M_k,$$

para todo $(u, v) \in Q_k$. Portanto,

$$m_k \iint_{Q_k} du dv \leq A(\bar{R}_k) - \iint_{Q_k} \left| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right| du dv \leq M_k \iint_{Q_k} du dv.$$

Procedendo da mesma maneira para todos os R_k , obtemos

$$\sum_k m_k A(Q_k) \leq \sum_k A(\bar{R}_k) - \iint_Q \left| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right| du dv \leq \sum_k M_k A(Q_k). \quad (14)$$

Afirmção: Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se \mathcal{P}' é um refinamento da partição P com norma $< \delta$, então

$$\left| \sum_k A(\bar{R}'_k) - \iint_Q \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\| du dv \right| < \varepsilon,$$

De fato, dados $(u_0, v_0) \in Q$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta(u_0, v_0) > 0$ tal que

$$|f((u, v), (u', v'))| < \varepsilon', \quad (15)$$

para todos $(u, v), (u', v') \in D(u_0, v_0)$, onde $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{A(Q)}$, $D(u_0, v_0)$ é o disco aberto de centro (u_0, v_0) e raio $\delta(u_0, v_0)$ e $f : Q \times Q \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função contínua dada por

$$f((u, v), (\bar{u}, \bar{v})) = \langle X_u \wedge X_v(u, v), \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(\bar{u}, \bar{v}) \rangle - \|X_u \wedge X_v\|(u, v),$$

pois $f((u_0, v_0), (u_0, v_0)) = 0$.

Então $R \subset \bigcup_{(u_0, v_0) \in Q} X(D(u_0, v_0))$, onde cada $X(D(u_0, v_0))$ é aberto em S .

Seja $\delta > 0$ o número de Lebesgue da cobertura aberta $\{X(D(u_0, v_0)) \mid (u_0, v_0) \in Q\}$ do compacto R , e, para cada k , seja $R_k = \bigcup_j R_{k_j}$ uma partição de R_k com norma $< \delta$.

Logo, para cada k_j , existe $(u_{k_j}, v_{k_j}) \in Q$ tal que $R_{k_j} \subset X(D(u_{k_j}, v_{k_j}))$.

Portanto, se $p_{k_j} \in R_{k_j}$, com $X(u_{k_j}^0, v_{k_j}^0) = p_{k_j}$ e $(u_{k_j}^0, v_{k_j}^0) \in D(u_{k_j}, v_{k_j})$, temos, por (15), que

$$\left| f((u, v), (u_{k_j}^0, v_{k_j}^0)) \right| < \varepsilon',$$

isto é,

$$\left| \langle X_u \wedge X_v(u, v), \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(u_{k_j}^0, v_{k_j}^0) \rangle - \|X_u \wedge X_v\|(u, v) \right| < \varepsilon',$$

para todo $(u, v) \in X^{-1}(R_{k_j}) = Q_{k_j}$.

Assim, para cada região R_{k_j} , temos

$$-\varepsilon' < \langle X_u \wedge X_v(u, v), N_{k_j} \rangle - \|X_u \wedge X_v\|(u, v) < \varepsilon',$$

para todo $(u, v) \in Q_{k_j}$, onde $N_{k_j} = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(u_{k_j}^0, v_{k_j}^0)$ e, portanto, por (13),

$$-\varepsilon' < L_{k_j}(u, v) < \varepsilon',$$

para todo $(u, v) \in Q_{k_j}$.

Como $M_{k_j} < \varepsilon'$, $m_{k_j} > -\varepsilon'$, temos, por (13), que

$$-\varepsilon' A(Q) < \sum_{k,j} A(\bar{R}_{k_j}) - \iint_Q \|X_u \wedge X_v\| \, du \, dv < \varepsilon' A(Q),$$

ou seja,

$$\left| \sum_{k,j} A(\bar{R}_{k_j}) - \iint_Q \|X_u \wedge X_v\| \, du \, dv \right| < \varepsilon.$$

Logo, existe o limite de $\sum_i A(\bar{R}_i)$, que é dado por

$$A(R) = \iint_Q \|X_u \wedge X_v\| \, du \, dv,$$

e é independente da escolha da partição \mathcal{P} inicial e dos pontos p_k em cada região de uma partição que refina \mathcal{P} . ■

Capítulo 4

A Geometria da Aplicação de Gauss

Como vimos no Capítulo 1, a taxa de variação da reta tangente a uma curva plana \mathcal{C} nos dá a curvatura, uma entidade geométrica importante. Neste capítulo, estenderemos essa idéia para superfícies regulares, isto é, mediremos o quão rapidamente uma superfície S se afasta do plano tangente $T_p S$, numa vizinhança de $p \in S$. Isto é equivalente a medir a taxa de variação em p de um campo vetorial normal unitário N em uma vizinhança de p . Como veremos na seção 2 deste capítulo, esta taxa de variação é dada por uma aplicação linear em $T_p S$, que é auto-adjunta. Mas antes faremos uma breve revisão sobre aplicações lineares auto-adjuntas e formas quadráticas.

1. Aplicações Lineares Auto-Adjuntas e Formas Quadráticas

Seja V um espaço vetorial de dimensão 2 munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dizemos que uma aplicação linear $A : V \rightarrow V$ é *auto-adjunta* se

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle,$$

para todos $u, v \in V$.

Se $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal de V e (a_{ij}) , $i, j = 1, 2$, é a matriz de A relativa a esta base, então

$$a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle = \langle e_j, Ae_i \rangle = \langle Ae_i, e_j \rangle = a_{ji},$$

isto é, a matriz (a_{ij}) é *simétrica*.

A cada aplicação linear *auto-adjunta* $A : V \rightarrow V$ *associamos* uma aplicação $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$,

definida por

$$B(v, w) = \langle Av, w \rangle,$$

que é *bilinear*, isto é, é linear em v e em w , e é *simétrica*, isto é,

$$B(v, w) = B(w, v),$$

pois $\langle Av, w \rangle = \langle Aw, v \rangle$.

Reciprocamente, se $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear e simétrica, então existe uma única aplicação linear $A : V \rightarrow V$ tal que

$$\langle Av, w \rangle = B(v, w),$$

para todos $u, v \in V$, que é auto-adjunta, pois

$$\langle Av, w \rangle = B(v, w) = B(w, v) = \langle Aw, v \rangle = \langle v, Aw \rangle,$$

para todos $u, v \in V$.

De fato, para cada $v \in V$ fixo, a função

$$w \mapsto B(v, w)$$

é linear. Portanto, existe um único vetor $Av \in V$ tal que

$$\langle Av, w \rangle = B(v, w),$$

para todo $w \in V$. A aplicação $A : V \rightarrow V$ assim definida é linear, pois

$$\begin{aligned} \langle A(v + \lambda v'), w \rangle &= B(v + \lambda v', w) = B(v, w) + \lambda B(v', w) \\ &= \langle Av, w \rangle + \lambda \langle Av', w \rangle = \langle Av + \lambda Av', w \rangle, \end{aligned}$$

para todo $w \in V$ e, portanto, $A(v + \lambda v') = Av + \lambda A(v')$ para quaisquer $v, v' \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, a cada forma bilinear simétrica $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ corresponde uma *forma quadrática* $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ em V dada por

$$Q(v) = B(v, v),$$

para todo $v \in V$. O conhecimento de Q determina B , pois

$$B(v, w) = \frac{1}{2}(Q(v + w) - Q(v) - Q(w)),$$

para todos $v, w \in V$.

Assim, provamos que existe uma bijeção entre as formas quadráticas em V e as aplicações lineares auto-adjuntas de V .

O nosso objetivo agora é provar que dada uma aplicação linear auto-adjunta $A : V \rightarrow V$, existe uma base ortonormal de V tal que a matriz de A relativa a esta base é uma matriz diagonal e que os elementos da diagonal são o máximo e o mínimo da forma quadrática correspondente restrita ao círculo unitário de V .

Lema 1.1 *Se a função $Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, restrita ao círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$, tem um máximo no ponto $(1, 0)$, então $b = 0$.*

Prova.

Sejam $\alpha : (-\varepsilon, 2\pi + \varepsilon) \rightarrow S^1$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, uma parametrização do círculo unitário $S^1 : x^2 + y^2 = 1$.

Então, como a função $Q \circ \alpha(t) = a \cos^2 t + 2b \cos t \sin t + c \sin^2 t$ tem um máximo em $t = 0$, temos

$$\frac{d}{dt}(Q \circ \alpha(t))|_{t=0} = 2b = 0,$$

isto é, $b = 0$. ■

Proposição 1.1 *Dada uma forma quadrática $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V tal que se $v \in V$ é dado por $v = xe_1 + ye_2$, então*

$$Q(v) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2,$$

onde λ_1 e λ_2 são o máximo e o mínimo, respectivamente, de Q sobre o círculo unitário $S^1 = \{w \in V \mid \|w\| = 1\}$ de V .

Prova.

Como S^1 é compacto e $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, existem $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ e $e_1 \in S^1$ tais que

$$\lambda_1 = Q(e_1) \geq Q(v),$$

para todo $v \in S^1$, isto é, λ_1 é o máximo de Q restrita a S^1 .

Seja e_2 um vetor unitário ortogonal a e_1 e seja $\lambda_2 = Q(e_2)$.

Se $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é a forma bilinear simétrica associada a Q e $v = xe_1 + ye_2$, temos

$$\begin{aligned} Q(v) &= B(v, v) = B(xe_1 + ye_2, xe_1 + ye_2) \\ &= B(e_1, e_1)x^2 + 2B(e_1, e_2)xy + B(e_2, e_2)y^2 \\ &= \lambda_1 x^2 + 2bxy + \lambda_2 y^2, \end{aligned}$$

onde $b = B(e_1, e_2)$.

Então, como $(1, 0)$ é um ponto de máximo da função $(x, y) \mapsto \lambda_1 x^2 + 2bxy + \lambda_2 y^2$ restrita ao círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$, temos, pelo lema 1.1, que $b = 0$.

Basta agora verificar que λ_2 é o mínimo de Q sobre o círculo unitário de V . Para isso, tomemos $v = xe_1 + ye_2$ com $x^2 + y^2 = 1$. Então

$$Q(v) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \geq \lambda_2 (x^2 + y^2) = \lambda_2,$$

já que $\lambda_1 \geq \lambda_2$. ■

Dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um *autovalor* de uma aplicação linear $A : V \rightarrow V$ se existe um vetor $v \in V - \{0\}$ tal que $Av = \lambda v$. E, no caso em que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de A , todo vetor $w \in V$ tal que $Aw = \lambda w$ é chamado um *autovetor* de A associado ao autovalor λ .

Teorema 1.1 *Seja $A : V \rightarrow V$ uma aplicação linear auto-adjunta. Então existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V tal que $A(e_1) = \lambda_1 e_1$, $A(e_2) = \lambda_2 e_2$ (isto é, e_1 e e_2 são autovetores de A relativos aos autovalores λ_1 e λ_2 , respectivamente). A matriz de A relativa à base $\{e_1, e_2\}$ é diagonal e os elementos λ_1 e λ_2 , $\lambda_1 \geq \lambda_2$, da diagonal são o máximo e o mínimo, respectivamente, da forma quadrática $Q(v) = \langle Av, v \rangle$ sobre o círculo unitário de V .*

Prova.

Pela proposição 1.1, para a forma quadrática $Q(v) = \langle Av, v \rangle$, existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V tal que $Q(e_1) = \lambda_1$, $Q(e_2) = \lambda_2$, $\lambda_2 \leq \lambda_1$, onde λ_1 e λ_2 são, respectivamente, o máximo e o mínimo de Q sobre o círculo unitário de V .

Resta, então, provar que

$$A(e_1) = \lambda_1 e_1 \quad \text{e} \quad A(e_2) = \lambda_2 e_2.$$

Como $B(e_1, e_2) = \langle Ae_1, e_2 \rangle = 0$, pelo lema 1.1, e $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal de V , temos que $A(e_1)$ é um múltiplo de e_1 , isto é, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $A(e_1) = \alpha e_1$. Logo,

$$\lambda_1 = B(e_1, e_1) = \langle Ae_1, e_1 \rangle = \langle \alpha e_1, e_1 \rangle = \alpha,$$

isto é, $A(e_1) = \lambda_1 e_1$.

De modo análogo, como $B(e_1, e_2) = \langle Ae_2, e_1 \rangle = 0$ e $\lambda_2 = B(e_2, e_2) = \langle Ae_2, e_2 \rangle$, podemos provar que $A(e_2) = \lambda_2 e_2$. ■

2. A Definição da Aplicação de Gauss e suas Propriedades Fundamentais

Como vimos no Capítulo 3, uma superfície regular S é orientável se ela admite um campo diferenciável de vetores normais unitários definido em toda a superfície, e a escolha de um tal campo $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é chamada uma orientação de S .

Observação 2.1 Uma orientação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ em S induz uma orientação em cada plano tangente $T_p S$, $p \in S$, da seguinte maneira.

Definimos uma base $\{v, w\}$ de $T_p S$ como sendo positiva se $\langle v \wedge w, N(p) \rangle$ é positivo. Então o conjunto de todas as bases positivas de $T_p S$ é uma orientação de $T_p S$.

De fato, seja $\{v, w\}$ uma base positiva de $T_p S$ e $\{v', w'\}$ uma base de $T_p S$. Então, se $v' = av + bw$ e $w' = cv + dw$, temos que

$$\langle v' \wedge w', N(p) \rangle = \langle (av + bw) \wedge (cv + dw), N(p) \rangle = (ad - bc) \langle v \wedge w, N(p) \rangle,$$

e, portanto, $\{v', w'\}$ é uma base positiva de $T_p S$ se, e só se, $\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc > 0$, isto é, se, e só se, $\{v', w'\}$ tem a mesma orientação de $\{v, w\}$.

Ao longo deste capítulo, S será uma superfície regular orientável na qual foi escolhida uma orientação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Diremos simplesmente que S é uma superfície com uma orientação N .

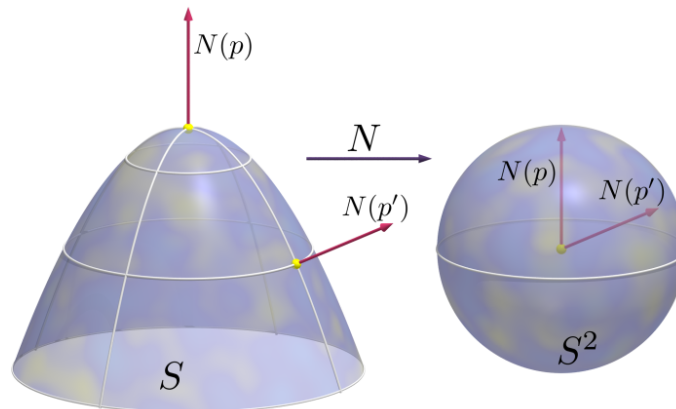


Fig. 1: Aplicação normal de Gauss $N : S \rightarrow S^2$

Definição 2.1 Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com uma orientação N . A aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ toma seus valores na esfera unitária

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

A aplicação $N : S \rightarrow S^2$, assim definida, é chamada a *aplicação de Gauss* de S .

Observação 2.2 A aplicação de Gauss $N : S \rightarrow S^2$ é diferenciável.

De fato, a aplicação $N : S \rightarrow S^2$ é contínua e se $X : U \rightarrow X(U) \subset S$ é uma parametrização de S em p , $p \in S$, e $Y : V \rightarrow Y(V) \subset S^2$ é uma parametrização de S^2 em $N(p)$ tais que $N(X(U)) \subset Y(V)$, então a aplicação

$$Y^{-1} \circ N \circ X : U \rightarrow V$$

é diferenciável, pois $N \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é diferenciável, e Y^{-1} é a restrição de uma aplicação diferenciável definida num aberto de \mathbb{R}^3 .

Sejam $p \in S$ e $dN_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} S^2$ a diferencial de N em p . Como $T_{N(p)} S^2 = T_p S$, pois $T_{N(p)} S^2$ é o plano perpendicular a $N(p)$ pelo exemplo 5.4, do Capítulo 3, dN_p pode ser vista como uma aplicação linear em $T_p S$.

Seja $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ a diferencial da aplicação de Gauss em p e seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ uma curva diferenciável com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v \in T_p S$. Então $dN_p(v) = N'(0) \in T_p S$, onde $N(t) = N \circ \alpha(t)$, mede a taxa de variação com que N , restrita à curva α , muda de direção numa vizinhança de $t = 0$.

Assim, dN_p mede quanto N se afasta de $N(p)$ numa vizinhança de p , isto é, mede quanto S se afasta de $T_p S$ numa vizinhança de p .

No caso das curvas, esta medida é dada por um número, a curvatura. Já para as superfícies, esta medida é dada por uma aplicação linear, a diferencial $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ de N no ponto $p \in S$.

Proposição 2.1 A diferencial $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ da aplicação normal de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.

Prova.

Como dN_p é linear, basta provar que $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$ para uma base $\{w_1, w_2\}$ de $T_p S$.

De fato, se $v = aw_1 + bw_2$ e $w = cw_1 + dw_2$ são vetores tangentes a S em p , então:

$$\begin{aligned} \langle dN_p(v), w \rangle &= \langle dN_p(aw_1 + bw_2), cw_1 + dw_2 \rangle \\ &= ac \langle dN_p(w_1), w_1 \rangle + ad \langle dN_p(w_1), w_2 \rangle + bc \langle dN_p(w_2), w_1 \rangle + bd \langle dN_p(w_2), w_2 \rangle \\ &= ac \langle w_1, dN_p(w_1) \rangle + ad \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle + bc \langle w_2, dN_p(w_1) \rangle + bd \langle w_2, dN_p(w_2) \rangle \\ &= \langle aw_1 + bw_2, dN_p(cw_1 + dw_2) \rangle. \end{aligned}$$

Seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S em p , com $X(q) = p$, e seja $\{X_u(q), X_v(q)\}$ a base de $T_p S$ associada a X .

Se $\alpha : I \rightarrow X(U)$, $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, é uma curva parametrizada diferenciável em S , com $\alpha(0) = p$, temos

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q)) = \frac{d}{dt}(N \circ X(u(t), v(t)))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \bar{N}(u(t), v(t))\Big|_{t=0} = \bar{N}_u(q)u'(0) + \bar{N}_v(q)v'(0), \end{aligned}$$

onde $\bar{N} = N \circ X$.

Logo $dN_p(X_u(q)) = \bar{N}_u(q)$ e $dN_p(X_v(q)) = \bar{N}_v(q)$.

Como $\langle \bar{N}, X_u \rangle = \langle \bar{N}, X_v \rangle \equiv 0$ em U temos, derivando essas expressões em relação a v e u , respectivamente, que:

$$\langle \bar{N}_v, X_u \rangle + \langle \bar{N}, X_{uv} \rangle = 0$$

e
$$\langle \bar{N}_u, X_v \rangle + \langle \bar{N}, X_{vu} \rangle = 0.$$

Assim, $\langle \bar{N}_v, X_u \rangle = \langle \bar{N}_u, X_v \rangle$, isto é,

$$\langle dN_p(X_v(q)), X_u(q) \rangle = \langle X_v(q), dN_p(X_u(q)) \rangle,$$

como queríamos provar. ■

Exemplo 2.1 Seja o plano $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\}$, onde $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Então, o campo de vetores normais unitários $N(x, y, z) = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ é constante e, portanto,

$dN \equiv 0$, isto é, todo vetor de $T_p S$ é um autovetor associado ao autovalor zero. □

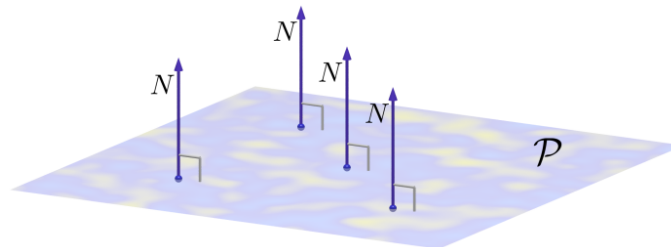


Fig. 2: Campo de vetores normais unitários ao plano \mathcal{P}

Exemplo 2.2 Já vimos, no exemplo 5.4 do Capítulo 3, que

$$\bar{N}(x, y, z) = (x, y, z) \quad \text{e} \quad N(x, y, z) = (-x, -y, -z)$$

são os dois campos diferenciáveis normais unitários da esfera unitária S^2 .

Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, uma curva diferenciável com $\alpha(0) = p \in S^2$ e $\alpha'(0) = v \in T_p S^2$. Então

$$d_p N(v) = dN_p(x'(0), y'(0), z'(0)) = \frac{d}{dt} N(t) \Big|_{t=0} = (-x'(0), -y'(0), -z'(0)) = -v,$$

onde $N(t) = N \circ \alpha(t) = (-x(t), -y(t), -z(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Assim, todo vetor de $T_p S^2$ é um autovetor de dN_p associado ao autovalor -1 .

Para \bar{N} , temos $d\bar{N}_p(v) = v$ para todo $p \in S^2$ e todo $v \in T_p S^2$, isto é, todo vetor de $T_p S^2$ é um autovetor de $d\bar{N}_p$ associado ao autovalor 1 . \square

Exemplo 2.3 Consideremos o cilindro $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Se $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{C}$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, é uma curva diferenciável com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v \in T_p \mathcal{C}$, então

$$x(t)^2 + y(t)^2 = 1 \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \implies 2x(0)x'(0) + 2y(0)y'(0) = 0 \implies \langle (x(0), y(0), 0), v \rangle = 0$$

Logo $\bar{N}(x, y, z) = (x, y, 0)$ e $N(x, y, z) = (-x, -y, 0)$ são os dois campos diferenciáveis de vetores normais unitários em \mathcal{C} e

$$T_{(x,y,z)} \mathcal{C} = \{\lambda(-y, x, 0) + \mu(0, 0, 1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

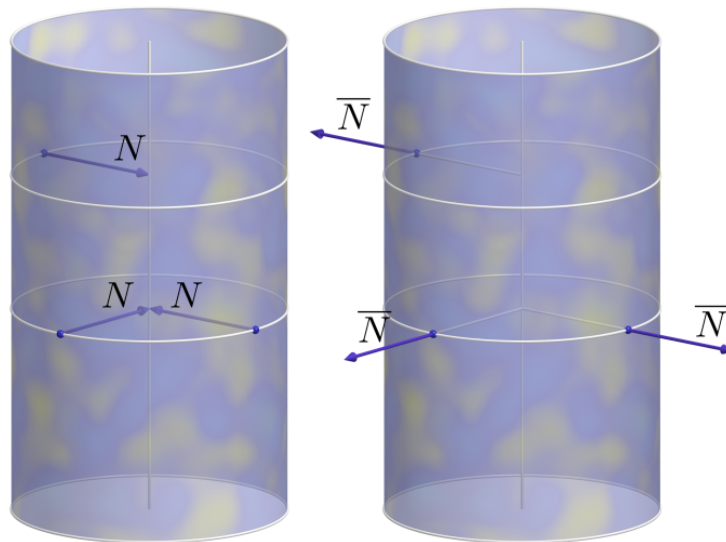


Fig. 3: Campos N e \bar{N} sobre o cilindro

Assim,

$$\begin{aligned} dN_p(v) &= dN_{\alpha(0)}(\alpha'(0)) = dN_p(x'(0), y'(0), z'(0)) \\ &= \frac{d}{dt}N(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(-x(t), -y(t), 0)|_{t=0} = (-x'(0), -y'(0), 0) = (-v_1, -v_2, 0), \end{aligned}$$

onde $N(t) = N \circ \alpha(t) = (-x(t), -y(t), 0)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$.

Logo,

- se v é um vetor tangente ao cilindro e paralelo ao eixo Oz , então

$$dN_p(v) = 0 = 0v,$$

isto é, v é um autovetor de dN_p associado ao autovalor zero;

- e se w é um vetor tangente ao cilindro e paralelo ao plano xy , então

$$dN_p(w) = -w,$$

isto é, w é um autovetor de dN_p associado ao autovalor -1 .

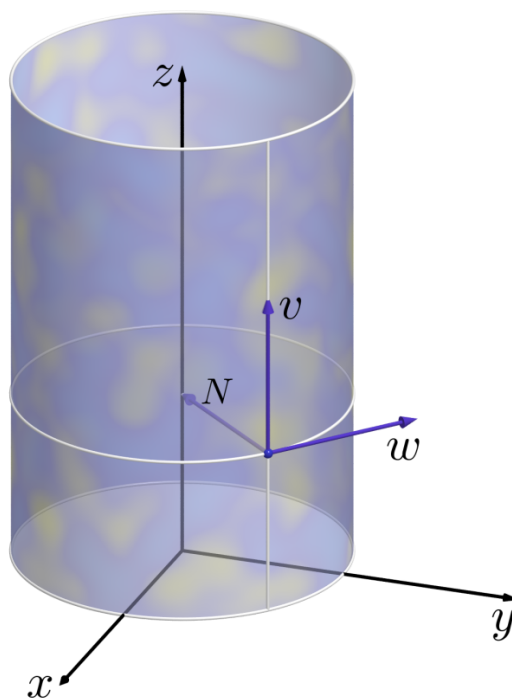


Fig. 4: Vetores N, v sobre o cilindro

Para \bar{N} temos $d\bar{N}(v) = (v_1, v_2, 0)$, para todo $p \in \mathcal{C}$ e $v = (v_1, v_2, v_3) \in T_p\mathcal{C}$, e, portanto, $(0, 0, \mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$, e $\lambda(-y, x, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, são os auto-vetores de $d\bar{N}_p$ associados aos autovalores 0 e 1, respectivamente. \square

Exemplo 2.4 Seja o parabolóide hiperbólico $\mathcal{P}_H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y^2 - x^2\}$.

Então $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}_H$, $X(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)$, é uma parametrização de \mathcal{P}_H tal que $X(\mathbb{R}^2) = \mathcal{P}_H$.
Como

$$X_u(u, v) = (1, 0, -2u) \quad \text{e} \quad X_v(u, v) = (0, 1, 2v),$$

temos que

$$N(X(u, v)) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(u, v) = \frac{(u, -v, \frac{1}{2})}{\sqrt{u^2 + v^2 + \frac{1}{4}}}$$

é um campo de vetores normais unitários diferenciável em \mathcal{P}_H .

Em $p = (0, 0, 0) = X(0, 0)$, temos que

$$N(p) = (0, 0, 1), \quad X_u(0, 0) = (1, 0, 0), \quad \text{e} \quad X_v(0, 0) = (0, 1, 0)$$

e, portanto, $T_p \mathcal{P}_H = \text{plano } xy$.

Seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t)) = (u(t), v(t), v(t)^2 - u(t)^2)$ uma curva diferenciável com

$$\alpha(0) = (0, 0, 0) = p \quad \text{e} \quad \alpha'(0) = v = (u'(0), v'(0), 0).$$

Então

$$\begin{aligned} dN_p(v) &= \left. \frac{d}{dt} N(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{(u(t), -v(t), \frac{1}{2})}{\sqrt{u(t)^2 + v(t)^2 + \frac{1}{4}}} \right) \right|_{t=0} \\ &= \frac{(u'(0), -v'(0), 0) \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = (2u'(0), -2v'(0), 0) = 2(a, -b, 0), \end{aligned}$$

onde $v = (a, b, 0)$. Segue-se que $v = (1, 0, 0)$ e $w = (0, 1, 0)$ são autovetores de dN_p associados aos autovalores 2 e -2 , respectivamente. \square

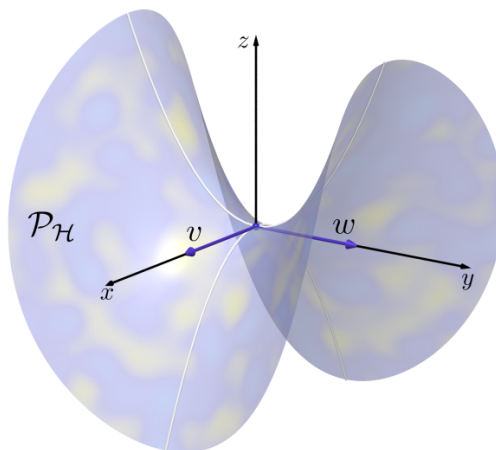


Fig. 5: Autovetores v e w de $dN_{(0,0,0)}$

Exemplo 2.5 Seja o parabolóide

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + ky^2\},$$

onde $k > 0$, e seja a função diferenciável $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x, y, z) = x^2 + ky^2 - z.$$

Então

$$\text{grad } F(x, y, z) = (2x, 2ky, -1) \neq (0, 0, 0)$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Portanto, 0 é valor regular de F e $\mathcal{P} = F^{-1}(0)$ é uma superfície regular.

Pela proposição 5.2,

$$N(x, y, z) = -\frac{\text{grad } F}{\|\text{grad } F\|}(x, y, z) = \frac{(-2x, -2ky, 1)}{\sqrt{4x^2 + 4k^2y^2 + 1}}$$

é um campo diferenciável de vetores normais unitários em \mathcal{P} .

Logo, em $p = (0, 0, 0)$, $N(p) = (0, 0, 1)$ e $T_p\mathcal{P} = \text{plano } xy$.

Se $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, é uma curva diferenciável em \mathcal{P} , com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = (x'(0), y'(0), 0) = v = (a, b, 0)$, então

$$dN_p(v) = \frac{d}{dt}N(t)|_{t=0} = (-2x'(0), -2ky'(0), 0) = (-2a, -2kb, 0).$$

Assim, $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ são autovetores de dN_p associados aos autovalores -2 e $-2k$, respectivamente. \square

Associada à aplicação linear auto-adjunta $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$, temos a forma bilinear simétrica

$$B(v, w) = \langle dN_p(v), w \rangle, \quad \forall v, w \in T_pS,$$

e a forma quadrática

$$Q(v) = B(v, v) = \langle dN_p(v), v \rangle, \quad \forall v \in T_pS.$$

Para obter uma interpretação geométrica desta forma quadrática, precisamos de algumas definições. Por motivos que se tornarão claros depois, usaremos a forma quadrática $-Q$.

Definição 2.2 A forma quadrática $\mathbb{I}_p : T_pS \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mathbb{I}_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$, é chamada a *segunda forma fundamental de S em p* .

Definição 2.3 Seja \mathcal{C} uma curva regular em S que passa por p , $\kappa(p)$ a curvatura de \mathcal{C} em p e $\cos \theta = \langle \mathbf{n}(p), N(p) \rangle$, onde $\mathbf{n}(p)$ é o vetor normal a \mathcal{C} em p e $N(p)$ é o vetor normal a S em p . O número $\kappa_n(p) = \kappa(p) \cos \theta$ é chamado de *curvatura normal de \mathcal{C} em p* .

Observação 2.3 No caso em que $\kappa(p) = 0$, consideramos $\mathbf{n}(p) = 0$.

Observação 2.4 $\kappa_n(p) = \kappa(p) \langle \mathbf{n}(p), N(p) \rangle$ é o comprimento da projeção do vetor $\kappa(p)\mathbf{n}(p)$ sobre o vetor $N(p)$ com o sinal dado pela orientação $N(p)$ de S em p .

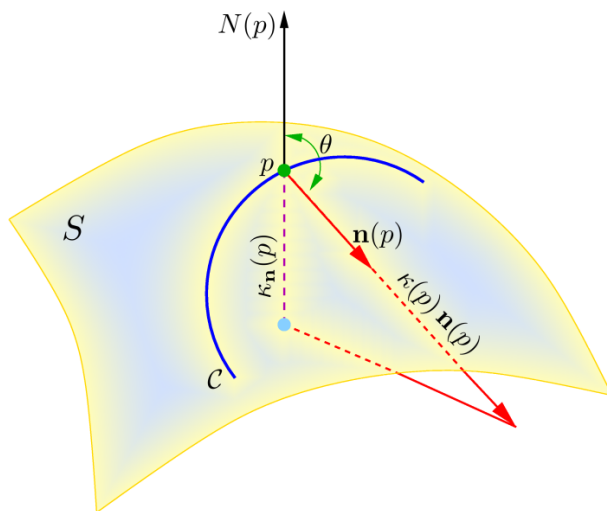


Fig. 6: κ_n é a projeção do vetor $\kappa \mathbf{n}$ sobre a normal N da superfície em p

Observação 2.5 A curvatura normal $\kappa_n(p)$ de \mathcal{C} em p não depende da orientação de \mathcal{C} , pois $\kappa(p)$ e $\mathbf{n}(p)$ não se alteram quando mudamos a orientação de \mathcal{C} , mas muda de sinal quando mudamos a orientação N da superfície para $-N$.

Observação 2.6 (Interpretação Geométrica da Segunda Forma Fundamental)

Seja \mathcal{C} uma curva regular em S , com $p \in \mathcal{C}$, e $\alpha : I \rightarrow \mathcal{C}$ uma parametrização de \mathcal{C} pelo comprimento de arco tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.

Seja $\bar{N}(s) = N \circ \alpha(s)$. Como $\langle \bar{N}(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ para todo $s \in I$, temos que

$$\langle \bar{N}(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle \bar{N}'(s), \alpha'(s) \rangle,$$

para todo $s \in I$. Logo,

$$\begin{aligned} \Pi_p(v) &= \Pi_p(\alpha'(0)) = -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle = -\langle \bar{N}'(0), \alpha'(0) \rangle \\ &= \langle \bar{N}(0), \alpha''(0) \rangle = \langle N(p), \kappa(p)\mathbf{n}(p) \rangle = \kappa_n(p). \end{aligned}$$

Assim, o valor de Π_p em um vetor unitário $v \in T_p S$ é igual à curvatura normal de qualquer curva regular em S que passa por p e é tangente a v em p .

Proposição 2.2 (Meusnier) *Todas as curvas regulares de uma superfície S que passam por $p \in S$ e têm a mesma reta tangente neste ponto, possuem a mesma curvatura normal em p .*

- A proposição acima nos permite definir a curvatura normal de S no ponto $p \in S$ segundo uma dada direção v em $T_p S$ da seguinte maneira:

$$\kappa_{\mathbf{n}_p}(v) = \frac{\Pi_p(v)}{I_p(v)}, \quad v \in T_p S - \{0\}.$$

Observe que $\kappa_{\mathbf{n}_p}(v) = \kappa_{\mathbf{n}_p}(\lambda v)$ para todo $v \in T_p S - \{0\}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definição 2.4 Seja $v \in T_p S$ um vetor unitário e seja $\pi(N(p), v)$ o plano que passa por p e é paralelo aos vetores v e $N(p)$. A interseção $S \cap \pi(N(p), v)$ é chamada **seção normal de S em p ao longo de v** .

- Numa vizinhança de p , a seção normal de S em p é uma curva regular (ver observação 2.8) em S que passa por p cujo vetor normal $\mathbf{n}(p)$ é $\pm N(p)$ ou zero, no caso em que $\kappa(p) = 0$. Então $\kappa(p)$ é o módulo da curvatura normal ao longo de v em p .

Assim, o valor absoluto da curvatura normal em p de uma curva regular α é igual à curvatura da seção normal de S em p ao longo de $\alpha'(0)$.

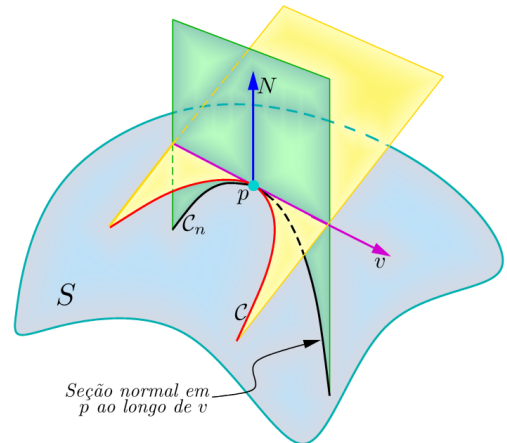


Fig. 7: Representação do teorema de Meusnier, as curvas C e C_n têm a mesma curvatura normal em p ao longo de v

Observação 2.7 Estamos considerando a curva plana $C \cap \pi(N(p), v)$ como uma curva no espaço e, portanto, $\kappa(p) \geq 0$.

Observação 2.8 Sejam S_1 e S_2 superfícies regulares tais que $p_0 \in S_1 \cap S_2$ e $T_{p_0} S_1 \neq T_{p_0} S_2$, isto é, S_1 e S_2 se intersectam transversalmente em p_0 . Então $S_1 \cap S_2$, numa vizinhança de p_0 , é uma curva regular.

De fato, como toda superfície regular é localmente o gráfico de uma função diferenciável, temos que toda superfície regular é localmente a imagem inversa de um valor regular de uma função diferenciável definida num aberto de \mathbb{R}^3 .

Sejam V_1 e V_2 abertos de S_1 e S_2 , respectivamente, tais que $p_0 \in V_1 \cap V_2$, e $f, g : W \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis definidas num aberto W de \mathbb{R}^3 , tais que 0 é um valor regular de f e g , $f^{-1}(0) = V_1$ e $g^{-1}(0) = V_2$.

Consideremos a aplicação $H : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$H(p) = (f(p), g(p)).$$

Como $\text{grad } f(p_0)$ e $\text{grad } g(p_0)$ são vetores não-nulos normais a S_1 e S_2 em p_0 , respectivamente, temos $\text{grad } f(p_0) \wedge \text{grad } g(p_0) \neq (0, 0, 0)$, pois $T_{p_0}S_1 \neq T_{p_0}S_2$.

Logo existe um aberto $W' \subset W$ tal que $p_0 \in W'$ e $\text{grad } f(p) \wedge \text{grad } g(p) \neq (0, 0, 0)$ para todo $p \in W'$, isto é, $\text{grad } f(p)$ e $\text{grad } g(p)$ são LI em W' .

Sejam $V'_1 = W' \cap S_1$ e $V'_2 = W' \cap S_2$ abertos de S_1 e S_2 , respectivamente. Então

$$\begin{aligned} (H|_{W'})^{-1}(0, 0) &= (f|_{W'})^{-1}(0) \cap (g|_{W'})^{-1}(0) \\ &= (V_1 \cap W') \cap (V_2 \cap W') \\ &= V'_1 \cap V'_2 = (S_1 \cap S_2) \cap W'. \end{aligned}$$

Além disso, $(0, 0)$ é um valor regular de $H|_{W'}$, pois

$$dH_p = \begin{pmatrix} f_x(p) & f_y(p) & f_z(p) \\ g_x(p) & g_y(p) & g_z(p) \end{pmatrix}$$

é uma matriz de posto 2, já que $\text{grad } f(p)$ e $\text{grad } g(p)$ são LI para todo $p \in W'$.

Logo, pelo item (b) do exercício 17 da seção 2.2,

$$(H|_{W'})^{-1}(0, 0) = (S_1 \cap S_2) \cap W'$$

é uma curva regular em \mathbb{R}^3 .

Exemplo 2.6 Consideremos a superfície de revolução S obtida girando a curva $\mathcal{C} : \begin{cases} z = y^4 \\ x = 0 \end{cases}$

em torno do eixo Oz .

Vamos mostrar que $dN_p \equiv 0$ em $p = (0, 0, 0) \in S$. Primeiro, observe que a curvatura de \mathcal{C} na origem é zero, pois, para a parametrização regular $\alpha(t) = (0, t, t^4)$ de \mathcal{C} , temos

$$\kappa(0) = \frac{|-y''(0)z'(0) + y'(0)z''(0)|}{(y'(0)^2 + z'(0)^2)^{3/2}} = 0,$$

já que $\alpha'(0) = (0, 1, 0)$ e $\alpha''(0) = (0, 0, 0)$.

Além disso, como $S : z = (x^2 + y^2)^2$, temos que $F^{-1}(0) = S$, onde 0 é valor regular da função diferenciável $F(x, y, z) = z - (x^2 + y^2)^2$.

Logo $N(p) = \frac{\text{grad } F}{\|\text{grad } F\|}(p)$ é um campo diferenciável de vetores normais unitários em S . Em particular, $T_p S =$ plano xy , pois $N(0, 0, 0) = \frac{\text{grad } F}{\|\text{grad } F\|}(0, 0, 0) = (0, 0, 1)$.

Portanto, qualquer seção normal a S em p é obtida girando a curva \mathcal{C} em torno do eixo Oz de um ângulo θ , sendo, assim, congruente a \mathcal{C} .

Logo, toda seção normal a S em p tem curvatura zero em p . Portanto, $\text{II}_p(v) = 0$ para todo $v \in T_p S$.

Assim, pelo teorema 1.1, o zero é o único autovalor de dN_p , isto é, $dN_p \equiv 0$. \square

Exemplo 2.7 Se S é um plano, então todas as seções normais a S são retas. Portanto, todas as curvaturas normais são nulas. Logo a segunda forma fundamental de S é identicamente nula em todos os pontos, ou seja, $dN_p = 0$ para todo $p \in S$. \square

Exemplo 2.8 Seja a esfera unitária $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ com a orientação $N : S^2 \rightarrow S^2$ dada por $N(p) = -p$.

Então toda seção normal \mathcal{C} a S^2 é um círculo centrado na origem e, portanto, de raio 1 e curvatura igual a 1 em todos os pontos. Além disso, como $n(p) = N(p)$ para todo ponto $p \in \mathcal{C}$, temos que todas as curvaturas normais são iguais a 1, isto é, $\text{II}_p(v) = 1$ para todo $p \in S^2$ e todo $v \in T_p S$ com $\|v\| = 1$.

Assim, -1 é o único autovalor de dN_p , ou seja, $dN_p(v) = -v$ e $\text{II}_p(v) = \langle v, v \rangle$ para todo $p \in S^2$ e todo $v \in T_p S^2$. \square

Exemplo 2.9 Seja $S : x^2 + y^2 = 1$ o cilindro circular com a orientação $N : S \rightarrow S^2$ dada por $N(x, y, z) = (-x, -y, 0)$.

Se $p = (a, b, c) \in S$, então $T_p S$ é o plano gerado pelos vetores $v_1 = (-b, a, 0)$ e $v_2 = (0, 0, 1)$ (ver exemplo 2.3).

A curvatura normal no ponto $p = (a, b, c) \in S$ segundo a direção $v_1 = (-b, a, 0)$ é igual a 1, pois a seção normal, C_1 , a S em p na direção v_1 é um círculo de raio 1 com $n(p) = N(p)$.

A curvatura normal a S em p segundo a direção $v_2 = (0, 0, 1)$ é igual a zero, pois a seção normal, C_2 , a S em p na direção v_2 é uma reta e, portanto, tem curvatura zero.

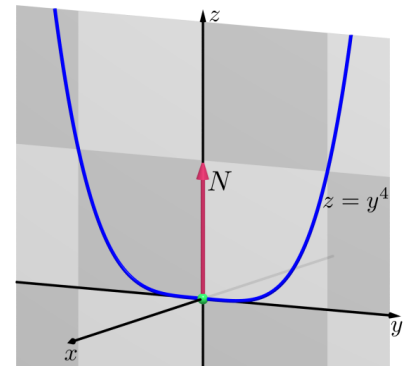


Fig. 8: Gráfico da função $z = y^4$

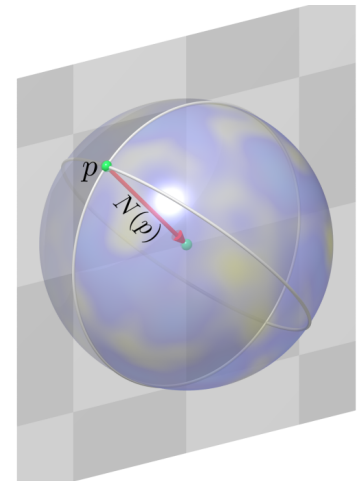


Fig. 9: A normal no ponto p aponta para dentro da esfera

Como

$$dN_p(x, y, z) = -(x, y, 0),$$

temos que $dN_p(v_1) = -v_1$ e $dN_p(v_2) = 0 \cdot v_2$.

Então, pelo teorema 1.1, 0 é o mínimo e 1 é o máximo da segunda forma fundamental de S em p no círculo unitário de $T_p S$, pois 0 e 1 são os autovalores de $-dN_p$. Assim, as outras seções normais a S em p , que são elipses, tem curvatura $0 < \kappa(p) = \kappa_{\mathbf{n}}(w) < 1$, onde w é a direção tangente à elipse em p . \square

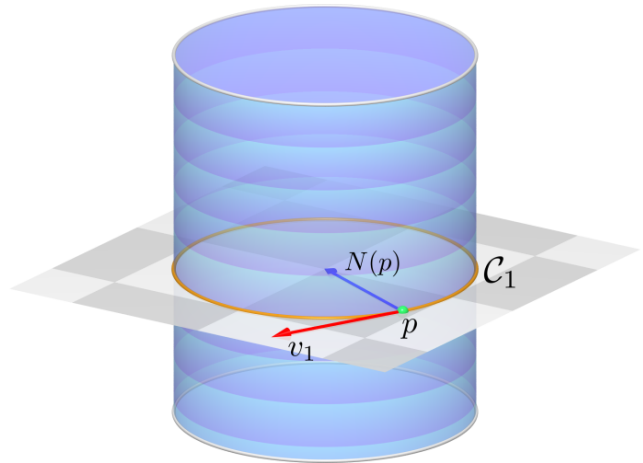


Fig. 10: A normal no ponto p aponta para dentro do cilindro

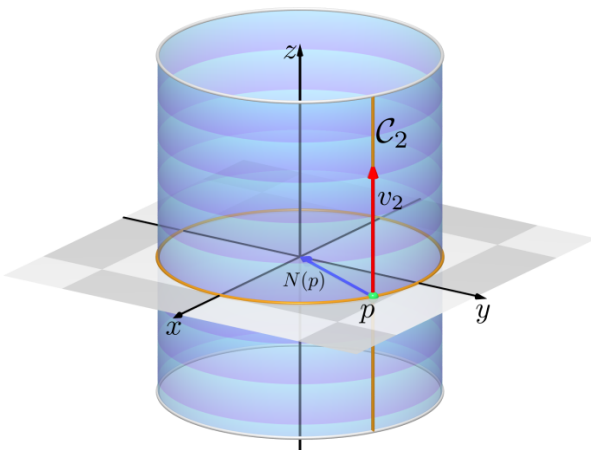


Fig. 11: A normal no ponto p aponta para dentro do cilindro

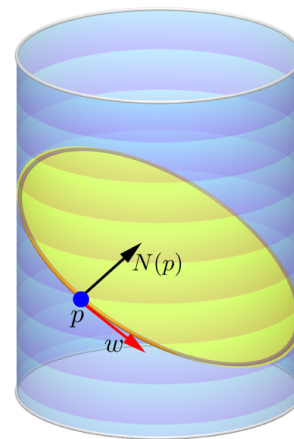


Fig. 12: A normal no ponto p aponta para dentro do cilindro

Exemplo 2.10 Seja o parabolóide hiperbólico $\mathcal{P}_{\mathcal{H}} : z = y^2 - x^2$ com a orientação

$$N : \mathcal{P}_{\mathcal{H}} \longrightarrow S^2$$

$$N(x, y, z) = \frac{(2x, -2y, 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Então, em $p = (0, 0, 0)$, $N(p) = (0, 0, 1)$, $T_p \mathcal{P}_{\mathcal{H}} = \text{plano } xy$ e $dN_p(v) = (2v_1, -2v_2, 0)$, onde $v = (v_1, v_2, 0)$.

Logo,

- $v_1 = (1, 0, 0)$ é um autovetor de $-dN_p$ associado ao autovalor -2 , e a seção normal a $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ em p na direção v_1 é a parábola $\alpha : \begin{cases} z = -x^2 \\ y = 0 \end{cases}$ com curvatura igual a 2 na origem ($\mathbf{n}_{\alpha}(p) = -N(p)$);

e

- $v_2 = (0, 1, 0)$ é um autovetor de $-dN_p$ associado ao autovalor 2, e a seção normal a \mathcal{P}_H em p na direção v_2 é a parábola $\beta : \begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ com curvatura igual a 2 na origem ($\mathbf{n}_\beta = N(p)$).

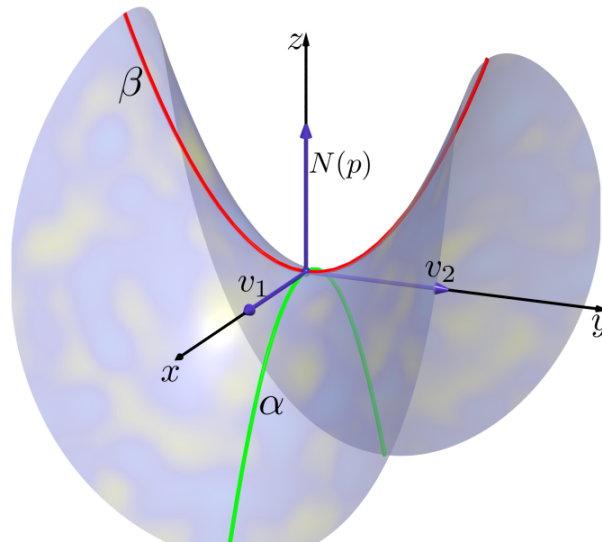


Fig. 13: Autovetores de $-dN_p$

Como $dN_p(v_1) = 2v_1$ e $dN_p(v_2) = -2v_2$, temos que $\Pi_p(w) = \Pi_p(xv_1 + yv_2) = -2x^2 + 2y^2$ para todo $w \in T_p\mathcal{P}_H$, com $\|w\| = 1$.

Portanto, $-2 \leq \kappa_{\mathbf{n}_p}(w) \leq 2$ para todo $w \in T_p\mathcal{P}_H - \{0\}$. \square

- Sejam $dN_p : T_pS \rightarrow \mathbb{R}^2$ a diferencial de $N : S \rightarrow S^2$ em p , e $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal de autovetores de dN_p tal que $dN_p(e_1) = -\kappa_1 e_1$, $dN_p(e_2) = -\kappa_2 e_2$, com $\kappa_1 \geq \kappa_2$. Então,

$$\Pi_p(xe_1 + ye_2) = \kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2,$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, com $x^2 + y^2 = 1$, isto é, κ_1 é o máximo e κ_2 é o mínimo das curvaturas normais a S em p .

Definição 2.5 A curvatura normal máxima κ_1 e a curvatura normal mínima κ_2 são chamadas *curvaturas principais* de S em p , e as direções dadas pelos autovetores e_1 e e_2 são chamadas *direções principais* de S em p .

Exemplo 2.11

- Num plano, todas as direções em todos os pontos são principais, pois $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) = 0$, e, portanto, $\kappa_{\mathbf{n}_p}(v) = 0$ para todo p e toda direção v .
- O mesmo ocorre para a esfera S^2 , pois $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) = 1$ e, portanto, $\kappa_{\mathbf{n}_p}(v) = 1$ para todo $p \in S^2$ e todo $v \in T_pS^2 - \{0\}$.

- No cilindro, os vetores $v_1 = (-b, a, 0)$ e $v_2 = (0, 0, 1)$ fornecem as direções principais no ponto $p = (a, b, c)$, correspondentes às curvaturas principais 1 e 0, respectivamente.
- No parabolóide hiperbólico, os vetores $v_1 = (1, 0, 0)$ e $v_2 = (0, 1, 0)$ fornecem as direções principais no ponto $p = (0, 0, 0)$, com curvaturas principais -2 e $+2$, respectivamente. \square

Definição 2.6 Dizemos que uma curva regular conexa $\mathcal{C} \subset S$ é uma *linha de curvatura* de S se, para cada ponto $p \in \mathcal{C}$, a direção da reta tangente a \mathcal{C} em p é uma direção principal de S em p .

Proposição 2.3 (Olinde Rodrigues)

Uma curva regular conexa $\mathcal{C} \subset S$ é uma linha de curvatura se, e só se,

$$\bar{N}'(t) = \lambda(t) \alpha'(t),$$

para toda parametrização regular $\alpha(t)$ de \mathcal{C} , onde $\bar{N}(t) = N \circ \alpha(t)$ e $\lambda(t)$ é uma função diferenciável de t . Neste caso, $-\lambda(t)$ é a curvatura normal (principal) de S em $\alpha(t)$ segundo $\alpha'(t)$.

Prova.

A curva \mathcal{C} é uma linha de curvatura de $S \iff \alpha'(t)$ é uma direção principal de S em $\alpha(t) \iff \alpha'(t)$ é um autovetor de $dN_{\alpha(t)} \iff$ existe $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{N}'(t) = dN_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = \lambda(t)\alpha'(t)$.

Além disso, como $\alpha'(t) \neq 0$, a função $\lambda(t) = \frac{\langle \bar{N}'(t), \alpha'(t) \rangle}{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle}$ é diferenciável. \blacksquare

- O conhecimento das curvaturas principais de S em p , permite calcular a curvatura normal em p segundo qualquer direção dada de $T_p S$.

De fato, seja $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal positiva de $T_p S$ formada de autovalores de dN_p , com $dN_p(e_1) = -\kappa_1 e_1$, $dN_p(e_2) = -\kappa_2 e_2$ e $\kappa_1 \geq \kappa_2$.

Então, se $v \in T_p S$ é unitário, temos que $v = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$, onde θ é o ângulo de e_1 a v na orientação de $T_p S$.

Logo, a curvatura normal κ_n em p na direção v é dada por:

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \Pi_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle = -\langle dN_p(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2), \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \rangle \\ &= \langle \kappa_1 \cos \theta e_1 + \kappa_2 \sin \theta e_2, \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \rangle = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

que é conhecida sob o nome de *fórmula de Euler*.

Observação 2.9 Sejam V um espaço vetorial de dimensão dois, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ uma base de V , $A : V \rightarrow V$ uma aplicação linear e $[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ a matriz da aplicação A na base \mathcal{B} , onde

$$\begin{aligned} A(v_1) &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 \\ A(v_2) &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2. \end{aligned}$$

Então

$$\det(A) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \quad \text{e} \quad \text{traço}(A) = a_{11} + a_{22}$$

são o determinante e o traço da aplicação A , que estão bem definidos, pois $\det[A]_{\mathcal{B}}$ e $\text{traço}[A]_{\mathcal{B}}$ independem da base \mathcal{B} tomada em V .

Definição 2.7 Sejam $p \in S$ e $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ a diferencial da aplicação normal de Gauss em p . O determinante de dN_p é chamado a *curvatura Gaussiana* \mathbf{K} de S em p , e o negativo da metade do traço de dN_p é chamado a *curvatura média* \mathbf{H} de S em p . Assim,

$$\mathbf{K}(p) = \det(dN_p) \quad \text{e} \quad \mathbf{H}(p) = -\frac{1}{2} \text{traço}(dN_p).$$

No caso em que $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal de $T_p S$ formada de autovetores de dN_p , com $dN_p(e_1) = -\kappa_1 e_1$ e $dN_p(e_2) = -\kappa_2 e_2$,

$$\mathbf{K}(p) = \kappa_1 \kappa_2 \quad \text{e} \quad \mathbf{H}(p) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Observação 2.10 Se mudarmos a orientação de S , a curvatura Gaussiana não muda, mas a curvatura média muda de sinal.

Definição 2.8 Um ponto p de uma superfície regular S é chamado:

- (1) *Elíptico*, se $\det(dN_p) > 0$;
- (2) *Hiperbólico*, se $\det(dN_p) < 0$;
- (3) *Elíptico*, se $\det(dN_p) = 0$, com $dN_p \neq 0$;
- (4) *Planar*, se $dN_p = 0$.

Observação 2.11 Num ponto elíptico, a curvatura Gaussiana é positiva e, portanto, as curvaturas principais têm o mesmo sinal. Assim, todas as curvas passando pelo ponto têm seus vetores normais apontando para um mesmo lado do plano tangente.

Exemplo 2.12 No parabolóide $\mathcal{P} : z = x^2 + ky^2$, $k > 0$ (ver exemplo 2.5), o ponto $p = (0, 0, 0)$ é elíptico, pois se tomarmos a orientação $N : \mathcal{P} \rightarrow S^2$ tal que $N(p) = (0, 0, 1)$, temos que $\kappa_1 = 2$ e $\kappa_2 = 2k$ e, portanto,

$$\mathbf{K}(p) = 4k > 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{H}(p) = 1 + k.$$

□

Exemplo 2.13 Seja $S_R(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2\}$ a esfera de centro $A = (a, b, c)$ e raio $R > 0$.

Seja a função diferenciável $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R^2$.

Então $S_R(A) = f^{-1}(0)$, onde 0 é um valor regular de f e, portanto,

$$N(p) = -\frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|}(p) = -\frac{1}{R}(p - A)$$

é um campo diferenciável de vetores normais unitários em $S_R(A)$.

Logo, $dN_p(v) = -\frac{1}{R}v$ para todo $v \in T_p S_R(A)$. Assim, $\kappa_1 = \kappa_2 = \frac{1}{R}$ para todo $p \in S_R(A)$ e todas as direções em todos os pontos são principais. Além disso, $\mathbf{K}(p) = \frac{1}{R^2}$ e $\mathbf{H}(p) = \frac{1}{R}$. Em particular, todos os pontos da esfera são elípticos. □

Observação 2.12 Em um ponto hiperbólico p , a curvatura Gaussiana é negativa. Assim, as curvaturas principais têm sinais opostos e, portanto, existem curvas passando pelo ponto p cujos vetores normais em p apontam para lados diferentes do plano tangente.

Exemplo 2.14 O ponto $p = (0, 0, 0)$ do parabolóide hiperbólico $\mathcal{P}_H : z = y^2 - x^2$ (ver exemplo 2.10) é hiperbólico, pois $\kappa_1 = 2$ e $\kappa_2 = -2$ para $N(p) = (0, 0, 1)$ e, portanto, $\mathbf{K}(p) = -4 < 0$ e $\mathbf{H}(p) = 0$. □

Observação 2.13 Em um ponto parabólico, a curvatura Gaussiana é nula, mas uma das curvaturas principais é diferente de zero. No cilindro (ver exemplo 2.9), todos os pontos são parabólicos e têm curvatura média constante $\frac{1}{2}$.

Observação 2.14 Em um ponto planar p , todas as curvaturas normais são nulas. Portanto $\mathbf{K}(p) = \mathbf{H}(p) = 0$.

No plano, todos os pontos são planares, e para a superfície $S : z = (x^2 + y^2)^2$, do exemplo 2.6, o ponto $(0, 0, 0)$ é planar.

Definição 2.9 Um ponto $p \in S$ é chamado *umbílico* se $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$.

Observação 2.15 Se p é um ponto umbílico, então $\mathbf{K}(p) \geq 0$. Além disso, $\mathbf{K}(p) = 0$ se, e só se, p é planar. Ou seja, um ponto umbílico é elíptico ou planar.

Exemplo 2.15 Na esfera e no plano, todos os pontos são umbílicos, e a origem é um ponto umbílico do parabolóide $S : z = x^2 + y^2$. \square

Proposição 2.4 Se todos os pontos de uma superfície regular conexa S são umbílicos, então S está contida em um plano ou em uma esfera.

Prova.

Para todo $p \in S$, existe $\lambda(p) \in \mathbb{R}$ tal que $dN_p(w) = \lambda(p)w$ para todo $w \in T_p S$.

Afirmação: $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável.

Seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S em $p \in S$, com U conexo. Então

$$\begin{aligned} \bar{N}_u(u, v) &= dN_{X(u,v)}(X_u(u, v)) = \lambda(X(u, v)) X_u(u, v) \\ \bar{N}_v(u, v) &= dN_{X(u,v)}(X_v(u, v)) = \lambda(X(u, v)) X_v(u, v), \end{aligned} \tag{1}$$

para todo $(u, v) \in U$, onde $\bar{N} = N \circ X$.

Como $\lambda \circ X(u, v) = \frac{\langle \bar{N}_u(u, v), X_u(u, v) \rangle}{\langle X_u(u, v), X_u(u, v) \rangle}$ é diferenciável, temos que $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável.

Afirmação: $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$ é constante.

Como $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e S é conexa, basta mostrar que λ é localmente constante.

Por (1), $\bar{N}_u = \bar{\lambda} X_u$ e $\bar{N}_v = \bar{\lambda} X_v$, onde $\bar{\lambda} = \lambda \circ X$. Logo,

$$\begin{aligned} \bar{N}_{uv} &= \bar{\lambda}_v X_u + \bar{\lambda} X_{uv} \\ \bar{N}_{vu} &= \bar{\lambda}_u X_v + \bar{\lambda} X_{vu}, \end{aligned}$$

e, portanto, $\bar{\lambda}_v X_u - \bar{\lambda}_u X_v = 0$. Assim, $\bar{\lambda}_v = \bar{\lambda}_u \equiv 0$ em U , pois X_u e X_v são LI.

Como U é conexo, temos que $\bar{\lambda}$ é constante em U , ou seja, λ é constante no aberto $X(U)$.

Caso 1. $\lambda \equiv 0$ em S .

Por (1), $\bar{N}_u \equiv 0$ e $\bar{N}_v \equiv 0$. Portanto, $\bar{N} = N \circ X$ é constante em U , ou seja, N é constante em $X(U)$.

Como N é localmente constante em S , $N : S \rightarrow S^2$ é contínuo e S é conexo, obtemos que $N \equiv N_0$ é constante em S .

Afirmção: A função diferenciável $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(p) = \langle p, N_0 \rangle$ é constante.

Para provar que $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é constante, basta observar que $\bar{f} = f \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}$ é constante em U , para toda parametrização $X : U \rightarrow X(U)$ de S , com U conexo.

De fato, $\bar{f}_u = \langle X_u, N_0 \rangle = 0$ e $\bar{f}_v = \langle X_v, N_0 \rangle = 0$, pois $X_u \perp N_0$ e $X_v \perp N_0$. \square

• Logo, existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $\langle p, N_0 \rangle = d$ para todo $p \in S$, ou seja, $S \subset \pi = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p, N_0 \rangle = d\}$, onde π é um plano perpendicular a N_0 .

Caso 2. $\lambda(p) = \lambda_0 \neq 0$ para todo $p \in S$.

Consideremos a aplicação diferenciável $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(p) = p - \frac{N(p)}{\lambda_0}$.

Afirmção: $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é constante.

Novamente, para provar que f é constante, basta observar que $\bar{f} = f \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

$$\bar{f}(u, v) = X(u, v) - \frac{\bar{N}(u, v)}{\lambda_0},$$

é constante, para toda parametrização $X : U \rightarrow X(U)$ de S com U conexo.

De fato, por (1),

$$\begin{aligned} \bar{f}_u &= X_u - \frac{\bar{N}_u}{\lambda_0} = X_u - \frac{\lambda_0 X_u}{\lambda_0} = 0 \\ \text{e} \\ \bar{f}_v &= X_v - \frac{\bar{N}_v}{\lambda_0} = X_v - \frac{\lambda_0 X_v}{\lambda_0} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

• Seja $A \in \mathbb{R}^3$ tal que $p - \frac{N(p)}{\lambda_0} = A$ para todo $p \in S$. Então $S \subset S_{1/|\lambda_0|}(A)$, pois

$$\|p - A\| = \left\| \frac{N(p)}{\lambda_0} \right\| = \frac{1}{|\lambda_0|},$$

para todo $p \in S$, onde $S_{1/|\lambda_0|}(A)$ é a esfera de centro A e raio $\frac{1}{|\lambda_0|}$. \blacksquare

Definição 2.10 Seja $p \in S$. Dizemos que uma *direção* de $T_p S$ é *assintótica* se a curvatura normal em p nesta direção é zero.

Uma *curva assintótica* de S é uma curva regular conexa $\mathcal{C} \subset S$ tal que, para todo ponto $p \in \mathcal{C}$, a direção tangente a \mathcal{C} em p é uma direção assintótica.

Observação 2.16 v é uma direção assintótica se, e só se, $v \neq 0$ e $\Pi_p(v) = 0$.

Observação 2.17 Seja \mathcal{C} uma curva assintótica e $\alpha : I \rightarrow S$ uma parametrização de \mathcal{C} . Então,

$$\Pi_{\alpha(s)}(\alpha'(s)) = -\langle \bar{N}'(s), \alpha'(s) \rangle = 0,$$

para todo $s \in I$, onde $\bar{N} = N \circ \alpha$.

Observação 2.18 Num ponto elíptico não existe direção assintótica.

Observação 2.19 Interpretação geométrica das direções assintóticas.

Seja $p \in S$. A *indicatriz de Dupin em p* é o conjunto

$$\{w \in T_p S \mid \Pi_p(w) = \pm 1\}.$$

Observe que $w \in T_p S$ pertence à indicatriz de Dupin em p se, e só se, $w \neq 0$ e

$$\kappa_n(w) = \kappa_n \left(\frac{w}{\|w\|} \right) = \Pi_p \left(\frac{w}{\|w\|} \right) = \pm \frac{1}{\|w\|^2}.$$

Seja $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal de $T_p S$, onde e_1 e e_2 são autovetores de dN_p , com $dN_p(e_1) = -\kappa_1 e_1$ e $dN_p(e_2) = -\kappa_2 e_2$, $\kappa_1 \geq \kappa_2$.

Seja $w = \xi e_1 + \eta e_2 \in T_p S$. Então w pertence à indicatriz de Dupin em S se, e só se,

$$\Pi_p(w) = \kappa_1 \xi^2 + \kappa_2 \eta^2 = \pm 1.$$

Portanto, se p é um ponto elíptico (κ_1 e κ_2 têm o mesmo sinal), a indicatriz de Dupin em p é uma elipse, e se p é um ponto umbílico e elíptico ($\kappa_1 = \kappa_2 \neq 0$), a indicatriz é um círculo.

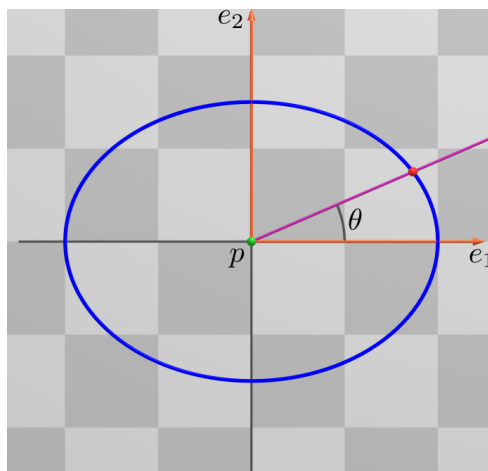


Fig. 14: p é um ponto elíptico

Se p é um ponto hiperbólico ($\kappa_1 > 0 > \kappa_2$), então a indicatriz de Dupin em p é um par de hipérbolas conjugadas:

$$\kappa_1 \xi^2 + \kappa_2 \eta^2 = +1 \quad \text{e} \quad \kappa_1 \xi^2 + \kappa_2 \eta^2 = -1,$$

que tem o mesmo par de assíntotas: $\xi = \pm \sqrt{\frac{-\kappa_2}{\kappa_1}} \eta$.

As direções das assíntotas, $\sqrt{-\kappa_2} e_1 \pm \sqrt{\kappa_1} e_2$, são as direções assintóticas de S em p . Isto justifica a terminologia e mostra que um ponto hiperbólico tem exatamente duas direções assintóticas.

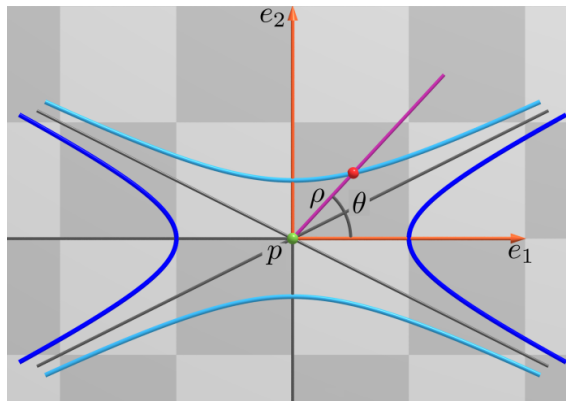


Fig. 15: p é um ponto hiperbólico

Se p é um ponto parabólico ($\kappa_1 = 0$ e $\kappa_2 \neq 0$), a indicatriz de Dupin em p é um par de retas paralelas ao vetor e_1 , pois

$$\kappa_1 \xi^2 + \kappa_2 \eta^2 = \pm 1 \iff \kappa_2 \eta^2 = \pm 1 \iff \eta = \pm \sqrt{\frac{1}{|\kappa_2|}}.$$

A direção comum destas retas (e_1) é a única direção assintótica no ponto p .

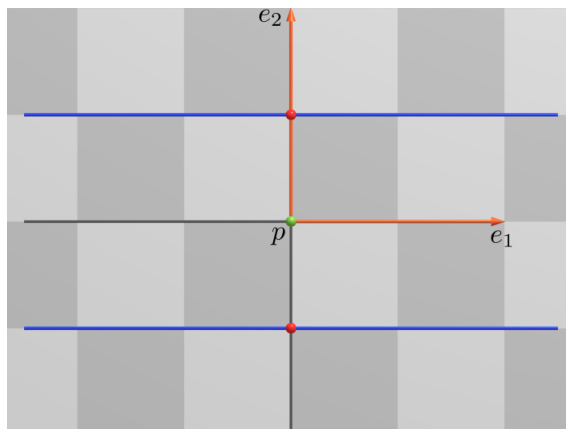


Fig. 16: p é um ponto parabólico

- Num ponto planar, a indicatriz de Dupin é o conjunto vazio e todas as direções são assintóticas.

Definição 2.11 Seja $p \in S$. Dizemos que dois **vetores** w_1 e w_2 não-nulos em $T_p W$ são **conjugados** se

$$\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle = 0.$$

Duas **direções** r_1 e r_2 são **conjugadas** se um par de vetores não-nulos w_1 e w_2 paralelos a r_1 e r_2 , respectivamente, são conjugados.

Observação 2.20

- As direções principais são conjugadas.
- Uma direção assintótica é conjugada a si própria.
- Se p é um ponto umbílico não-planar (isto é, $dN_p(v) = \kappa v \forall v \in T_p S$, com $\kappa \neq 0$), então todo par de direções ortogonais são conjugadas.
- Num ponto planar, duas direções quaisquer são conjugadas.

Observação 2.21 Seja $p \in S$ um ponto não umbílico e seja $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal de $T_p S$ formada de autovetores de dN_p , com $dN_p(e_1) = -\kappa_1 e_1$ e $dN_p(e_2) = -\kappa_2 e_2$.

Sejam θ e φ os ângulos que um par de direções r_1 e r_2 fazem com e_1 , isto é,

$$\begin{aligned} e \quad w_1 &= \cos \theta e_1 + \text{sen } \theta e_2 \\ w_2 &= \cos \varphi e_1 + \text{sen } \varphi e_2, \end{aligned}$$

onde $w_1, w_2 \in T_p S$ são vetores unitários paralelos a r_1 e r_2 , respectivamente.

Então r_1 e r_2 são **direções conjugadas** se, e só se,

$$\kappa_1 \cos \theta \cos \varphi = -\kappa_2 \text{sen } \theta \text{sen } \varphi. \quad (2)$$

De fato, r_1 e r_2 são direções conjugadas se, e só se, w_1 e w_2 são vetores conjugados, isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle dN_p(w_1), w_2 \rangle \\ &= -\langle \kappa_1 \cos \theta e_1 + \kappa_2 \text{sen } \theta e_2, \cos \varphi e_1 + \text{sen } \varphi e_2 \rangle \\ &= -(\kappa_1 \cos \theta \cos \varphi + \kappa_2 \text{sen } \theta \text{sen } \varphi). \end{aligned}$$

Observação 2.22 Num ponto parabólico p ($\kappa_1 = 0$ e $\kappa_2 \neq 0$), r_1 e r_2 são direções conjugadas se, e só se, uma das direções é paralela a e_1 e a outra é qualquer, pois (2), neste caso, é dada por:

$$\kappa_2 \text{sen } \theta \text{sen } \varphi = 0 \iff \theta = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi = 0.$$

Observação 2.23 Construção geométrica das direções conjugadas em termos da indicatriz de Dupin em p .

- Seja p um ponto elíptico de S . Seja r uma reta passando pela origem de $T_p S$ e considere os pontos de interseção q_1 e q_2 de r com a indicatriz de Dupin.

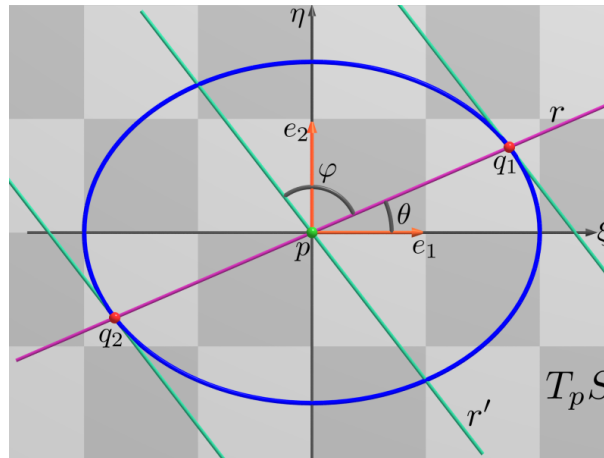


Fig. 17: Um ponto elíptico p a indicatriz de Dupin e a direção conjugada à reta r

Afirmção: As retas tangentes à indicatriz de Dupin em q_1 e q_2 são paralelas, e a direção comum r' é a direção conjugada a r .

De fato, suponhamos que $\kappa_1 \geq \kappa_2 > 0$ e seja $r : \eta = \tan \theta \xi$, com $0 < \theta < \pi$.

Seja $\gamma(t) = (\xi(t), \eta(t))$ uma parametrização da indicatriz de Dupin em p . Então

$$\kappa_1 \xi(t)^2 + \kappa_2 \eta(t)^2 = 1.$$

Derivando em relação a t , obtemos que

$$\kappa_1 \xi(t) \xi'(t) + \kappa_2 \eta(t) \eta'(t) = 0.$$

Isto é,

$$(\kappa_1 \xi(t), \kappa_2 \eta(t)) \perp (\xi'(t), \eta'(t)),$$

e, portanto, $(-\kappa_2 \eta(t), \kappa_1 \xi(t))$ é a direção da reta tangente à indicatriz de Dupin no ponto $(\xi(t), \eta(t))$.

Sejam $q_1 = (\xi_1, \eta_1)$ e $q_2 = (\xi_2, \eta_2)$ os pontos de r que pertencem à indicatriz de Dupin.

Então as retas tangentes à indicatriz de Dupin em q_1 e q_2 são paralelas, respectivamente, ao vetor $v_1 = (-\kappa_2 \eta_1, \kappa_1 \xi_1)$ e ao vetor $v_2 = (-\kappa_2 \eta_2, \kappa_1 \xi_2)$.

Como $\eta_1 = \tan \theta \xi_1$ e $\eta_2 = \tan \theta \xi_2$, temos que $v_1 \parallel (-\kappa_2 \tan \theta, \kappa_1)$ e $v_2 \parallel (-\kappa_2 \tan \theta, \kappa_1)$.

Logo v_1 e v_2 são paralelos e a reta r' paralela ao vetor $(-\kappa_2 \tan \theta, \kappa_1)$ que passa pela origem é

dada por

$$r' : y = \frac{\kappa_1}{-\kappa_2} \frac{1}{\tan \theta} \xi = -\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \frac{1}{\tan \theta} \xi = \tan \varphi \xi.$$

Então,

$$\tan \varphi \tan \theta = -\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \iff \kappa_2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta = -\kappa_1 \cos \theta \cos \varphi,$$

isto é, r' é a direção conjugada a r .

- Seja agora um ponto hiperbólico p , $\kappa_1 > 0 > \kappa_2$, e r uma direção de $T_p S$ (ver exercício 12, pag. 179).

Afirmção: Se r é uma direção assintótica, então $r' = r$, onde r' é a direção conjugada a r .

De fato, como

$$r : \eta = \tan \theta \xi = \sqrt{\frac{\kappa_1}{-\kappa_2}} \xi, \quad r' : \eta = \tan \varphi \xi \quad \text{e} \quad \frac{\kappa_1}{-\kappa_2} = \tan \theta \tan \varphi = \sqrt{\frac{\kappa_1}{-\kappa_2}} \tan \varphi,$$

temos que $\tan \varphi = \sqrt{\frac{\kappa_1}{-\kappa_2}}$ e, portanto, $\varphi = \theta$. \square

- Suponhamos que $r : \eta = \tan \theta \xi$, onde $\tan \theta \neq \pm \sqrt{\frac{\kappa_1}{-\kappa_2}}$.

Sejam q_1 e q_2 os pontos de interseção de r com a indicatriz de Dupin em p .

Afirmção: As retas tangentes a q_1 e q_2 são paralelas e a reta r' paralela a essas retas que passa pela origem é a direção conjugada a r .

De fato, neste caso a indicatriz de Dupin é dada por um par de hipérbolas conjugadas,

$$\kappa_1 \xi^2 + \kappa_2 \eta^2 = \pm 1.$$

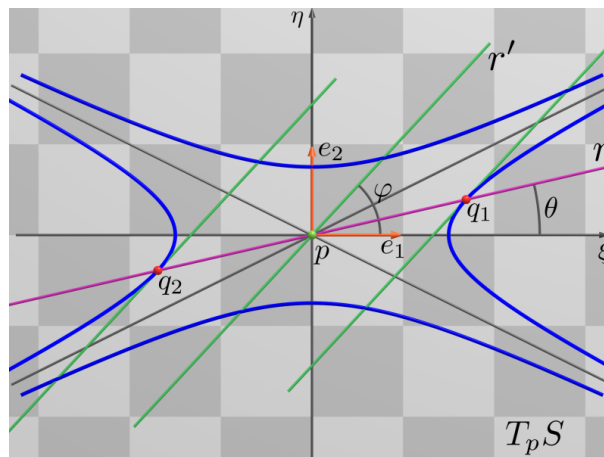


Fig. 18: Um ponto hiperbólico p a indicatriz de Dupin e a direção conjugada à reta r

De modo análogo ao caso anterior, podemos provar que as retas tangentes à indicatriz de Dupin em q_1 e q_2 são paralelas ao vetor $(-\kappa_2 \tan \theta, \kappa_1)$ e a reta r' paralela a esse vetor que passa pela origem, dada por

$$r' : \eta = \tan \varphi \xi = \frac{\kappa_1}{-\kappa_2} \frac{1}{\tan \theta} \xi,$$

é a direção conjugada a r , pois

$$\tan \varphi = -\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \tan \theta \iff \tan \varphi \tan \theta = -\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \iff \kappa_2 \sin \varphi \sin \theta = -\kappa_1 \cos \varphi \cos \theta.$$

3. A Aplicação de Gauss em Coordenadas Locais

Nesta seção, obteremos as expressões da segunda forma fundamental e da diferencial da aplicação de Gauss em um sistema de coordenadas locais.

Seja S uma superfície orientada com orientação $N : S \rightarrow S^2$. Seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S compatível com a orientação de S , isto é,

$$N(u, v) = N(X(u, v)) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(u, v),$$

para todo $(u, v) \in U$.

Seja $w \in T_p S$, $w = \lambda X_u(q) + \mu X_v(q)$, com $X(q) = p$. Então

$$dN_p(w) = \lambda dN_p(X_u(q)) + \mu dN_p(X_v(q)) = \lambda N_u(q) + \mu N_v(q).$$

Como $N_u(q)$ e $N_v(q)$ pertencem a $T_p S$, podemos escrever esses vetores na base $\{X_u(q), X_v(q)\}$:

$$\begin{aligned} N_u(q) &= a_{11}X_u(q) + a_{21}X_v(q) \\ e \quad N_v(q) &= a_{12}X_u(q) + a_{22}X_v(q). \end{aligned} \tag{3}$$

Portanto

$$dN_p(w) = (a_{11}\lambda + a_{12}\mu)X_u(q) + (a_{21}\lambda + a_{22}\mu)X_v(q),$$

isto é,

$$dN_p \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix},$$

onde $[dN_p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ é a matriz de dN_p na base $\{X_u(q), X_v(q)\}$.

Observação 3.1 A matriz $[dN_p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ não é necessariamente simétrica. Mas se a base $\{X_u(q), X_v(q)\}$ é ortonormal, a matriz $[dN_p]_{\mathcal{B}}$ é simétrica, pois neste caso, por (3),

$$\begin{aligned} a_{21} &= \langle a_{11}X_u(q) + a_{21}X_v(q), X_v(q) \rangle \\ &= \langle dN_p(X_u(q)), X_v(q) \rangle \\ &= \langle X_u(q), dN_p(X_v(q)) \rangle \\ &= \langle X_u(q), a_{12}X_u(q) + a_{22}X_v(q) \rangle = a_{12}. \end{aligned}$$

A expressão da segunda forma fundamental na base $\{X_u(q), X_v(q)\}$ é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_p(w) &= -\langle dN_p(w), w \rangle = -\langle \lambda N_u(q) + \mu N_v(q), \lambda X_u(q) + \mu X_v(q) \rangle \\ &= e(q)\lambda^2 + 2f(q)\lambda\mu + g(q)\mu^2, \end{aligned}$$

onde

- $e(q) = -\langle N_u(q), X_u(q) \rangle = \langle N(q), X_{uu}(q) \rangle$
- $f(q) = -\langle N_u(q), X_v(q) \rangle = -\langle N_v(q), X_u(q) \rangle$
 $= \langle N(q), X_{vu}(q) \rangle = \langle N(q), X_{uv}(q) \rangle$
- $g(q) = -\langle N_v(q), X_v(q) \rangle = \langle N(q), X_{vv}(q) \rangle$

já que $\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0$ em U .

As funções $e, f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ são os *coeficientes da segunda forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$* .

Como $N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v$ e $N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v$, temos que

$$\begin{aligned} -f &= \langle N_u, X_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G; \\ -f &= \langle N_v, X_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F; \\ -g &= \langle N_v, X_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G; \\ -e &= \langle N_u, X_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F; \end{aligned}$$

onde E, F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$. Então,

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}; & \alpha_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}; \\ \alpha_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}; & \alpha_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}; \end{aligned}$$

As equações

$$N_u = \alpha_{11}X_u + \alpha_{21}X_v \quad \text{e} \quad N_v = \alpha_{12}X_u + \alpha_{22}X_v,$$

com α_{11} , α_{12} , α_{21} , α_{22} obtidos acima, são conhecidas como as *equações de Weingarten*.

A partir de (4), obtemos que

$$\mathbf{K}(p) = \det(dN_p) = \det(\alpha_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}(q)$$

é a curvatura Gaussiana de S em p , e que

$$\mathbf{H}(p) = -\frac{\text{traço}(dN_p)}{2} = -\frac{\alpha_{11} + \alpha_{22}}{2} = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}(q)$$

é a curvatura média de S em p , onde $X(q) = p$.

Sejam κ_1 e κ_2 as curvaturas principais de S em p , isto é,

$$dN_p(e_1) = -\kappa_1 e_1 \quad \text{e} \quad dN_p(e_2) = -\kappa_2 e_2,$$

onde $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal de autovetores de dN_p .

Como $\kappa_1 + \kappa_2 = 2\mathbf{H}$ e $\kappa_1 \kappa_2 = \mathbf{K}$, temos que κ_1 e κ_2 são as raízes da equação

$$x^2 - 2\mathbf{H}x + \mathbf{K} = 0.$$

Se considerarmos $\kappa_1 \geq \kappa_2$, temos

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{2\mathbf{H} + \sqrt{4\mathbf{H}^2 - 4\mathbf{K}}}{2} = \mathbf{H} + \sqrt{\mathbf{H}^2 - \mathbf{K}} \\ \text{e} \quad \kappa_2 &= \frac{2\mathbf{H} - \sqrt{4\mathbf{H}^2 - 4\mathbf{K}}}{2} = \mathbf{H} - \sqrt{\mathbf{H}^2 - \mathbf{K}}, \end{aligned}$$

que são funções contínuas em S .

Observação 3.2 p é um ponto umbílico se, e só se, $\mathbf{H}^2(p) = \mathbf{K}(p)$.

De fato,

$$\mathbf{H}^2(p) - \mathbf{K}(p) = \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)^2 - \kappa_1 \kappa_2 = \frac{\kappa_1^2 + 2\kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2 - 4\kappa_1 \kappa_2}{4} = \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)^2}{4} \geq 0.$$

Logo, $\mathbf{H}^2(p) = \mathbf{K}(p)$ se, e só se, $\kappa_1 = \kappa_2$.

Observação 3.3 As funções $\kappa_1 = \mathbf{H} + \sqrt{\mathbf{H}^2 - \mathbf{K}}$ e $\kappa_2 = \mathbf{H} - \sqrt{\mathbf{H}^2 - \mathbf{K}}$ são diferenciáveis em p se p não é um ponto umbílico.

Exemplo 3.1 Vamos calcular a curvatura Gaussiana dos pontos do toro (ver exemplo 1.9 do capítulo 3) cobertos pela parametrização

$$X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u),$$

onde $(u, v) \in U = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$.

O cálculo dos coeficientes e , f e g depende de N (e, portanto, de X_u e X_v), X_{uv} , X_{uu} e X_{vv} :

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u); \\ X_v(u, v) &= (-(a + r \cos u) \sin v, (a + r \cos u) \cos v, 0); \\ X_{uu}(u, v) &= (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, -r \sin u); \\ X_{vv}(u, v) &= (-(a + r \cos u) \cos v, -(a + r \cos u) \sin v, 0); \\ X_{uv}(u, v) &= (r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, 0). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = r^2; \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0; \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = (a + r \cos u)^2, \end{aligned}$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$, e

- $e = \langle N, X_{uu} \rangle = \frac{\langle X_u \wedge X_v, X_{uu} \rangle}{\|X_u \wedge X_v\|} = \frac{\det(X_u, X_v, X_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{r^2 \sin^2 v (a + r \cos u) + r^2 \cos^2 v (a + r \cos u)}{r(a + r \cos u)} = r;$
- $f = \langle N, X_{uv} \rangle = \frac{\langle X_u \wedge X_v, X_{uv} \rangle}{\|X_u \wedge X_v\|} = \frac{\det(X_u, X_v, X_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}} = 0 \quad (X_v \text{ e } X_{uv} \text{ são LD});$
- $g = \langle N, X_{vv} \rangle = \frac{\det(X_u, X_v, X_{vv})}{(a + r \cos u)r} = \frac{r \cos u (a + r \cos u)^2}{r(a + r \cos u)} = \cos u (a + r \cos u),$

são os coeficientes da segunda forma fundamental de S na base $\{X_u, X_v\}$.

Finalmente, como $\mathbf{K} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$, temos que

$$\mathbf{K} = \frac{r \cos u (a + r \cos u)}{r^2 (a + r \cos u)^2} = \frac{\cos u}{r (a + r \cos u)}.$$

Observe que \mathbf{K} só depende de u , isto é, \mathbf{K} é constante ao longo de um paralelo.

Assim,

- $\mathbf{K} = 0$ ao longo dos paralelos $u = \frac{\pi}{2}$ e $u = \frac{3\pi}{2}$. Os pontos desses paralelos são parabólicos, pois $\Pi_p \neq 0$, já que $e = r \neq 0$.
- $\mathbf{K} > 0$ ao longo da região do toro dada pela condição $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, pois $r > 0$ e $a > r$; os pontos dessa região são, portanto, elípticos.
- $\mathbf{K} < 0$ ao longo da região do toro dada pela condição $u \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$; os pontos dessa região são, portanto, hiperbólicos. \square

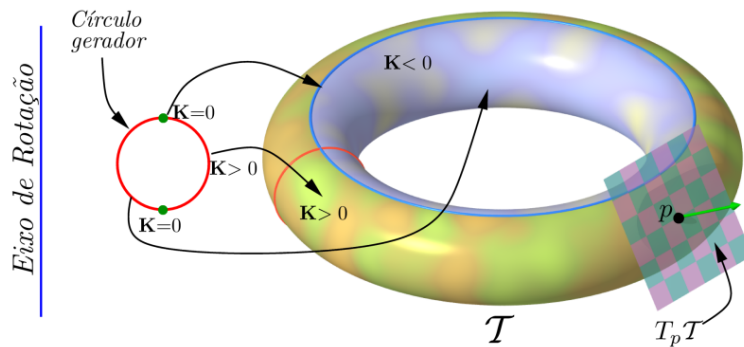


Fig. 19: Curvatura Gaussiana no toro

Observação 3.4 Se olharmos para um ponto elíptico do toro, vemos que a superfície situa-se em um dos lados do plano tangente neste ponto. Por outro lado, se p é um ponto hiperbólico do toro \mathcal{T} e $V \subset \mathcal{T}$ é uma vizinhança qualquer de p , existem pontos de V nos dois lados de $T_p\mathcal{T}$, por menor que seja V . Este exemplo retrata um fato local geral, que é descrito na proposição abaixo.

- Seja $p_0 \in S$. Então

$$T_{p_0}S = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - p_0, N(p_0) \rangle = 0\}$$

é o plano tangente a S em p_0 , e

$$\mathcal{H}_{p_0}^+ = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - p_0, N(p_0) \rangle > 0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_{p_0}^- = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - p_0, N(p_0) \rangle < 0\},$$

são os dois semi-espacos abertos determinados por $T_{p_0}S$.

Proposição 3.1 Se p_0 é um ponto elíptico de S , então existe um aberto $V \subset S$, com $p_0 \in S$, tal que $V - \{p_0\}$ está contido em um dos semi-espacos abertos determinados por $T_{p_0}S$.

Se p_0 é um ponto hiperbólico de S , então em toda vizinhança de p_0 existem pontos de S em ambos os lados de $T_{p_0}S$.

Prova.

Seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S em p_0 , com $X(0, 0) = p_0$, e seja $D : U \rightarrow \mathbb{R}$ a função diferenciável dada por:

$$D(u, v) = \langle X(u, v) - X(0, 0), N(p_0) \rangle,$$

que mede a distância, com sinal, de $X(u, v)$ ao plano tangente $T_{p_0}S$.

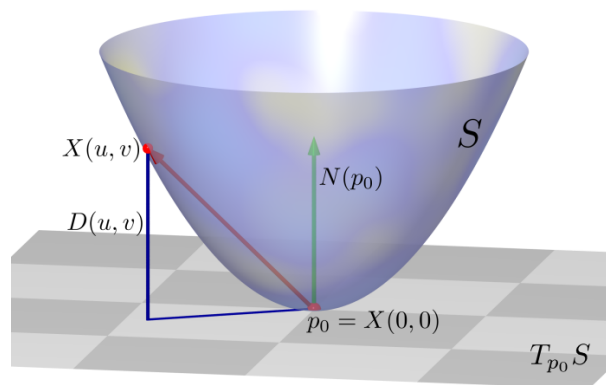


Fig. 20: Distância de $X(u, v)$ ao plano tangente $T_{p_0}S$

Pela fórmula de Taylor infinitesimal,

$$X(u, v) = X(0, 0) + X_u(0, 0)u + X_v(0, 0)v + \frac{1}{2} (X_{uu}(0, 0)u^2 + 2X_{uv}(0, 0)uv + X_{vv}(0, 0)v^2) + R(u, v),$$

onde $\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{R(u, v)}{u^2 + v^2} = 0$.

Então,

$$D(u, v) = \frac{1}{2} (\langle X_{uu}(0, 0), N(p_0) \rangle u^2 + 2\langle X_{uv}(0, 0), N(p_0) \rangle uv + \langle X_{vv}(0, 0), N(p_0) \rangle v^2) + \bar{R}(u, v),$$

onde $\bar{R}(u, v) = \langle R(u, v), N(p_0) \rangle$.

Ou seja,

$$D(u, v) = \frac{1}{2} \Pi_{p_0}(w) + \bar{R}(u, v), \tag{5}$$

onde $w = u X_u(0, 0) + v X_v(0, 0)$.

Observação: $\|(u, v)\|_0^2 = u^2 + v^2$ e $\|(u, v)\|_1^2 = E(0, 0)u^2 + 2F(0, 0)uv + G(0, 0)v^2$ são normas em \mathbb{R}^2 , pois

$$\|(u, v)\|_1^2 = \left\langle \begin{pmatrix} E(0, 0) & F(0, 0) \\ F(0, 0) & G(0, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle$$

e $\begin{pmatrix} E(0, 0) & F(0, 0) \\ F(0, 0) & G(0, 0) \end{pmatrix}$ é uma matriz simétrica positiva definida, já que $E(0, 0) > 0$ e $E(0, 0)G(0, 0) - F(0, 0)^2 > 0$. \square

Como duas normas em \mathbb{R}^2 são equivalentes, existem $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tais que

$$\lambda_2 \|(u, v)\|_0 \leq \|(u, v)\|_1 \leq \lambda_1 \|(u, v)\|_0.$$

Assim, como $\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{\bar{R}(u, v)}{\|(u, v)\|_0^2} = 0$, obtemos que $\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{\bar{R}(u, v)}{\|(u, v)\|_1^2} = 0$.

Além disso, sendo $\|w\|^2 = \|(u, v)\|_1^2$, temos, por (5), que

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{D(u, v)}{\|w\|^2} - \frac{1}{2} \Pi_{p_0} \left(\frac{w}{\|w\|} \right) \right) = 0.$$

• Suponhamos que $p_0 = X(0, 0)$ é um ponto elíptico, com curvaturas principais $\kappa_1(p_0) \geq \kappa_2(p_0) > 0$. Então

$$\kappa_2(p_0) \leq \Pi_{p_0} \left(\frac{w}{\|w\|} \right) \leq \kappa_1(p_0).$$

Como

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{D(u, v)}{\|w\|^2} - \frac{1}{2} \Pi_{p_0} \left(\frac{w}{\|w\|} \right) \right) = 0,$$

dado $\varepsilon = \frac{\kappa_2(p_0)}{4} > 0$ existe $U_0 \subset U$ aberto, $(0, 0) \in U_0$, tal que

$$-\frac{\kappa_2(p_0)}{4} < \frac{D(u, v)}{\|w\|^2} - \frac{1}{2} \Pi_{p_0} \left(\frac{w}{\|w\|} \right) < \frac{\kappa_2(p_0)}{4},$$

para todo $(u, v) \in U_0 - \{(0, 0)\}$.

Então,

$$\frac{D(u, v)}{\|w\|^2} > -\frac{\kappa_2(p_0)}{4} + \frac{1}{2} \Pi_{p_0} \left(\frac{w}{\|w\|} \right) \geq -\frac{\kappa_2(p_0)}{4} + \frac{\kappa_2(p_0)}{2} = \frac{\kappa_2(p_0)}{4} > 0,$$

para todo $(u, v) \in U_0 - \{(0, 0)\}$.

Ou seja, $X(u, v) \in \mathcal{H}_{p_0}^+$ para todo $(u, v) \in U_0 - \{(0, 0)\}$. Logo, $p \in \mathcal{H}_{p_0}^+$ para todo $p \in X(U_0) - \{p_0\}$.

• Seja agora $p_0 \in S$ um ponto hiperbólico, com curvaturas principais $\kappa_1(p_0) > 0 > \kappa_2(p_0)$ e $e_1 = u_1 X_u(0, 0) + v_1 X_v(0, 0)$, $e_2 = u_2 X_u(0, 0) + v_2 X_v(0, 0)$, as direções principais ortonormais.

Como $\Pi_{p_0} \left(\frac{te_1}{\|te_1\|} \right) = \kappa_1(p_0)$ e $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{D(tu_1, tv_1)}{\|te_1\|^2} - \frac{1}{2} \Pi_{p_0} \left(\frac{te_1}{\|te_1\|} \right) \right) = 0$, temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{D(tu_1, tv_1)}{\|te_1\|^2} \right) = \frac{1}{2} \kappa_1(p_0) > 0.$$

De modo análogo, como

$$\Pi_{p_0} \left(\frac{se_2}{\|se_2\|} \right) = \kappa_2(p_0) \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{D(su_2, sv_2)}{\|se_2\|^2} - \frac{1}{2} \Pi_{p_0} \left(\frac{se_2}{\|se_2\|} \right) \right) = 0,$$

temos que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{D(su_2, sv_2)}{\|se_2\|^2} \right) = \frac{1}{2} \kappa_2(p_0) < 0.$$

Seja $V = X(U_0) \subset X(U)$ um aberto que contém p_0 . Então existe $\delta > 0$ tal que $D_\delta(0, 0) \subset U_0$,

$$\frac{D(tu_1, tv_1)}{\|te_1\|^2} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{D(su_2, sv_2)}{\|se_2\|^2} < 0,$$

para todos $t, s \in (-\delta', \delta')$, onde $0 < \delta' < \min \left\{ \frac{\delta}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}, \frac{\delta}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2}} \right\}$ e $D_\delta(0, 0)$ é o disco

aberto de centro na origem e raio δ .

Logo, $X(tu_1, tv_1) \in \mathcal{H}_{p_0}^+ \cap (V - \{p_0\})$ para todo $t \in (-\delta', \delta')$ e $X(su_2, sv_2) \in \mathcal{H}_{p_0}^- \cap (V - \{p_0\})$ para todo $s \in (-\delta', \delta')$, já que $\|(tu_1, tv_1)\| = |t| \sqrt{u_1^2 + v_1^2} < \delta$, $\|(su_2, sv_2)\| = |s| \sqrt{u_2^2 + v_2^2} < \delta$ e $X(D_\delta(0, 0)) \subset V$. ■

Observação 3.5 Quando p é um ponto parabólico ou planar, nada podemos afirmar.

Exemplo 3.2 Nos pontos parabólicos de um toro \mathcal{T}^2 (que são os pontos dos paralelos $u = \pi/2$ e $u = 3\pi/2$) o toro fica de um lado do plano tangente e tem em comum com o plano tangente os pontos do paralelo que contém o ponto parabólico. □

Exemplo 3.3 O cilindro (onde todos os pontos são parabólicos) fica todo de um lado do plano tangente a qualquer um de seus pontos e tem em comum com o plano tangente a um ponto p a reta paralela ao eixo Oz que passa por p . □

Exemplo 3.4 O ponto $p_0 = (0, 0, 0)$ da superfície $S : z = (x^2 + y^2)^2$ é planar (ver exemplo 2.6), S está toda de um lado do plano tangente $T_{p_0}S = \text{plano } xy$ e têm em comum com este plano apenas o ponto p_0 . \square

Exemplo 3.5 Seja S a superfície regular, denominada *sela de macaco*, que é o gráfico da função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^3 - 3y^2x$.

Então $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$X(u, v) = (u, v, u^3 - 3v^2u)$$

é uma parametrização que cobre toda a superfície S .

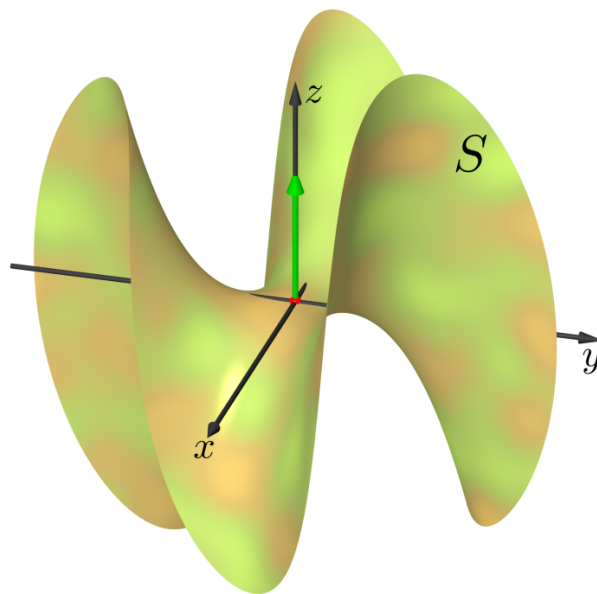


Fig. 21: Sela de macaco S

Afirmção: O ponto $p_0 = X(0, 0) = (0, 0, 0)$ é um ponto planar e em qualquer vizinhança desse ponto existem pontos de ambos os lados de seu plano tangente.

De fato, como

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= (1, 0, 3u^2 - 3v^2); & X_v(u, v) &= (0, 1, -6vu); \\ X_{uu}(u, v) &= (0, 0, 6u); & X_{uv}(u, v) &= (0, 0, -6v); \\ X_{vv}(u, v) &= (0, 0, -6u), \end{aligned}$$

temos que:

$$X_u(0, 0) = (1, 0, 0); \quad X_v(0, 0) = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad X_{uu}(0, 0) = X_{uv}(0, 0) = X_{vv}(0, 0) = (0, 0, 0).$$

Portanto, $T_{p_0}S = \text{plano } xy$, $e(0, 0) = f(0, 0) = g(0, 0) = 0$, isto é, $\Pi_{p_0} \equiv 0$.

Logo, p_0 é um ponto planar.

Seja $\alpha(t) = X(t, 0) = (t, 0, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$. Como $t^3 < 0$ se $t < 0$ e $t^3 > 0$ se $t > 0$, temos que toda vizinhança de p_0 possui pontos em ambos os lados do plano tangente $T_{p_0} = \text{plano } xy$. \square

Exemplo 3.6 Considere a superfície S obtida girando a curva $\mathcal{C} : \begin{cases} z = y^3 \\ x = 0 \end{cases}$, $y \in (-1, 1)$, em

$$\text{torno da reta } r : \begin{cases} z = 1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

A superfície S é dada por: $y^3 = -\sqrt{x^2 + (z-1)^2} + 1$.

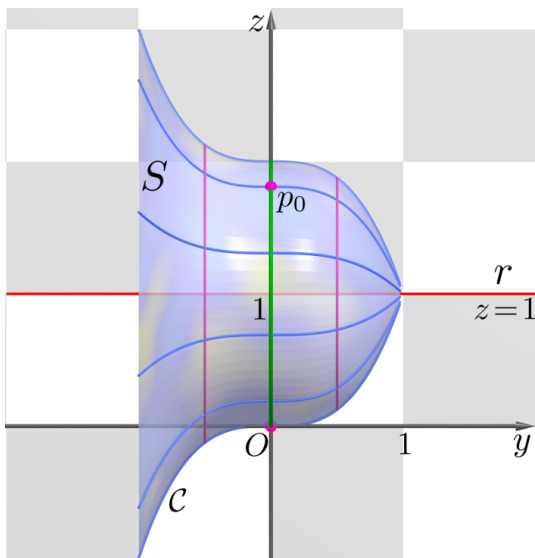


Fig. 22: Vista lateral da superfície de revolução S

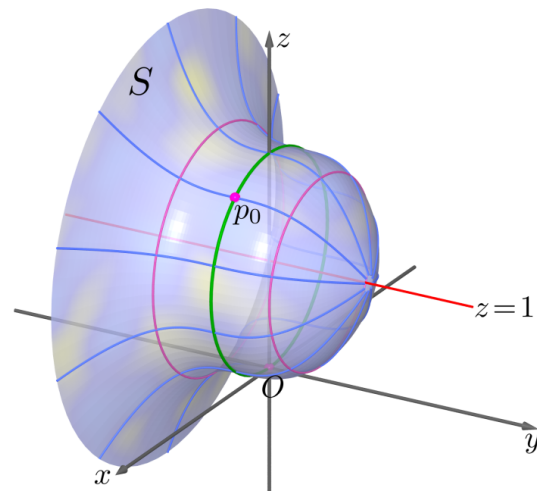


Fig. 23: Superfície de revolução S

Afirmção: Todos os pontos do paralelo obtido girando a origem $(0, 0, 0)$ em torno da reta r são parabólicos.

Mostraremos isso, usando o seguinte fato, que será provado no próximo exemplo: **todos os paralelos e meridianos de uma superfície de revolução S são linhas de curvatura.**

Seja p_0 um ponto do paralelo que passa pela origem. Como o meridiano que passa por p_0 é obtido girando a curva \mathcal{C} em torno de r de um ângulo θ e a curvatura de \mathcal{C} na origem é zero, temos que a curvatura do meridiano em p_0 é zero. Então a curvatura normal $\kappa_{\mathbf{n}}(\nu) = 0$, onde ν é o vetor tangente ao meridiano em p_0 . E finalmente, como o meridiano é uma linha de curvatura, obtemos que uma das curvaturas principais da superfície em p_0 é nula.

Afirmção: O paralelo obtido girando a origem em torno da reta r é a seção normal a S em p_0 na direção do vetor tangente ao paralelo no ponto p_0 .

De fato, primeiro observe que o plano tangente a S na origem é o plano xy , pois o vetor tangente a \mathcal{C} nesse ponto é paralelo ao vetor $(0, 1, 0)$ e o vetor tangente ao paralelo nesse

ponto é paralelo ao vetor $(1, 0, 0)$.

Além disso, como o vetor tangente ao meridiano no ponto p_0 é obtido girando o vetor $(0, 1, 0)$, tangente a \mathcal{C} em $(0, 0, 0)$, em torno da reta r de um ângulo θ , obtemos que o vetor tangente ao meridiano em p_0 é paralelo ao vetor $(0, 1, 0)$.

Como os paralelos e os meridianos se cortam perpendicularmente, temos que $\pi(w, N(p_0))$, onde w é o vetor tangente ao paralelo em p_0 , é um plano paralelo ao plano xz , pois o vetor normal ao plano $\pi(w, N(p_0))$ é o vetor tangente ao meridiano em p_0 , que é paralelo ao vetor $(0, 1, 0)$.

Logo a seção normal à superfície em p_0 na direção w é o paralelo que passa por p_0 . Além disso, como esse paralelo é uma linha de curvatura e é um círculo de raio 1, temos que a outra curvatura principal de S em p_0 é diferente de zero, pois $|\kappa_n(w)| = 1 \neq 0$.

Provamos assim que todos os pontos do paralelo obtido girando a origem em torno da reta r são parabólicos.

Em qualquer vizinhança de um desses pontos, a superfície possui pontos em ambos os lados do plano tangente a esse ponto, pois a curva \mathcal{C} possui pontos em ambos os lados do plano xy , que é o plano tangente à superfície na origem. \square

A expressão da segunda forma fundamental em coordenadas locais é útil para estudar as direções principais e assintóticas. Trataremos primeiro das direções assintóticas.

Sejam $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S , com $X(u_0, v_0) = p_0$, e $e, f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ os coeficientes da segunda forma fundamental nesta parametrização.

Seja $\mathcal{C} \subset X(U)$ uma curva regular conexa. Sabemos que \mathcal{C} é uma curva assintótica se, e só se, para uma parametrização qualquer $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I$, de \mathcal{C} temos $\Pi_p(\alpha'(t)) = 0$ para todo $t \in I$, isto é,

$$u'(t)^2 e(u(t), v(t)) + 2u'(t)v'(t) f(u(t), v(t)) + v'(t)^2 g(u(t), v(t)) = 0, \quad (6)$$

para todo $t \in I$.

A equação (6) é chamada de *equação diferencial das linhas assintóticas*.

Proposição 3.2 *As curvas coordenadas de uma parametrização $X : U \rightarrow X(U)$ são curvas assintóticas se, e só se, $e(u, v) = g(u, v) = 0$ para todo $(u, v) \in U$.*

Prova.

(\Rightarrow) Seja $(u_0, v_0) \in U$. Como $\alpha(t) = X(t, v_0)$, $t \in (-\varepsilon + u_0, \varepsilon + u_0)$ é uma curva assintótica, com $u(t) = t$ e $v(t) = v_0$, temos, pela equação (6), que $e(u_0, v_0) = 0$.

De modo análogo, como $\beta(s) = X(u_0, s)$, $s \in (-\varepsilon + v_0, \varepsilon + v_0)$ é também uma curva assintótica, com $u(s) = u_0$ e $v(s) = s$, obtém-se, pela equação (6), que $g(u_0, v_0) = 0$.

(\Leftarrow) Suponhamos agora que $e(u, v) = g(u, v) = 0$ para todo $(u, v) \in U$.

Seja $\alpha(t) = X(t, v_0)$ uma parametrização da curva coordenada $v = v_0$. Então, como $v'(t) = 0$,

$$\mathbb{I}_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = f(u(t), v(t)) v'(t) u'(t) = 0,$$

para todo t , isto é, α é uma curva assintótica e, portanto, a curva coordenada $v = v_0$ é uma curva assintótica.

Seja $\beta(s) = X(u_0, v(s))$ uma parametrização da curva coordenada $u = u_0$. Então, como $u'(s) = 0$, $\mathbb{I}_{\beta(s)}(\beta'(s)) = f(u(s), v(s)) u'(s) v'(s) = 0$ para todo s , ou seja, β é uma curva assintótica e, portanto, a curva coordenada $u = u_0$ é uma curva assintótica.

Observação: Quando $e = g = 0$ em U , a curvatura Gaussiana $\mathbf{K}(X(u, v)) = -\frac{f^2}{EG - F^2}(u, v)$ é ≤ 0 em U , isto é, um ponto $X(u, v)$ é hiperbólico ou planar.

Observação: Quando $e = g = 0$ e $f \neq 0$ em U , as curvas coordenadas de X são as únicas curvas assintóticas de S que passam por um ponto de $X(U)$, pois nesse caso todos os pontos de $X(U)$ são hiperbólicos e, portanto, em cada ponto de $X(U)$, S possui exatamente duas direções assintóticas, X_u e X_v . Podemos também verificar isso, observando que, quando $e = g = 0$ em U , a equação (6) é dada por

$$f(u(t), v(t)) u'(t) v'(t) = 0.$$

Portanto, $u(t) = \text{const.}$ ou $v(t) = \text{const.}$ são as únicas soluções da equação se $f \neq 0$ em U . \square

Passaremos agora às direções principais. Sabemos que uma curva regular conexa \mathcal{C} em uma vizinhança coordenada $X(U)$ é uma linha de curvatura se, e só se, para uma parametrização qualquer $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I$, de \mathcal{C} , temos (ver proposição 2.3)

$$dN(\alpha'(t)) = \lambda(t) \alpha'(t).$$

Ou seja, $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma linha de curvatura se, e só se,

$$u'(t) N_u(X(u(t), v(t))) + v'(t) N_v(X(u(t), v(t))) = \lambda(t) u'(t) X_u(u(t), v(t)) + \lambda(t) v'(t) X_v(u(t), v(t))$$

\Leftrightarrow

$$u'(t)(a_{11}X_u + a_{21}X_v)(u(t), v(t)) + v'(t)(a_{12}X_u + a_{22}X_v)(u(t), v(t)) = \lambda(t)u'(t)X_u(u(t), v(t)) + \lambda(t)v'(t)X_v(u(t), v(t))$$

\Leftrightarrow

$$a_{11}u'(t) + a_{12}v'(t) = \lambda(t)u'(t) \quad \text{e} \quad a_{21}u'(t) + a_{22}v'(t) = \lambda(t)v'(t)$$

\Leftrightarrow

$$\frac{(fF - eG)u'(t) + (gF - fG)v'(t)}{EG - F^2} = \lambda(t)u'(t) \quad \text{e} \quad \frac{(eF - fE)u'(t) + (fF - gE)v'(t)}{EG - F^2} = \lambda(t)v'(t)$$

\Leftrightarrow

$((fF - eG)u'(t) + (gF - fG)v'(t), (eF - fE)u'(t) + (fF - gE)v'(t))$ e $(u'(t), v'(t))$ são múltiplos,

\Leftrightarrow

$((fF - eG)u'(t) + (gF - fG)v'(t), (eF - fE)u'(t) + (fF - gE)v'(t))$ e $(-v'(t), u'(t))$ são ortogonais,

\Leftrightarrow

$$(eF - fE)u'(t)^2 + (fF - gE)u'(t)v'(t) - (fF - eG)u'(t)v'(t) - (gF - fG)v'(t)^2 = 0,$$

\Leftrightarrow

$$(eF - fE)u'(t)^2 + (eG - gE)u'(t)v'(t) + (fG - gF)v'(t)^2 = 0,$$

\Leftrightarrow

$$\begin{vmatrix} v'(t)^2 & -u'(t)v'(t) & u'(t)^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0, \quad (7)$$

que é a *equação diferencial das linhas de curvatura*. ■

Proposição 3.3 *Seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S tal que $X(u, v)$ não é um ponto umbílico para todo $(u, v) \in U$.*

Então as curvas coordenadas são linhas de curvatura se, e só se, $f = F = 0$.

Prova.

(\Rightarrow) Como X_u e X_v são direções principais e num ponto umbílico as direções principais são ortogonais, temos $F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$.

Seja $\alpha(t) = X(t, v_0)$ uma parametrização da curva coordenada $v = v_0$ que passa por (u_0, v_0) em $t = u_0$. Como α é uma linha de curvatura, temos, por (7), que

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ E & 0 & G \\ e & f & g \end{vmatrix} (u_0, v_0) = 0 \implies Ef(u_0, v_0) = 0 \implies f(u_0, v_0) = 0, \quad \text{pois } E(u_0, v_0) > 0.$$

Como $(u_0, v_0) \in U$ é arbitrário, $f \equiv 0$ em U .

(\Leftarrow) Suponhamos que $f = F = 0$ em U . Então $\alpha(t) = X(t, v_0)$ é uma linha de curvatura, pois

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ E & 0 & G \\ e & 0 & g \end{vmatrix} (t, v_0) = 0, \quad \text{para todo } t,$$

Ou seja, a curva coordenada $v = v_0$ é uma linha de curvatura. De modo análogo, podemos verificar que a curva coordenada $u = u_0$ é uma linha de curvatura. ■

Observação 3.6 Não usamos a hipótese de que os pontos de $X(U)$ são não-umbílicos para provar que as curvas coordenadas são linhas de curvatura. Só usamos que $F = f = 0$.

Exemplo 3.7 (Superfície de Revolução)

Seja S a superfície de revolução obtida girando a curva regular \mathcal{C} , contida no plano xz , em torno do eixo Oz . Então

$$X(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \operatorname{sen} u, \psi(v)),$$

$v \in I$, $u \in (0, 2\pi)$, é uma parametrização de S , onde $\alpha : I \rightarrow \mathcal{C}$, $\alpha(v) = (\varphi(v), 0, \psi(v))$ é uma parametrização de \mathcal{C} pelo comprimento de arco, com $\varphi(v) > 0$.

Como

$$X_u = (-\varphi(v) \operatorname{sen} u, \varphi(v) \cos u, 0), \quad X_v = (\varphi'(v) \cos u, \varphi'(v) \operatorname{sen} u, \psi'(v)) \quad \text{e} \quad \varphi'(v)^2 + \psi'(v)^2 = 1,$$

temos $E = \varphi(v)^2$, $F = 0$ e $G = 1$.

Vamos agora calcular os coeficientes da segunda forma fundamental.

Sendo

$$X_{uu} = (-\varphi(v) \cos u, -\varphi(v) \operatorname{sen} u, 0),$$

$$X_{uv} = (-\varphi'(v) \operatorname{sen} u, \varphi'(v) \cos u, 0),$$

$$X_{vv} = (\varphi''(v) \cos u, \varphi''(v) \operatorname{sen} u, \psi''(v)),$$

obtemos:

$$\begin{aligned} e &= \frac{(X_u, X_v, X_{uu})}{(EG - F^2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} -\varphi(v) \operatorname{sen} u & \varphi(v) \cos u & 0 \\ \varphi'(v) \cos u & \varphi'(v) \operatorname{sen} u & \psi'(v) \\ -\varphi(v) \cos u & -\varphi(v) \operatorname{sen} u & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{\varphi(v)^2}{\varphi(v)} \psi'(v) = -\varphi(v) \psi'(v), \\ f &= \frac{(X_u, X_v, X_{uv})}{(EG - F^2)^{1/2}} = 0 \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g &= \frac{(X_u, X_v, X_{vv})}{(EG - F^2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} -\varphi(v) \operatorname{sen} u & \varphi(v) \operatorname{cos} u & 0 \\ -\varphi'(v) \operatorname{cos} u & \varphi'(v) \operatorname{sen} u & \psi'(v) \\ \varphi''(v) \operatorname{cos} u & -\varphi''(v) \operatorname{sen} u & \psi''(v) \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{\varphi(v)} (-\varphi(v) \operatorname{sen}^2 u (\varphi'(v) \psi''(v) - \varphi''(v) \psi'(v)) \\
 &\quad - \varphi(v) \operatorname{cos}^2 u (\varphi'(v) \psi''(v) - \varphi''(v) \psi'(v))) \\
 &= \psi'(v) \varphi''(v) - \varphi'(v) \psi''(v).
 \end{aligned}$$

Como $F = f = 0$, temos, pela proposição 3.3, que as curvas coordenadas são linhas de curvatura, isto é, os paralelos ($v = \text{const.}$) e os meridianos ($u = \text{const.}$) são linhas de curvatura.

- Provaremos agora que ao longo do paralelo

$$\beta(u) = (\varphi(v) \operatorname{cos} u, \varphi(v), \operatorname{sen} u, \varphi(v))$$

que passa por $\alpha(v) = \beta(0)$, o vetor normal unitário à superfície em $\beta(u) = X(u, v)$ é obtido girando o vetor normal unitário $n_\alpha(v)$ à curva β em $\alpha(v)$ em torno do eixo Oz de um ângulo u .

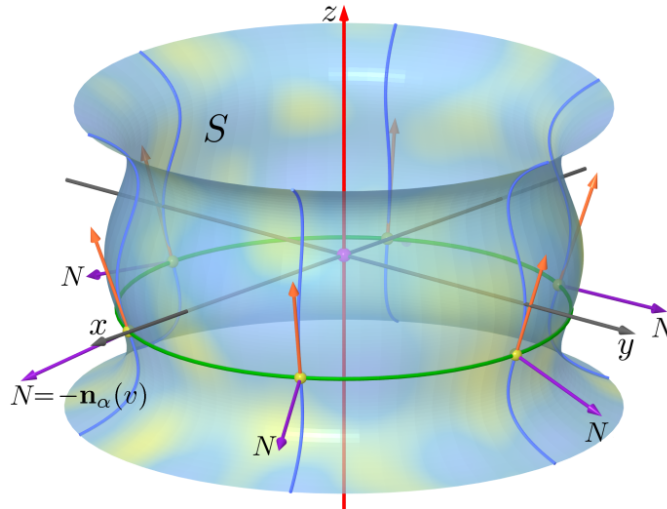


Fig. 24: Superfície de revolução S e vetores normais ao longo de um paralelo

De fato, como $\alpha'(v) = (\varphi'(v), 0, \psi'(v))$, temos que $-n_\alpha(v) = (\psi'(v), 0, -\varphi'(v))$. Portanto

$$\begin{aligned}
 N(X(u, v)) &= \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(u, v) = \frac{1}{\varphi(v)} (\varphi(v)\psi'(v) \operatorname{cos} u, \varphi(v)\psi'(v) \operatorname{sen} u, -\varphi(v) \varphi'(v)) \\
 &= (\psi'(v) \operatorname{cos} u, \psi'(v) \operatorname{sen} u, -\varphi'(v))
 \end{aligned}$$

é o vetor obtido girando o vetor $-n_\alpha(v)$ em torno do eixo Oz de um ângulo u .

Observação 3.7 Os meridianos são seções normais de S .

De fato, seja π o plano que contém o meridiano $X(u_0, v)$ e o eixo OZ .

Então

$$\pi : \text{sen } u_0 x - \text{cos } u_0 y = 0,$$

pois $X(u_0, v) \in \pi$ para todo $v \in \pi$ e π contém o eixo Oz . Ou seja, π é o plano que passa pela origem e é normal ao vetor $(\text{sen } u_0, -\text{cos } u_0, 0)$.

Como

$$X_v(u_0, v) = (\varphi'(v) \cos u_0, \varphi'(v) \text{sen } u_0, \psi'(v))$$

$$\text{e } N(u_0, v) = (\psi'(v) \cos u_0, \psi'(v) \text{sen } u_0, -\varphi'(v))$$

são paralelos ao plano π e $X(u_0, v) \in \pi$, temos que $\pi = \pi_{X(u_0, v)}(X_v(u_0, v), N(u_0, v))$ e, portanto, $\pi \cap X(U) = \{X(u_0, v) \mid v \in I\}$ é a seção normal a $X(U)$ em $X(u_0, v)$ ao longo da direção $X_v(u_0, v)$ para todo $v \in I$. \square

Como os meridianos são seções normais e linhas de curvatura, uma das curvaturas principais de S em $X(u, v)$ é

$$\Pi_{X(u, v)} \left(\frac{X_v}{\|X_v\|}(u, v) \right) = e(u, v) = \psi'(v) \varphi''(v) - \psi''(v) \varphi'(v) = -\kappa_{\alpha_u}(v),$$

onde $\kappa_{\alpha_u}(v)$ é a curvatura do meridiano $\alpha_u(v) = X(u, v)$ em v , considerado como uma curva plana.

Observação 3.8 O paralelo $\beta_{v_0}(u) = X(u, v_0)$ é uma seção normal de S em $p = \beta(u)$ se, e só se, o vetor tangente a C em $\alpha(v_0)$ é paralelo ao eixo Oz .

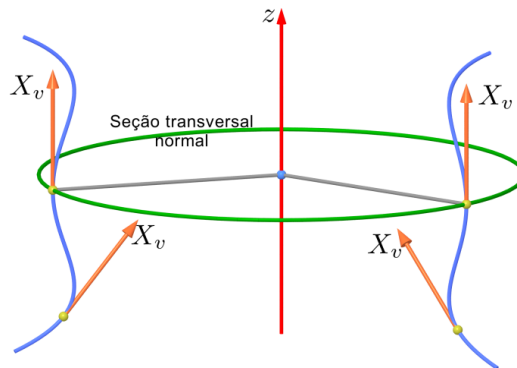


Fig. 25: X_v é paralelo ao eixo Oz se, e só se, $\varphi'(v) = 0$

Primeiro observe que

$$X_v(0, v_0) = (\varphi'(v_0), 0, \psi'(v_0))$$

é paralelo ao eixo Oz se, e só se, $\varphi'(v_0) = 0$. Nesse caso,

$$X_v(u_0, v_0) = (\varphi'(v_0) \cos u, \varphi'(v_0) \text{sen } u, \psi'(v_0)) = (0, 0, \psi'(v_0))$$

é paralelo ao eixo Oz para todo u .

Como $\pi_{X(u, v_0)}(X_u(u, v_0), N(u, v_0))$ é o plano que passa por $X(u, v_0)$ e é normal ao vetor $X_v(u, v_0)$, temos que $\pi_{X(u, v_0)}(X_u(u, v_0), N(u, v_0))$ é paralelo ao plano xy se, e só se, $X_v(u, v_0)$ é paralelo ao eixo Oz .

Logo

$$S \cap \pi_{X(u, v_0)}(X_u(u, v_0), N(u, v_0)) = \{\beta_{v_0}(u) \mid u \in [0, 2\pi]\}$$

se, e só se, $X_v(u, v_0)$ é paralelo ao eixo Oz , ou seja, se, e só se, o vetor tangente a C em $\alpha(v_0)$ é paralelo ao eixo Oz .

Observação 3.9 Sendo

$$K(u, v) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}(u, v) = \frac{-\psi'(v)(\psi'(v)\varphi''(v) - \psi''(v)\varphi'(v))}{\varphi(v)} \quad (8)$$

a curvatura Gaussiana de S no ponto $X(u, v)$, temos que $K(u, v) = 0$ se, e só se, $\psi'(v) = 0$ ou $\psi'(v)\varphi''(v) - \psi''(v)\varphi'(v) = 0$.

Observe que:

- $\psi'(v) = 0$ se, e só se, o vetor tangente a C em $\alpha(v)$ é perpendicular ao eixo Oz .
- $\psi'(v)\varphi''(v) - \psi''(v)\varphi'(v) = 0$ se, e só se, a curvatura de C em $\alpha(v)$ é zero.

Se $\psi'(v) = 0$ ($\iff e = 0$) e $\psi'(v)\varphi''(v) - \psi''(v)\varphi'(v) \neq 0$ ($\iff g \neq 0$), $X(u, v)$ é um ponto parabólico.

Se $\psi'(v) = 0$ e $\psi'(v)\varphi''(v) - \psi''(v)\varphi'(v) = 0$, $X(u, v)$ é um ponto planar, pois $e = f = g = 0$ em (u, v) . \square

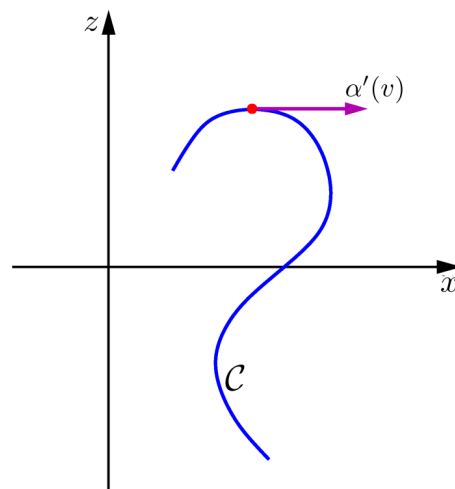


Fig. 26: $\alpha'(v)$ é perpendicular ao eixo Oz

Exemplo 3.8 Seja

$$\alpha(v) = \left(0, a + r \cos \frac{v}{r}, r \sin \frac{v}{r}\right), \quad v \in [0, 2\pi r]$$

uma parametrização pelo comprimento de arco da geratriz do toro.

- Como $\alpha'\left(\frac{\pi}{2}r\right)$ e $\alpha'\left(\frac{3\pi}{2}r\right)$ são os únicos vetores tangentes a α que são perpendiculares ao eixo Oz e a curvatura de α é diferente de zero em todos os pontos, obtemos, pela observação acima, que os pontos dos paralelos $X\left(u, \frac{\pi}{2}r\right)$ e $X\left(u, \frac{3\pi}{2}r\right)$ são os únicos pontos parabólicos do toro.

• Como $\alpha'(v)$ é paralelo ao eixo Oz se, e só se, $v = 0$ e $v = \pi r$, temos que $X(u, 0)$ e $X(u, \pi r)$ são os únicos paralelos do toro que são seções normais. Nos pontos do paralelo $v = 0$, que é um círculo de raio $a + r$, as curvaturas principais do toro são $-\frac{1}{a+r}$ e $-\frac{1}{r}$, e, portanto, $\mathbf{K}(u, 0) = \frac{1}{(a+r)r}$ para todo $u \in [0, 2\pi]$.

Nos pontos do paralelo $v = \pi r$, que é um círculo de raio $a - r$, as curvaturas principais do toro são $\frac{1}{a-r}$ e $-\frac{1}{r}$. Logo, $\mathbf{K}(u, \pi r) = -\frac{1}{(a-r)r}$ para todo $u \in [0, 2\pi]$. \square

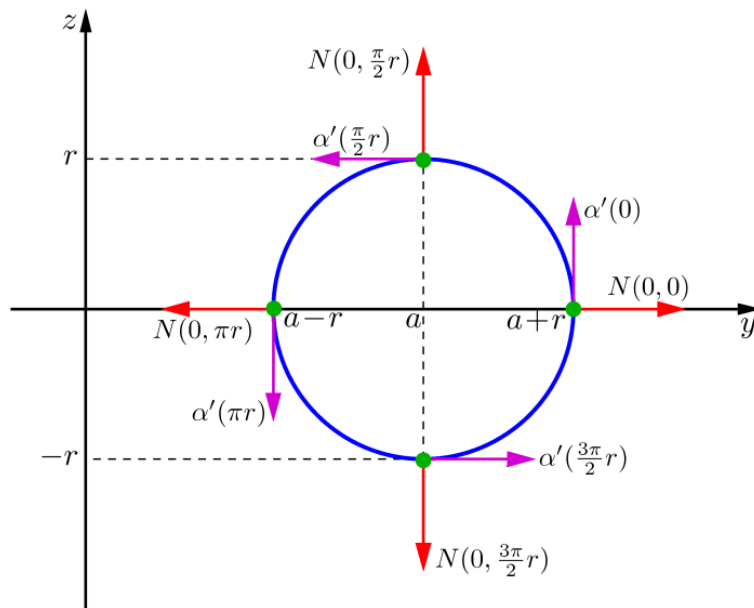


Fig. 27: Normais e tangentes horizontais e verticais no toro

Exemplo 3.9 Seja $\alpha(v) = (0, a, v)$, $v \in \mathbb{R}$, uma parametrização pelo comprimento de arco da geratriz do cilindro

$$S : x^2 + y^2 = a^2.$$

Como α tem curvatura zero e vetor tangente paralelo ao eixo Oz em todos os pontos, temos que todos os pontos do cilindro são parabólicos e todos os paralelos são seções normais de curvatura $\frac{1}{a}$. Logo, 0 e $-\frac{1}{a}$ são as curvaturas principais de S em qualquer um de seus pontos. \square

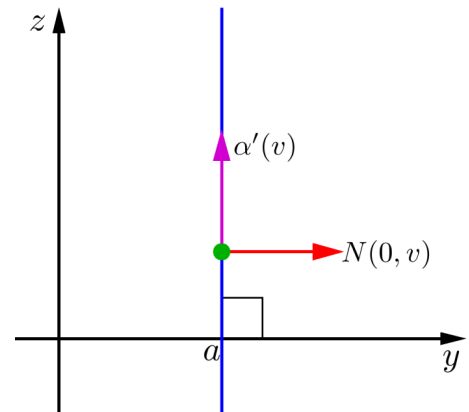


Fig. 28: Geratriz do cilindro S

Exemplo 3.10 Seja S a superfície de revolução (ver exemplo 3.6) obtida girando a curva

$$C : \begin{cases} z = y^3 \\ x = 0 \end{cases} \text{ em torno da reta } r : \begin{cases} z = 1 \\ x = 0. \end{cases}$$

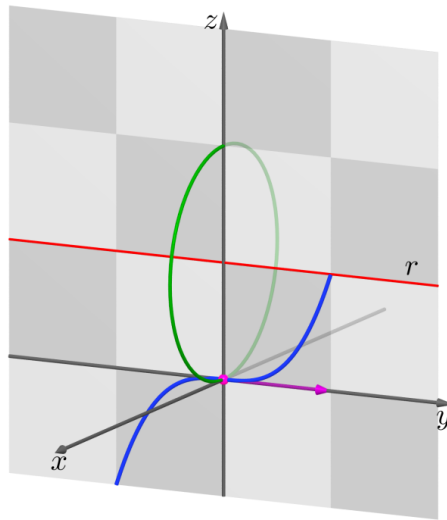


Fig. 29: Geratriz da superfície S

Como o vetor tangente a C em $(0, 0, 0)$ é paralelo à reta r e C tem curvatura zero nesse ponto, temos que o paralelo que passa pela origem é uma seção normal e todos os seus pontos são parabólicos \square

Observação 3.10 A curvatura Gaussiana de uma superfície de revolução é dada também por:

$$\mathbf{K}(u, v) = -\frac{\varphi''(v)}{\varphi(v)}.$$

De fato, como $\varphi'(v)^2 + \psi'(v)^2 = 1$ para todo v , obtemos, derivando esta expressão, que $\varphi'(v) \varphi''(v) = -\psi'(v) \psi''(v)$.

Logo, por (8),

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(u, v) &= \frac{-\psi'(v)^2 \varphi''(v) + \psi''(v) \psi'(v) \varphi'(v)}{\varphi(v)} \\ &= \frac{-\psi'(v)^2 \varphi''(v) + \varphi'(v) \varphi''(v) \varphi'(v)}{\varphi(v)} \\ &= \frac{-(\psi'(v) + \varphi'(v)^2) \varphi''(v)}{\varphi(v)} = \frac{-\varphi''(v)}{\varphi(v)}. \quad \square \end{aligned}$$

Observação 3.11 Seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de uma superfície S tal que $f = F = 0$ em U . Então $\frac{e}{E}$ e $\frac{g}{G}$ são as curvaturas principais.

De fato, como $\mathbf{K} = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{eg}{EG}$ e $2\mathbf{H} = \kappa_1 + \kappa_2 = \frac{eG + gE}{EG}$, isto é, $\kappa_1 \kappa_2 = \frac{e}{E} \frac{g}{G}$ e $\kappa_1 + \kappa_2 = \frac{e}{E} + \frac{g}{G}$, então $\frac{e}{E}$ e $\frac{g}{G}$ são as curvaturas principais.

Em particular, as curvaturas principais de uma superfície de revolução são dadas por

$$\frac{e}{E} = \frac{-\psi' \varphi}{\varphi^2} = \frac{-\psi'}{\varphi} \quad \text{e} \quad \frac{g}{G} = \psi' \varphi'' - \psi'' \varphi'.$$

Portanto, as curvaturas principais são constantes ao longo de um paralelo e a curvatura média da superfície é dada por

$$\mathbf{H} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2} \frac{-\psi' + \varphi(\psi' \varphi'' - \psi'' \varphi')}{\varphi}. \quad \square$$

Exemplo 3.11 Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida no aberto U de \mathbb{R}^2 . O gráfico de f é uma superfície regular S que pode ser coberta por uma única parametrização:

$$\begin{aligned} X : U &\longrightarrow S \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, f(x, y)). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} X_x &= (1, 0, f_x), & X_y &= (0, 1, f_y) \\ X_{xx} &= (0, 0, f_{xx}), & X_{xy} &= (0, 0, f_{xy}) \\ X_{yy} &= (0, 0, f_{yy}). \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathbf{N}(x, y) = \frac{X_x \wedge X_y}{\|X_x \wedge X_y\|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

é um campo normal unitário a superfície e os coeficientes da primeira forma fundamental e da segunda forma fundamental nessa parametrização são dados por:

$$\begin{aligned} E &= 1 + f_x^2; & G &= 1 + f_y^2; & F &= f_x f_y \\ e &= \frac{f_{xx}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{1/2}}; & f &= \frac{f_{xy}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{1/2}}; & g &= \frac{f_{yy}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Assim, a curvatura Gaussiana e a curvatura média da superfície são:

$$\mathbf{K} = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}, \quad \text{e} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{2} \frac{(1 + f_y^2) f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}. \quad \square$$

Observação 3.12 Para todo ponto p de uma superfície S , existe um aberto $V \subset S$, com $p \in V$, tal que V é o gráfico sobre o plano tangente a S em p .

De fato, seja $\{v_1, v_2\}$ uma base ortonormal de $T_p S$ compatível com a orientação de S , isto é, $\{v_1, v_2, \mathbf{N}(p)\}$ é uma base ortonormal positiva de \mathbb{R}^3 .

Seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S tal que $X(0, 0) = p$ e $N(p) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(0, 0)$.

Como $\{e_1, e_2, N(p)\}$ é uma base ortonormal positiva de \mathbb{R}^3 , existem funções $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tais que

$$X(u, v) - X(0, 0) = \bar{x}(u, v) v_1 + \bar{y}(u, v) v_2 + \bar{z}(u, v) N(p).$$

Então

$$X_u(0, 0) = \bar{x}_u(0, 0) v_1 + \bar{y}_u(0, 0) v_2 + \bar{z}_u(0, 0) N(p),$$

e

$$X_v(0, 0) = \bar{x}_v(0, 0) v_1 + \bar{y}_v(0, 0) v_2 + \bar{z}_v(0, 0) N(p).$$

Logo

$$\begin{aligned} (X_u \wedge X_v)(0, 0) &= (\bar{x}_u(0, 0) \bar{y}_v(0, 0) - \bar{x}_v(0, 0) \bar{y}_u(0, 0)) N(p) \\ &\quad - (\bar{x}_u(0, 0) \bar{z}_v(0, 0) - \bar{x}_v(0, 0) \bar{z}_u(0, 0)) v_2 \\ &\quad + (\bar{y}_u(0, 0) \bar{z}_v(0, 0) - \bar{y}_v(0, 0) \bar{z}_u(0, 0)) v_1. \end{aligned}$$

Como $N(p)$ é paralelo a $(X_u \wedge X_v)(0, 0)$, obtemos que $\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)}(0, 0) \neq 0$.

Sejam $\bar{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\bar{X} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, e $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção $\pi(x, y, z) = (x, y)$.

Então $\pi \circ \bar{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação diferenciável tal que

$$d(\pi \circ \bar{X})_{(0,0)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

é um isomorfismo.

Pelo Teorema da Aplicação Inversa, existem abertos $U_0 \subset U$ e U_1 de \mathbb{R}^2 , com $(0, 0) \in U_0$ e $(0, 0) \in U_1$, tais que $\pi \circ X : U_0 \rightarrow U_1$ é um difeomorfismo.

Seja $Y = X \circ (\pi \circ \bar{X})^{-1} : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Então Y é diferenciável e é dada por:

$$Y(\bar{x}, \bar{y}) = p + \bar{x} v_1 + \bar{y} v_2 + \bar{z}(u(\bar{x}, \bar{y}), v(\bar{x}, \bar{y})) N(p),$$

onde

$$(\pi \circ \bar{X})^{-1}(\bar{x}, \bar{y}) = (u(\bar{x}, \bar{y}), v(\bar{x}, \bar{y})).$$

Logo $Y(U_1)$ é um aberto de S que contém P e é o gráfico sobre $T_p S$ da função

$$h(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{z}(u(\bar{x}, \bar{y}), v(\bar{x}, \bar{y})).$$

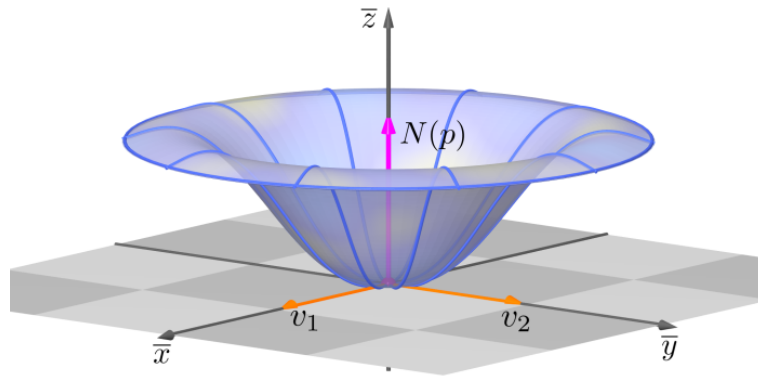


Fig. 30: Vetor $N(p)$ paralelo a $v_1 \wedge v_2$

Na parametrização $Y : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$Y(\bar{x}, \bar{y}) = p + \bar{x} v_1 + \bar{y} v_2 + h(\bar{x}, \bar{y}) N(p),$$

temos que

$$Y(0, 0) = p, \quad Y_{\bar{x}}(0, 0) = v_1 + h_{\bar{x}}(0, 0) N(p) = v_1 \quad \text{e} \quad Y_{\bar{y}}(0, 0) = v_2 + h_{\bar{y}}(0, 0) N(p) = v_2,$$

pois $Y_{\bar{x}}(0, 0), Y_{\bar{y}}(0, 0) \in T_p S$. Logo $h(0, 0) = h_{\bar{x}}(0, 0) = h_{\bar{y}}(0, 0) = 0$.

Além disso, como $N(p) = v_1 \wedge v_2$,

$$Y_{\bar{x}\bar{x}}(0, 0) = h_{\bar{x}\bar{x}}(0, 0) N(p), \quad Y_{\bar{x}\bar{y}}(0, 0) = h_{\bar{x}\bar{y}}(0, 0) N(p) \quad \text{e} \quad Y_{\bar{y}\bar{y}}(0, 0) = h_{\bar{y}\bar{y}}(0, 0) N(p),$$

obtemos:

$$e(0, 0) = \langle N(p), Y_{\bar{x}\bar{x}}(0, 0) \rangle = h_{\bar{x}\bar{x}}(0, 0),$$

$$f(0, 0) = \langle N(p), Y_{\bar{x}\bar{y}}(0, 0) \rangle = h_{\bar{x}\bar{y}}(0, 0),$$

$$g(0, 0) = \langle N(p), Y_{\bar{y}\bar{y}}(0, 0) \rangle = h_{\bar{y}\bar{y}}(0, 0).$$

Logo a segunda forma fundamental de S em p com respeito à base ortonormal $\{v_1, v_2\} = \{Y_{\bar{x}}(0, 0), Y_{\bar{y}}(0, 0)\}$ de $T_p S$ é:

$$\Pi_p(\bar{x} v_1 + \bar{y} v_2) = h_{\bar{x}\bar{x}}(0, 0) \bar{x}^2 + 2h_{\bar{x}\bar{y}}(0, 0) \bar{x} \bar{y} + h_{\bar{y}\bar{y}}(0, 0) \bar{y}^2,$$

que é a Hessiana de h no ponto $(0, 0)$.

Observação 3.13 Vamos utilizar a observação acima para dar uma *interpretação geométrica da indicatriz de Dupin*.

Seja $p \in S$ um ponto não-planar. Dado $\varepsilon > 0$, seja

$$C_\varepsilon = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in U_1 \mid h(\bar{x}, \bar{y}) = \varepsilon\}.$$

Podemos supor que $C_\varepsilon \neq \emptyset$, pois caso contrário basta trocar a orientação de S .

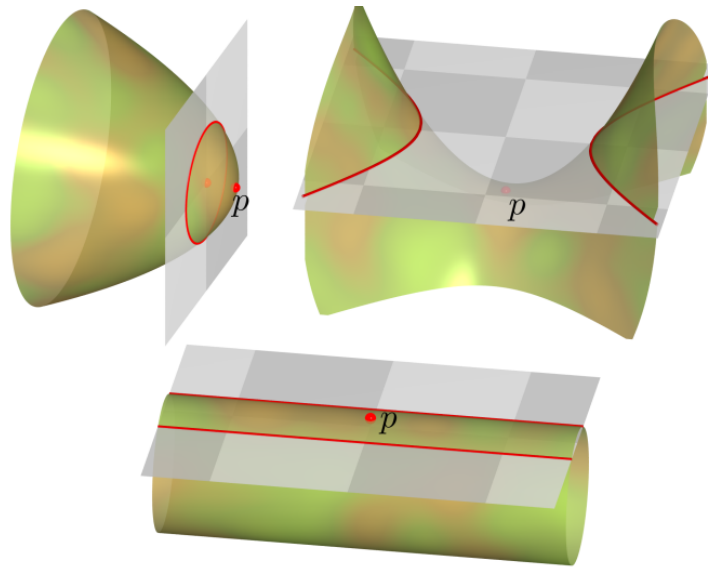


Fig. 31: Plano paralelo a $T_p S$

Mostraremos que C_ε é uma aproximação de segunda ordem da indicatriz de Dupin em p .

De fato, sejam $\kappa_1(p) \geq \kappa_2(p)$ as curvaturas principais de S em p e tomemos v_1 e v_2 , na observação 3.12, como sendo as direções principais de S em p , isto é, $dN_p(v_1) = -\kappa_1(p)v_1$ e $dN_p(v_2) = -\kappa_2(p)v_2$.

Então

$$\begin{aligned} e(0,0) &= h_{\bar{x}\bar{x}}(0,0) = -\langle N_{\bar{x}}(0,0), Y_{\bar{x}}(0,0) \rangle = \kappa_1(p); \\ f(0,0) &= h_{\bar{x}\bar{y}}(0,0) = -\langle N_{\bar{x}}(0,0), Y_{\bar{y}}(0,0) \rangle = 0; \\ g(0,0) &= h_{\bar{y}\bar{y}}(0,0) = -\langle N_{\bar{y}}(0,0), Y_{\bar{y}}(0,0) \rangle = \kappa_2(p), \end{aligned}$$

pois $Y_{\bar{x}}(0,0) = v_1$ e $Y_{\bar{y}}(0,0) = v_2$.

O desenvolvimento de Taylor de h em torno do ponto $(0,0)$ nos dá que:

$$h(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2}(h_{\bar{x}\bar{x}}(0,0)\bar{x}^2 + 2h_{\bar{x}\bar{y}}(0,0)\bar{x}\bar{y} + h_{\bar{y}\bar{y}}(0,0)\bar{y}^2) + R(\bar{x}, \bar{y}),$$

onde $\lim_{(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow (0,0)} \frac{R(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} = 0$, pois $h(0,0) = h_{\bar{x}}(0,0) = h_{\bar{y}}(0,0) = 0$.

Logo

$$h(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2} \kappa_1(p) \bar{x}^2 + \frac{1}{2} \kappa_2(p) \bar{y}^2 + R(\bar{x}, \bar{y}).$$

Assim, a curva C_ε é dada por

$$\kappa_1(p) \bar{x}^2 + \kappa_2(p) \bar{y}^2 + 2R(\bar{x}, \bar{y}) = 2\varepsilon.$$

Como $\kappa_1(p) \neq 0$ ou $\kappa_2(p) \neq 0$, temos que $\kappa_1(p)\bar{x}^2 + \kappa_2(p)\bar{y}^2 = 2\varepsilon$ é uma aproximação de ordem 2 da curva C_ε .

Fazendo $\bar{x} = x\sqrt{2\varepsilon}$ e $\bar{y} = y\sqrt{2\varepsilon}$, temos que $\kappa_1(p)\bar{x}^2 + \kappa_2(p)\bar{y}^2 = 2\varepsilon$ é transformada em $\kappa_1(p)x^2 + \kappa_2(p)y^2 = 1$, que é a indicatriz de Dupin de S em p .

Provamos, assim, que se p é um ponto não-planar, a interseção de S com um plano paralelo a T_pS e próximo a p é uma curva que tem a indicatriz de Dupin em p como uma aproximação de segunda ordem.

Se p é um ponto planar, essa interpretação deixa de ser válida (ver exemplos 2.6 e 3.5).

Observação 3.14 Para concluir esta seção daremos uma interpretação geométrica da curvatura Gaussiana em termos da aplicação de Gauss $N : S \rightarrow S^2$. Essa foi a maneira em que Gauss introduziu a curvatura.

Mas antes, daremos uma definição e faremos algumas observações.

Sejam S_1 e S_2 superfícies regulares orientadas e $N_1 : S_1 \rightarrow S^2$, $N_2 : S_2 \rightarrow S^2$ as aplicações normais de Gauss de S_1 e S_2 , respectivamente.

Seja $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ uma aplicação diferenciável tal que $d\varphi_p : T_pS_1 \rightarrow T_{\varphi(p)}S_2$ é um isomorfismo em um ponto $p \in S_1$.

Dizemos que φ *preserva (inverte) orientação em p* , se dada uma base positiva $\{v_1, v_2\}$ de T_pS_1 (i.e., $\det(v_1, v_2, N_1(p)) > 0$) então $\{d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2)\}$ é uma base positiva (negativa) de $T_{\varphi(p)}S_2$ (i.e., $\det(d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2), N_2(\varphi(p))) > 0 (< 0)$).

Afirmção: Seja $\{v_1, v_2\}$ uma base positiva de T_pS_1 . Então $\{w_1, w_2\}$ é uma base positiva de T_pS_1 se, e só se, a matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ de mudança de base tem determinante positivo.

De fato:

$$\begin{aligned} \det(w_1, w_2, N_1(p)) &= \langle w_1 \wedge w_2, N_1(p) \rangle = \langle (a_{11}v_1 + a_{21}v_2) \wedge (a_{12}v_1 + a_{22}v_2), N_1(p) \rangle \\ &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \langle v_1 \wedge v_2, N_1(p) \rangle. \end{aligned}$$

Logo, $\{w_1, w_2\}$ é uma base positiva se, e só se, $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0$.

Afirmção: Na definição acima, basta verificar que

$$\langle d\varphi_p(v_1) \wedge d\varphi_p(v_2), N_2(\varphi(p)) \rangle > 0 \quad (< 0),$$

para uma base $\{v_1, v_2\}$ positiva de $T_p S_1$, pois se $\{w_1, w_2\}$ é outra base positiva de $T_p S_1$, então

$$\langle d\varphi_p(w_1) \wedge d\varphi_p(w_2), N_2(p) \rangle = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \langle d\varphi_p(v_1) \wedge d\varphi_p(v_2), N_2(p) \rangle > 0 \quad (< 0).$$

Afirmação: Sejam S_1 e S_2 superfícies regulares orientadas e $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ um difeomorfismo local. Se S_1 é conexa, então φ preserva ou inverte orientação em todos os pontos de S_1 .

De fato, seja $N_1 : S_1 \rightarrow S^2$ a aplicação normal de Gauss de S_1 e $\{X_\alpha : U_\alpha \rightarrow X_\alpha(U_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ uma família de parametrizações, com U_α conexo, que cobre S_1 compatível com a orientação, isto é,

$$N_1(X_\alpha(u, v)) = \frac{(X_\alpha)_u \wedge (X_\alpha)_v}{\|(X_\alpha)_u \wedge (X_\alpha)_v\|}(u, v),$$

para todo $(u, v) \in U_\alpha$ e todo $\alpha \in A$, ou seja,

$$\det((X_\alpha)_u, (X_\alpha)_v, N_1 \circ X_\alpha)(u, v) = \langle (X_\alpha)_u \wedge (X_\alpha)_v, N_1 \circ X_\alpha \rangle(u, v) > 0,$$

para todo $(u, v) \in U_\alpha$ e todo $\alpha \in A$.

Suponhamos que existe $p_0 \in S_1$ tal que φ preserva orientação em $p_0 = X_{\alpha_0}(u_0, v_0)$. Provaremos que φ preserva orientação em todos os pontos de S_1 .

Como $Y_{\alpha_0} = \varphi \circ X_{\alpha_0} : U_{\alpha_0} \rightarrow \varphi(X_{\alpha_0}(U_{\alpha_0}))$ é um difeomorfismo local, U_{α_0} é conexo, e

$$\langle d\varphi_{X_{\alpha_0}(u_0, v_0)}((X_{\alpha_0})_u(u_0, v_0)) \wedge d\varphi_{X_{\alpha_0}(u_0, v_0)}((X_{\alpha_0})_v(u_0, v_0)), N_2(\varphi(X_{\alpha_0}(u_0, v_0))) \rangle > 0,$$

isto é,

$$\langle (Y_{\alpha_0})_u(u_0, v_0) \wedge (Y_{\alpha_0})_v(u_0, v_0), N_2(Y_{\alpha_0}(u_0, v_0)) \rangle > 0,$$

temos que

$$\langle (Y_{\alpha_0})_u \wedge (Y_{\alpha_0})_v, N_2 \circ Y_{\alpha_0} \rangle(u, v) > 0,$$

para todo $(u, v) \in U_{\alpha_0}$. Logo $d\varphi_p$ preserva orientação para todo $p \in X_{\alpha_0}(U_{\alpha_0})$.

Seja $A = \{p \in S_1 \mid d\varphi_p \text{ preserva orientação}\}$.

Por hipótese $A \neq \emptyset$ e, pelo argumento anterior, A é um aberto de S_1 .

De modo análogo, podemos provar que $B = \{p \in S_1 \mid d\varphi_p \text{ inverte orientação}\}$ é aberto em S_1 .

Como $S_1 = A \cup B$, $A \neq \emptyset$, A e B abertos em S_1 e S_1 é conexa, temos que $B = \emptyset$, ou seja, $S_1 = A$. \square

Voltaremos agora a nossa interpretação geométrica.

Seja S uma superfície regular orientada e $N : S \rightarrow S^2$ sua aplicação normal de Gauss.

Seja $p \in S$ tal que $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S^2 = T_{N(p)} S^2$ é um isomorfismo.

Então $\det(dN_p) = \mathbf{K}(p) \neq 0$ e, portanto, p é um ponto elíptico ou hiperbólico.

Se considerarmos S^2 com a orientação $\bar{N} : S^2 \rightarrow S^2$, $\bar{N}(q) = q$, $T_p S$ e $T_{N(p)} S^2$ terão a mesma orientação.

Seja $\{w_1, w_2\}$ uma base de $T_p S$. Como $dN_p(w_1), dN_p(w_2) \in T_p S^2$, existem números reais $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2$, tais que $dN_p(w_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2$ e $dN_p(w_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2$.

Logo,

$$dN_p(w_1) \wedge dN_p(w_2) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} w_1 \wedge w_2 = \mathbf{K}(p) w_1 \wedge w_2. \quad (9)$$

Seja agora uma base $\{w_1, w_2\}$ positiva de $T_p S$. Então $N : S \rightarrow S^2$ preserva orientação em p se $\mathbf{K}(p) > 0$ e inverte orientação se $\mathbf{K}(p) < 0$, pois

$$\langle dN_p(w_1) \wedge dN_p(w_2), N(p) \rangle = \mathbf{K}(p) \langle w_1 \wedge w_2, N(p) \rangle.$$

Intuitivamente, isto significa o seguinte: uma orientação de $T_p S$ induz uma orientação nas "pequenas" curvas fechadas em torno de p ; a imagem por N dessas curvas terá orientação igual ou oposta às primeiras curvas conforme o ponto seja elíptico ou hiperbólico, respectivamente (ver Figura 32).

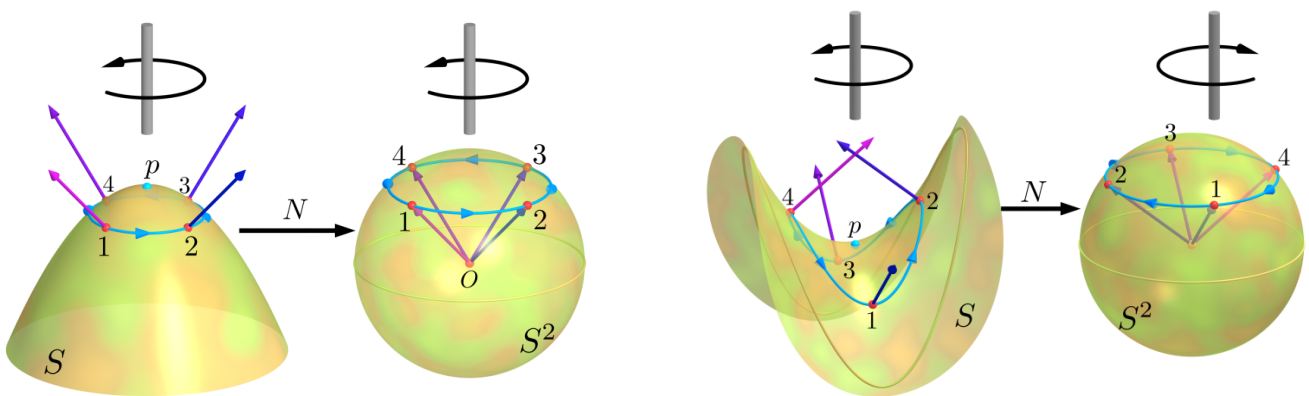


Fig. 32: A aplicação de Gauss preserva a orientação nos pontos elípticos e a inverte nos hiperbólicos

Para levar tal fato em consideração, faremos a convenção de que a área de uma região contida em uma vizinhança conexa $V = X(U)$, onde $N : V \rightarrow N(V)$ é um difeomorfismo (logo $\mathbf{K} \neq 0$ em V), e a área da sua imagem por N tem o mesmo sinal se $\mathbf{K} > 0$ em V e sinais opostos se $\mathbf{K} < 0$ em V (como V é conexo, \mathbf{K} não muda de sinal em V).

Ou seja, a área com sinal da imagem por N de uma região $R \subset V$ é dada por:

$$A(N(R)) = \iint_{R'} \mathbf{K} \|X_u \wedge X_v\| \, du \, dv,$$

onde $X(R') = R$.

Observação 3.15 Note que $\bar{N} = N \circ X : U \rightarrow N(X(U))$ é uma parametrização de S^2 , e que a área de $N(R)$ (sem sinal) é

$$\iint_{R'} \|\bar{N}_u \wedge \bar{N}_v\| \, du \, dv = \iint_{R'} |\mathbf{K}(u, v)| \|X_u \wedge X_v\| \, du \, dv$$

pois, por (9), $\bar{N}_u \wedge \bar{N}_v = \mathbf{K}(X_u \wedge X_v)$. \square

Proposição 3.4 Seja p um ponto de uma superfície S com curvatura Gaussiana $\mathbf{K}(p) \neq 0$ e seja $V = X(U)$ uma vizinhança coordenada conexa de p onde \mathbf{K} não muda de sinal. Então

$$\mathbf{K}(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(N(B_n))}{A(B_n)}.$$

onde $B_n \subset V$ é uma seqüência de regiões que converge para p , isto é, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $B_n \subset B_\varepsilon(p)$ para todo $n \geq n_0$.

Prova.

Sejam $R_n = X^{-1}(B_n)$ e $A_0(R_n)$ a área de R_n em \mathbb{R}^2 .

Pelo Teorema do Valor Médio para a integral dupla, existem $p_n, q_n \in \mathbb{R}^2$ tais que:

$$\frac{A(B_n)}{A_0(R_n)} = \frac{\iint_{R_n} \|X_u \wedge X_v\| \, du \, dv}{A_0(R_n)} = \|X_u \wedge X_v\|(p_n),$$

e

$$\frac{A(N(B_n))}{A_0(R_n)} = \frac{\iint_{R_n} \mathbf{K} \|X_u \wedge X_v\| \, du \, dv}{A_0(R_n)} = \mathbf{K}(q_n) \cdot \|X_u \wedge X_v\|(q_n).$$

Então

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(N(B_n))}{A(B_n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(N(B_n))/A_0(R_n)}{A(B_n)/A_0(R_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{K}(q_n) \cdot \|X_u \wedge X_v\|(q_n)}{\|X_u \wedge X_v\|(p_n)} \\ &= \frac{\mathbf{K}(p) \cdot \|X_u \wedge X_v\|(p)}{\|X_u \wedge X_v\|} = \mathbf{K}(p), \end{aligned}$$

pois $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = p$. \blacksquare

Observação 3.16 Sejam C uma curva regular plana, $\alpha : I \rightarrow C$ uma parametrização pelo comprimento de arco de C tal que $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$ e $\alpha(s_0) = p_0$ e $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\alpha'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ para todo $s \in I$.

Então

$$\kappa(s_0) = \theta'(s_0) = \lim_{\substack{s, s' \rightarrow s_0 \\ s' > s}} \frac{\theta(s') - \theta(s)}{s' - s},$$

onde $s' - s$ é o comprimento de $\alpha[s, s']$ e $\theta(s') - \theta(s)$ é o comprimento com sinal de $\alpha'[s, s']$.

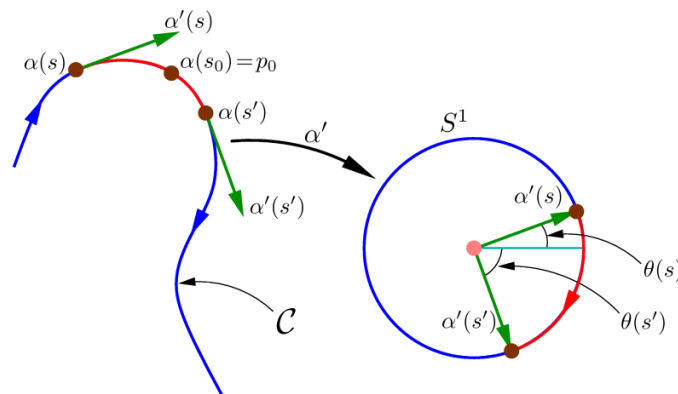


Fig. 33: $\kappa < 0$ no intervalo $[s, s']$

Vemos, assim, que a curvatura Gaussiana \mathbf{K} é o análogo, para superfícies, da curvatura κ para curvas planas.

4. Campos de Vetores

Nesta seção, usaremos os teoremas fundamentais das equações diferenciais ordinárias (existência, unicidade e dependência das condições iniciais) para provar a existência de certos sistemas de coordenadas em superfícies.

Começaremos com uma apresentação geométrica do material sobre equações diferenciais que utilizaremos.

Definição 4.1 Um *campo de vetores diferenciável* em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ é uma aplicação $w : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, $w(x, y) = (a(x, y), b(x, y))$, diferenciável.

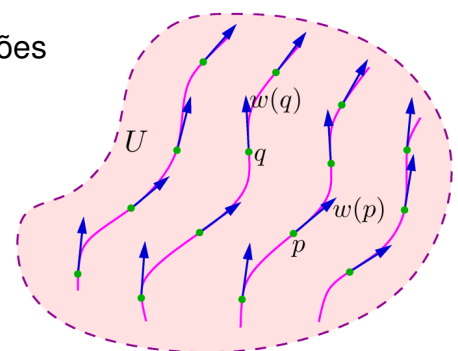


Fig. 34: Campo de vetores diferenciável w no aberto U

Geometricamente, a aplicação $w : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ associa a cada ponto $(x, y) \in U$ um vetor $w(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de coordenadas $a(x, y)$ e $b(x, y)$.

Definição 4.2 Uma *trajetória* de um campo de vetores diferenciável $w : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \rightarrow U$ tal que $\alpha'(t) = w(\alpha(t))$.

Exemplo 4.1 Uma trajetória do campo de vetores $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $w(x, y) = (x, y)$, que passa pelo ponto (x_0, y_0) é a semi-reta $\alpha(t) = (x_0 e^t, y_0 e^t)$, $t \in \mathbb{R}$, pois $\alpha'(t) = \alpha(t) = w(\alpha(t))$.

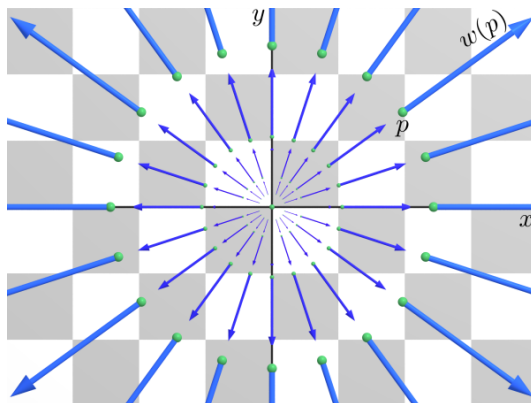


Fig. 35: Campo $w(x, y) = (x, y)$ em \mathbb{R}^2

Note que a trajetória de w que passa pela origem é $\alpha(t) = (0, 0)$, para todo t . Assim, a origem é um *ponto singular* do campo w . \square

Exemplo 4.2 Uma trajetória do campo de vetores $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $w(x, y) = (y, -x)$, que passa pelo ponto $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ é o círculo

$$\alpha(t) = (r \cos(t + \theta_0), r \sin(t + \theta_0)),$$

onde $(r \cos \theta_0, r \sin \theta_0) = (x_0, y_0)$, pois

$$\alpha'(t) = (-r \sin(t + \theta_0), r \cos(t + \theta_0)) = w(\alpha(t)).$$

Para $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $\alpha(t) = (0, 0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, é a trajetória que passa por $(0, 0)$.

Assim, $(0, 0)$ é uma singularidade do campo w . \square

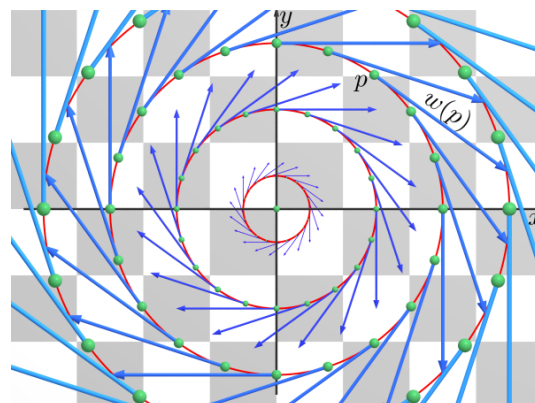


Fig. 36: Campo $w(x, y) = (y, -x)$ em \mathbb{R}^2

Na linguagem das equações diferenciais ordinárias, diz-se que um campo de vetores $w : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ determina um *sistema de equações diferenciais*,

$$\begin{aligned} x'(t) &= a(x(t), y(t)) \\ y'(t) &= b(x(t), y(t)) \end{aligned} \tag{10}$$

e que uma trajetória é uma *solução* ou *curva integral* do sistema (10).

No que se segue, I e J denotam intervalos abertos da reta \mathbb{R} que contém a origem $0 \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.1 (Teorema de Existência e Unicidade)

Seja $w : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores diferenciável definido num aberto U de \mathbb{R}^2 . Dado $p \in U$, **existem** um intervalo I e uma trajetória $\alpha : I \rightarrow U$ de w (i.e., $\alpha'(t) = w(\alpha(t))$, $\forall t \in I$) com $\alpha(0) = p$. Esta trajetória é **única**, isto é, se $\beta : J \rightarrow U$ é outra trajetória de w com $\beta(0) = p$, então $\beta(t) = \alpha(t)$ para todo $t \in I \cap J$.

Teorema 4.2 (Dependência Diferenciável das Condições Iniciais)

Seja $w : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores diferenciável definido num aberto de \mathbb{R}^2 . Para cada $p \in U$, existem um aberto $V \subset U$, $p \in V$, um intervalo I , com $0 \in I$, e uma aplicação $\alpha : V \times I \rightarrow U$ tais que:

1. α é diferenciável.
2. para todo $q \in V$, a curva $\alpha(q, t)$, $t \in I$, é a trajetória de w que passa por q , isto é:

$$\alpha(q, 0) = q, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t}(q, t) = w(\alpha(q, t)).$$

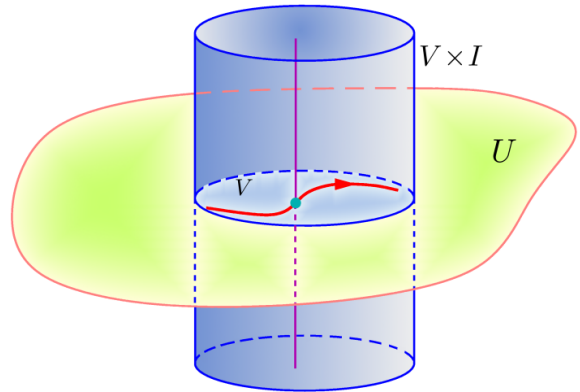


Fig. 37: Vizinhança de fluxo local

Definição 4.3 A aplicação $\alpha : V \times I \rightarrow U$ é chamada de **fluxo (local) de w em p** .

Lema 4.1 Sejam $w : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores diferenciável definido num aberto U de \mathbb{R}^2 e $p \in U$ tal que $w(p) \neq 0$. Então existem um aberto $U_0 \subset U$, com $p \in U_0$, e uma função diferenciável $f : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f é constante ao longo de cada trajetória de w e $df_q \neq 0$ para todo $q \in U_0$.

Prova.

Sejam $v_1 = \frac{w(p)}{\|w(p)\|}$, v_2 um vetor unitário ortogonal a v_1 , $\bar{a}, \bar{b} : U \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis dadas por

$$w(\xi, \eta) = \bar{a}(\xi, \eta) v_1 + \bar{b}(\xi, \eta) v_2.$$

Considere a aplicação diferenciável $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$A(x, y) = x v_1 + y v_2 + p,$$

e o aberto

$$A^{-1}(U) = \tilde{U} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x v_1 + y v_2 + p \in U \}.$$

Assim $(0, 0) \in \tilde{U}$ e $A(0, 0) = p$.

Finalmente, sejam as funções diferenciáveis $\tilde{a}, \tilde{b} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por:

$$\begin{aligned}\tilde{a}(x, y) &= \bar{a}(xv_1 + yv_2 + p) = \bar{a}(A(x, y)) \\ \tilde{b}(x, y) &= \bar{b}(xv_1 + yv_2 + p) = \bar{b}(A(x, y)).\end{aligned}$$

Logo,

$$w(xv_1 + yv_2 + p) = \bar{a}(xv_1 + yv_2 + p)v_1 + \bar{b}(xv_1 + yv_2 + p)v_2 = \tilde{a}(x, y)v_1 + \tilde{b}(x, y)v_2, \quad (11)$$

Então $\tilde{w} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\tilde{w}(x, y) = (\tilde{a}(x, y), \tilde{b}(x, y))$$

é um campo de vetores diferenciável tal que $\tilde{w}(0, 0) = (\|w(p)\|, 0)$, pois, por (11),

$$w(p) = \tilde{a}(0, 0)v_1 = \tilde{a}(0, 0) \frac{w(p)}{\|w(p)\|}.$$

Sejam $\tilde{V} = J_1 \times J_2$, J_1 e J_2 intervalos abertos com $0 \in J_1 \cap J_2$, $\tilde{V} \subset \tilde{U}$, I um intervalo aberto, com $0 \in I$, $\tilde{\alpha} : \tilde{V} \times I \rightarrow \tilde{U}$ o fluxo local de \tilde{w} em $(0, 0)$ e $\bar{\alpha}$ a restrição de $\tilde{\alpha}$ ao retângulo $(\tilde{V} \times I) \cap \{(x, y, t) \mid x = 0\} = J_2 \times I$.

Isto é, $\bar{\alpha}(y, t) = \tilde{\alpha}((0, y), t)$.

Logo $\bar{\alpha}(y, 0) = (0, y)$ e

$$\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t}(y, t) = \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial t}((0, y), t) = \tilde{w}(\tilde{\alpha}((0, y), t))$$

Como

$$d\bar{\alpha}_{(0,0)}(e_1) = \frac{d\tilde{\alpha}}{dy}((0, y), 0)|_{y=0} = (0, 1),$$

e

$$d\bar{\alpha}_{(0,0)}(e_2) = \frac{d\tilde{\alpha}}{dt}((0, 0), t)|_{t=0} = \tilde{w}(0, 0) = (\|w\|(p), 0),$$

temos que $d\bar{\alpha}_{(0,0)}(e_1)$ e $d\bar{\alpha}_{(0,0)}(e_2)$ são LI.

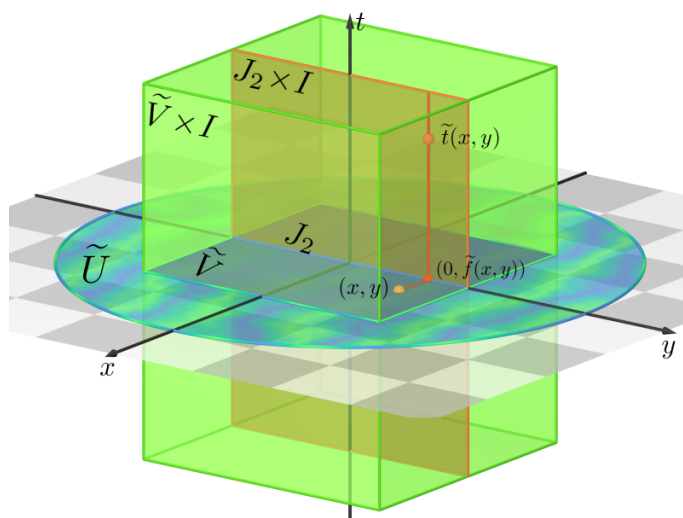


Fig. 38: Retângulo $J_2 \times I$ e a função \tilde{t}

Assim, pelo Teorema da Aplicação Inversa, existem intervalos abertos $\tilde{J}_2 \subset J_2$, $\tilde{I} \subset I$, com $0 \in \tilde{J}_2 \cap \tilde{I}$, e um aberto $\tilde{U} \subset \tilde{U}$, com $(0, 0) \in \tilde{U}$, tais que

$$\tilde{\alpha} : \tilde{J}_2 \times \tilde{I} \longrightarrow \tilde{U}$$

é um difeomorfismo.

Seja $\tilde{\alpha}^{-1} : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{J}_2 \times \tilde{I}$, $\tilde{\alpha}^{-1}(x, y) = (\tilde{f}(x, y), \tilde{t}(x, y))$. Então

$$\tilde{\alpha}((0, \tilde{f}(x, y)), \tilde{t}(x, y)) = (x, y).$$

Seja \tilde{B} a trajetória de \tilde{w} que passa por $(x, y) \in \tilde{U}$.

Então $\tilde{B}(t) = \tilde{\alpha}((0, \tilde{f}(x, y)), t)$, pois

$$\tilde{\alpha}((0, \tilde{f}(x, y)), \tilde{t}(x, y)) = (x, y).$$

Portanto, para todo $t \in \tilde{I}$,

$$\left(\tilde{\alpha}\right)^{-1}(\tilde{B}(t)) = (\tilde{f}(\tilde{B}(t)), \tilde{t}(\tilde{B}(t))) = (\tilde{f}(x, y), t),$$

pois $\tilde{B}(t) = \tilde{\alpha}(\tilde{f}(x, y), t)$.

Além disso, $d\tilde{f}_q \neq 0$ para todo $q \in \tilde{U}$, pois $\left(\tilde{\alpha}\right)^{-1}$ é um difeomorfismo.

Sejam o aberto $U_0 = A(\tilde{U}) = \{xv_1 + yv_2 + p \mid (x, y) \in \tilde{U}\}$ e $\alpha : I \longrightarrow U_0$ uma trajetória de $w : U_0 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, isto é,

$$\alpha'(t) = w(\alpha(t)) = w(x(t)v_1 + y(t)v_2 + p),$$

onde $\alpha(t) = p + x(t)v_1 + y(t)v_2$, $t \in I$.

Então, por (11),

$$\alpha'(t) = \tilde{a}(x(t), y(t))v_1 + \tilde{b}(x(t), y(t))v_2,$$

ou seja,

$$x'(t)v_1 + y'(t)v_2 = \tilde{a}(x(t), y(t))v_1 + \tilde{b}(x(t), y(t))v_2,$$

para todo $t \in I$.

Logo $x'(t) = \tilde{a}(x(t), y(t))$ e $y'(t) = \tilde{b}(x(t), y(t))$, isto é, $\tilde{\alpha}(t) = (x(t), y(t))$ é uma trajetória de $\tilde{w} : \tilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

A recíproca também vale, isto é, se $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{U}$, $\tilde{\alpha}(t) = (x(t), y(t))$, é uma trajetória de $\tilde{w} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$, então $\alpha(t) = p + x(t)v_1 + y(t)v_2$ é uma trajetória de $w : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Seja $f : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ a função diferenciável dada por

$$f(x, y) = \tilde{f}(A^{-1}(x, y)),$$

onde

$$A^{-1}(x, y) = (\langle (x, y) - p, v_1 \rangle, \langle (x, y) - p, v_2 \rangle).$$

Então, se $\alpha(t) = x(t)v_1 + y(t)v_2 + p$, $t \in \tilde{I}$ é uma trajetória de $w : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$, temos que $\tilde{\alpha}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \tilde{I}$, é uma trajetória de $\tilde{w} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$, e, portanto,

$$f(\alpha(t)) = \tilde{f}(A^{-1}(\alpha(t))) = \tilde{f}(x(t), y(t))$$

é constante.

Além disso, $df_q \neq 0$ para todo $q \in U_0$, pois $df_q = d\tilde{f}_{A^{-1}(q)} dA_q^{-1}$, $dA_q^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um isomorfismo e $d\tilde{f}_{A^{-1}(q)} \neq 0$. ■

Definição 4.4 A função $f : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de *integral primeira de w* em uma vizinhança de p .

Exemplo 4.3 A função $f : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$, é uma integral primeira do campo de vetores $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $w(x, y) = (y, -x)$. □

Definição 4.5 Um *campo de direções r* em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ é uma correspondência que associa a cada $p \in U$ uma reta $r(p)$ em \mathbb{R}^2 passando por p . Dizemos que r é *diferenciável* em $p \in U$ se existem um aberto $V \subset U$, com $p \in V$, e um campo de vetores $w : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciável tal que $w(q) \neq 0$ e $w(q) \parallel r(q)$ para todo $q \in V$; r é diferenciável em U se é diferenciável em todo ponto $p \in U$.

Observação 4.1 A cada campo de vetores diferenciável $w : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ que não se anula em ponto algum de U , corresponde um campo de direções diferenciável dado por:

$$r(p) = \text{reta que passa por } p \text{ e é paralela a } w(p), \quad \forall p \in U.$$

Pela própria definição, cada campo de direções diferenciável dá origem, localmente, a um campo de vetores diferenciável que não se anula. Mas, às vezes, isso não é possível globalmente.

Exemplo 4.4 Seja o campo de direções em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ dado pelas retas tangentes às curvas da Figura 39.

Qualquer tentativa de orientar essas curvas de modo a obter um campo de vetores diferenciável que não se anula leva a uma contradição. \square

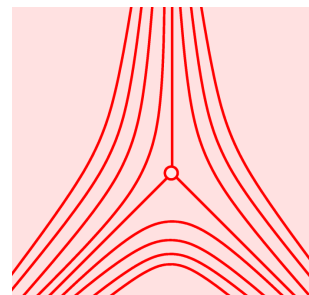


Fig. 39: Exemplo 4.4

Definição 4.6 Uma curva regular conexa $\mathcal{C} \subset U$ é uma *curva integral* de um campo de direções r em U se $r(q)$ é a reta tangente a \mathcal{C} em q , para todo $q \in \mathcal{C}$.

Observação 4.2 Dado $q \in U$, existe uma curva integral \mathcal{C} de r que passa por q .

De fato, dado $q \in U$, existem um aberto $V \subset U$, com $q \in V$, e um campo de vetores diferenciável $w : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ que não se anula tal que $w(p) \parallel r(p)$ para todo $p \in V$.

Seja $\alpha : I \rightarrow V$ a trajetória de w tal que $\alpha(0) = q$. Como $\alpha'(0) = w(q) \neq 0$, existe $I_0 \subset I$, $0 \in I_0$, tal que $\alpha : I_0 \rightarrow \alpha(I_0)$ é um homeomorfismo. Logo $\mathcal{C} = \alpha(I_0)$ é uma curva integral de r que passa por q .

Observação 4.3 Seja r um campo de direções diferenciável em U dado localmente pelo campo de vetores $w : V \subset U \rightarrow \mathbb{R}^2$, $w(x, y) = (b(x, y), -a(x, y))$. Então

$$a(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + b(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} = 0$$

é a equação diferencial das curvas integrais do campo de direções r , pois $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ é paralelo a $w(x(t), y(t)) = (b(x(t), y(t)), -a(x(t), y(t)))$ para todo t .

Transportaremos agora as idéias introduzidas acima para uma superfície regular.

Definição 4.7 Um *campo de vetores* em um conjunto aberto V de uma superfície regular S é uma correspondência que associa a cada $p \in V$ um vetor $w(p) \in T_p S$. O campo de vetores w é *diferenciável em p* se, para alguma parametrização $X : U \rightarrow X(U)$ de S em p , as funções $\alpha, b : U \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$w(X(u, v)) = \alpha(u, v) X_u(u, v) + b(u, v) X_v(u, v)$$

são diferenciáveis em q , onde $X(q) = p$.

Observação 4.4 A definição dada acima independe da escolha da parametrização $X : U \rightarrow X(U)$ de S em p .

De fato, seja $Y : \bar{U} \rightarrow Y(\bar{U})$, $Y(r) = p$, outra parametrização de S em p e sejam $\bar{a}, \bar{b} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ funções dadas por

$$w(Y(\bar{u}, \bar{v})) = \bar{a}(\bar{u}, \bar{v}) Y_{\bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) + \bar{b}(\bar{u}, \bar{v}) Y_{\bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}).$$

Sejam $W = X(U) \cap Y(\bar{U})$ e $h = Y^{-1} \circ X : X^{-1}(W) \rightarrow Y^{-1}(W)$, $h(u, v) = (\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v))$, a aplicação mudança de coordenadas.

Como

$$X_u(u, v) = Y_{\bar{u}}(h(u, v)) \frac{\partial \bar{u}}{\partial u}(u, v) + Y_{\bar{v}}(h(u, v)) \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}(u, v)$$

e

$$X_v(u, v) = Y_{\bar{u}}(h(u, v)) \frac{\partial \bar{u}}{\partial v}(u, v) + Y_{\bar{v}}(h(u, v)) \frac{\partial \bar{v}}{\partial v}(u, v),$$

temos que:

$$\begin{aligned} w(Y(\bar{u}, \bar{v})) &= w(X(h^{-1}(\bar{u}, \bar{v}))) = a(h^{-1}(\bar{u}, \bar{v})) X_u(h^{-1}(\bar{u}, \bar{v})) + b(h^{-1}(\bar{u}, \bar{v})) X_v(h^{-1}(\bar{u}, \bar{v})) \\ &= \left(a(h^{-1}(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial \bar{u}}{\partial u}(h^{-1}(\bar{u}, \bar{v})) + b(h^{-1}(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial \bar{u}}{\partial v}(h^{-1}(\bar{u}, \bar{v})) \right) Y_{\bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) \\ &+ \left(a(h^{-1}(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}(h^{-1}(\bar{u}, \bar{v})) + b(h^{-1}(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial \bar{v}}{\partial v}(h^{-1}(\bar{u}, \bar{v})) \right) Y_{\bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}). \end{aligned}$$

Logo, as funções

$$\bar{a}(\bar{u}, \bar{v}) = a \circ h^{-1}(\bar{u}, \bar{v}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \circ h^{-1}(\bar{u}, \bar{v}) + b \circ h^{-1}(\bar{u}, \bar{v}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \circ h^{-1}(\bar{u}, \bar{v}),$$

e

$$\bar{b}(\bar{u}, \bar{v}) = a \circ h^{-1}(\bar{u}, \bar{v}) \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \circ h^{-1}(\bar{u}, \bar{v}) + b \circ h^{-1}(\bar{u}, \bar{v}) \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \circ h^{-1}(\bar{u}, \bar{v}),$$

são diferenciáveis em r .

Definição 4.8 Uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow V$ é uma *trajetória de w* se $\alpha'(t) = w(\alpha(t))$ para todo $t \in I$.

Os resultados anteriores provados para campos de vetores em abertos de \mathbb{R}^2 valem também para campos de vetores em uma superfície regular S .

Teorema 4.3 Seja w um campo de vetores diferenciável definido em um aberto V de S .

1. Para cada $p \in V$, existem um intervalo aberto I , com $0 \in I$, e uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow V$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(t) = w(\alpha(t))$ para todo $t \in I$.
2. Se $\beta : J \rightarrow V$ é outra trajetória de w com $\beta(0) = p$, então $\beta(t) = \alpha(t)$ para todo $t \in I \cap J$.

3. Para cada $p \in V$, existem um aberto $U \subset V$, com $p \in U$, um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ com $0 \in I$, e uma aplicação diferenciável $\alpha : U \times I \rightarrow V$ tal que

$$\alpha(q, 0) = q \quad \text{e} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t}(q, t) = w(\alpha(q, t)),$$

para todo $q \in U$ e todo $t \in I$.

4. Para cada $p \in V$, existem um aberto $U_0 \subset V$, com $p \in U_0$, e uma função $f : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável tal que f é constante ao longo de cada trajetória de w em U_0 e $df_q \neq 0$ para todo $q \in U_0$.

Prova.

1. Sejam $X : U \rightarrow X(U) \subset V$ uma parametrização de S em $p = X(q)$ e sejam $a, b : U \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis tais que:

$$w(X(u, v)) = a(u, v) X_u(u, v) + b(u, v) X_v(u, v).$$

Considere o campo de vetores diferenciável em \mathbb{R}^2 , $\tilde{w} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por

$$\tilde{w}(u, v) = (a(u, v), b(u, v)).$$

Então existe uma curva parametrizada $\tilde{\alpha} : I \rightarrow U$, $\tilde{\alpha}(t) = (x(t), y(t))$, tal que

$$\tilde{\alpha}(0) = q \quad \text{e} \quad \tilde{\alpha}'(t) = \tilde{w}(u(t), v(t)),$$

para todo $t \in I$

Seja $\alpha = X \circ \tilde{\alpha} : I \rightarrow X(U) \subset V$.

Então α é uma curva parametrizada tal que $\alpha(0) = X(\tilde{\alpha}(0)) = p$ e

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= u'(t) X_u(u(t), v(t)) + v'(t) X_v(u(t), v(t)) \\ &= a(u(t), v(t)) X_u(u(t), v(t)) + b(u(t), v(t)) X_v(u(t), v(t)) \\ &= w(X \circ \tilde{\alpha}(t)) = w(\alpha(t)), \end{aligned}$$

para todo $t \in I$.

2. Seja $\beta : J \rightarrow V$ outra trajetória de w com $\beta(0) = p$. Então existem $J' \subset J$, com $0 \in J'$, tal que $\beta(J') \subset X(U)$ e funções $\tilde{u}, \tilde{v} : J' \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\beta(t) = X(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$.

Como $\tilde{\beta}(t) = (\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$ é uma trajetória de \tilde{w} com $\tilde{\beta}(0) = q$, temos que $\tilde{\beta}(t) = \tilde{\alpha}(t)$ para todo $t \in \tilde{J} \cap I$.

Portanto, $\beta(t) = X \circ \tilde{\beta}(t) = X \circ \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t)$ para todo $t \in \tilde{J} \cap I$.

De modo análogo, podemos provar que o conjunto

$$A = \{t \in J \cap I \mid \alpha(t) = \beta(t)\}$$

é um conjunto aberto. Como $A \neq \emptyset$ (pois $\alpha(0) = \beta(0) = p$), A é fechado em $I \cap J$ (pois α e β são contínuas) e $I \cap J$ é conexo (pois $0 \in I \cap J$), temos que $A = I \cap J$, isto é, $\alpha(t) = \beta(t)$ para todo $t \in I \cap J$.

3. Seja $\tilde{w} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ o campo de vetores em \mathbb{R}^2 dado por $\tilde{w}(u, v) = (a(u, v), b(u, v))$. Então existem $\tilde{U} \subset U$ aberto, com $q \in \tilde{U}$, um intervalo aberto I , $0 \in I$, e uma aplicação $\tilde{\alpha} : \tilde{U} \times I \rightarrow U$ diferenciável (fluxo local de \tilde{w} em q) tal que

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}(r, 0) = r \\ \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial t}(r, t) = \tilde{w}(\tilde{\alpha}(r, t)) \end{cases}$$

Então

$$\alpha : X(\tilde{U}) \times I \rightarrow V, \quad \alpha(p, t) = X \circ \tilde{\alpha}(X^{-1}(p), t),$$

é o fluxo local de w em p . De fato:

- $\alpha = X \circ \tilde{\alpha} \circ (X^{-1}, \text{id})$ é diferenciável.
- $\alpha(\bar{p}, 0) = X \circ \tilde{\alpha}(X^{-1}(\bar{p}), 0) = \bar{p}$.
- $$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t}(\bar{p}, t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(X^{-1}(\bar{p}), t) X_u(\tilde{\alpha}(X^{-1}(\bar{p}), t)) + \frac{\partial g}{\partial t}(X^{-1}(\bar{p}), t) X_v(\tilde{\alpha}(X^{-1}(\bar{p}), t)) \\ &= a(\tilde{\alpha}(X^{-1}(\bar{p}), t)) X_u(\tilde{\alpha}(X^{-1}(\bar{p}), t)) + b(\tilde{\alpha}(X^{-1}(\bar{p}), t)) X_v(\tilde{\alpha}(X^{-1}(\bar{p}), t)) \\ &= w(X \circ \tilde{\alpha}(X^{-1}(\bar{p}), t)) \\ &= w(\alpha(\bar{p}, t)), \end{aligned}$$

onde $\tilde{\alpha}(r, t) = (f(r, t), g(r, t))$.

4. Seja $\tilde{f} : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ a integral primeira do campo de vetores $\tilde{w} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $U_0 \subset U$ é um aberto de \mathbb{R}^2 com $q \in U_0$.

Então $\tilde{f}(\tilde{\alpha}(t)) = \text{const.}$ ao longo de cada trajetória $\tilde{\alpha}$ de \tilde{w} .

Seja $f = \tilde{f} \circ X^{-1} : X(U_0) \rightarrow \mathbb{R}$. Então f é diferenciável e $f \circ X \circ \tilde{\alpha} = \tilde{f} \circ \tilde{\alpha}$ é constante ao longo de toda trajetória $\tilde{\alpha}$ de \tilde{w} .

Como $X \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ são as trajetórias de w em $X(U_0)$, temos que f é a integral primeira de w em $X(U_0)$, onde $p \in X(U_0)$ ■

Definição 4.9 Um *campo de direções* r em um aberto V de uma superfície regular é uma correspondência que associa a cada $p \in V$ uma reta $r(p)$ de $T_p S$ que passa por p . Dizemos que r é diferenciável em $p \in V$ se existirem um aberto $\bar{V} \subset V$, com $p \in \bar{V}$, e um campo de vetores w diferenciável em \bar{V} tal que $w(q) \neq 0$ e $w(q) \parallel r(q)$ para todo $q \in \bar{V}$.

Definição 4.10 Uma curva regular conexa $\mathcal{C} \subset V \subset S$ é uma *curva integral de um campo de direções* r diferenciável em V se $r(q)$ é a reta tangente a \mathcal{C} em q para todo $q \in \mathcal{C}$.

Exemplo 4.5 Seja \mathcal{T} o toro de revolução obtido girando o círculo $\begin{cases} (y - a)^2 + z^2 = r^2 \\ x = 0, \end{cases}$ em

torno do eixo Oz . Então o campo de vetores w em \mathcal{T} que associa a cada $p \in \mathcal{T}$ o vetor unitário tangente ao meridiano, que passa por p , em p é diferenciável.

De fato, seja $X : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathcal{T}$ a parametrização de \mathcal{T} dada por

$$X(u, v) = \left(\left(a + r \cos \frac{u}{r} \right) \cos v, \left(a + r \cos \frac{u}{r} \right) \sin v, r \sin \frac{u}{r} \right).$$

Então $w(X(u, v)) = X_u(u, v)$, pois $X_u(u, v)$ é o vetor tangente ao meridiano, que passa por $X(u, v)$, em $X(u, v)$, e

$$\|X_u(u, v)\| = \left\| \left(-\sin \frac{u}{r} \cos v, -\sin \frac{u}{r} \sin v, \cos \frac{u}{r} \right) \right\| = 1.$$

Logo w é diferenciável em $X((0, 2\pi) \times (0, 2\pi))$.

De modo análogo, podemos provar que w é diferenciável nos outros pontos do toro. \square

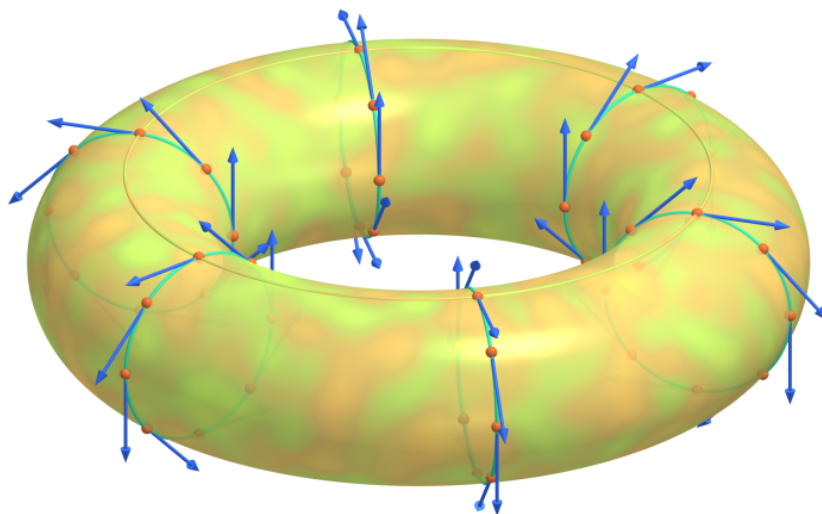


Fig. 40: Exemplo 4.5

Exemplo 4.6 Sejam

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

a esfera unitária em \mathbb{R}^3 e w o campo de vetores em S^2 que associa a cada $p \in S^2 - \{p_N, p_S\}$ o vetor unitário tangente ao meridiano, que passa por p , em p .

De modo análogo ao exemplo anterior, podemos provar que w é diferenciável em $S^2 - \{p_N, p_S\}$. Considere agora o campo de vetores v em S^2 dado por:

$$\begin{cases} v(p) = (1 - \langle p, e_3 \rangle^2)^{1/2} w(p), & \text{se } p \in S^2 - \{p_N, p_S\} \\ v(p_N) = v(p_S) = 0. \end{cases}$$

Afirmção: v é um campo de vetores diferenciável em S^2 .

Se $p \in S^2 - \{p_N, p_S\}$, tomemos a parametrização de S^2 dada por

$$X(u, v) = (\text{sen } u \cos v, \text{sen } u \text{sen } v, \cos u),$$

onde $u \in (0, \pi)$, $v \in (v_0 - \pi, v_0 + \pi)$ e $X(u_0, v_0) = p$.

Então

$$v(X(u, v)) = (1 - \langle X(u, v), e_3 \rangle^2)^{1/2} X_u(u, v) = \text{sen } u X_u(u, v).$$

Portanto $v \circ X$ é diferenciável em $(0, 2\pi) \times (v_0 - \pi, v_0 + \pi)$, ou seja, v é diferenciável em p .

Seja agora $p = p_N = (0, 0, 1)$ e a parametrização de S^2 dada por:

$$Y(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}),$$

onde $x^2 + y^2 < 1$ e $Y(0, 0) = p_N$.

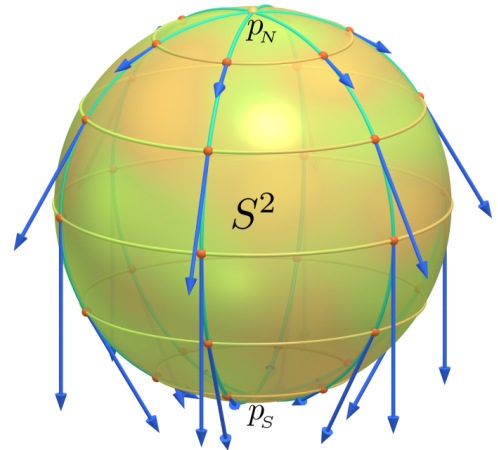


Fig. 41: Exemplo 4.6

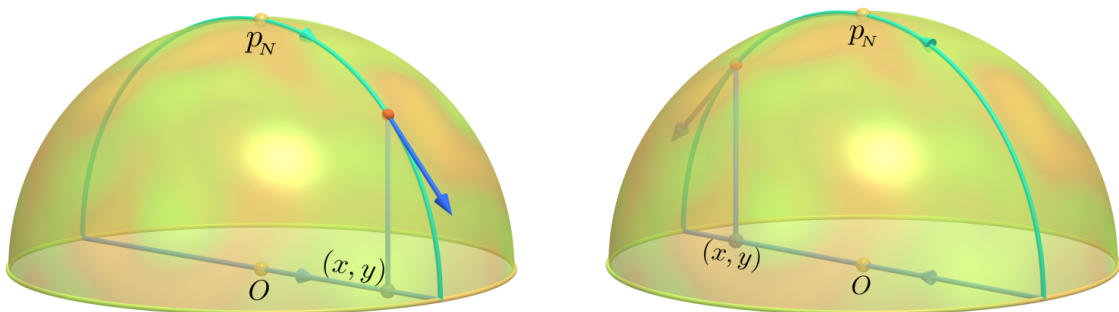


Fig. 42: Parametrização da esfera no pólo norte

Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $0 < x^2 + y^2 < 1$. Como $\alpha(t) = Y(tx, ty)$ é uma parametrização do meridiano que passa por $\alpha(1) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ e

$$\begin{aligned}\alpha'(1) &= x Y_x(x, y) + y Y_y(x, y) = x \left(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right) + y \left(0, 1, \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right) \\ &= \left(x, y, \frac{-x^2 - y^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right)\end{aligned}$$

é um vetor tangente ao meridiano que passa por $\alpha(1)$ que tem o mesmo sentido de $w(\alpha(1))$, temos que:

$$\begin{aligned}v(Y(x, y)) &= v(\alpha(1)) = \left(1 - \langle \alpha(1), e_3 \rangle^2 \right)^{1/2} \frac{\alpha'(1)}{\|\alpha'(1)\|} \\ &= (1 - (1 - x^2 - y^2))^{1/2} \frac{(1 - x^2 - y^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2)^{1/2}} (x Y_x + y Y_y) \\ &= (1 - x^2 - y^2)^{1/2} (x Y_x + y Y_y),\end{aligned}$$

pois

$$\|\alpha'(1)\|^2 = x^2 + y^2 + \frac{(x^2 + y^2)^2}{1 - x^2 - y^2} = (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2} \right) = \frac{(x^2 + y^2)}{1 - x^2 - y^2}.$$

Logo, como $Y(0, 0) = (0, 0, 1)$, $v(Y(0, 0)) = 0$ e $v \circ Y$ é diferenciável em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, temos que v é diferenciável em p_N .

De modo análogo podemos provar que v é diferenciável em p_S . \square

Exemplo 4.7 Seja $S = \{(s, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y^2 - x^2\}$ o parabolóide hiperbólico. A interseção de $\tilde{S} = S - \{(0, 0, 0)\}$ com os planos paralelos ao plano xy determina uma família de curvas $\{\mathcal{C}_\alpha\}$. As retas tangentes a estas curvas determinam um campo de direções diferenciável em \tilde{S} .

De fato, seja $X : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de \tilde{S} dada por

$$X(u, v) = (u, v, v^2 - u^2).$$

Então $\tilde{S} \cap \{z = \text{const} = c\}$ é a curva $\begin{cases} v^2 - u^2 = c \\ z = c. \end{cases}$

Seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t)) = (u(t), v(t), c)$, $t \in I$, uma parametrização desta curva. Como $v^2(t) - u^2(t) = c$ para todo $t \in I$, temos que

$$2v(t)v'(t) - 2u(t)u'(t) = 0,$$

ou seja, $(u'(t), v'(t)) \parallel (v(t), u(t))$ para todo $t \in I$.

Logo

$$w(X(u, v)) = v X_u(u, v) + u X_v(u, v)$$

é um campo de vetores diferenciável que não se anula em \tilde{S} e

$$w(X(u(t), v(t))) = v(t) X_u(u(t), v(t)) + u(t) X_v(u(t), v(t))$$

é paralelo ao vetor

$$\alpha'(t) = u'(t) X_u(u(t), v(t)) + v'(t) X_v(u(t), v(t))$$

para todo $t \in I$. Então $w(X(u, v)) \parallel r(X(u, v))$ para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Assim, r é um campo de direções diferenciável em \tilde{S} .

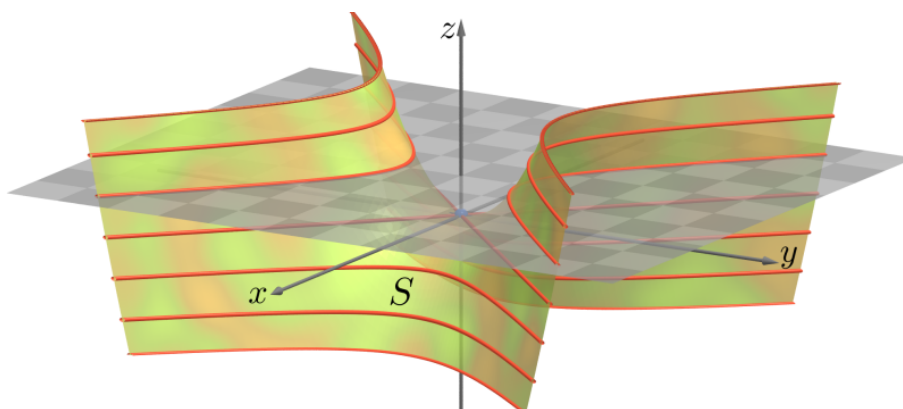


Fig. 43: Interseção do plano $z = c$ com o parabolóide hiperbólico

Vamos agora determinar um campo de direções r' ortogonal a r e suas curvas integrais.

Seja $w'(X(u, v)) = a(u, v) X_u(u, v) + b(u, v) X_v(u, v)$ um campo de vetores diferenciável tal que $w'(X(u, v)) \parallel r'(X(u, v))$ para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Como $E = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + 4u^2$, $F(u, v) = \langle X_u, X_v \rangle = -4uv$ e $G(u, v) = 1 + 4v^2$, temos que $r' \perp r$ se, e só se,

$$\begin{aligned} \langle w(X(u, v)), w'(X(u, v)) \rangle &= \langle v X_u + u X_v, a X_u + b X_v \rangle = a v E + (b v + a u) F + u b G = 0 \\ \iff a(u, v) v (1 + 4u^2) - 4(v b(u, v) + u a(u, v)) u v + b(u, v) u (1 + 4v^2) &= 0 \\ \iff a(u, v) v + b(u, v) u &= 0 \\ \iff (a(u, v), b(u, v)) \parallel (-u, v), \end{aligned}$$

para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Ou seja, $r'(X(u, v)) \parallel -u X_u(u, v) + v X_v(u, v)$ para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma parametrização regular de uma curva integral de r' .

Então

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \mathbf{u}'(t) X_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) + \mathbf{v}'(t) X_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) \parallel -\mathbf{u}(t) X_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) + \mathbf{v}(t) X_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) \\ \iff (\mathbf{u}'(t), \mathbf{v}'(t)) &\parallel (-\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) \\ \iff (\mathbf{u}'(t), \mathbf{v}'(t)) &\perp (\mathbf{v}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \iff \mathbf{u}'(t) \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \mathbf{v}'(t) &= 0 \\ \iff \mathbf{u}(t) \mathbf{v}(t) &= \text{const.} \end{aligned}$$

Logo a família de curvas ortogonal à família $\{\mathcal{C}_\alpha\}$ é dada pela interseção de \tilde{S} com os cilindros hiperbólicos $xy = \text{const} \neq 0$ ou com os planos $x = 0$ e $y = 0$. \square

O principal resultado desta seção é o seguinte teorema.

Teorema 4.4 *Sejam w_1 e w_2 dois campos de vetores diferenciáveis em um aberto V de uma superfície regular S que são LI em $p \in V$. Então existe uma parametrização $X : U \rightarrow X(U) \subset V$, com $p \in X(U)$, tal que para cada $q \in X(U)$ as retas tangentes às curvas coordenadas dessa parametrização que passam por q são paralelas a $w_1(q)$ e $w_2(q)$.*

Prova.

Como $w_1(p)$ e $w_2(p)$ são LI, temos que $w_1(p) \neq 0$ e $w_2(p) \neq 0$. Então existem um aberto $W \subset V$, $p \in W$, e funções diferenciáveis $f_1, f_2 : W \rightarrow \mathbb{R}$ tais que f_i é a integral primeira de w_i , $i = 1, 2$, na vizinhança W de p .

Afirmção: $d(f_i)_p(w_i(p)) = 0$, $i = 1, 2$.

De fato, seja $\alpha : I \rightarrow W$ a trajetória de w_i que passa por p , isto é, $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(t) = w_i(\alpha(t))$ para todo $t \in I$.

Como $f_i(\alpha(t))$ é constante, temos

$$d(f_i)_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = d(f_i)_{\alpha(t)}(w_i(\alpha(t))) = 0$$

para todo $t \in I$. Em particular, em $t = 0$, $d(f_i)_p(w_i(p)) = 0$. \square

Além disso, como $d(f_i)_p \neq 0$, $i = 1, 2$, e $w_1(p)$, $w_2(p)$ são LI, temos que

$$d(f_1)_p(w_2(p)) = a \neq 0 \quad \text{e} \quad d(f_2)_p(w_1(p)) = b \neq 0.$$

Seja a aplicação diferenciável $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(q) = (f_1(q), f_2(q))$. Então

$$d\varphi_p(w_1(p)) = (d(f_1)_p(w_1(p)), d(f_2)_p(w_1(p))) = (0, b)$$

e

$$d\varphi_p(w_2(p)) = (d(f_1)_p(w_2(p)), d(f_2)_p(w_2(p))) = (a, 0).$$

Logo, pelo Teorema da Aplicação Inversa, existem um aberto $V_0 \subset W$, com $p \in V_0$, e um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi : V_0 \rightarrow U$ é um difeomorfismo. Portanto, $X = \varphi^{-1} : U \rightarrow X(U) = V_0$ é uma parametrização de S em p .

Sejam $(u_0, v_0) \in U$ e $X(u_0, t) = \varphi^{-1}(u_0, t)$ uma parametrização da curva coordenada $u = u_0$. Então

$$\varphi(X(u_0, t)) = (f_1(X(u_0, t)), f_2(X(u_0, t))) = (u_0, t),$$

para todo t . Portanto $f_1(X(u_0, t)) = u_0 = \text{const.}$ Logo $d(f_1)_{X(u_0, v_0)}(X_v(u_0, v_0)) = 0$.

Como $d(f_1)_{X(u_0, v_0)} \neq 0$ e $d(f_1)_{X(u_0, v_0)}(w_1(X(u_0, v_0))) = 0$, temos que $X_v(u_0, v_0) \parallel w_1(X(u_0, v_0))$.

De modo análogo, podemos provar que $X_u(u_0, v_0) \parallel w_2(X(u_0, v_0))$.

Sendo $(u_0, v_0) \in U$ arbitrário, o resultado fica provado. ■

Observação 4.5 O teorema não implica que as curvas coordenadas podem ser parametrizadas de modo que os respectivos vetores velocidade sejam w_1 e w_2 .

Corolário 4.1 *Sejam r e r' dois campos de direções diferenciáveis definidos num aberto V de S , com $p \in V$, tais que $r(p) \neq r'(p)$. Então existe uma parametrização $X : U \rightarrow X(U) \subset V$, $p \in X(U)$, tal que as curvas coordenadas de X são as curvas integrais de r e r' .*

Corolário 4.2 *Para cada ponto $p \in S$ existe uma parametrização $X : U \rightarrow X(U)$, $p \in X(U)$, tal que as curvas coordenadas são ortogonais ($\Leftrightarrow F \equiv 0$).*

Prova.

Seja $Y : U_0 \rightarrow Y(U_0) = V_0$ uma parametrização de S em p .

Considere os campos de vetores diferenciáveis $w_1, w_2 : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dados por:

$$\begin{aligned} w_1(Y(\bar{u}, \bar{v})) &= Y_{\bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) \\ w_2(Y(\bar{u}, \bar{v})) &= -\bar{F}(\bar{u}, \bar{v}) Y_{\bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) + \bar{E}(\bar{u}, \bar{v}) Y_{\bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \langle w_1(Y(\bar{u}, \bar{v})), w_2(Y(\bar{u}, \bar{v})) \rangle &= -\bar{F}(\bar{u}, \bar{v}) \langle Y_{\bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}), Y_{\bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) \rangle + \bar{E}(\bar{u}, \bar{v}) \langle Y_{\bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}), Y_{\bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) \rangle \\ &= -\bar{F}(\bar{u}, \bar{v}) \bar{E}(\bar{u}, \bar{v}) + \bar{E}(\bar{u}, \bar{v}) \bar{F}(\bar{u}, \bar{v}) = 0, \end{aligned}$$

isto é, w_1 e w_2 são campos de vetores ortogonais que não se anulam, temos, pelo Teorema 4.4, que existe uma parametrização $X : U \rightarrow X(U) \subset V_0$ de S em p tal que

$$X_u(u, v) \parallel w_1(X(u, v)) \quad \text{e} \quad X_v(u, v) \parallel w_2(X(u, v))$$

para todo $(u, v) \in U$. Logo as curvas coordenadas de X são ortogonais. ■

Uma segunda aplicação do teorema 4.4 é a existência de coordenadas dadas pelas direções assintóticas.

Corolário 4.3 *Seja p um ponto hiperbólico de S . Então existe uma parametrização $Y : U \rightarrow Y(U)$ de S em p tal que as curvas coordenadas são as curvas assintóticas de S em $Y(U)$.*

Prova.

Seja $X : U_0 \rightarrow X(U_0)$ uma parametrização de S em p , com $X(u_0, v_0) = p$.

Como $(eg - f^2)(u_0, v_0) < 0$, podemos supor que $(eg - f^2)(u, v) < 0$ para todo $(u, v) \in U_0$.

Podemos também supor que se

- $f(u_0, v_0) \neq 0 \implies f(u, v) > 0, \quad \forall (u, v) \in U_0 \quad (*)$.
- $f(u_0, v_0) = 0 (\iff eg(u_0, v_0) < 0) \implies eg(u, v) < 0, \quad \forall (u, v) \in U_0 \quad (**)$

A equação diferencial das curvas assintóticas nessa parametrização

$$e u'(t)^2 + 2f u'(t) v'(t) + g v'(t)^2 = 0$$

pode, então, ser decomposta em dois fatores lineares da seguinte maneira:

$$\left(e u'(t) + \left(f + \sqrt{f^2 - eg} \right) v'(t) \right) \left(u'(t) + \frac{g}{f + \sqrt{f^2 - eg}} v'(t) \right) = 0,$$

pois

$$\frac{eg}{f + \sqrt{f^2 - eg}} + f + \sqrt{f^2 - eg} = \frac{eg + \left(f + \sqrt{f^2 - eg} \right)^2}{f + \sqrt{f^2 - eg}} = \frac{eg + f^2 + 2f\sqrt{f^2 - eg} + f^2 - eg}{f + \sqrt{f^2 - eg}} = 2f.$$

Afirmção: Os campos de vetores diferenciáveis

$$w_1(X(u, v)) = - \left(f + \sqrt{f^2 - eg} \right) X_u(u, v) + e X_v(u, v)$$

e

$$w_2(X(u, v)) = \frac{-g}{f + \sqrt{f^2 - eg}} X_u(u, v) + X_v(u, v)$$

estão bem definidos, não se anulam e são LI em todos os pontos $(u, v) \in U_0$.

De fato, se ocorre $(*)$, isto é, $f(u, v) > 0$ para todo $(u, v) \in U_0$, então $(f + \sqrt{f^2 - eg})(u, v) > 0$ para todo $(u, v) \in U_0$.

E se ocorre $(**)$, isto é, $eg(u, v) < 0$ para todo $(u, v) \in U_0$, então

$$(f + \sqrt{f^2 - eg})(u, v) > (f + \sqrt{f^2})(u, v) = (f + |f|)(u, v) \geq 0$$

para todo $(u, v) \in U_0$.

Logo w_1 e w_2 estão bem definidos e não se anulam em $X(U_0)$.

Alem disso, w_1 e w_2 são LI em $X(U_0)$, pois, caso contrário, teríamos

$$\det \begin{pmatrix} -(f + \sqrt{f^2 - eg}) & \frac{-g}{f + \sqrt{f^2 - eg}} \\ e & 1 \end{pmatrix} (q) = \left(-(f + \sqrt{f^2 - eg}) + \frac{eg}{f + \sqrt{f^2 - eg}} \right) (q) = 0$$

em algum ponto $q \in U_0$, ou seja,

$$eg(q) = (f + \sqrt{f^2 - eg})^2(q).$$

Uma contradição, quando $eg(q) < 0$ em U_0 . E quando $f > 0$ em U_0 , também chegamos a uma contradição, já que

$$eg(q) = (f^2 + f^2 - eg + 2f\sqrt{f^2 - eg})(q) \iff 2(eg - f^2)(q) = (2f\sqrt{f^2 - eg})(q),$$

sendo $eg - f^2(q) < 0$ e $(f\sqrt{f^2 - eg})(q) > 0$.

Logo, pelo teorema 4.4, existe uma parametrização $Y : U \rightarrow Y(U) \subset X(U_0)$ de S em p tal que as curvas coordenadas de Y são as curvas integrais de w_1 e w_2 , isto é, as curvas coordenadas de Y são as curvas assintóticas de S em $Y(U)$ ($\iff \bar{e} = \bar{g} = 0$ em U , onde $\bar{e}, \bar{g}, \bar{f}$ são os coeficientes da segunda forma fundamental da parametrização Y). ■

Observação 4.6 Na demonstração, supomos que se $f(u_0, v_0) \neq 0$ então $f(u, v) > 0$ em U_0 . Caso contrário, isto é, se $f(u, v) < 0$ em U_0 , basta decompor a equação diferencial das curvas assintóticas em dois fatores lineares da seguinte maneira:

$$\left(-eu'(t) + (-f + \sqrt{f^2 - eg})v'(t) \right) \left(u'(t) - \frac{g}{-f + \sqrt{f^2 - eg}}v'(t) \right) = 0,$$

e proceder de modo análogo ao caso anterior.

Exemplo 4.8 Um exemplo que ilustra o mecanismo acima é dado pelo parabolóide hiperbólico $S : z = y^2 - x^2$, que pode ser coberto pela parametrização $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ dada por

$$X(u, v) = (u, v, v^2 - u^2).$$

Por um cálculo simples, obtemos

$$e(u, v) = \frac{-2}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^{1/2}}, \quad f(u, v) = 0 \quad \text{e} \quad g(u, v) = \frac{2}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^{1/2}}.$$

Portanto,

$$\frac{-2}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^{1/2}}(u'(t)^2 - v'(t)^2) = 0$$

é a equação diferencial das curvas assintóticas, e se fatora em duas equações lineares

$$(u'(t) + v'(t))(u'(t) - v'(t)) = 0 \iff \begin{cases} u'(t) + v'(t) = 0 & \iff (u'(t), v'(t)) \parallel (1, -1) \\ u'(t) - v'(t) = 0 & \iff (u'(t), v'(t)) \parallel (1, 1). \end{cases}$$

Então $w_1 = X_u - X_v$ e $w_2 = X_u + X_v$ são as direções assintóticas de S em $X(u, v)$ e a imagem das curvas

$$\begin{cases} u + v = \text{const} = c \\ u - v = \text{const} = c \end{cases}$$

pela parametrização X são as curvas assintóticas de S , isto é,

$$X(c - t, t) = (c - t, t, 2ct - c^2) \quad \text{e} \quad X(c + t, t) = (c + t, t, -2ct - c^2)$$

são as curvas (retas) assintóticas de S , onde $c \in \mathbb{R}$.

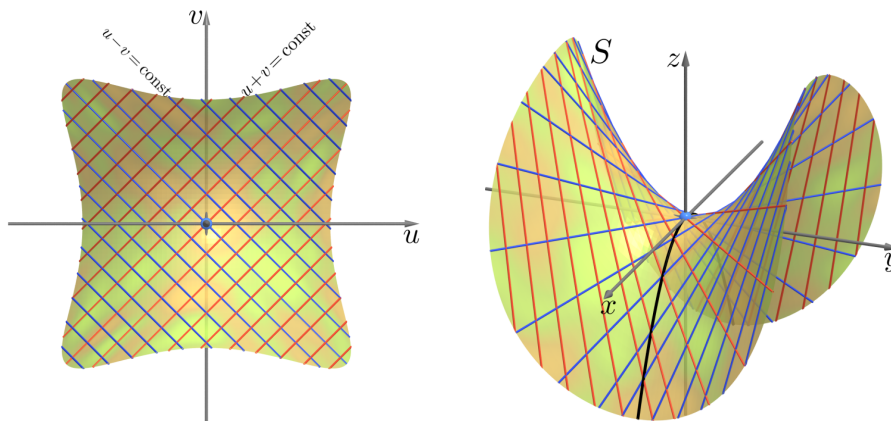


Fig. 44: As duas famílias de retas se intersectam ao longo da parábola $z = -x^2, y = 0$

Sejam $\tilde{w}_1 = (1, -1)$ e $\tilde{w}_2 = (1, 1)$ campos de vetores em \mathbb{R}^2 , e

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & \tilde{f}_1(u, v) &= u + v \\ \tilde{f}_2 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & \tilde{f}_2(u, v) &= u - v \end{aligned}$$

as integrais primeiras de \tilde{w}_1 e \tilde{w}_2 , respectivamente.

Então

$$f_1 = \tilde{f}_1 \circ X^{-1} = \tilde{f}_1 \circ \pi : S \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x, y, z) = x + y,$$

e

$$f_2 = \tilde{f}_2 \circ X^{-1} = \tilde{f}_2 \circ \pi : S \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x, y, z) = x - y,$$

são as integrais primeiras de w_1 e w_2 , respectivamente, pois

$$X^{-1}(x, y, z) = \pi(x, y, z) = (x, y)$$

é a projeção sobre o plano xy .

Seja a aplicação diferenciável $F : S \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) = (x + y, x - y).$$

Logo, F é invertível e

$$F^{-1}(\bar{u}, \bar{v}) = \left(\frac{\bar{u} + \bar{v}}{2}, \frac{\bar{u} - \bar{v}}{2}, -\bar{u}\bar{v} \right)$$

para todo $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^2$.

Então, pela demonstração do teorema 4.4, $Y = F^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ é uma parametrização de S cujas curvas coordenadas são as curvas assintóticas \square

Definição 4.11 Dizemos que uma superfície regular S é *regrada* quando por todo ponto $p \in S$ passa uma reta inteiramente contida em S .

Então, pelo provado acima, o parabolóide hiperbólico é uma superfície regrada gerada por duas famílias de retas.

Outros exemplos de superfícies regradas são o cilindro circular e o hiperbolóide de revolução de uma folha $S : x^2 + y^2 - z^2 = 1$, que também é gerado por duas famílias de retas.

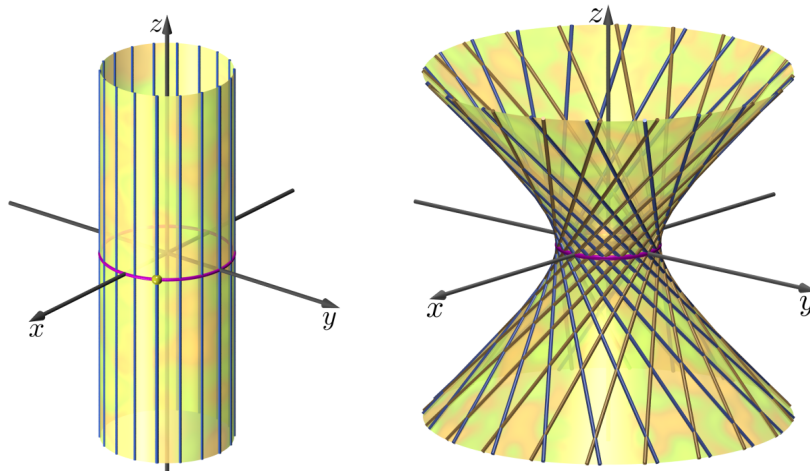


Fig. 45: Cilindro circular e hiperbolóide de revolução

De fato, seja $\alpha(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ uma parametrização do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy contido em S . Para cada $s \in [0, 2\pi)$, seja $w(s) = \alpha'(s) + e_3$, onde e_3 é o vetor unitário do eixo Oz .

Então a reta $r_s = \{\alpha(s) + v(\alpha'(s) + e_3) \mid v \in \mathbb{R}\}$ está contida em S , pois como

$$\alpha(s) + v(\alpha'(s) + e_3) = (\cos s - v \sin s, \sin s + v \cos s, v),$$

temos que:

$$\begin{aligned} (\cos s - v \sin s)^2 + (\sin s + v \cos s)^2 - v^2 &= \cos^2 s - 2v \cos s \sin s + v^2 \sin^2 s + \sin^2 s \\ &\quad + 2v \cos s \sin s + v^2 \cos^2 s - v^2 = 1, \end{aligned}$$

para todos $s, v \in \mathbb{R}$.

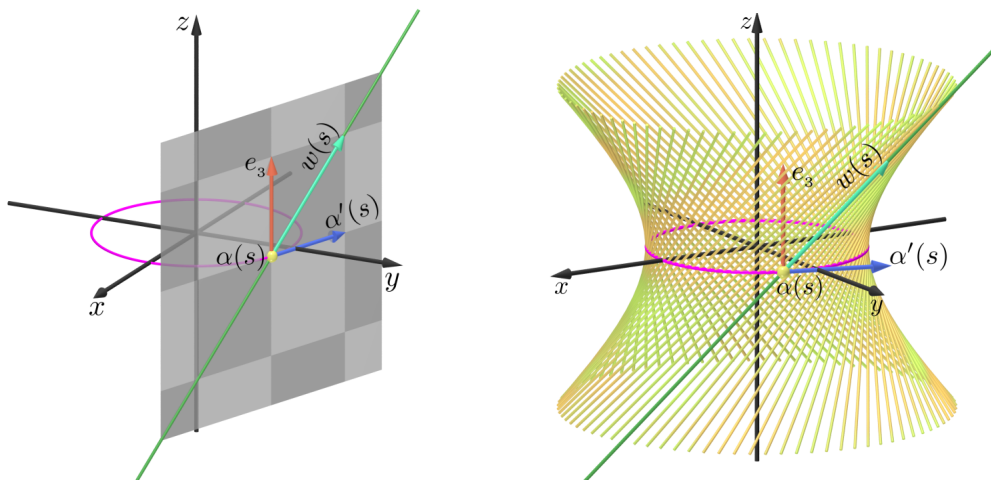


Fig. 46: O hiperbolóide de revolução $S : x^2 + y^2 - z^2 = 1$ visto como superfície regrada

Além disso, todo ponto $(x_0, y_0, z_0) \in S$ pertence a uma dessas retas. Basta tomar $v = z_0$ e $s_0 \in [0, 2\pi)$ tal que

$$(\cos s_0, \sin s_0) = \left(\frac{x_0 + z_0 y_0}{1 + z_0^2}, \frac{-z_0 x_0 + y_0}{1 + z_0^2} \right),$$

que possui solução, pois

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_0 + y_0 z_0}{1 + z_0^2} \right)^2 + \left(\frac{-z_0 x_0 + y_0}{1 + z_0^2} \right)^2 &= \frac{1}{(1 + z_0^2)^2} (x_0^2 + 2x_0 y_0 z_0 + y_0^2 z_0^2 + z_0^2 x_0^2 - 2x_0 y_0 z_0 + y_0^2) \\ &= \frac{1}{(1 + z_0^2)^2} (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2(x_0^2 + y_0^2)) \\ &= \frac{1}{(1 + z_0^2)^2} (x_0^2 + y_0^2) (1 + z_0^2) = 1, \end{aligned}$$

já que $x_0^2 + y_0^2 = 1 + z_0^2$.

Assim, temos

$$\begin{aligned} & (\cos s_0 - v_0 \operatorname{sen} s_0, \operatorname{sen} s_0 + v_0 \cos s_0, v_0) \\ = & \left(\frac{x_0 + z_0 y_0 - z_0(-z_0 x_0 + y_0)}{1 + z_0^2}, \frac{-z_0 x_0 + y_0 + z_0(x_0 + y_0 z_0)}{1 + z_0^2}, z_0 \right) \\ = & \left(\frac{x_0 + x_0 z_0^2}{1 + z_0^2}, \frac{y_0 + y_0 z_0^2}{1 + z_0^2}, z_0 \right) = (x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

Se tomarmos $\bar{w}(s) = -\alpha'(s) + e_3$, podemos provar, de modo análogo ao caso anterior, que a família de retas

$$\bar{r}_s = \{\alpha(s) + v(-\alpha'(s) + e_3) \mid v \in \mathbb{R}\}$$

também gera o hiperbolóide S .

Portanto, o hiperbolóide de revolução de uma folha $S : x^2 + y^2 - z^2 = 1$ é uma superfície regrada gerada por duas famílias de retas.

Uma terceira aplicação do teorema 4.4 é a existência de coordenadas dadas pelas direções principais.

Corolário 4.4 *Seja p um ponto não-umbílico da superfície S . Então existe uma parametrização $Y : U \rightarrow Y(U)$ de S em p tal que as curvas coordenadas são as linhas de curvatura de S em $Y(U)$.*

Prova.

Pelo corolário 4.2, existe uma parametrização $X : U_0 \rightarrow X(U_0)$ de S em $p = X(u_0, v_0)$ tal que $F \equiv 0$ em U_0 , isto é, as curvas coordenadas são ortogonais.

Se $f(u_0, v_0) \neq 0$, podemos supor que $f \neq 0$ em U_0 .

Se $f(u_0, v_0) = 0$, temos que $\frac{e}{E}(u_0, v_0)$ e $\frac{g}{G}(u_0, v_0)$ são as curvaturas principais de S em p , pois $F(u_0, v_0) = 0$ (ver observação 3.11).

Como $\frac{e}{E}(u_0, v_0) \neq \frac{g}{G}(u_0, v_0)$, isto é, $(eG - gE)(u_0, v_0) \neq 0$, podemos supor (ver observação 4.7) que $eG - gE > 0$ em U_0 .

A equação diferencial das linhas de curvatura é

$$(fE - eF)u'(t)^2 + (gE - eG)u'(t)v'(t) + (gF - fG)v'(t)^2 = 0,$$

Como $F \equiv 0$ em U_0 , a equação acima fica

$$fE u'(t)^2 + (gE - eG)u'(t)v'(t) - fGv'(t)^2 = 0. \quad (12)$$

Podemos supor também que $\mathbf{H}^2 - \mathbf{K} = \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)^2}{4} > 0$ em U_0 , isto é, que todos os pontos de $X(U_0)$ são não-umbílicos.

Como as duas direções principais num ponto não-umbílico são ortogonais e $F \equiv 0$ (isto é, X_u e X_v são ortogonais), a equação (12) pode ser decomposta em duas equações lineares:

$$\begin{cases} Au'(t) + Bv'(t) = 0 & \text{(i.e., } -BX_u + AX_v \text{ é uma direção principal)} \\ BEu'(t) - AGv'(t) = 0 & \text{(i.e., } AGX_u + BEX_v \text{ é a outra direção principal),} \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} ABE = fE & \iff AB = f \\ B^2E - A^2G = gE - eG \\ ABG = fG & \iff AB = f. \end{cases} \quad (13)$$

De fato, se $f \neq 0$ em U_0 , temos que $A = \frac{f}{B}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} -A^2G + B^2E &= \frac{-f^2G}{B^2} + B^2E = gE - eG \\ \iff -f^2G + B^4E &= (gE - eG)B^2 \\ \iff B^2 &= \frac{(gE - eG) + \sqrt{(gE - eG)^2 + 4f^2EG}}{2E} \quad (> 0, \text{ pois } f^2 > 0, E > 0, G > 0) \\ \implies B &= \left(\frac{(gE - eG) + \sqrt{(gE - eG)^2 + 4f^2EG}}{2E} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Então B e $A = \frac{f}{B}$ são funções diferenciáveis em U_0 que satisfazem (13).

Se $gE - eG > 0$ em U_0 , temos também que B e $A = \frac{f}{B}$ são funções diferenciáveis que satisfazem (13).

Como $w_1(X(u, v)) = -BX_u + AX_v$ e $w_2(X(u, v)) = AGX_u + BEX_v$ são vetores que não se anulam em $X(U_0)$, temos que w_1 e w_2 são as direções principais (ortogonais) de S no ponto $X(u, v)$.

Logo, pelo teorema 4.4, existe uma parametrização $Y : U \rightarrow Y(U) \subset X(U_0)$ de S em p tal que as curvas coordenadas são as curvas integrais de w_1 e w_2 , isto é, as curvas coordenadas são as linhas de curvatura de S em $Y(U)$ ($\iff \bar{f} = \bar{F} = 0$ em U , onde \bar{e} , \bar{g} , \bar{f} e \bar{E} , \bar{G} e \bar{F} são os coeficientes da segunda forma fundamental e da primeira forma fundamental, respectivamente, da parametrização Y). ■

Observação 4.7 Na demonstração acima, supomos que se $f(u_0, v_0) = 0$ então $gE - eG > 0$ em U_0 . Se $gE - eG < 0$ em U_0 , basta tomar $A = -\frac{f}{B} e$

$$B = \left(\frac{-(gE - eG) + \sqrt{(gE - eG)^2 + 4f^2EG}}{2E} \right)^{1/2},$$

e proceder como no caso anterior.

5. Superfícies Mínimas

Definição 5.1 Uma superfície parametrizada regular $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é chamada *mínima* se a sua curvatura média é identicamente nula. Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é *mínima* se cada uma de suas parametrizações é mínima.

Para explicar a razão à palavra mínima para tais superfícies precisamos introduzir a noção de variação.

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Escolha um domínio limitado D tal que $\bar{D} \subset U$ e uma função diferenciável $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$.

A *variação normal de $X(\bar{D})$, determinada por h* , é a aplicação diferenciável

$$\varphi : \bar{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

dada por $\varphi(u, v, t) = X(u, v) + th(u, v)N(u, v)$. Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ fixo, a aplicação $X^t : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $X^t(u, v) = \varphi(u, v, t)$ é uma superfície parametrizada com

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^t}{\partial u} &= X_u + thN_u + th_uN, \\ \frac{\partial X^t}{\partial v} &= X_v + thN_v + th_vN. \end{aligned}$$

Assim, os coeficientes E^t, F^t, G^t da primeira forma fundamental de X^t são:

$$\begin{aligned} E^t &= \langle X_u + thN_u + th_uN, X_u + thN_u + th_uN \rangle = E + 2th\langle X_u, N_u \rangle + t^2h^2\langle N_u, N_u \rangle + t^2h_u^2, \\ F^t &= \langle X_u + thN_u + th_uN, X_v + thN_v + th_vN \rangle \\ &= F + th(\langle X_u, N_v \rangle + \langle N_u, X_v \rangle) + t^2h^2\langle N_u, N_v \rangle + t^2h_uh_v, \\ G^t &= \langle X_v + thN_v + th_vN, X_v + thN_v + th_vN \rangle = G + 2th\langle X_v, N_v \rangle + t^2h^2\langle N_v, N_v \rangle + t^2h_v^2. \end{aligned}$$

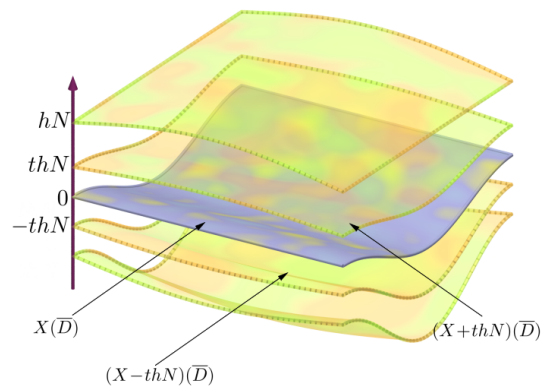


Fig. 47: A variação normal de $X(D)$

Como $-e = \langle X_u, N_u \rangle$, $-2f = \langle X_u, N_v \rangle + \langle X_v, N_u \rangle$, $-g = \langle X_v, N_v \rangle$ e a curvatura média é

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2},$$

obtemos:

$$\begin{aligned} E^t G^t - (F^t)^2 &= (E - 2t h e + t^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle + t^2 h_u^2) (G - 2t h g + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle + t^2 h_v^2) \\ &\quad - (F - 2t h f + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle + t^2 h_u h_v)^2 \\ &= EG - F^2 - 2t h (Eg - 2Ff + Ge) + R(t) \\ &= (EG - F^2) - 4t h \mathbf{H} (EG - F^2) + R(t) \\ &= (EG - F^2) (1 - 4t h \mathbf{H}) + R(t), \end{aligned}$$

onde $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t)}{t} = 0$.

Como \bar{D} é compacto e

$$\lim_{t \rightarrow 0} (E^t G^t - (F^t)^2) (u, v) = (EG - F^2) (u, v) > 0$$

para todo $(u, v) \in \bar{D}$, temos que, para ε suficientemente pequeno, X^t é uma superfície parametrizada regular.

Além disso, a área $A(t)$ de $X^t(\bar{D})$ é

$$A(t) = \iint_{\bar{D}} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} \, du \, dv = \iint_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4t h \mathbf{H} + \bar{R}} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv,$$

onde $\bar{R} = \frac{R}{EG - F^2}$.

Assim, se ε é pequeno, A é uma função diferenciável e sua derivada em $t = 0$ é

$$A'(0) = \iint_{\bar{D}} -2h \mathbf{H} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv, \tag{14}$$

pois

$$\frac{d}{dt} \left(\sqrt{1 - 4t h \mathbf{H} + \bar{R}(t)} \right) \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} \frac{-4h \mathbf{H} + \bar{R}'(t)}{\sqrt{1 - 4t h \mathbf{H} + \bar{R}(t)}} \Big|_{t=0} = -2h \mathbf{H},$$

já que \bar{R} é um polinômio de grau dois em t .

Proposição 5.1 *Sejam $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e D um domínio limitado tal que $\bar{D} \subset U$. Então X é mínima em D se, e só se, $A'(0) = 0$ para toda variação normal de $X(\bar{D})$.*

Prova.

Se X é mínima em D , i.e., $\mathbf{H} \equiv 0$ em D , é claro que a condição é satisfeita.

Suponhamos agora que a condição é satisfeita e que $\mathbf{H}(q) \neq 0$ para algum $q \in D$. Vamos supor que $\mathbf{H}(q) > 0$.

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\bar{B}_\varepsilon(q) \subset D$ e $\mathbf{H}(p) \geq M > 0$ para todo $p \in \bar{B}_\varepsilon(q)$, e seja $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $h(p) = 1$ para todo $p \in \bar{B}_{\varepsilon/2}(q)$, $0 \leq h(p) \leq 1$ para todo $p \in \mathbb{R}^2$ e $h(p) = 0$ para todo $p \in \mathbb{R}^2 - B_\varepsilon(q)$ (a existência de uma tal função pode ser vista em *Curso de Análise, Vol II* de Elon Lima, pag. 431-432). Então

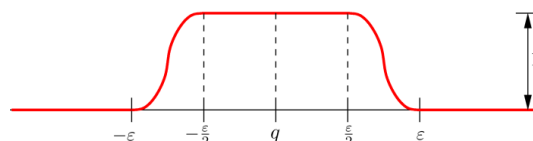


Fig. 48: Função h

$$A'(0) = \iint_{\bar{D}} -2h\mathbf{H}\sqrt{EG - F^2} \, du \, dv \leq \iint_{\bar{B}_{\varepsilon/2}(q)} -2M\sqrt{EG - F^2} \, du \, dv < 0$$

para a variação normal de $X(\bar{D})$ determinada por essa função h , o que é uma contradição. ■

Assim, qualquer região limitada $X(\bar{D})$ de uma superfície mínima é um ponto crítico para a função área de qualquer variação normal de $X(\bar{D})$. Deve-se observar, no entanto, que este ponto crítico pode não ser um mínimo, o que faz a palavra *mínima* parecer um pouco estranha. Essa terminologia foi introduzida em 1760 pelo matemático francês *Joseph-Louis Lagrange* (1736-1815) ao estudar o seguinte problema: determinar, dentre todas as superfícies com o mesmo contorno, aquela que possui a menor área.



Joseph-Louis Lagrange

Usando a demonstração da recíproca da proposição acima pode-se provar que se $A'(0) = 0$ para toda variação normal de $X(\bar{D})$ determinada por uma função h tal que $h|_{\partial\bar{D}} \equiv 0$, então $\mathbf{H} \equiv 0$ em D . Com isso, toda superfície de área mínima dentre todas as superfícies com o mesmo contorno tem, necessariamente, curvatura média zero.

Só muito tempo depois de Lagrange é que ficou claro que a recíproca não é verdadeira. Devido a essa razão histórica, as superfícies de curvatura média zero ficaram conhecidas, embora impropriamente, como *superfícies mínimas*.

Observação 5.1 As superfícies mínimas são geralmente associadas às películas de sabão, que podem ser obtidas mergulhando uma moldura formada por um arame em uma solução de sabão e retirando-a em seguida com cuidado. Se o experimento for bem executado, obtém-se uma película de sabão que tem o arame como contorno. Pode-se mostrar, por considerações físicas, que a película assume a posição onde, em seus pontos regulares, a curvatura média é zero (para maiores detalhes ver [Matemática das películas de sabão](#), de Manfredo Perdigão do Carmo).

Definição 5.2 O *vetor curvatura média* de uma superfície parametrizada regular é o vetor $\mathcal{H} = \mathbf{H}N$, onde \mathbf{H} é a curvatura média e N é o vetor normal à superfície.

Observação 5.2 O vetor curvatura média $\mathbf{H}N$ independe da orientação N , pois para a orientação oposta $-N$, a curvatura média é $-\mathbf{H}$.

Observação 5.3 O significado geométrico da direção de \mathcal{H} pode ser obtido através da equação (14).

De fato, escolhendo $h = \mathbf{H}$ temos que, para essa variação particular,

$$A'(0) = - \iint_{\bar{D}} 2\langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv < 0.$$

Isso significa que se deformarmos $X(\bar{D})$ na direção do vetor \mathcal{H} , a área é inicialmente decrescente.

Vamos agora obter uma outra interpretação para o vetor curvatura média \mathcal{H} .

Definição 5.3 Seja $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Dizemos que X é *isotérmica* se $\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle$ e $\langle X_u, X_v \rangle = 0$ em U .

Proposição 5.2 *Seja $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular tal que X é isotérmica. Então*

$$X_{uu} + X_{vv} = 2\lambda^2 \mathcal{H},$$

onde $\lambda^2 = \langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle$.

Prova.

Como X é isotérmica, $\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle$ e $\langle X_u, X_v \rangle = 0$.

Derivando, obtemos

$$\langle X_{uu}, X_u \rangle = \langle X_{vu}, X_v \rangle \quad \text{e} \quad \langle X_{uv}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{vv} \rangle = 0.$$

Portanto, $\langle X_{uu}, X_u \rangle = -\langle X_u, X_{vv} \rangle$, isto é, $\langle X_{uu} + X_{vv}, X_u \rangle = 0$.

De modo análogo, temos

$$\langle X_{uv}, X_u \rangle = \langle X_{vv}, X_v \rangle \quad \text{e} \quad \langle X_{uu}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{vv} \rangle = 0;$$

portanto, $\langle X_{vv}, X_v \rangle = -\langle X_{uu}, X_v \rangle$, isto é, $\langle X_{uu} + X_{vv}, X_v \rangle = 0$.

Segue-se que $X_{uu} + X_{vv}$ é paralelo a N .

Como X é isotérmica, $E = G$ e $F = 0$. Logo

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{Eg + Ee}{E^2} = \frac{1}{2} \frac{g + e}{\lambda^2},$$

ou seja, $2\lambda^2\mathbf{H} = g + e = \langle X_{uu} + X_{vv}, N \rangle$.

Então $X_{uu} + X_{vv} = 2\lambda^2\mathbf{H}N = 2\lambda^2\mathcal{H}$. ■

Definição 5.4 O *Laplaciano* Δf de uma função diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é definido por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Dizemos que f é *harmônica* em U se $\Delta f = 0$.

Corolário 5.1 Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e suponha que X é isotérmica. Então S é mínima se, e só se, as suas funções coordenadas x, y, z são harmônicas.

Exemplo 5.1 O *catenóide* é a superfície de revolução obtida girando a catenária

$$\begin{cases} y = a \cosh\left(\frac{z}{a}\right) \\ x = 0 \end{cases}$$

em torno do eixo Oz , $a > 0$.

Então $X : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$X(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av),$$

é uma parametrização do catenóide.

Como

$$X_u = (-a \cosh v \sin u, a \cosh v \cos u, 0) \quad \text{e} \quad X_v = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, a),$$

temos que

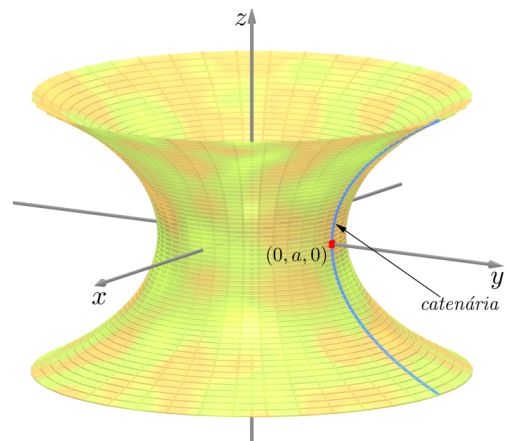


Fig. 49: Catenóide

$$\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle = a^2 \cosh^2 v \quad \text{e} \quad \langle X_u, X_v \rangle = 0,$$

portanto X é isotérmica.

Além disso,

$$X_{uu} = (-a \cosh v \cos u, -a \cosh v \sin u, 0) \quad \text{e} \quad X_{vv} = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, 0);$$

logo, $X_{uu} + X_{vv} = 0$. Assim, pelo corolário 5.1, X é mínima. \square

Observação 5.4 Pode-se mostrar que o catenóide é a única superfície de revolução que é mínima.

Exemplo 5.2 Seja \mathcal{H} o helicóide obtido a partir da hélice circular $\alpha(u) = (\cos u, \sin u, au)$, $u \in \mathbb{R}$.

Como já vimos no exemplo 4.3 do capítulo 3, $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{H}$,

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au),$$

é uma parametrização de \mathcal{H} que cobre todo o helicóide.

Portanto, como $h(u, v) = (u, a \sinh v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, é um difeomorfismo de \mathbb{R}^2 sobre \mathbb{R}^2 , temos que $Y = X \circ h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{H}$,

$$Y(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au),$$

é uma parametrização de \mathcal{H} que cobre todo o helicóide.

Sendo

$$Y_u = (-a \sinh v \sin u, a \sinh v \cos u, a)$$

e

$$Y_v = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, 0),$$

temos

$$\langle Y_u, Y_u \rangle = a^2(\sinh^2 v + 1) = a^2 \cosh^2 v = \langle Y_v, Y_v \rangle$$

e $\langle Y_u, Y_v \rangle = 0$; portanto Y é isotérmica.

Além disso, como

$$Y_{uu} = (-a \sinh v \cos u, -a \sinh v \sin u, 0)$$

e

$$Y_{vv} = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, 0),$$

temos $Y_{uu} + Y_{vv} = 0$. Logo, pelo corolário 5.1, o helicóide é uma superfície mínima. \square

Observação 5.5 Pode-se mostrar que o helicóide é a única superfície regradada, além do plano, que é mínima.

Observação 5.6 O helicóide e o catenóide foram descobertos em 1776 por **Meusnier**, que também demonstrou que a definição de Lagrange para superfícies mínimas como pontos críticos de um problema variacional é equivalente à curvatura média ser zero. Durante muito tempo, esses foram os únicos exemplos conhecidos (além do plano) de superfícies mínimas. Só em 1835, **Scherk** encontrou novos exemplos, um deles descrito no exemplo 5.4.

Exemplo 5.3 A *superfície de Enneper* é a superfície parametrizada

$$X(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Como

$$X_u = (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u) \quad \text{e} \quad X_v = (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v),$$

temos:

$$\begin{aligned} \langle X_u, X_u \rangle &= (1 - (u^2 - v^2))^2 + 4u^2v^2 + 4u^2 \\ &= 1 - 2(u^2 - v^2) + (u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 + 4u^2 \\ &= 1 + 2u^2 + 2v^2 + u^4 + v^4 + 2u^2v^2, \\ \langle X_v, X_v \rangle &= 4u^2v^2 + (1 - (v^2 - u^2))^2 + 4v^2 \\ &= 4u^2v^2 + 1 - 2(v^2 - u^2) + (v^2 - u^2)^2 + 4v^2 \\ &= 1 + 2u^2 + 2v^2 + u^4 + v^4 + 2u^2v^2, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle X_u, X_v \rangle &= (1 - u^2 + v^2)2uv + (1 - v^2 + u^2)2uv - 4uv \\ &= 2uv - (u^2 - v^2)2uv + 2uv + (u^2 - v^2)2uv - 4uv = 0; \end{aligned}$$

portanto X é isotérmica. Além disso, sendo

$$X_{uu} = (-2u, 2v, 2) \quad \text{e} \quad X_{vv} = (2u, -2v, -2),$$

temos $X_{uu} + X_{vv} = 0$. Logo, pelo corolário 5.1, X é uma superfície parametrizada regular mínima.

Note que ao trocarmos (u, v) por $(-v, u)$, trocamos na superfície (x, y, z) por $(-y, x, -z)$, pois

$$X(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right)$$

e

$$X(-v, u) = \left(-v + \frac{v^3}{3} - vu^2, u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v^2 - u^2 \right).$$

Assim, ao efetuarmos uma rotação positiva de $\frac{\pi}{2}$ em torno do eixo Oz seguida de uma reflexão com respeito ao plano xy , a superfície permanece invariante.

Uma característica interessante da superfície de Enneper é que ela possui auto-interseções, e que a interseção da superfície com os planos $y = 0$ e $x = 0$ são as únicas curvas de auto-interseção da superfície. \square

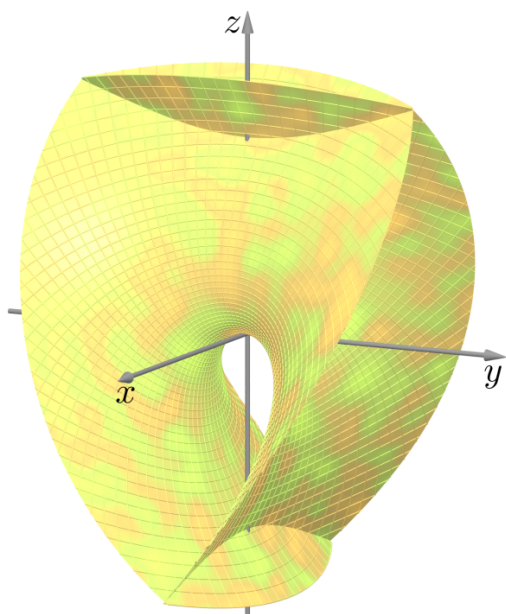


Fig. 50: Superfície de Enneper

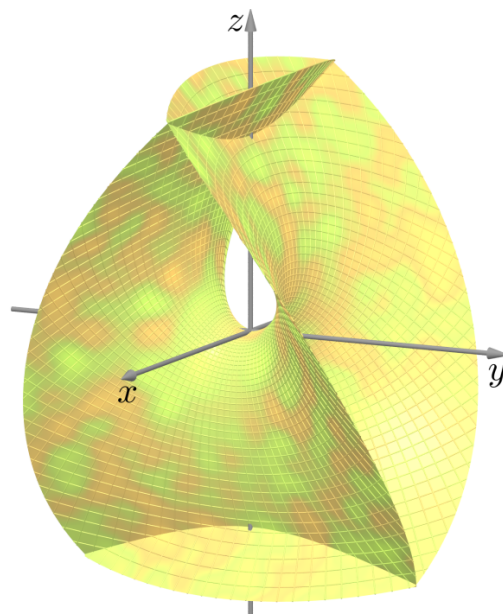


Fig. 51: Superfície de Enneper girada de $\frac{\pi}{2}$ em relação ao eixo Oz

Antes de passarmos ao próximo exemplo, vamos estabelecer uma relação entre superfícies mínimas e funções analíticas de uma variável complexa $\xi = u + iv$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Definição 5.5 Uma função $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(\xi) = f_1(u, v) + if_2(u, v)$, é *analítica* (ou *holomorfa*) quando f_1 e f_2 têm derivadas parciais contínuas de primeira ordem que satisfazem as chamadas *equações de Cauchy-Riemann*:

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial f_2}{\partial v} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_1}{\partial v} = -\frac{\partial f_2}{\partial u} .$$

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e defina as funções complexas φ_1 , φ_2 e φ_3 por:

$$\varphi_1(\xi) = \frac{\partial x}{\partial u} - i \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \varphi_2(\xi) = \frac{\partial y}{\partial u} - i \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \varphi_3(\xi) = \frac{\partial z}{\partial u} - i \frac{\partial z}{\partial v},$$

onde x, y, z são as funções coordenadas de X .

Lema 5.1 X é isotérmica se, e só se, $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \equiv 0$. Se essa última condição é satisfeita, X é mínima se, e só se, φ_1, φ_2 e φ_3 são funções analíticas.

Prova.

Como

$$\begin{aligned}\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 &= (x_u - ix_v)^2 + (y_u - iy_v)^2 + (z_u - iz_v)^2 \\ &= (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) - (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) - 2i(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v) \\ &= (E - G) - 2iF,\end{aligned}$$

temos que $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$ se, e só se, $E = G$ e $F = 0$, isto é, se, e só se, X é isotérmica.

Além disso, $X_{uu} + X_{vv} = 0$ se, e só se,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right) &= -\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right) &= -\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) &= -\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right),\end{aligned}$$

que são metade das equações de Cauchy-Riemann para φ_1 , φ_2 e φ_3 . Como a outra metade

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right) &= -\left(-\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right) \right), \\ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right) &= -\left(-\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right) \right), \\ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) &= -\left(-\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \right)\end{aligned}$$

é sempre satisfeita, concluímos que $X_{uu} + X_{vv} = 0$ se, e só se, φ_1 , φ_2 e φ_3 são analíticas. ■

Exemplo 5.4 A superfície de *Scherk* é a superfície parametrizada dada por:

$$X(u, v) = \left(\arg \frac{\xi + i}{\xi - i}, \arg \frac{\xi + 1}{\xi - 1}, \log \left| \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1} \right| \right),$$

$\xi \neq \pm 1$, $\xi \neq \pm i$, onde $\xi = u + iv$ e $\arg \xi$ é o ângulo que $O\xi$ faz com o eixo real.

Como para um número complexo $z \neq 0$ qualquer, $z = |z|(\cos \theta + i \sen \theta)$, onde $\theta = \arg z$, temos que

$$\tan \theta = \frac{\Im \left(\frac{z}{|z|} \right)}{\Re \left(\frac{z}{|z|} \right)} = \frac{\Im(z)}{\Re(z)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right) &= \arg\left(\frac{u+i(v+1)}{u+i(v-1)}\right) = \arg\frac{(u+i(v+1))(u-i(v-1))}{u^2+(v-1)^2} \\ &= \arg\frac{u^2+v^2-1-i(u(v-1)-u(v+1))}{u^2+(v-1)^2} = \arg\frac{u^2+v^2-1+2ui}{u^2+(v-1)^2} \\ &= \arctan\frac{2u}{u^2+v^2-1};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right) &= \arg\left(\frac{(u+1)+iv}{(u-1)+iv}\right) = \arg\left(\frac{((u+1)+iv)((u-1)-iv)}{(u-1)^2+v^2}\right) \\ &= \arg\frac{u^2-1+v^2+i(v(u-1)-v(u+1))}{(u-1)^2+v^2} = \arg\frac{(u^2+v^2-1)-2vi}{(u-1)^2+v^2} \\ &= \arctan\frac{-2v}{u^2+v^2-1};\end{aligned}$$

$$\log\left|\frac{\xi^2+1}{\xi^2-1}\right| = \log\left|\frac{(u^2-v^2+1)+2iuv}{(u^2-v^2-1)+2iuv}\right| = \frac{1}{2} \log\left(\frac{(u^2-v^2+1)^2+4u^2v^2}{(u^2-v^2-1)^2+4u^2v^2}\right).$$

Portanto,

$$\varphi_1 = \frac{\partial x}{\partial u} - i \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2u}{u^2+v^2-1}\right)^2} \left[\left(\frac{2(u^2+v^2-1)-4u^2}{(u^2+v^2-1)^2} \right) + i \frac{4uv}{(u^2+v^2-1)^2} \right]$$

$$= \frac{-2(u^2-v^2+1)+4uvi}{(u^2+v^2-1)^2+4u^2} = \frac{-2(1+u^2-v^2-2uvi)}{u^4+v^4+2u^2v^2+1-2(u^2+v^2)+4u^2}$$

$$= \frac{-2(1+u^2-v^2-2uvi)}{u^4+v^4+2(u^2-v^2)+1+2u^2v^2} = \frac{-2(1+u^2-v^2-2uvi)}{(1+u^2-v^2)^2+4u^2v^2}$$

$$= \frac{-2}{1+\xi^2};$$

$$\varphi_2 = \frac{\partial y}{\partial u} - i \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{1 + \frac{4v^2}{(u^2+v^2-1)^2}} \left[\frac{4uv}{(u^2+v^2-1)^2} + 2i \frac{(u^2+v^2-1)-2v^2}{(u^2+v^2-1)^2} \right]$$

$$= \frac{4uv+2i(u^2-v^2-1)}{(u^2+v^2-1)^2+4v^2} = \frac{-2i(-(u^2-v^2-1)+2iuv)}{(u^2+v^2-1)^2+4v^2} = \frac{-2i(1+v^2-u^2+2iuv)}{(1+v^2-u^2)^2+4u^2v^2}$$

$$= \frac{-2i}{1-\xi^2};$$

$$\varphi_3 = \frac{4\xi}{1-\xi^4},$$

pois, como $\log z = \log |z| e^{i\theta} = \log |z| + i\theta$, temos que

$$\left(\log \left(\frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1} \right) \right)' = \frac{\partial}{\partial u} \left(\log \left| \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1} \right| \right) - i \frac{\partial}{\partial v} \left(\log \left| \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1} \right| \right) = \varphi_3(\xi),$$

portanto,

$$\varphi_3(\xi) = \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1} \left(\frac{2\xi(\xi^2 - 1) - 2\xi(\xi^2 + 1)}{(\xi^2 - 1)^2} \right) = \frac{-4\xi}{(\xi^2 + 1)(\xi^2 - 1)} = \frac{4\xi}{1 - \xi^4}.$$

Então

$$\begin{aligned} \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 &= \frac{4}{(1 + \xi^2)^2} - \frac{4}{(1 - \xi^2)^2} + \frac{16\xi^2}{(1 - \xi^4)^2} \\ &= \frac{4(1 - \xi^2)^2 - 4(1 + \xi^2)^2 + 16\xi^2}{(1 - \xi^4)^2} \\ &= \frac{4(1 - 2\xi^2 + \xi^4) - 4(1 + 2\xi^2 + \xi^4) + 16\xi^2}{(1 - \xi^4)^2} = 0, \end{aligned}$$

ou seja, X é isotérmica.

Como φ_1 , φ_2 e φ_3 são funções analíticas, obtemos, pelo lema 5.1, que X é mínima.

Temos também que:

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos \left(\arg \left(\frac{\xi + i}{\xi - i} \right) \right) = \frac{|\xi - i|}{|\xi + i|} \Re \left(\frac{\xi + i}{\xi - i} \right) \\ &= \frac{|\xi - i|}{|\xi + i|} \frac{1}{|\xi - i|^2} \Re((\xi + i)(\bar{\xi} + i)) \\ &= \frac{1}{|\xi^2 + 1|} \Re((u + (v + 1)i)(u - (v - 1)i)) \\ &= \frac{1}{|u^2 - v^2 + 1 + 2uvi|} (u^2 + v^2 - 1) \\ &= \frac{u^2 + v^2 - 1}{((u^2 - v^2 + 1)^2 + 4u^2v^2)^{1/2}}; \\ \cos y &= \cos \left(\arg \left(\frac{\xi + 1}{\xi - 1} \right) \right) = \frac{|\xi - 1|}{|\xi + 1|} \Re \left(\frac{\xi + 1}{\xi - 1} \right) \\ &= \frac{|\xi - 1|}{|\xi + 1|} \frac{1}{|\xi - 1|^2} \Re((\xi + 1)(\bar{\xi} - 1)) \\ &= \frac{1}{|\xi^2 - 1|} \Re(((u + 1) + iv)((u - 1) - iv)) = \frac{u^2 - 1 + v^2}{|u^2 - v^2 - 1 + 2iuv|} \\ &= \frac{u^2 + v^2 - 1}{((u^2 - v^2 - 1)^2 + 4u^2v^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Logo

$$z = \log \left(\frac{(u^2 - v^2 + 1)^2 + 4u^2v^2}{(u^2 - v^2 - 1)^2 + 4u^2v^2} \right)^{1/2} = \log \left(\frac{\cos y}{\cos x} \right).$$

Esta representação mostra que a superfície de Scherk é definida num domínio que tem a forma da união dos quadrados pretos do tabuleiro de xadrez.

Observe que:

$\lim_{\substack{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^- \\ y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}} z = +\infty;$	$\lim_{\substack{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+ \\ y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}} z = +\infty;$
$\lim_{\substack{y \rightarrow (\frac{\pi}{2})^- \\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}} z = -\infty;$	$\lim_{\substack{y \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+ \\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}} z = -\infty.$

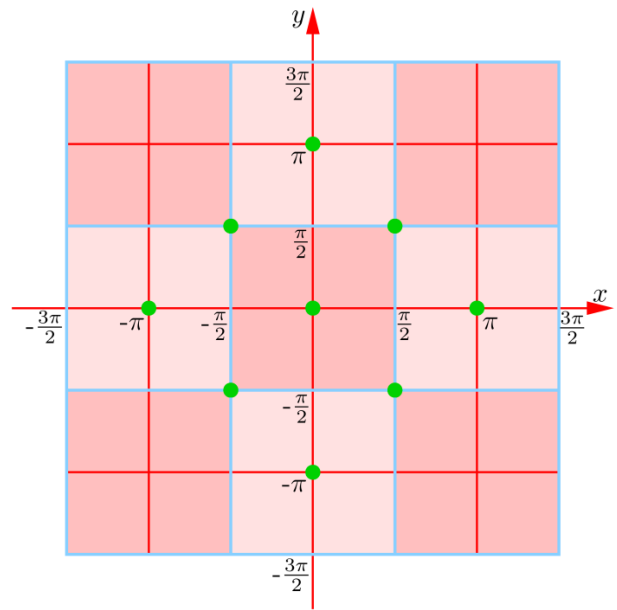


Fig. 52: Domínio de definição da superfície de Scherk

Como $e^z \cos x = \cos y$, temos que as retas paralelas ao eixo Oz que passam pelos vértices dos quadrados do tabuleiro também pertencem à superfície. \square

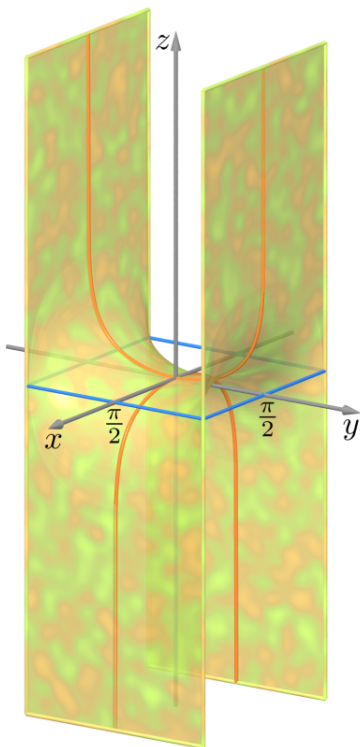


Fig. 53: Superfície de Heinrich Scherk (circa 1835)

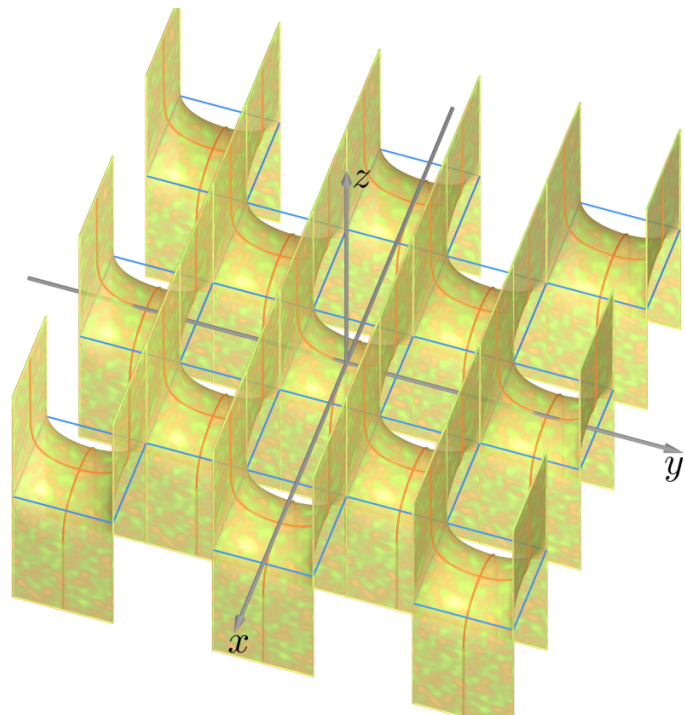


Fig. 54: Dupla periodicidade da superfície de Scherk

Exemplo 5.5 A *superfície de Costa* ou *superfície de Costa-Hoffman-Meeks*, é uma superfície mínima "completa" mergulhada em \mathbb{R}^3 .

Esta superfície foi descoberta matematicamente por *Celso Costa* em 1982. Até então os únicos exemplos de superfícies mínimas completas mergulhadas em \mathbb{R}^3 eram o plano, o catenóide (Euler, 1760) e o helicóide (Meusnier, 1776). O modelo computacional da superfície de Costa foi feito por *James T. Hoffman* em 1983. Após a visualização gráfica da superfície *David Hoffman* e *William Meeks III* provaram que ela é mergulhada no espaço \mathbb{R}^3 , que contém retas e que possui simetrias.

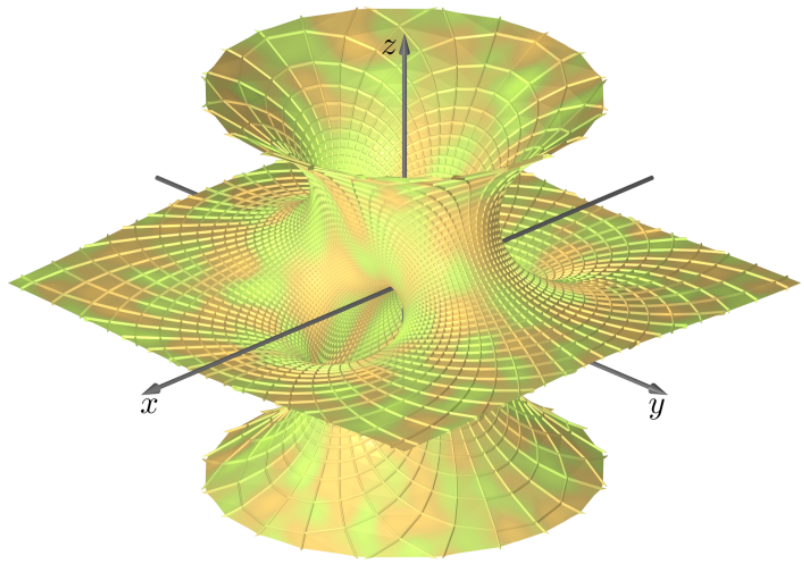


Fig. 55: Superfície de Costa

Enquanto o plano e o helicóide são homeomorfos à esfera menos um ponto (superfícies de gênero zero com um fim) e o catenóide é homeomorfo à esfera menos dois pontos (superfície de gênero zero com dois fins), a superfície de Costa é homeomorfa ao toro menos três pontos (superfície de gênero um com três fins).

Entretanto, a teoria que desenvolveremos neste curso não basta para descrever matematicamente a superfície de Costa. \square

Referências na Internet:

1. The Scientific Graphics Project: <http://www.msri.org/about/sgp/jim>

2. Stewart Dickson Portfolio:

http://emsh.calarts.edu/~mathart/portfolio/SPD_Costa_portfolio.html

(Nesta página você pode ver uma animação feita usando o *Mathematica* que mostra o toro menos 3 pontos sendo transformado na superfície de Costa: <http://emsh.calarts.edu/~mathart/portfolio/costa1.mpg>).

3. Bloomington's Virtual Minimal Surface Museum: <http://www.indiana.edu/~minimal/>

4. Touching Soap Films: <http://page.mi.fu-berlin.de/polthier/booklet/intro.html>

Capítulo 5

Geometria Intrínseca das Superfícies

No capítulo 3 introduzimos a primeira forma fundamental de uma superfície S e mostramos como ela pode ser usada para calcular conceitos métricos simples sobre S (comprimento, ângulo, área). O ponto importante é que tais cálculos podem ser feitos, conhecendo-se a primeira forma fundamental, sem "sair" da superfície. Por causa disto, dizemos que estes conceitos são *intrínsecos à superfície S* .

A geometria da primeira forma fundamental não se limita apenas aos conceitos simples mencionados acima. Como veremos neste capítulo, muitas propriedades locais importantes de uma superfície podem ser expressas só em termos da primeira forma fundamental. O estudo de tais propriedades é chamado de *geometria intrínseca* da superfície.

Na seção 2, por exemplo, demonstraremos a fórmula de Gauss que expressa a curvatura Gaussiana K como uma função dos coeficientes da primeira forma fundamental e de suas derivadas. Isto significa que K é um conceito intrínseco, um fato surpreendente, já que K foi definida usando-se a segunda forma fundamental.

1. Isometrias; Aplicações Conformes

No que se segue, S_1 e S_2 denotam superfícies regulares.

Definição 1.1 Dizemos que um difeomorfismo $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ é uma *isometria* se

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}$$

para todo $p \in S_1$ e todos $w_1, w_2 \in \mathcal{T}_p S_1$, isto é, $d\varphi_p : \mathcal{T}_p S_1 \rightarrow \mathcal{T}_p S_2$ é uma aplicação linear que preserva produto interno para todo $p \in S$. Diz-se então que S_1 e S_2 são *superfícies isométricas*.

Observação 1.1 Um difeomorfismo $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ é uma isometria se, e somente se, $I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$ para todo $p \in S_1$ e todo $w \in T_p S_1$.

De fato, se φ é uma isometria, então

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \langle d\varphi_p(w), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)} = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)).$$

Suponhamos agora que φ preserva a primeira forma fundamental. Então

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_2 \rangle_p &= \frac{1}{2} (I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2)) \\ &= \frac{1}{2} (I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1) + d\varphi_p(w_2)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_2))) \\ &= \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}. \end{aligned}$$

Definição 1.2 Dizemos que S_1 é *localmente isométrica a* S_2 se para cada $p \in S_1$ existem um aberto $V_1 \subset S_1$, com $p \in V_1$, um aberto $V_2 \subset S_2$ e uma isometria $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$.

Dizemos que S_1 e S_2 são *localmente isométricas* se S_1 é localmente isométrica a S_2 e S_2 é localmente isométrica a S_1 .

Observação 1.2 Se existir uma aplicação diferenciável $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ sobrejetora tal que $d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2$ preserva produto interno para todo $p \in S_1$, então S_1 e S_2 são localmente isométricas.

De fato, como $d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2$ é um isomorfismo, existem, pelo Teorema da Aplicação Inversa, um aberto $V_1 \subset S_1$, com $p \in V_1$ e um aberto $V_2 \subset S_2$, com $\varphi(p) \in V_2$, tais que $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ é um difeomorfismo e, portanto, é uma isometria.

Observação 1.3 Duas superfícies podem ser localmente isométricas sem serem globalmente isométricas.

Exemplo 1.1 Sejam $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X(u, v) = (u, v, 0)$, uma parametrização do plano xy , com $E = G = 1$ e $F = 0$, e $\bar{X} : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\bar{X}(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, uma parametrização do cilindro $C : x^2 + y^2 = 1$, com $\bar{E} = \bar{G} = 1$, $\bar{F} = 0$ e $\bar{X}(U) = C - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1, y = 0 \text{ e } z \in \mathbb{R}\}$, onde $U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$.

Afirmção: A aplicação $\varphi = X \circ \bar{X}^{-1} : \bar{X}(U) \rightarrow X(U)$ é uma isometria.

De fato, se $p \in \bar{X}(U)$ e $w \in T_p C$, existe uma curva diferenciável $\alpha : I \rightarrow \bar{X}(U)$, $\alpha(t) = \bar{X}(u(t), v(t))$, tal que $\alpha(0) = p$ e

$$\alpha'(0) = w = x'(0)\bar{X}_u(u_0, v_0) + y'(0)\bar{X}_v(u_0, v_0),$$

onde $p = \bar{X}(u_0, v_0)$.

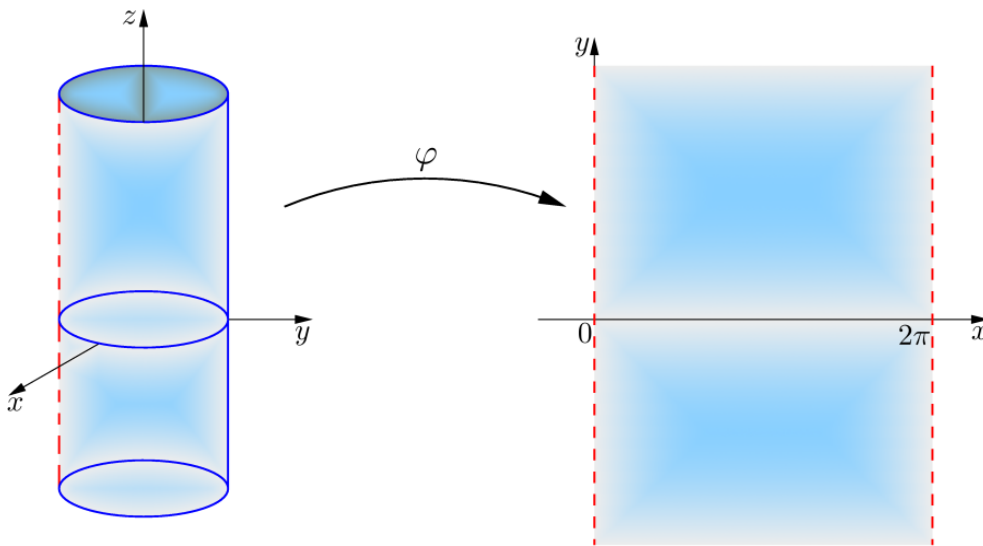


Fig. 1: Isometria do cilindro menos uma reta sobre a faixa plana $(0, 2\pi) \times \mathbb{R}$

Então $\beta(t) = \varphi \circ \alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I$, é uma curva diferenciável em $X(U)$ tal que $\beta(0) = \varphi(p)$ e

$$d\varphi_p(w) = \beta'(0) = u'(0)X_u(u_0, v_0) + v'(0)X_v(u_0, v_0).$$

Logo

$$I_p(w) = \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle = \bar{E}(u_0, v_0)u'(0)^2 + 2\bar{F}(u_0, v_0)u'(0)v'(0) + \bar{G}(u_0, v_0)v'(0)^2$$

e

$$I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)) = \langle \beta'(0), \beta'(0) \rangle = E(u_0, v_0)u'(0)^2 + 2F(u_0, v_0)u'(0)v'(0) + G(u_0, v_0)v'(0)^2.$$

Como $E = \bar{E}$, $G = \bar{G}$ e $F = \bar{F}$ temos que

$$I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$$

para todo $p \in \bar{X}(U)$ e todo $w \in T_p C$, isto é, φ é uma isometria. \square

Observação 1.4 Logo, o cilindro e o plano são localmente isométricos. Mas o cilindro e o plano não são globalmente isométricos, pois o cilindro não é nem mesmo homeomorfo a um plano. Não cabe aqui uma demonstração rigorosa desta última afirmação, mas o argumento intuitivo dado a seguir pode dar uma idéia da demonstração.

Qualquer curva fechada simples no plano pode ser deformada continuamente em um ponto sem deixar o plano. Tal propriedade é certamente preservada por um homeomorfismo. Mas um paralelo do cilindro não possui esta propriedade, e contradiz a existência de um homeomorfismo entre o plano e o cilindro.

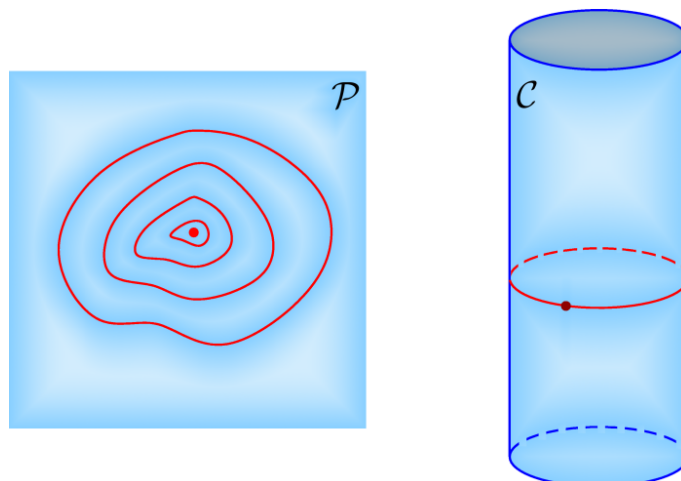


Fig. 2: No plano as curvas fechadas simples são contráteis a um ponto enquanto que no cilindro os paralelos não são contráteis a um ponto

Observação 1.5 Isometrias não preservam necessariamente a curvatura média em pontos correspondentes. Por exemplo o plano e o cilindro $C : x^2 + y^2 = 1$ são localmente isométricos, mas o plano tem curvatura média constante igual a zero e o cilindro C tem curvatura média constante igual a $\frac{1}{2}$.

Antes de proseguirmos, vamos generalizar o argumento usado acima para obter um critério para isometria local em termos de coordenadas locais.

Proposição 1.1 *Sejam $X : U \rightarrow X(U) \subset S_1$ e $\bar{X} : U \rightarrow \bar{X}(U) \subset S_2$ parametrizações de S_1 e S_2 , respectivamente, tais que $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$ e $G = \bar{G}$ em U . Então a aplicação $\varphi = \bar{X} \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow \bar{X}(U)$ é uma isometria.*

Prova.

Primeiro observe que φ é um difeomorfismo, pois \bar{X} e X^{-1} são difeomorfismos.

Sejam $p \in X(U)$, $w \in T_p S_1$ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X(U)$, $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, uma curva diferenciável em $X(U)$ tal que $\alpha(0) = p$ e

$$\alpha'(0) = w = u'(0)X_u(u_0, v_0) + v'(0)X_v(u_0, v_0),$$

onde $X(u_0, v_0) = p$.

Seja $\beta(t) = \varphi(\alpha(t)) = \bar{X}(u(t), v(t))$, $t \in I$. Então $\beta : I \rightarrow \bar{X}(U)$ é uma curva diferenciável em $\bar{X}(U)$ tal que $\beta(0) = \varphi(p)$ e

$$d\varphi_p(w) = \beta'(0) = u'(0)\bar{X}_u(u_0, v_0) + v'(0)\bar{X}_v(u_0, v_0).$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_p(w) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle = u'(0)^2 E(u_0, v_0) + 2u'(0)v'(0)F(u_0, v_0) + v'(0)^2 G(u_0, v_0) \\ &= u'(0)^2 \bar{E}(u_0, v_0) + 2u'(0)v'(0)\bar{F}(u_0, v_0) + v'(0)^2 \bar{G}(u_0, v_0) \\ &= I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)). \end{aligned}$$

Portanto, $d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2$ preserva produto interno. ■

Exemplo 1.2 Vimos no exemplo 5.1, do capítulo 4, que $X : U \rightarrow X(U)$

$$X(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av),$$

é uma parametrização do catenóide \mathcal{C} tal que

$$X(U) = \mathcal{C} = \{(a \cosh v, 0, av) \mid v \in \mathbb{R}\},$$

$E = G = a^2 \cosh^2 v$ e $F = 0$, onde $U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$, e no exemplo 5.2, do capítulo 4, que a aplicação $\bar{X} : U \rightarrow \bar{X}(U)$ dada por

$$\bar{X}(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au),$$

é uma parametrização do helicóide \mathcal{H} tal que $\bar{X}(U)$ é uma "volta" do helicóide, e que $\bar{E} = \bar{G} = a^2 \cosh^2 v$ e $\bar{F} = 0$.

Portanto, pela proposição 1.1, $\varphi = X \circ \bar{X}^{-1} : \bar{X}(U) \rightarrow X(U)$ é uma isometria.

Variando o domínio U , obtemos que o catenóide e o helicóide são localmente isométricos. Mas não são globalmente isométricos, pois \mathcal{H} é homeomorfo ao plano, já que

$$\begin{aligned} \bar{X} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathcal{H} \\ (u, v) &\mapsto (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo e $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = a^2 \left(\cosh \frac{z}{a}\right)^2$ é homeomorfo ao cilindro $S : x^2 + y^2 = a^2$, já que

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \left(\frac{x}{\cosh \frac{z}{a}}, \frac{y}{\cosh \frac{z}{a}}, z \right) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo tal que $\varphi(\mathcal{C}) = S$ (verifique!).

Como o plano e o cilindro não são homeomorfos (ver observação 1.4), \mathcal{H} e \mathcal{C} também não são homeomorfos. □

Atividade 1.1 (Exercício 14, pag. 254.)

Quando duas funções diferenciáveis $f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\partial g}{\partial u},$$

elas são harmônicas. [De fato, $f_{uu} = g_{vv}$ e $f_{vv} = -g_{uu} \implies f_{uu} + f_{vv} = 0$. De modo análogo, verifica-se que $g_{uu} + g_{vv} = 0$]. Neste caso, diz-se que f e g são **harmônicas conjugadas**.

Sejam X e Y parametrizações isotérmicas de superfícies mínimas tais que os pares formados pelas respectivas funções coordenadas sejam de funções harmônicas conjugadas. Diz-se então que X e Y são **superfícies mínimas conjugadas**.

Prove que:

(a) O helicóide e o catenóide são superfícies mínimas conjugadas.

Sejam

$$X : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}, \quad X(u, v) = (a \cosh v \sin u, -a \cosh v \cos u, -av),$$

uma parametrização isotérmica do Catenóide e

$$\bar{X} : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}, \quad \bar{X}(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au),$$

uma parametrização isotérmica do helicóide.

Como

$$\begin{aligned} x_u &= a \cosh v \cos u = \bar{x}_v; & x_v &= a \sinh v \sin u = -\bar{x}_u; \\ y_u &= a \cosh v \sin u = \bar{y}_v; & y_v &= -a \sinh v \cos u = -\bar{y}_u; \\ z_u &= 0 = \bar{z}_v; & z_v &= -a = -\bar{z}_u, \end{aligned}$$

temos que x e \bar{x} , y e \bar{y} , z e \bar{z} são harmônicas conjugadas. Logo o catenóide e o helicóide são superfícies mínimas conjugadas.

(b)+(c) Dadas duas superfícies mínimas conjugadas, X e Y , a superfície

$$Z^t = (\cos t)X + (\sin t)Y$$

é mínima para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, todos os membros da família a 1-parâmetro $\{Z^t\}$ têm a mesma primeira forma fundamental.

De fato, como

$$Z_u^t = \cos t X_u + \sin t Y_u \quad \text{e} \quad Z_v^t = \cos t X_v + \sin t Y_v,$$

temos que:

- $E^t = \langle X_u, X_u \rangle \cos^2 t + 2\langle X_u, Y_u \rangle \cos t \sin t + \langle Y_u, Y_u \rangle \sin^2 t$
 $= \langle X_u, X_u \rangle \cos^2 t - 2\langle X_u, X_v \rangle \cos t \sin t + \langle X_v, X_v \rangle \sin^2 t$
 $= \langle X_u, X_u \rangle = \langle Y_u, Y_u \rangle$
- $F^t = \langle X_u, X_v \rangle \cos^2 t + \langle X_u, Y_v \rangle \cos t \sin t + \langle Y_u, X_v \rangle \cos t \sin t + \langle Y_u, Y_v \rangle \sin^2 t$
 $= \langle X_u, X_u \rangle \cos t \sin t - \langle X_v, X_v \rangle \cos t \sin t$
 $= 0 = \langle X_u, X_v \rangle = \langle Y_u, Y_v \rangle$
- $G^t = \langle X_v, X_v \rangle \cos^2 t + 2\langle X_v, Y_v \rangle \cos t \sin t + \langle Y_v, Y_v \rangle \sin^2 t$
 $= \langle X_v, X_v \rangle \cos^2 t + 2\langle X_v, X_u \rangle \cos t \sin t + \langle X_u, X_u \rangle \sin^2 t$
 $= \langle X_v, X_v \rangle \cos^2 t + \langle X_v, X_v \rangle \sin^2 t$
 $= \langle X_v, X_v \rangle = \langle Y_v, Y_v \rangle,$

pois

$$X_u = Y_v, X_v = -Y_u, \langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle = \langle Y_u, Y_u \rangle = \langle Y_v, Y_v \rangle \text{ e } \langle X_u, X_v \rangle = \langle Y_u, Y_v \rangle = 0.$$

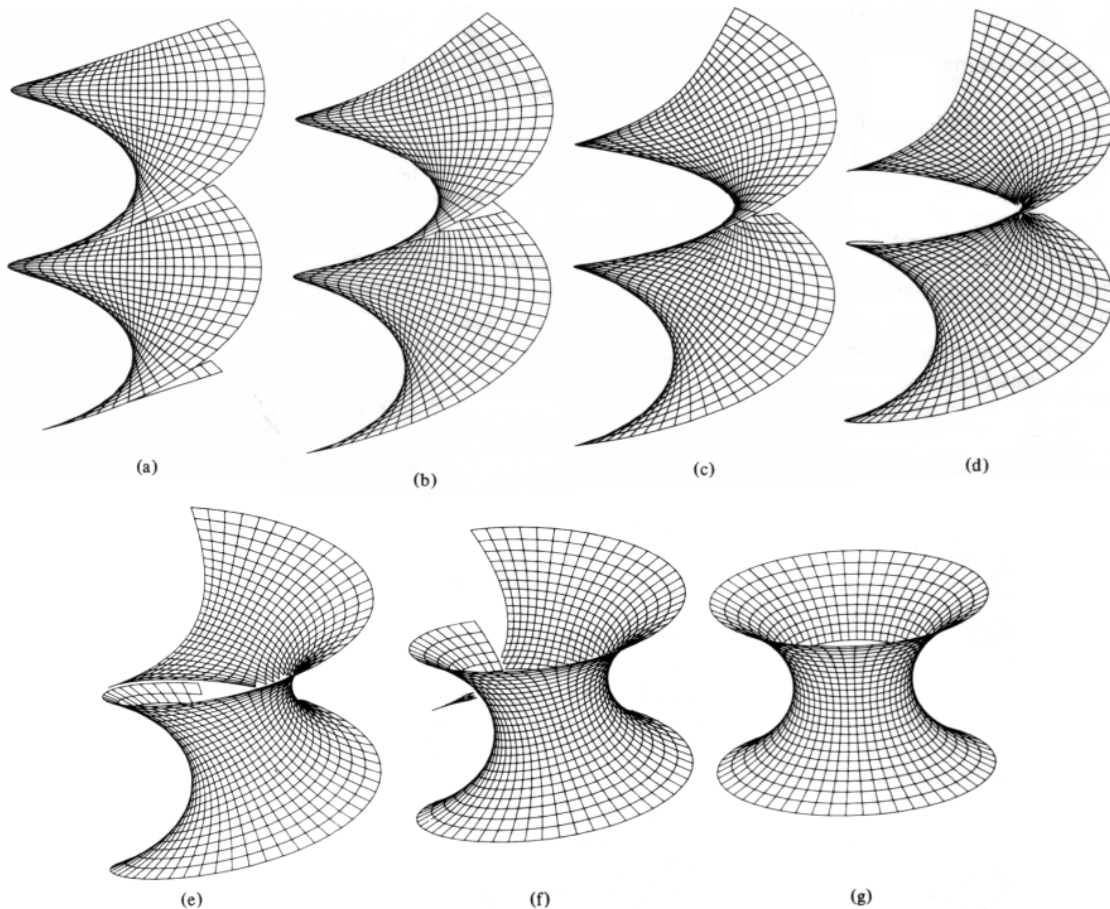


Fig. 3: Estágios consecutivos na deformação isométrica do helicóide no catenóide

Então Z^t é isotérmica para todo $t \in \mathbb{R}$ e todas as superfícies da família a 1-parâmetro $\{Z^t\}$ têm a mesma primeira forma fundamental.

Além disso, cada uma das superfícies Z^t é mínima, pois Z^t é uma parametrização isotérmica, e

$$Z_{uu}^t = \cos t X_{uu} + \sin t Y_{uu} \quad \text{e} \quad Z_{vv}^t = \cos t X_{vv} + \sin t Y_{vv};$$

portanto,

$$Z_{uu}^t + Z_{vv}^t = \cos t(X_{uu} + X_{vv}) + \sin t(Y_{uu} + Y_{vv}) = 0.$$

Observe também que dois membros quaisquer da família são isométricos já que têm a mesma primeira forma fundamental.

Assim, provamos que duas superfícies mínimas conjugadas podem ser ligadas por uma família a 1-parâmetro de superfícies mínimas isométricas.

Exemplo 1.3 Mostraremos neste exemplo que o cone de revolução de uma folha menos o vértice,

$$C : z = k\sqrt{x^2 + y^2}, \quad k > 0, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

e o plano são localmente isométricos.

Seja $\alpha \in (0, \pi/2)$ tal que $k = \cotg \alpha$ e seja $(0, \rho \sen \alpha, \rho \cos \alpha)$, $\rho \in (0, \infty)$, uma parametrização

pelo comprimento de arco da semi-reta $\begin{cases} z = ky, & y > 0 \\ x = 0 \end{cases}$ que gera o cone.

Então $Y : (0, \infty) \times (0, 2\pi \sen \alpha) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$Y(\rho, \theta) = \left(\rho \sen \alpha \cos \frac{\theta}{\sen \alpha}, \rho \sen \alpha \sen \frac{\theta}{\sen \alpha}, \rho \cos \alpha \right),$$

é uma parametrização do cone, onde

$$Y((0, \infty) \times (0, 2\pi \sen \alpha)) = C - \{(x, 0, kx) \mid x > 0\},$$

$$E = \langle Y_\rho, Y_\rho \rangle = 1, \quad G = \langle Y_\theta, Y_\theta \rangle = \rho^2 \quad \text{e} \quad F = \langle Y_\rho, Y_\theta \rangle = 0.$$

Seja agora $\bar{Y} : (0, \infty) \times (0, 2\pi \sen \alpha) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\bar{Y}(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sen \theta, 0),$$

uma parametrização do plano tal que

$$\bar{E} = \langle \bar{Y}_\rho, \bar{Y}_\rho \rangle = 1; \quad \bar{G} = \langle \bar{Y}_\theta, \bar{Y}_\theta \rangle = \rho^2 \quad \text{e} \quad \bar{F} = \langle \bar{Y}_\rho, \bar{Y}_\theta \rangle = 0$$

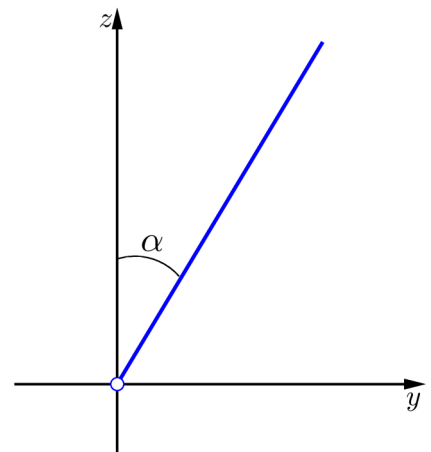


Fig. 4: Reta geratriz do cone

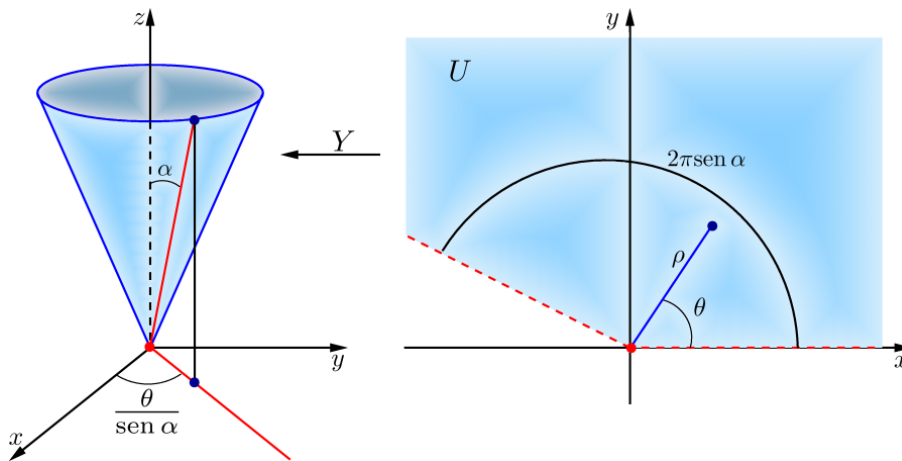


Fig. 5: Parametrização Y

Logo, pela proposição 1.1, temos

$$\bar{Y}^{-1} \circ Y : Y(U) \longrightarrow \bar{Y}(U)$$

é uma isometria, onde $U = (0, \infty) \times (0, 2\pi \text{sen } \alpha)$.

Variando o domínio U , podemos provar que o cone e o plano são localmente isométricos. \square

Observação 1.6 O cone e o plano não são globalmente isométricos, pois o cone é homeomorfo a $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, já que

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, k\sqrt{x^2 + y^2}) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo, e \mathbb{R}^2 e $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ não são homeomorfos, pois toda curva fechada simples em \mathbb{R}^2 pode ser deformada continuamente em um ponto e o círculo $S^1 : x^2 + y^2 = 1$, por exemplo, não pode ser deformado continuamente em um ponto em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

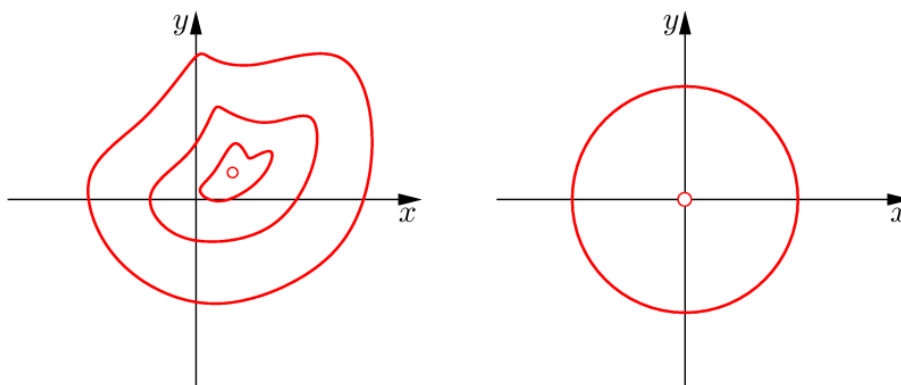


Fig. 6: Curvas fechadas simples em \mathbb{R}^2 e $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, respectivamente

Observação 1.7 [Distância Intrínseca em S]

Veremos agora que o fato de podermos calcular comprimentos de curvas sobre uma superfície utilizando apenas a primeira forma fundamental dá lugar à noção de *distância intrínseca* entre pontos de S .

Definição 1.3 Dizemos que uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ é *diferenciável por partes* se existe uma partição $\{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$ do intervalo $[a, b]$ tal que $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ é diferenciável para todo $i = 1, \dots, n$.

Seja S uma superfície regular conexa (\iff conexa por caminhos) e sejam $p, q \in S$.

Considere o conjunto:

$$C_{p,q} = \{ \alpha : [a, b] \rightarrow S \mid \alpha \text{ é diferenciável por partes; } \alpha(a) = p \text{ e } \alpha(b) = q \}.$$

Afirmção: $C_{p,q}$ é não vazio.

De fato, como S é conexa por caminhos, existe uma curva $\beta : [a, b] \rightarrow S$ contínua tal que $\beta(a) = p$ e $\beta(b) = q$. Mas, como $[a, b]$ é compacto, β é uniformemente contínua.

Para cada $t \in [a, b]$ existe uma parametrização $X_t : U_t \rightarrow X_t(U_t)$ de S em $\beta(t)$ tal que U_t é um disco aberto de \mathbb{R}^2 . Como $\beta([a, b])$ é compacto, $X_t(U_t)$ é aberto para todo $t \in [a, b]$ e $\beta([a, b]) \subset \bigcup_{t \in [a, b]} X_t(U_t)$, temos, pelo Teorema de Borel-Lebesgue, que existem pontos $s_1, \dots, s_k \in [a, b]$ tais que

$$\beta([a, b]) \subset X_1(U_1) \cup \dots \cup X_k(U_k), \quad (1)$$

onde $X_j(U_j) = X_{s_j}(U_{s_j})$.

Seja $\delta > 0$ o número de Lebesgue da cobertura $\{X_j(U_j) \mid j = 1, \dots, k\}$. Como β é uniformemente contínua, existe $\mu > 0$ tal que

$$|t - s| < \mu, t, s \in [a, b] \implies \|\beta(t) - \beta(s)\| < \frac{\delta}{2}. \quad (2)$$

Seja $\mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$ com norma $< \mu$, isto é, $|t_i - t_{i-1}| < \mu$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Como, por (2), $\text{diam}(\beta([t_{i-1}, t_i])) \leq \frac{\delta}{2} < \delta$ e δ é o número de Lebesgue da cobertura (1), existe $j_i \in \{1, \dots, k\}$ tal que

$$\beta([t_{i-1}, t_i]) \subset X_{j_i}(U_{j_i}).$$

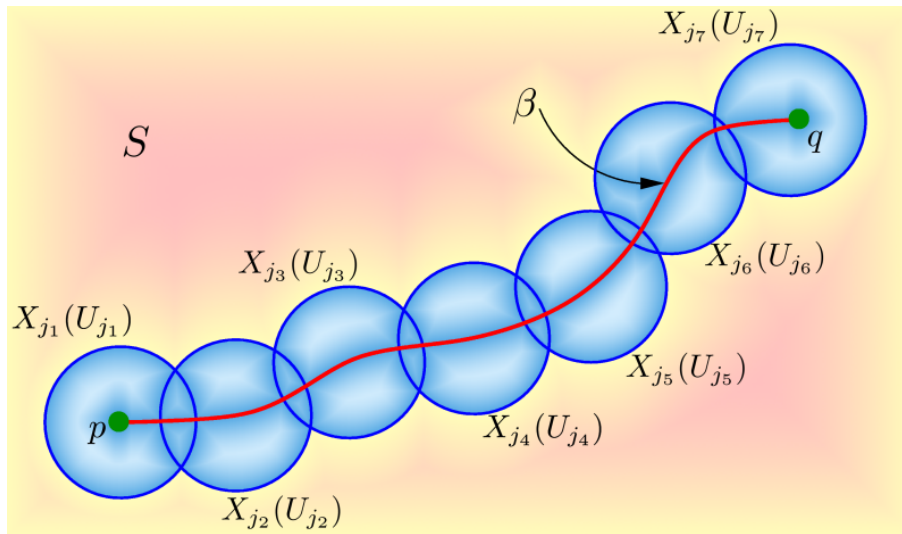


Fig. 7: Cobertura do caminho β

Para cada $i = 1, \dots, n$, sejam $q_{i-1}, q_i \in U_{j_i}$ tais que $X_{j_i}(q_{i-1}) = \beta(t_{i-1})$, $X_{j_i}(q_i) = \beta(t_i)$ e $\bar{\alpha}_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow U_{j_i}$ uma parametrização diferenciável regular da reta que passa pelos pontos $\bar{\alpha}(t_{i-1}) = q_{i-1}$ e $\bar{\alpha}(t_i) = q_i$.

Então $\alpha_i = X_{j_i} \circ \bar{\alpha}_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow X_{j_i}(U_{j_i})$ é uma curva diferenciável em S tal que $\alpha_i(t_{i-1}) = \beta(t_{i-1})$ e $\alpha_i(t_i) = \beta(t_i)$.

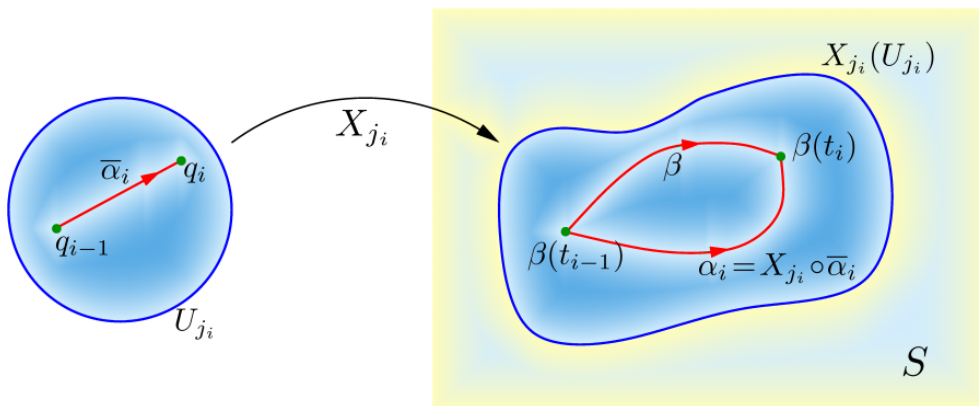


Fig. 8:

Logo a curva $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ dada por $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]} = \alpha_i$, para todo $i = 1, \dots, n$, é uma curva diferenciável por partes tal que $\alpha(a) = p$ e $\alpha(b) = q$.

Definição 1.4 A *distância intrínseca* entre dois pontos $p, q \in S$ é definida por:

$$d(p, q) = \inf \{ \text{comprimento de } \alpha \mid \alpha \in C_{p,q} \}$$

Proposição 1.2 A função $d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $d(p, q) \geq 0$ e $d(p, q) = 0 \iff p = q$;

(b) $d(p, q) = d(q, p)$;

(c) $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$,

para quaisquer $p, q, r \in S$, o que torna S um espaço métrico.

Prova.

(a) Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ uma curva diferenciável por partes tal que $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ é diferenciável, para todo $i = 1, \dots, n$, $\alpha(a) = p$ e $\alpha(b) = q$, onde $\{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$ é uma partição de $[a, b]$.

Então, para todo $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})}{\|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|}, \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right\rangle &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \alpha'(t), \frac{\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})}{\|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|} \right\rangle dt \\ &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(t)\| dt = \text{comprimento}(\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\text{comprimento}(\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}) \geq \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| .$$

Portanto,

$$\text{comprimento}(\alpha) = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(t)\| dt \geq \sum_{i=1}^n \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| \geq \|p - q\| .$$

Logo,

$$d(p, q) = \inf\{\text{comprimento}(\alpha) \mid \alpha \in C_{p,q}\} \geq \|p - q\| .$$

Assim, $d(p, q) \geq 0$ e $d(p, q) = 0 \iff p = q$.

(b) Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ uma curva diferenciável por partes tal que $\alpha(a) = p$ e $\alpha(b) = q$.

Então $\beta : [a, b] \rightarrow S$, dada por $\beta(t) = \alpha(a + b - t)$, é diferenciável por partes, $\beta(a) = \alpha(b) = q$, $\beta(b) = \alpha(a) = p$ e

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_b^a \|\alpha'(a + b - t)\|(-1) dt = \int_a^b \|\beta'(t)\| dt ,$$

isto é, $\text{comprimento}(\beta) = \text{comprimento}(\alpha)$.

Logo $d(q, p) \leq \text{comprimento}(\beta) = \text{comprimento}(\alpha)$ para todo $\alpha \in C_{p,q}$.

Portanto $d(q, p) \leq d(p, q)$.

De modo análogo, temos que $d(p, q) \leq d(q, p)$. Assim, $d(p, q) = d(q, p)$.

(c) Sejam $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ e $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ curvas diferenciáveis por partes tais que $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = r = \gamma(a)$ e $\gamma(b) = q$.

Então a curva $\beta = \alpha \vee \gamma : [a, b] \rightarrow S$, dada por

$$\beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t - a), & \text{se } t \in [a, \frac{a+b}{2}] \\ \gamma(2t - b), & \text{se } t \in [\frac{a+b}{2}, b], \end{cases}$$

é diferenciável por partes, $\beta(a) = \alpha(a) = p$, $\beta(b) = \gamma(b) = q$ e

$$\begin{aligned} \text{comprimento}(\beta) &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \|\beta'(t)\| dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \|\beta'(t)\| dt \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \|\alpha'(2t - a)\| 2 dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \|\gamma'(2t - b)\| 2 dt \\ &= \int_a^b \|\alpha'(\xi)\| d\xi + \int_a^b \|\gamma'(\xi)\| d\xi \\ &= \text{comprimento}(\alpha) + \text{comprimento}(\gamma). \end{aligned}$$

Como $\{\alpha \vee \gamma \mid \alpha \in C_{p,r} \text{ e } \gamma \in C_{r,q}\} \subset C_{p,q}$, temos que

$$\begin{aligned} d(p, q) &= \inf\{\text{comprimento}(\lambda) \mid \lambda \in C_{p,q}\} \\ &\leq \inf\{\text{comprimento}(\alpha \vee \gamma) \mid \alpha \in C_{p,r} \text{ e } \gamma \in C_{r,q}\} \\ &= \inf\{\text{comprimento}(\alpha) \mid \alpha \in C_{p,r}\} + \inf\{\text{comprimento}(\gamma) \mid \gamma \in C_{r,q}\} \\ &= d(p, r) + d(r, q), \end{aligned}$$

concluindo assim a prova da proposição. ■

Observação 1.8 A topologia induzida por d em S coincide com a topologia em S induzida de \mathbb{R}^3 .

De fato, sejam V um aberto de S com a topologia induzida de \mathbb{R}^3 e $p \in V$.

Então existe uma bola aberta $B_{r_p}(p) = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid \|q - p\| < r_p\}$ tal que $B_{r_p}(p) \cap S \subset V$.

Como $d(p, q) \geq \|p - q\|$, temos que

$$\tilde{B}_{r_p}(p) = \{q \in S \mid d(p, q) < r_p\} \subset B_{r_p}(p) \cap S \subset V.$$

Logo, $V = \bigcup_{p \in V} \tilde{B}_{r_p}(p)$, ou seja, V é um aberto de (S, d) , pois $\tilde{B}_{r_p}(p)$ é um aberto de (S, d) para todo $p \in V$.

Para provar a recíproca precisamos do seguinte fato, que só será provado mais tarde: para todo ponto $p \in S$, existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que $\tilde{B}_\varepsilon(p) = \{q \in S \mid d(q, p) < \varepsilon\}$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, é um aberto de S com a topologia induzida de \mathbb{R}^3 .

Logo, dado um aberto V de (S, d) , para cada ponto $p \in V$, existe $\varepsilon_p > 0$ tal que

$$\tilde{B}_{\varepsilon_p}(p) = \{q \in S \mid d(q, p) < \varepsilon_p\} \subset V.$$

Pelo resultado acima, existe $\varepsilon'_p > 0$ tal que $\tilde{B}_\varepsilon(p)$ é um aberto de S com a topologia induzida de \mathbb{R}^3 , para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon'_p$.

Então, se $\tilde{\varepsilon}_p = \min\{\varepsilon'_p, \varepsilon_p\}$, $\tilde{B}_{\tilde{\varepsilon}_p}(p)$ é um aberto de S com a topologia induzida de \mathbb{R}^3 tal que $\tilde{B}_{\tilde{\varepsilon}_p}(p) \subset V$.

Assim, $V = \bigcup_{p \in V} \tilde{B}_{\tilde{\varepsilon}_p}(p)$ é um aberto de S com a topologia induzida de \mathbb{R}^3 .

Atividade 1.2 [Exercício 3, pág. 272]

Um difeomorfismo $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ é uma isometria \iff comprimento $(\varphi \circ \alpha) =$ comprimento (α) , onde $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ é uma curva parametrizada diferenciável por partes qualquer em S .

(\Rightarrow) Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ uma curva parametrizada diferenciável por partes em S .

Então $\beta'(t) = d\varphi_{\alpha(t)}(\alpha'(t))$, onde $\beta(t) = \varphi \circ \alpha(t)$.

Assim, como $\|\beta'(t)\| = \|d\varphi_{\alpha(t)}(\alpha'(t))\| = \|\alpha'(t)\|$, pois φ é uma isometria, temos que

$$\text{comprimento}(\beta) = \int_a^b \|\beta'(t)\| dt = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \text{comprimento}(\alpha).$$

(\Leftarrow) Sejam $p \in S$ e $v \in T_p S - \{0\}$. Vamos provar que $\|d\varphi_p(v)\| = \|v\|$.

Suponhamos, por absurdo, que $\|d\varphi_p(v)\| \neq \|v\|$.

Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.

• Se $\|d\varphi_p(v)\| > \|v\|$, ou seja, $M = \|d\varphi_p(v)\| - \|v\| > 0$, temos, por continuidade, que existe $\delta > 0$, $\delta < \varepsilon$, tal que

$$\|d\varphi_{\alpha(t)}(\alpha'(t))\| - \|\alpha'(t)\| \geq \frac{M}{2},$$

para todo $t \in [-\delta, \delta]$.

Logo,

$$\begin{aligned} \text{comprimento} (\varphi \circ \alpha|_{[-\delta, \delta]}) &= \int_{-\delta}^{\delta} \|d\varphi_{\alpha(t)}(\alpha'(t))\| dt \geq \int_{-\delta}^{\delta} \left(\frac{M}{2} + \|\alpha'(t)\|\right) dt \\ &= \frac{M}{2} 2\delta + \text{comprimento} (\alpha|_{[-\delta, \delta]}) > \text{comprimento} (\alpha|_{[-\delta, \delta]}) . \end{aligned}$$

uma contradição.

- Se $\|d\varphi_p(v)\| < \|v\|$ chegamos, de modo análogo, a uma contradição.

Observação 1.9 Pelo exercício anterior, temos que se $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ é uma isometria, então

$$d(\varphi(p), \varphi(q)) = d(p, q) ,$$

para quaisquer $p, q \in S$.

De fato,

$$C_{\varphi(p), \varphi(q)} = \{\varphi \circ \alpha \mid \alpha \in C_{p,q}\} ,$$

pois $\beta : [a, b] \rightarrow \bar{S}$ é uma curva diferenciável por partes em \bar{S} tal que $\beta(a) = \varphi(p)$ e $\beta(b) = \varphi(q)$ se, e só se, $\varphi^{-1} \circ \beta = \alpha : [a, b] \rightarrow S$ é uma curva diferenciável por partes em S tal que $\alpha(a) = p$ e $\alpha(b) = q$.

Logo, pelo exercício anterior,

$$d(\varphi(p), \varphi(q)) = \inf\{\text{comprimento}(\varphi \circ \alpha) \mid \alpha \in C_{p,q}\} = \inf\{\text{comprimento}(\alpha) \mid \alpha \in C_{p,q}\} = d(p, q) .$$

Observação 1.10 A recíproca do resultado acima também é verdadeira, mas ainda não podemos prová-la.

Se $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ é uma aplicação diferenciável tal que $d(\varphi(p), \varphi(q)) = d(p, q)$ para quaisquer $p, q \in S$, então $\varphi : S \rightarrow \varphi(S)$ é uma isometria sobre o aberto $\varphi(S)$ de \bar{S} . Além disso, se S é completa e \bar{S} é conexa, então $\varphi(S) = \bar{S}$.

Superfícies difeomorfas são equivalentes do ponto de vista da diferenciabilidade, enquanto superfícies isométricas são equivalentes do ponto de vista métrico. Existe ainda outro tipo de equivalência, a **equivalência conforme**, que é utilizada quando lidamos com problemas associados a funções analíticas complexas.

Definição 1.5 Um difeomorfismo $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ é chamado uma **aplicação conforme** se existe uma função diferenciável $\lambda^2 : S \rightarrow (0, \infty)$ tal que

$$\langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w) \rangle = \lambda^2(p) \langle v, w \rangle ,$$

para todo $p \in S$ e todos $v, w \in T_p S$. Neste caso, dizemos que S e \bar{S} são *conformes*.

Observação 1.11 A inversa $\varphi^{-1} : \bar{S} \rightarrow S$ de uma aplicação conforme é uma aplicação conforme.

De fato,

$$\langle d\varphi_q^{-1}(v), d\varphi_q^{-1}(w) \rangle = \frac{1}{\lambda^2(\varphi^{-1}(q))} \langle d\varphi_{\varphi^{-1}(q)}(d\varphi_q^{-1}(v)), d\varphi_{\varphi^{-1}(q)}(d\varphi_q^{-1}(w)) \rangle = \frac{1}{\lambda^2 \circ \varphi^{-1}(q)} \langle v, w \rangle,$$

para todo $q \in \bar{S}$ e todos $v, w \in T_q \bar{S}$, onde $\frac{1}{\lambda^2 \circ \varphi^{-1}} : \bar{S} \rightarrow (0, \infty)$ é uma aplicação diferenciável.

Observação 1.12 A composta de duas aplicações conformes $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ e $\psi : \bar{S} \rightarrow \bar{\bar{S}}$ é uma aplicação conforme.

De fato, $\psi \circ \varphi : S \rightarrow \bar{\bar{S}}$ é um difeomorfismo e

$$\begin{aligned} \langle d(\psi \circ \varphi)_p(v), d(\psi \circ \varphi)_p(w) \rangle &= \langle d\psi_{\varphi(p)}(d\varphi_p(v)), d\psi_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)) \rangle \\ &= \mu^2(\varphi(p)) \langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w) \rangle \\ &= (\mu^2 \circ \varphi)(p) \cdot \lambda^2(p) \langle v, w \rangle, \end{aligned}$$

onde $\langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w) \rangle = \lambda^2(p) \langle v, w \rangle$ e $\langle d\psi_q(\bar{v}), d\psi_q(\bar{w}) \rangle = \mu^2(q) \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$, sendo $\lambda^2 : S \rightarrow (0, \infty)$ e $\mu^2 : \bar{S} \rightarrow (0, \infty)$ funções diferenciáveis.

Logo

$$\langle d(\psi \circ \varphi)_p(v), d(\psi \circ \varphi)_p(w) \rangle = \delta^2(p) \langle v, w \rangle,$$

para todo $p \in S$ e todos $v, w \in T_p S$, onde $\delta^2 = (\mu^2 \circ \varphi) \cdot \lambda^2 : S \rightarrow (0, \infty)$ é uma função diferenciável.

Definição 1.6 Dizemos que S é *localmente conforme* a \bar{S} se para todo $p \in S$ existem um aberto $V \subset S$, $p \in V$, um aberto $W \subset \bar{S}$ e uma aplicação conforme $\varphi : V \rightarrow W$.

Definição 1.7 Dizemos que S e \bar{S} são *localmente conformes* se S é localmente conforme a \bar{S} e \bar{S} é localmente conforme a S .

Observação 1.13 É fácil provar, usando a observação 1.12, que a conformidade local é uma relação de equivalência (exercício).

Observação 1.14 Uma aplicação conforme preserva ângulos (mas não necessariamente comprimentos).

De fato, sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow S$ curvas diferenciáveis em S que se intersectam em $t_0 \in I$, isto é, $\alpha(t_0) = \beta(t_0) = p$. O ângulo θ entre α e β em t_0 é dado por:

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_0)\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Então $\varphi \circ \alpha, \varphi \circ \beta : I \rightarrow \bar{S}$ são curvas diferenciáveis em \bar{S} , com $\varphi \circ \alpha(t_0) = \varphi \circ \beta(t_0) = \varphi(p)$, que se intersectam em t_0 fazendo um ângulo $\bar{\theta}$ dado por

$$\cos \bar{\theta} = \frac{\langle d\varphi_{\alpha(t_0)}(\alpha'(t_0)), d\varphi_{\beta(t_0)}(\beta'(t_0)) \rangle}{\|d\varphi_{\alpha(t_0)}(\alpha'(t_0))\| \|d\varphi_{\beta(t_0)}(\beta'(t_0))\|} = \frac{\lambda^2(p) \langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{\lambda^2(p) \|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_0)\|} = \cos \theta.$$

Portanto $\bar{\theta} = \theta$.

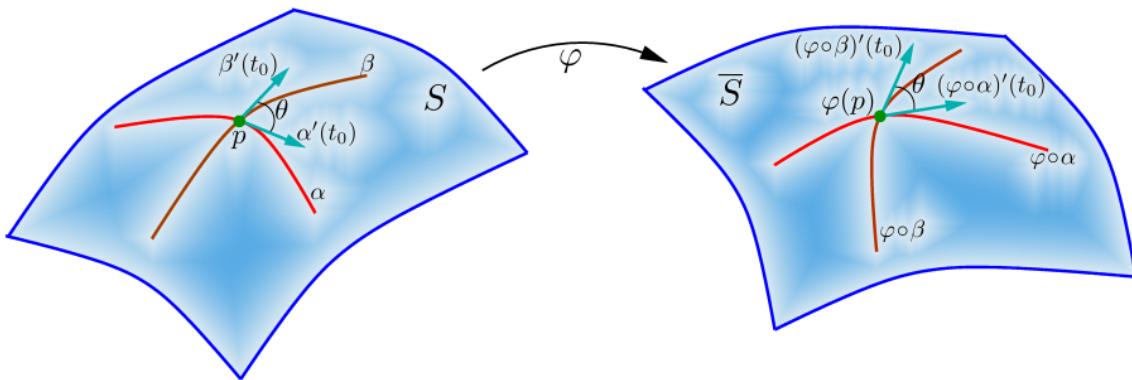


Fig. 9:

Atividade 1.3 [Exercício 14, pag. 275]

Seja $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ uma aplicação diferenciável tal que $d\varphi_p(v) \neq 0$ e

$$\frac{\langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w) \rangle}{\|d\varphi_p(v)\| \|d\varphi_p(w)\|} = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|},$$

para todo $p \in S$ e todos $v, w \in T_p S - \{0\}$.

Então existe uma função diferenciável $\lambda^2 : S \rightarrow (0, \infty)$ tal que

$$\langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w) \rangle = \lambda^2(p) \langle v, w \rangle,$$

para todo $p \in S$ e todos $v, w \in T_p S$. Isto é, se uma aplicação preserva ângulo então ela é localmente conforme.

Antes de resolver esta atividade, faremos uma observação de caráter geral.

Seja $L : V \rightarrow W$ uma aplicação linear tal que $L(v) \neq 0$ para todo $v \in V - \{0\}$ e

$$\frac{\langle L(v), L(w) \rangle}{\|L(v)\| \|L(w)\|} = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \quad (3)$$

para todos $v, w \in V - \{0\}$, onde $\dim V = \dim W = 2$.

Então, por (3), $v \perp w$ se, e só se, $L(v) \perp L(w)$.

Se $\{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal de V temos que $L(v_1) \perp L(v_2)$.

Sejam $A = \|L(v_1)\| > 0$ e $B = \|L(v_2)\| > 0$.

Afirmação: $A = B$.

Como $v_1 + v_2 \perp v_1 - v_2$, temos que $L(v_1) + L(v_2) \perp L(v_1) - L(v_2)$, isto é,

$$\langle L(v_1) + L(v_2), L(v_1) - L(v_2) \rangle = 0;$$

mas isto ocorre se, e somente se,

$$\langle L(v_1), L(v_1) \rangle - \langle L(v_2), L(v_2) \rangle = 0 \iff A^2 - B^2 = 0 \iff A = B. \square$$

Sejam $\lambda = A = B$, $v = rv_1 + sv_2$ e $w = \delta v_1 + \xi v_2$ dois vetores quaisquer pertencentes a V .

Então

$$\langle L(v), L(w) \rangle = \lambda^2 \langle v, w \rangle,$$

pois

$$\langle L(rv_1 + sv_2), L(\delta v_1 + \xi v_2) \rangle = r\delta\lambda^2 + s\xi\lambda^2 = \lambda^2 \langle rv_1 + sv_2, \delta v_1 + \xi v_2 \rangle,$$

já que $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle L(v_1), L(v_2) \rangle = 0$. \square

Voltando à atividade, temos que para cada $p \in S$ existe $\lambda^2(p) > 0$ tal que

$$\langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w) \rangle = \lambda^2(p) \langle v, w \rangle, \quad \forall v, w \in T_p S.$$

Seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S . Como

$$\lambda^2(X(u, v)) = \frac{\langle d\varphi_{X(u, v)}(X_u(u, v)), d\varphi_{X(u, v)}(X_u(u, v)) \rangle}{\langle X_u(u, v), X_u(u, v) \rangle} = \frac{\langle (\varphi \circ X)_u(u, v), (\varphi \circ X)_u(u, v) \rangle}{\langle X_u(u, v), X_u(u, v) \rangle},$$

temos que $\lambda^2 \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável. Sendo X uma parametrização arbitrária, concluímos que a função $\lambda^2 : S \rightarrow (0, \infty)$ é diferenciável.

A proposição abaixo é o análogo da proposição 1.1 para aplicações conformes.

Proposição 1.3 *Sejam $X : U \rightarrow X(U) \subset S$ e $\bar{X} : U \rightarrow \bar{X}(U) \subset \bar{S}$ parametrizações tais que $\bar{E} = \lambda^2 E$, $\bar{G} = \lambda^2 G$ e $\bar{F} = \lambda^2 F$, onde $\lambda^2 : U \rightarrow (0, \infty)$ é uma função diferenciável.*

Então $\varphi = \bar{X} \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow \bar{X}(U)$ é uma aplicação conforme.

Prova.

Primeiro observe que $\lambda^2 \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow (0, \infty)$ é uma função diferenciável.

Sejam $p \in X(U)$, $v, w \in T_p S$. Então existem $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $v = a X_u(q) + b X_v(q)$ e $w = c X_u(q) + d X_v(q)$, onde $p = X(q)$.

Logo, como $\varphi \circ X = \bar{X}$,

$$\begin{aligned} \langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w) \rangle &= \langle a d\varphi_p(X_u(q)) + b d\varphi_p(X_v(q)), c d\varphi_p(X_u(q)) + d d\varphi_p(X_v(q)) \rangle \\ &= \langle a \bar{X}_u(q) + b \bar{X}_v(q), c \bar{X}_u(q) + d \bar{X}_v(q) \rangle \\ &= ac \langle \bar{X}_u(q), \bar{X}_u(q) \rangle + (ad + bc) \langle \bar{X}_u(q), \bar{X}_v(q) \rangle + bd \langle \bar{X}_v(q), \bar{X}_v(q) \rangle \\ &= ac \bar{E}(q) + (ad + bc) \bar{F}(q) + bd \bar{G}(q) \\ &= \lambda^2 \circ X^{-1}(p) (ac E(q) + (ad + bc) F(q) + bd G(q)) \\ &= (\lambda^2 \circ X^{-1})(p) \langle a X_u(q) + b X_v(q), c X_u(q) + d X_v(q) \rangle \\ &= (\lambda^2 \circ X^{-1})(p) \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w) \rangle = (\lambda^2 \circ X^{-1})(p) \langle v, w \rangle.$$

para todo $p \in S$ e quaisquer $v, w \in T_p S$.

Então $\varphi = \bar{X} \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow \bar{X}(U)$ é uma aplicação conforme. ■

Teorema 1.1 *Para cada ponto $p \in S$ existe uma parametrização isotérmica $X : U \rightarrow X(U)$ de S em p , isto é,*

$$E(u, v) = G(u, v) = \lambda^2(u, v) > 0 \quad \text{e} \quad F(u, v) = 0,$$

para todo $(u, v) \in U$.

- A prova deste teorema é delicada e não será apresentada aqui (ver *Riemann Surfaces*, de L. Bers, New York Univ., Institute of Mathematical Sciences, pp 15-35).

Teorema 1.2 *Duas superfícies quaisquer são localmente conformes.*

Prova.

Basta mostrar que toda superfície regular S é localmente conforme ao plano

$$\mathcal{P} = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Sejam $p \in S$ e $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S em p que é isotérmica, isto é,

$$E(u, v) = G(u, v) = \lambda^2(u, v) > 0 \quad \text{e} \quad F(u, v) = 0$$

para qualquer $(u, v) \in U$.

Seja $\bar{X} : U \rightarrow \mathcal{P}$, $\bar{X}(u, v) = (u, v, 0)$, uma parametrização de \mathcal{P} . Como $\bar{E} = \bar{G} = 1$ e $\bar{F} = 0$, temos que

$$E = \lambda^2 \bar{E}, \quad G = \lambda^2 \bar{G} \quad \text{e} \quad F = \lambda^2 \bar{F}.$$

Logo, pela proposição 1.3, $\bar{X} \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow \bar{X}(U)$ é uma aplicação conforme. Portanto, S e \mathcal{P} são localmente conformes.

Se \bar{S} é outra superfície regular, temos, pelo provado acima, que \bar{S} e \mathcal{P} são localmente conformes. Assim, S e \bar{S} são localmente conformes. ■

Teorema 1.3 *Seja S uma superfície regular orientada com orientação $N : S \rightarrow S^2$. Então S possui uma família de parametrizações $\{X_\alpha : U_\alpha \rightarrow X_\alpha(U_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ tal que $S = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha(U_\alpha)$ e as aplicações de mudança de parâmetro*

$$h_{\alpha\beta} = X_\alpha^{-1} \circ X_\beta : X_\beta(W_{\alpha\beta}) \rightarrow X_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta})$$

são holomorfas, onde $W_{\alpha\beta} = X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$.

Prova.

Para cada $p \in S$, existe uma parametrização isotérmica $X_\alpha : U_\alpha \rightarrow X_\alpha(U_\alpha)$ de S em p , com U_α conexo, tal que

$$N(X_\alpha(u, v)) = \frac{(X_\alpha)_u \wedge (X_\alpha)_v}{\|(X_\alpha)_u \wedge (X_\alpha)_v\|} (u, v), \tag{4}$$

para todo $(u, v) \in U$.

Sejam $X_\alpha : U_\alpha \rightarrow X_\alpha(U_\alpha)$ e $X_\beta : U_\beta \rightarrow X_\beta(U_\beta)$ duas parametrizações isotérmicas de S que satisfazem (4) e $W_{\alpha\beta} = X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, onde U_α e U_β são conexos.

Então $d(h_{\alpha\beta}) > 0$ em $X_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta})$, onde $h_{\alpha\beta} = X_\alpha^{-1} \circ X_\beta : X_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta}) \rightarrow X_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta})$ é a aplicação de mudança de parâmetros.

Além disso, $h_{\alpha\beta}(u, v) = (\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v))$ é conforme, pois X_α^{-1} e X_β são conformes. Logo,

$$dh_{\alpha\beta}(e_1) = (\bar{u}_u, \bar{v}_u) \perp dh_{\alpha\beta}(e_2) = (\bar{u}_v, \bar{v}_v), \quad \|dh_{\alpha\beta}(e_1)\| = \|dh_{\alpha\beta}(e_2)\| \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} \bar{u}_u & \bar{u}_v \\ \bar{v}_u & \bar{v}_v \end{vmatrix} > 0.$$

Assim, $(\bar{u}_u, \bar{v}_u) = (\bar{v}_v, -\bar{u}_v)$, isto é

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial v},$$

que são as equações de Cauchy-Riemann. Portanto, $h_{\alpha\beta}$ é uma função holomorfa. ■

2. Teorema de Gauss e as Equações de Compatibilidade

Como fizemos no estudo das curvas, vamos associar a cada ponto de uma superfície um triedro (o análogo do Triedro de Frenet) e estudar as derivadas de seus vetores.

Seja S uma superfície regular orientada pelo campo de vetores normais unitários $N : S \rightarrow S^2$. Seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S compatível com N , isto é,

$$N(u, v) = N(X(u, v)) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(u, v), \quad \forall (u, v) \in U.$$

Associamos a cada ponto $p = X(u, v)$, o triedro positivo

$$\{X_u(u, v), X_v(u, v), N(u, v)\}.$$

Expressando as derivadas dos vetores X_u, X_v e N na base $\{X_u, X_v, N\}$, obtemos:

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N, & X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N, \\ X_{vu} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + \bar{L}_2 N, & X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_3 N, \\ N_u &= a_{11} X_u + a_{21} X_v, & N_v &= a_{12} X_u + a_{22} X_v, \end{aligned} \quad (5)$$

onde os a_{ij} , $i, j = 1, 2$ foram obtidos no capítulo 4.

Tomando o produto interno das quatro primeiras relações de (5) com N , obtemos que:

$$L_1 = \langle X_{uu}, N \rangle = e, \quad L_2 = \langle X_{uv}, N \rangle = \langle X_{vu}, N \rangle = \bar{L}_2 = f, \quad \text{e} \quad L_3 = \langle X_{vv}, N \rangle = g,$$

onde e, f e g são os coeficientes da segunda forma fundamental de S .

Os coeficientes Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$, são chamados *símbolos de Christoffel* de S na parametrização X . Como $X_{uv} = X_{vu}$, temos que

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 \quad \text{e} \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2,$$

isto é, os símbolos de Christoffel são simétricos em relação aos índices inferiores.

Para determinar os símbolos de Christoffel, tomamos o produto interno das quatro primeiras relações em (5) com X_u e X_v , obtendo os sistemas:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle X_{uu}, X_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle X_{uv}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_u, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle X_{vv}, X_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_v, \end{cases} \quad (8)$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_v \\ \frac{1}{2} G_u \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_v \\ \frac{1}{2} G_u \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} G_v \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} G_v \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Assim, os símbolos de Christoffel são dados em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental E, F, G e de suas derivadas.

Como conseqüência, temos que **todos os conceitos geométricos e propriedades expressas em termos dos símbolos de Christoffel são invariantes por isometria**.

Exemplo 2.1 Seja S uma superfície de revolução parametrizada por:

$$X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sen u, g(v)), \quad f(v) \neq 0.$$

Como

$$E = f(v)^2, \quad F = 0 \quad \text{e} \quad G = f'(v)^2 + g'(v)^2,$$

obtemos

$$E_u = 0, \quad E_v = 2ff', \quad F_u = F_v = 0, \quad G_u = 0 \quad \text{e} \quad G_v = 2(f'f'' + g'g'').$$

Logo, por (9), (10) e (11),

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{f(v)^2(f'(v)^2 + g'(v)^2)} \begin{pmatrix} f'(v)^2 + g'(v)^2 & 0 \\ 0 & f(v)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -f(v)f'(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-f(v)f'(v)}{f'(v)^2 + g'(v)^2} \end{pmatrix},$$

$$\text{i. e.,} \quad \Gamma_{11}^1 = 0, \quad \text{e} \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{-f(v)f'(v)}{f'(v)^2 + g'(v)^2};$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{f(v)^2(f'(v)^2 + g'(v)^2)} \begin{pmatrix} f'(v)^2 + g'(v)^2 & 0 \\ 0 & f(v)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(v)f'(v) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f'(v)}{f(v)} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{i. e.,} \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{f'(v)}{f(v)}, \quad \text{e} \quad \Gamma_{12}^2 = 0;$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{f(v)^2(f'(v)^2 + g'(v)^2)} \begin{pmatrix} f'(v)^2 + g'(v)^2 & 0 \\ 0 & f(v)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v)}{f'(v)^2 + g'(v)^2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{i. e.,} \quad \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \text{e} \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v)}{f'(v)^2 + g'(v)^2};$$

□

Obteremos agora relações entre os coeficientes da primeira e da segunda formas fundamentais, considerando as expressões:

$$(X_{uu})_v - (X_{uv})_u = 0, \quad (12)$$

$$(X_{vv})_u - (X_{vu})_v = 0, \quad (13)$$

$$N_{uv} - N_{vu} = 0. \quad (14)$$

Usando (5) podemos reescrever as relações acima na forma

$$A_1X_u + B_1X_v + C_1N = 0, \quad (15)$$

$$A_2X_u + B_2X_v + C_2N = 0, \quad (16)$$

$$A_3X_u + B_3X_v + C_3N = 0, \quad (17)$$

onde $A_i, B_i, C_i, i = 1, 2, 3$, são funções de E, F, G, e, f, g e de suas derivadas.

Como os vetores X_u, X_v, N são LI, temos que $A_i = B_i = C_i = 0, i = 1, 2, 3$, o que nos dá novas relações.

Utilizando (5), a primeira relação $(X_{uu})_v - (X_{uv})_u = 0$, pode ser escrita:

$$\begin{aligned} & (\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN)_v - (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN)_u = 0 \quad \iff \\ & (\Gamma_{11}^1)_v X_u + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + e_v N + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN) + \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN) + e(a_{12} X_u + a_{22} X_v) \\ & = (\Gamma_{12}^1)_u X_u + (\Gamma_{12}^2)_u X_v + f_u N + \Gamma_{12}^1 (\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN) + \Gamma_{12}^2 (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN) + f(a_{11} X_u + a_{21} X_v) \end{aligned} \quad (18)$$

Portanto, igualando os coeficientes de X_v , obtemos:

$$\begin{aligned} (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 & = e a_{22} - f a_{21} \\ & = e \left(\frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) - f \left(\frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) = -\frac{eg - f^2}{EG - F^2} E = -\mathbf{K} E, \end{aligned}$$

onde \mathbf{K} é a curvatura Gaussiana.

A expressão

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = -\mathbf{K} E \quad (19)$$

que nos fornece o valor de \mathbf{K} em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental e de suas derivadas, é conhecida como *fórmula de Gauss*.

Teorema 2.1 (Teorema Egregium de Gauss)

A curvatura Gaussiana \mathbf{K} de uma superfície é invariante por isometria.

Prova.

Seja $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ uma isometria. Vamos provar que $\mathbf{K}(p) = \bar{\mathbf{K}}(\varphi(p))$ para todo $p \in S$.

Sejam $p \in S$ e $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S em p , com $X(q) = p$.

Então, $\bar{X} = \varphi \circ X : U \rightarrow \bar{X}(U) = \varphi(X(U))$ é uma parametrização da superfície \bar{S} em $\varphi(p)$, com $\bar{X}(q) = \varphi \circ X(q) = \varphi(p)$.

Como

$$E(u, v) = \langle X_u, X_u \rangle(u, v) = \langle d\varphi_{X(u,v)}(X_u(u, v)), d\varphi_{X(u,v)}(X_u(u, v)) \rangle = \langle \bar{X}_u, \bar{X}_u \rangle(u, v) = \bar{E}(u, v);$$

$$G(u, v) = \langle X_v, X_v \rangle(u, v) = \langle d\varphi_{X(u,v)}(X_v(u, v)), d\varphi_{X(u,v)}(X_v(u, v)) \rangle = \langle \bar{X}_v, \bar{X}_v \rangle(u, v) = \bar{G}(u, v);$$

$$F(u, v) = \langle X_u, X_v \rangle(u, v) = \langle d\varphi_{X(u,v)}(X_u(u, v)), d\varphi_{X(u,v)}(X_v(u, v)) \rangle = \langle \bar{X}_u, \bar{X}_v \rangle(u, v) = \bar{F}(u, v),$$

temos que $\Gamma_{ij}^k(u, v) = \bar{\Gamma}_{ij}^k(u, v)$ para todo $(u, v) \in U$. Logo, pela fórmula de Gauss (19),

$$\mathbf{K}(X(u, v)) = \bar{\mathbf{K}}(\bar{X}(u, v)) = \bar{\mathbf{K}}(\varphi(X(u, v))),$$

para todo $(u, v) \in U$. Portanto, $\mathbf{K}(p) = \bar{\mathbf{K}}(\varphi(p))$ para todo $p \in S$. ■

O teorema de Gauss é considerado, pela extensão de suas conseqüências, um dos fatos mais importantes da geometria diferencial. Por exemplo, como o catenóide e o helicóide são localmente isométricos (ver exemplo 1.2), concluímos, pelo teorema de Gauss, que estas superfícies possuem curvaturas Gaussianas iguais em pontos correspondentes, um fato que não é geometricamente trivial.

Em verdade, é um fato extraordinário que um conceito como a curvatura Gaussiana, cuja definição usa de maneira essencial a posição da superfície no espaço, não dependa desta posição, mas apenas da estrutura métrica (primeira forma fundamental) da superfície.

Veremos na próxima seção que muitos outros conceitos da geometria diferencial possuem esta característica observada na curvatura Gaussiana, isto é, eles dependem apenas da primeira forma fundamental da superfície. Faz sentido então falar sobre a geometria da primeira forma fundamental, a qual chamamos *geometria intrínseca*, já que ela pode ser desenvolvida sem qualquer referência ao espaço que contém a superfície, uma vez dada a primeira forma fundamental.

Voltando aos nossos cálculos, obtemos, igualando os coeficientes de X_u em (18), que:

$$\begin{aligned} (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 &= e a_{12} - f a_{11} \\ &= e \left(\frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) - f \left(\frac{fF - eG}{EG - F^2} \right) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} F = \mathbf{K} F. \end{aligned}$$

Quando $F \neq 0$, essa equação nos dá outra maneira de expressar a curvatura Gaussiana \mathbf{K} em função dos símbolos de Christoffel.

Igualando também em (18) os coeficientes de N , obtemos $C_1 = 0$ na forma

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2. \quad (20)$$

Aplicando o mesmo método à expressão $(X_{vv})_u - (X_{vu})_v = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} (\Gamma_{22}^1)_u X_u + (\Gamma_{22}^2)_u X_v + g_u N + \Gamma_{22}^1 (\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN) + \Gamma_{22}^2 (\Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + fN) + g(a_{11} X_u + a_{21} X_v) \\ = (\Gamma_{21}^1)_v X_u + (\Gamma_{21}^2)_v X_v + f_v N + \Gamma_{21}^1 (\Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + fN) + \Gamma_{21}^2 (\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN) + f(a_{12} X_u + a_{22} X_v). \end{aligned}$$

Então as equações $A_2 = 0$ e $B_2 = 0$ nos dão, respectivamente,

$$\begin{aligned} (\Gamma_{22}^1)_u + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 - (\Gamma_{21}^1)_v - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 &= f a_{12} - g a_{11} \\ &= f \left(\frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) - g \left(\frac{fF - eG}{EG - F^2} \right) \\ &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} G = \mathbf{K} G, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\Gamma_{22}^2)_u + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^2 - (\Gamma_{21}^2)_v - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^2 &= f a_{22} - g a_{21} \\ &= f \left(\frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) - g \left(\frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \\ &= -\frac{eg - f^2}{EG - F^2} F = -\mathbf{K} F, \end{aligned}$$

que são outras formas da fórmula de Gauss.

E a equação $C_2 = 0$ nos dá:

$$g_u - f_v = \Gamma_{21}^1 f + \Gamma_{21}^2 g - \Gamma_{22}^1 e - \Gamma_{22}^2 f,$$

ou seja:

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2. \quad (21)$$

As equações (20) e (21) são chamadas *equações de Mainardi-Codazzi*

Finalmente, aplicando o mesmo processo à última expressão $N_{uv} - N_{vu} = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} (a_{11})_v X_u + (a_{21})_v X_v + a_{11}(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN) + a_{21}(\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN) \\ = (a_{12})_u X_u + (a_{22})_u X_v + a_{12}(\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN) + a_{22}(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN) \end{aligned}$$

Logo, as equações $A_3 = 0$, $B_3 = 0$, $C_3 = 0$ nos dão, respectivamente:

$$\begin{aligned} (a_{11})_v + a_{11}\Gamma_{12}^1 + a_{21}\Gamma_{22}^1 &= (a_{12})_u + a_{12}\Gamma_{11}^1 + a_{22}\Gamma_{12}^1; \\ (a_{21})_v + a_{11}\Gamma_{12}^2 + a_{21}\Gamma_{22}^2 &= (a_{22})_u + a_{12}\Gamma_{11}^2 + a_{22}\Gamma_{12}^2; \\ a_{11}f + a_{21}g &= a_{12}e + a_{22}f. \end{aligned}$$

Pode-se verificar que a expressão $A_3 = 0$ e $B_3 = 0$ são, respectivamente, iguais às equações (20) e (21) (Exercício), e que $C_3 = 0$ é uma identidade, pois:

$$\begin{aligned} a_{11}f + a_{21}g &= a_{12}e + a_{22}f \\ \iff \frac{fF - eG}{EG - F^2} f + \frac{eF - fE}{EG - F^2} g &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} e + \frac{fF - gE}{EG - F^2} f \\ \iff f^2F - eGf + eFg - fEg &= gFe - fGe + f^2F - gEf. \end{aligned}$$

A fórmula de Gauss e as equações de Mainardi-Codazzi são conhecidas como as *equações de compatibilidade* da teoria das superfícies.

Exemplo 2.2 Seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de uma superfície S tal que $f = F = 0$ (\implies as curvas coordenadas são linhas de curvatura).

Neste caso, as equações de Mainardi-Codazzi (20) e (21) são escritas, respectivamente, na forma:

$$e_v = e\Gamma_{12}^1 - g\Gamma_{11}^2 \quad \text{e} \quad g_u = g\Gamma_{12}^2 - e\Gamma_{22}^1.$$

Como $F = 0$, temos, por (9), (10) e (11), que:

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2G}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G} \quad \text{e} \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2E}.$$

Logo, as equações de Mainardi-Codazzi assumem a seguinte forma:

$$e_v = \frac{E_v}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right), \quad (22)$$

e

$$g_u = \frac{G_u}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right). \quad (23)$$

Além disso, como $\frac{e}{E}$ e $\frac{g}{G}$ são as curvaturas principais (ver observação 3.11 do capítulo 4), temos que:

$$e_v = E_v \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \mathbf{H} E_v,$$

e

$$g_u = G_u \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \mathbf{H} G_u,$$

onde \mathbf{H} é a curvatura média de S em $X(u, v)$. \square

É natural questionar se existem outras relações de compatibilidade entre os coeficientes da primeira e da segunda formas fundamentais além das descritas acima. O teorema abaixo mostra que a resposta é negativa.

Em outras palavras, por derivações sucessivas ou por qualquer outro processo não se obtém novas relações entre os coeficientes E, F, G, e, f, g e suas derivadas.

Na verdade, o teorema afirma que o conhecimento da primeira e da segunda formas fundamentais determina a superfície localmente.

Teorema 2.2 (Bonnet)

Sejam $E, F, G, e, f, g : V \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis definidas num aberto $V \subset \mathbb{R}^2$ tais que $E > 0, G > 0$ e $EG - F^2 > 0$. Suponha que estas funções satisfazem formalmente as equações de Gauss e de Mainardi-Codazzi. Então, para todo $q \in V$, existem um aberto $U \subset V, q \in U$, e um difeomorfismo $X : U \rightarrow X(U) \subset \mathbb{R}^3$ tais que a superfície regular $X(U)$ tem E, F, G e e, f, g como coeficientes da primeira e da segunda formas fundamentais, respectivamente.

Além disso, se U é conexo e $\bar{X} : U \rightarrow \bar{X}(U) \subset \mathbb{R}^3$ é outro difeomorfismo satisfazendo as mesmas condições, então existem uma translação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e uma transformação linear ortogonal $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tais que $\bar{X} = T \circ R \circ X$.

(Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada no apêndice do capítulo 4 do Livro *Curvas e Superfícies* de *Manfredo P. Do Carmo*).

Exemplo 2.3 (Exercício 1, pag 283)

Mostre que se $X : U \rightarrow X(U)$ é uma parametrização ortogonal, i.e., $F = 0$, então

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right).$$

De fato, pela fórmula de Gauss (19),

$$-\mathbf{K}E = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2.$$

Sendo $F = 0$ temos, por (9), (10) e (11), que:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2G}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2E}, \quad \text{e} \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} -\mathbf{K}E &= \left(\frac{G_u}{2G} \right)_u + \left(\frac{E_v}{2G} \right)_v - \frac{E_v^2}{4EG} - \frac{E_u G_u}{4EG} + \frac{G_u^2}{4G^2} + \frac{E_v G_v}{4G^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{G G_{uu} - G_u^2}{G^2} + \frac{G E_{vv} - E_v G_v}{G^2} - \frac{E_v^2}{2EG} - \frac{E_u G_u}{2EG} + \frac{G_u^2}{2G^2} + \frac{E_v G_v}{2G^2} \right) \\ &= \frac{1}{2EG^2} \left(EGG_{uu} - EG_u^2 + EGE_{vv} - EE_v G_v - \frac{GE_v^2}{2} - \frac{GE_u G_u}{2} + \frac{EG_u^2}{2} + \frac{EE_v G_v}{2} \right). \end{aligned}$$

Então

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{4E^2G^2} (2EG(E_{vv} + G_{uu}) - EG_u^2 - EE_v G_v - GE_v^2 - GE_u G_u). \quad (24)$$

Vamos agora desenvolver a expressão:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right) \\
 = & -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\sqrt{EG}E_{vv} - E_v(E_vG + G_vE)/2\sqrt{EG}}{EG} + \frac{\sqrt{EG}G_{uu} - G_u(E_uG + EG_u)/2\sqrt{EG}}{EG} \right) \\
 = & -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{1}{2(EG)^{3/2}} (2EG E_{vv} - E_v^2 G - EE_v G_v + 2EG G_{uu} - GE_u G_u - EG_u^2) \\
 = & -\frac{1}{4E^2 G^2} (2EG(E_{vv} + G_{uu}) - EG_u^2 - EE_v G_v - GE_v^2 - GE_u G_u) . \tag{25}
 \end{aligned}$$

Assim, por (24) e (25),

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right) \cdot \square$$

3. Transporte Paralelo; Geodésicas

Começamos esta seção com a definição de derivada covariante de um campo de vetores, que é o análogo, para superfícies, da derivação usual de vetores no plano.

Lembramos que um campo de vetores (tangentes) em um aberto $V \subset S$ de uma superfície regular S é uma correspondência ω que associa a cada $p \in V$ um vetor $\omega(p) \in T_p S$. O campo de vetores ω é diferenciável em p se para alguma parametrização $X : U \rightarrow X(U) \subset V$ de S em p , as componentes a e b de $\omega \circ X = aX_u + bX_v$ na base $\{X_u, X_v\}$ são funções diferenciáveis em q , onde $X(q) = p$. O campo de vetores ω é diferenciável em V se é diferenciável em todo ponto $p \in V$.

Definição 3.1 Seja ω um campo de vetores diferenciável em um aberto V de uma superfície regular S . Sejam $p \in V$ e $y \in T_p S$. Considere uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = y$. Seja $\bar{\omega} = \omega \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ a restrição de ω à curva α . A projeção ortogonal de $\frac{d\bar{\omega}}{dt}(0)$ sobre o plano tangente $T_p S$ é chamada a *derivada covariante em p do campo ω em relação ao vetor y* . Esta derivada covariante é denotada por $\frac{D\omega}{dt}(0)$ ou $D_y \omega(p)$.

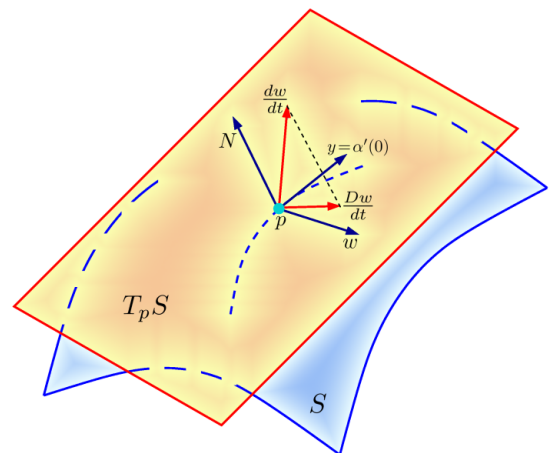


Fig. 10: Derivada covariante de w

Observação 3.1 A derivada covariante $D_y \omega(p)$ não depende da curva α e é um conceito da geometria intrínseca, i.e., só depende da primeira forma fundamental.

De fato, seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S em p , com $X(u_0, v_0) = p$. Sejam

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t)),$$

com $u(0) = u_0, v(0) = v_0$, e

$$\omega \circ X(u, v) = a(u, v)X_u(u, v) + b(u, v)X_v(u, v)$$

as expressões de α e ω na parametrização X .

Então

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(t) = \omega \circ \alpha(t) &= \omega \circ X(u(t), v(t)) \\ &= a(u(t), v(t))X_u(u(t), v(t)) + b(u(t), v(t))X_v(u(t), v(t)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\omega}}{dt}(0) &= a(u_0, v_0) (X_{uu}(u_0, v_0)u'(0) + X_{uv}(u_0, v_0)v'(0)) \\ &+ b(u_0, v_0) (X_{vu}(u_0, v_0)u'(0) + X_{vv}(u_0, v_0)v'(0)) \\ &+ \bar{a}'(0)X_u(u_0, v_0) + \bar{b}'(0)X_v(u_0, v_0), \end{aligned}$$

onde

$$\bar{a}'(0) = u'(0)a_u(u_0, v_0) + v'(0)a_v(u_0, v_0)$$

e

$$\bar{b}'(0) = u'(0)b_u(u_0, v_0) + v'(0)b_v(u_0, v_0).$$

Assim, sendo $q = (u_0, v_0)$,

$$\begin{aligned} \frac{D\omega}{dt}(0) &= (\bar{a}'(0) + a(q)u'(0)\Gamma_{11}^1(q) + a(q)v'(0)\Gamma_{12}^1(q) + b(q)u'(0)\Gamma_{12}^1(q) + b(q)v'(0)\Gamma_{22}^1(q)) X_u(q) \\ &+ (\bar{b}'(0) + a(q)u'(0)\Gamma_{11}^2(q) + a(q)v'(0)\Gamma_{12}^2(q) + b(q)u'(0)\Gamma_{12}^2(q) + b(q)v'(0)\Gamma_{22}^2(q)) X_v(q). \quad (26) \end{aligned}$$

Como

$$y = \alpha'(0) = u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q),$$

a expressão (26) mostra que $\frac{D\omega}{dt}(0)$ depende apenas do vetor y e não da curva α .

Além disso, a expressão (26) mostra que $\frac{D\omega}{dt}(0)$ só depende dos coeficientes da primeira forma fundamental, sendo, portanto, um conceito intrínseco.

Observação 3.2 Seja $\mathcal{P} = \text{plano } xy$ e considere a parametrização $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}$ de \mathcal{P} , dada por $X(u, v) = (u, v, 0)$. Como $E = G = 1$ e $F = 0$, temos por (9), (10) e (11) da seção anterior, que $\Gamma_{ij}^k = 0$, $i, j, k = 1, 2, 3$.

Seja ω um campo de vetores diferenciável definido num aberto V de \mathcal{P} . Então

$$\omega \circ X(u, v) = a(u, v)X_u(u, v) + b(u, v)X_v(u, v),$$

ou seja,

$$\omega(u, v, 0) = (a(u, v), b(u, v), 0).$$

Portanto, por (26), sendo $\bar{\omega}(u, v) = \omega(u, v, 0)$, $y = y_1X_u(u_0, v_0) + y_2X_v(u_0, v_0) = (y_1, y_2, 0)$ e $p = (u_0, v_0, 0)$, temos:

$$\begin{aligned} D_y \omega(p) &= \bar{a}'(0)X_u(u_0, v_0) + \bar{b}'(0)X_v(u_0, v_0) \\ &= (y_1 a_u(u_0, v_0) + y_2 a_v(u_0, v_0), y_1 b_u(u_0, v_0) + y_2 b_v(u_0, v_0), 0) \\ &= (da_{(u_0, v_0)}(y_1, y_2), db_{(u_0, v_0)}(y_1, y_2), 0) \\ &= d\bar{\omega}_{(u_0, v_0)}(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Assim, a derivada covariante coincide com a derivada usual de vetores no plano. Isto também pode ser visto diretamente a partir da definição 3.1. A derivada covariante é, portanto, uma generalização da derivada usual de vetores no plano.

Uma outra consequência da equação (26) é que a definição de derivada covariante pode ser estendida a um campo de vetores que esteja definido apenas ao longo de uma curva. Mas antes de tornar clara esta afirmação, precisamos de algumas definições.

Definição 3.2 Uma *curva parametrizada* $\alpha : [0, \ell] \rightarrow S$ é a restrição a $[0, \ell]$ de uma aplicação diferenciável de $(-\varepsilon, \ell + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, em S . Se $\alpha(0) = p$ e $\alpha(\ell) = q$, dizemos que α *liga o ponto p ao ponto q*. E α é *regular* se $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, \ell]$.

Definição 3.3 Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada em S , onde $I = [0, \ell]$. Um *campo de vetores ao longo de α* é uma correspondência que associa a cada $t \in I$, um vetor $\omega(t) \in T_{\alpha(t)}S$. O campo de vetores é *diferenciável* em $t_0 \in I$, se para alguma parametrização $X : U \rightarrow X(U)$, com $\alpha(t_0) \in X(U)$, as componentes a e b de

$$\omega(t) = a(t)X_u(u(t), v(t)) + b(t)X_v(u(t), v(t)),$$

são diferenciáveis em t_0 , onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$. O campo ω é *diferenciável em I* se é diferenciável em todo $t \in I$.

Atividade 3.1 *Mostrar que a definição acima independe da parametrização $X : U \rightarrow X(U)$, com $\alpha(t_0) \in X(U)$.*

Exemplo 3.1 Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada. O campo de vetores tangentes $\omega(t) = \alpha'(t)$ é diferenciável, pois se $X : U \rightarrow X(U)$ é uma parametrização e $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, então $\omega(t) = u'(t)X_u(u(t), v(t)) + v'(t)X_v(u(t), v(t))$. \square

Atividade 3.2 *Se ω é um campo de vetores diferenciável ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$, então a aplicação $\omega : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é diferenciável.*

Definição 3.4 Seja ω um campo de vetores diferenciável ao longo da curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$. A **derivada covariante**, $\frac{D\omega(t)}{dt}$, **de ω em t** é a projeção ortogonal do vetor $\frac{d\omega(t)}{dt}$ sobre o plano tangente $T_{\alpha(t)} S$.

Portanto, se $X : U \rightarrow X(U)$ é uma parametrização de S , $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ e $\omega(t) = a(t)X_u(u(t), v(t)) + b(t)X_v(u(t), v(t))$, obtemos, de modo análogo ao que fizemos anteriormente, que:

$$\begin{aligned} \frac{D\omega}{dt}(t) &= [a'(t) + a(t)u'(t)\Gamma_{11}^1(u(t), v(t)) + a(t)v'(t)\Gamma_{12}^1(u(t), v(t)) \\ &+ b(t)u'(t)\Gamma_{12}^1(u(t), v(t)) + b(t)v'(t)\Gamma_{22}^1(u(t), v(t))] X_u(u(t), v(t)) \\ &+ [b'(t) + a(t)u'(t)\Gamma_{11}^2(u(t), v(t)) + a(t)v'(t)\Gamma_{12}^2(u(t), v(t)) \\ &+ b(t)u'(t)\Gamma_{12}^2(u(t), v(t)) + b(t)v'(t)\Gamma_{22}^2(u(t), v(t))] X_v(u(t), v(t)) \end{aligned} \quad (27)$$

Observação 3.3 Se duas superfícies S_1 e S_2 são tangentes ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S_1 \cap S_2$, isto é, $T_{\alpha(t)} S_1 = T_{\alpha(t)} S_2$ para todo $t \in I$, então a derivada covariante de um campo ω ao longo de α é a mesma para ambas as superfícies.

Observação 3.4 Se $\alpha(t)$ é uma curva parametrizada em S , podemos imaginá-la como a trajetória de um ponto que se move sobre a superfície. O vetor $\alpha'(t)$ é a velocidade e $\alpha''(t)$ é a aceleração de α . A derivada covariante $\frac{D\alpha'}{dt}(t)$ do campo $\alpha'(t)$ é a componente tangencial da aceleração $\alpha''(t)$. Intuitivamente, $\frac{D\alpha'}{dt}(t)$ é a aceleração do ponto $\alpha(t)$ *vista da superfície S* .

Definição 3.5 Um campo de vetores diferenciável ω ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ é **paralelo** se $\frac{D\omega}{dt}(t) = 0$ para todo $t \in I$.

Observação 3.5 Quando S é um plano, ω é um campo de vetores paralelo ao longo de uma curva parametrizada α , e só se,

$$\frac{D\omega}{dt}(t) = \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

para todo $t \in I$, ou seja, se, e só se, ω é constante em I , ou ainda, o comprimento do vetor $\omega(t)$ e o ângulo que ele faz com uma direção fixa são constantes.

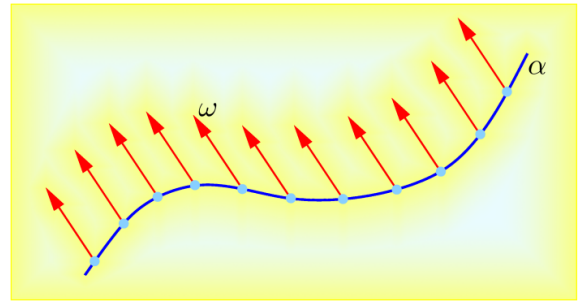


Fig. 11: Campo ω paralelo ao longo de α

Proposição 3.1 *Sejam ν e ω campos de vetores paralelos ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$. Então $\langle \nu(t), \omega(t) \rangle$ é constante. Em particular, $\|\nu(t)\|$ e $\|\omega(t)\|$ são constantes e o ângulo entre $\nu(t)$ e $\omega(t)$ é constante.*

Prova.

Como ν e ω são campos paralelos, $\frac{d\nu}{dt}(t)$ e $\frac{d\omega}{dt}(t)$ são vetores normais ao plano tangente a S em $\alpha(t)$.

Portanto, $\langle \frac{d\omega}{dt}(t), \nu(t) \rangle = \langle \omega(t), \frac{d\nu}{dt}(t) \rangle = 0$, pois $\nu(t), \omega(t) \in T_{\alpha(t)} S$. Logo,

$$\frac{d}{dt} \langle \nu(t), \omega(t) \rangle = \langle \frac{d\nu}{dt}(t), \omega(t) \rangle + \langle \nu(t), \frac{d\omega}{dt}(t) \rangle = 0,$$

para todo $t \in I$, isto é, $\langle \nu(t), \omega(t) \rangle$ é constante em I . ■

Exemplo 3.2 Sejam S^2 a esfera unitária centrada na origem, $p \in S^2$ e $\nu \in T_p S$, $\|\nu\| = 1$. Seja π o plano que passa por p e é paralelo aos vetores p e ν .

Então $\pi = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid \langle q, \nu \wedge p \rangle = 0\}$ é um plano que passa pelo centro $(0, 0, 0)$ da esfera. Assim $\pi \cap S^2$ é um grande círculo em S^2 e $\alpha(s) = (\cos s)p + (\sin s)\nu$, $s \in [0, 2\pi]$, é uma parametrização deste grande círculo, pois, $\alpha(s) \in \pi$ e $\|\alpha(s)\| = 1$ para todo $s \in [0, 2\pi]$, já que $\nu \perp p$ e $\|p\| = \|\nu\| = 1$.

Como $\alpha''(s) = -(\cos s)p - (\sin s)\nu = -\alpha(s)$, temos que $\alpha''(s)$ não tem componente tangencial, isto é, $\frac{D\alpha'}{ds}(s) = 0$. Então α' é um campo paralelo ao longo de α .

Este exemplo mostra que sobre uma superfície arbitrária, campos paralelos podem parecer estranhos à nossa intuição euclidiana. □

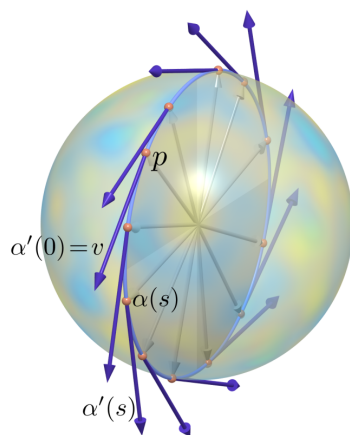


Fig. 12: Campo paralelo ao longo de um grande círculo de S^2

A proposição abaixo mostra que existem campos paralelos ao longo de uma curva parametrizada α e que eles são completamente determinados por seus valores em um ponto t_0 .

Proposição 3.2 *Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada em S e seja $w_0 \in T_{\alpha(\bar{t})} S$, $\bar{t} \in I$. Então existe um único campo de vetores paralelo ω ao longo de α tal que $\omega(\bar{t}) = w_0$.*

Prova.

Como foi provado na observação 1.7, existe uma partição $\mathcal{P} = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k = \ell\}$ do intervalo $[0, \ell]$ tal que, para cada $i = 1, \dots, k$, existe uma parametrização $X^i : U_i \rightarrow X_i(U_i)$ de S tal que $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset X^i(U_i)$.

Seja $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\bar{t} \in [t_{i_0-1}, t_{i_0}]$.

Sendo $\alpha(t) = X^{i_0}(u(t), v(t))$, $t \in [t_{i_0-1}, t_{i_0}]$, temos que um campo

$$\omega(t) = a(t)X_u^{i_0}(u(t), v(t)) + b(t)X_v^{i_0}(u(t), v(t))$$

é paralelo ao longo de $\alpha|_{[t_{i_0-1}, t_{i_0}]}$ e

$$\omega(\bar{t}) = w_0 = a_0X_u^{i_0}(u_0, v_0) + b_0X_v^{i_0}(u_0, v_0),$$

onde $X(u_0, v_0) = \alpha(\bar{t})$ ($\Leftrightarrow u(\bar{t}) = u_0$ e $v(\bar{t}) = v_0$), se, e só se, pela equação (28),

$$\begin{aligned} a'(t) &= - [a(t)u'(t)\Gamma_{11}^1(u(t), v(t)) + a(t)v'(t)\Gamma_{12}^1(u(t), v(t)) \\ &\quad + b(t)u'(t)\Gamma_{12}^1(u(t), v(t)) + b(t)v'(t)\Gamma_{22}^1(u(t), v(t))] \\ b'(t) &= - [a(t)u'(t)\Gamma_{11}^2(u(t), v(t)) + a(t)v'(t)\Gamma_{12}^2(u(t), v(t)) \\ &\quad + b(t)u'(t)\Gamma_{12}^2(u(t), v(t)) + b(t)v'(t)\Gamma_{22}^2(u(t), v(t))] \end{aligned} \tag{28}$$

e $(a(\bar{t}), b(\bar{t})) = (a_0, b_0)$.

Como, pelo teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias lineares, existe uma única solução $(\alpha, b) : [t_{i_0-1}, t_{i_0}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de (28) com condição inicial $(\alpha(\bar{t}), b(\bar{t})) = (\alpha_0, b_0)$ temos que existe um único campo de vetores diferenciável ω^{i_0} paralelo ao longo de $\alpha|_{[t_{i_0-1}, t_{i_0}]}$ tal que $\omega^{i_0}(\bar{t}) = w_0$.

Partindo dos valores $\omega^{i_0}(t_{i_0-1})$ e $\omega^{i_0}(t_{i_0})$, podemos provar, de modo análogo, que, para cada $i = 1, \dots, k$, existe um campo de vetores diferenciável ω^i paralelo ao longo de $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ tal que $\omega^i(t_i) = \omega^{i+1}(t_i)$ para todo $i = 1, \dots, k-1$.

Precisamos provar ainda que o campo de vetores ω definido por $\omega|_{[t_{i-1}, t_i]} = \omega^i$, $i = 1, \dots, k$, é diferenciável em $[0, \ell]$.

Seja $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Pelo teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias, existe um único campo diferenciável

$$v(t) = c(t)X_u^i(u(t), v(t)) + d(t)X_v^i(u(t), v(t)),$$

onde $\alpha(t) = X^i(u(t), v(t))$, para todo $t \in [t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon] \subset (0, \ell)$, paralelo ao longo de $\alpha|_{[t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon]}$ tal que $v(t_i) = \omega^i(t_i) = \omega^{i+1}(t_i)$.

Logo, pela unicidade da solução em $[t_i - \varepsilon, t_i]$ e em $[t_i, t_i + \varepsilon]$, respectivamente, temos que $\omega^i = v$ em $[t_i - \varepsilon, t_i]$ e $\omega^{i+1} = v$ em $[t_i, t_i + \varepsilon]$.

Assim, o campo ω é diferenciável em $[0, \ell]$, paralelo ao longo de α e $\omega(\bar{t}) = w_0$, e é o único campo que satisfaz essas três propriedades. ■

Observação 3.6 Daremos outra demonstração deste resultado mais adiante nesta seção.

A proposição 3.2 nos permite falar de *transporte paralelo de um vetor ao longo de uma curva parametrizada*.

Definição 3.6 Sejam $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada e $w_0 \in T_{\alpha(t_0)} S$, $t_0 \in I$. Seja ω o campo de vetores paralelo ao longo de α com $\omega(t_0) = w_0$. O vetor $\omega(t)$, $t \in I$, é chamado *transporte paralelo de w_0 ao longo de α no ponto t* .

Observação 3.7 Se $\alpha : I \rightarrow S$ é uma curva regular, então o transporte paralelo não depende da parametrização regular de $\alpha(I)$.

De fato, seja $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow S$ uma reparametrização de α com $h'(s) \neq 0$ para todo $s \in J$.

Como $\frac{d(\omega \circ h)}{ds}(s) = \frac{d\omega}{dt}(h(s)) h'(s)$, temos que $\frac{D(\omega \circ h)}{ds}(s) = \frac{D\omega}{dt}(h(s)) h'(s)$.

Logo, $\frac{D(\omega \circ h)}{ds}(s) = 0$ se, e só se, $\frac{D\omega}{dt}(h(s)) = 0$, já que $h'(s) \neq 0$. Assim, ω é paralelo ao longo de α se, e só se, $\omega \circ h$ é paralelo ao longo de $\beta = \alpha \circ h$.

Observação 3.8 Sejam $p, q \in S$ e $\alpha : [0, \ell] \rightarrow S$ uma curva parametrizada tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha(\ell) = q$.

Considere a aplicação $P_\alpha : T_p S \rightarrow T_q S$ que associa a cada $v \in T_p S$ o seu transporte paralelo ao longo de α em q . Então P_α é uma isometria.

De fato, sejam $v_0, w_0 \in T_p S$ e ν, ω os campos paralelos ao longo de α tais que $\nu(0) = v_0$ e $\omega(0) = w_0$.

Então, pela proposição 3.1, $\langle \nu(t), \omega(t) \rangle$ é constante em I . Em particular,

$$\langle v_0, w_0 \rangle = \langle \nu(0), \omega(0) \rangle = \langle \nu(\ell), \omega(\ell) \rangle = \langle P_\alpha(v_0), P_\alpha(w_0) \rangle.$$

Observação 3.9 Se duas superfícies S_1 e S_2 são tangentes ao longo de uma curva parametrizada α e $w_0 \in T_{\alpha(t_0)} S_1 = T_{\alpha(t_0)} S_2$, então, ω é o transporte paralelo de w_0 relativo à superfície S_1 se, e só se, ω é o transporte paralelo de w_0 relativo à superfície S_2 .

De fato, como a derivada covariante $\frac{D\omega}{dt}$ de ω é a mesma para ambas as superfícies, a afirmativa segue da unicidade do transporte paralelo.

Observação 3.10 Sejam S e \bar{S} superfícies regulares, $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada e ω o campo paralelo ao longo de α tal que $\omega(t_0) = w_0$, $t_0 \in I$. Se $\mathcal{F} : S \rightarrow \bar{S}$ é uma isometria, então $\bar{\omega}(t) = d\mathcal{F}_{\alpha(t)}(\omega(t))$ é o transporte paralelo ao longo de $\beta = \mathcal{F} \circ \alpha$ tal que $\bar{\omega}(t_0) = d\mathcal{F}_{\alpha(t_0)}(w_0)$.

De fato, $\bar{\omega}(t) = d\mathcal{F}_{\alpha(t)}(\omega(t)) \in T_{\mathcal{F} \circ \alpha(t)} \bar{S} = T_{\beta(t)} \bar{S}$, para todo $t \in I$, e

$$\frac{D\bar{\omega}}{dt}(t) = d\mathcal{F}_{\alpha(t)} \left(\frac{D\omega}{dt}(t) \right),$$

pois se $X : U \rightarrow X(U)$ é uma parametrização de S ,

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t)), \quad \text{e} \quad \omega(t) = a(t)X_u(u(t), v(t)) + b(t)X_v(u(t), v(t)),$$

então $\bar{X} = \mathcal{F} \circ X : U \rightarrow \mathcal{F}(X(U))$ é uma parametrização de \bar{S} , $\beta(t) = \mathcal{F} \circ \alpha(t) = \bar{X}(u(t), v(t))$, $\bar{E} = E$, $\bar{F} = F$, $\bar{G} = G$ e

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(t) &= d\mathcal{F}_{\alpha(t)}(\omega(t)) \\ &= a(t)d\mathcal{F}_{\alpha(t)}(X_u(u(t), v(t))) + b(t)d\mathcal{F}_{\alpha(t)}(X_v(u(t), v(t))) \\ &= a(t)\bar{X}_u(u(t), v(t)) + b(t)\bar{X}_v(u(t), v(t)). \end{aligned}$$

Portanto, pela expressão (26),

$$\begin{aligned} d\mathcal{F}_{\alpha(t)} \left(\frac{D\omega}{dt}(t) \right) &= (a'(t) + a(t)u'(t)\Gamma_{11}^1(u(t), v(t)) + a(t)v'(t)\Gamma_{12}^1(u(t), v(t)) \\ &+ b(t)u'(t)\Gamma_{12}^1(u(t), v(t)) + b(t)v'(t)\Gamma_{22}^1(u(t), v(t))) d\mathcal{F}_{\alpha(t)}(X_u(u(t), v(t))) \\ &+ (b'(t) + a(t)u'(t)\Gamma_{11}^2(u(t), v(t)) + a(t)v'(t)\Gamma_{12}^2(u(t), v(t)) \\ &+ b(t)u'(t)\Gamma_{12}^2(u(t), v(t)) + b(t)v'(t)\Gamma_{22}^2(u(t), v(t))) d\mathcal{F}_{\alpha(t)}(X_v(u(t), v(t))) \\ &= \frac{D\bar{\omega}}{dt}(t), \end{aligned}$$

pois

$$\bar{X}_u(u(t), v(t)) = d\mathcal{F}_{\alpha(t)}(X_u(u(t), v(t))), \quad \bar{X}_v(u(t), v(t)) = d\mathcal{F}_{\alpha(t)}(X_v(u(t), v(t)))$$

e $\bar{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$ em U , para todos $i, j, k = 1, 2, 3$.

Assim, $\frac{D\omega}{dt} = 0$ em I se, e só se, $\frac{D\bar{\omega}}{dt} = 0$ em I .

Observação 3.11 (Envoltória de uma família de planos tangentes ao longo de uma curva de uma superfície)

Sejam S uma superfície regular orientada com orientação $N : S \rightarrow S^2$ e $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva regular em S .

Suponha que $\alpha'(s)$ não é uma direção assintótica de S em $\alpha(s)$, para todo $s \in I$.

Se $\bar{N}(s) = N \circ \alpha(s)$, temos que $\bar{N}'(s) = dN_{\alpha(s)}(\alpha'(s)) \neq 0$, para todo $s \in I$, pois $\alpha'(s)$ não é uma direção assintótica para todo s .

Considere a superfície regrada $X : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

$$X(s, v) = \alpha(s) + v \frac{\bar{N}(s) \wedge \bar{N}'(s)}{\|\bar{N}'(s)\|}.$$

Afirmção: X é regular em uma vizinhança de $v = 0$, é tangente a S ao longo de $v = 0$ e tem curvatura Gaussiana zero.

De fato, como

$$X_s(s, 0) = \alpha'(s) \quad \text{e} \quad X_v(s, 0) = \frac{\bar{N}(s) \wedge \bar{N}'(s)}{\|\bar{N}'(s)\|},$$

temos que

$$(X_s \wedge X_v)(s, 0) = \alpha'(s) \wedge \left(\frac{\bar{N}(s) \wedge \bar{N}'(s)}{\|\bar{N}'(s)\|} \right) = \frac{\langle \alpha'(s), \bar{N}'(s) \rangle}{\|\bar{N}'(s)\|} \bar{N}(s) = -\Pi_{\alpha(s)}(\alpha'(s)) \frac{\bar{N}(s)}{\|\bar{N}'(s)\|} \neq 0,$$

para todo $s \in I$ (lembre que $(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u$).

Então X é regular numa vizinhança V de $v = 0$.

Além disso, como $(X_s \wedge X_v)(s, 0) \parallel N(\alpha(s))$, X é tangente a S ao longo de α .

Vamos mostrar agora que $\mathbf{K}(s, v) = 0$ para todo $(s, v) \in V$.

Como $X_{vv}(s, v) = 0$, temos que

$$g(s, v) = \langle X_{vv}(s, v), \tilde{N}(s, v) \rangle = 0,$$

onde $\tilde{N}(s, v) = \frac{X_s \wedge X_v}{\|X_s \wedge X_v\|}(s, v)$ é o vetor normal unitário à superfície parametrizada X em $X(u, v)$.

Sendo $X_{sv}(s, v) = \left(\frac{\bar{N}(s) \wedge \bar{N}'(s)}{\|\bar{N}'(s)\|} \right)'$ e

$$\tilde{N}(s, v) = \frac{1}{\|X_s \wedge X_v\|} \left(\left[\alpha'(s) + v \left(\frac{\bar{N}(s) \wedge \bar{N}'(s)}{\|\bar{N}'(s)\|} \right) \right] \wedge \frac{\bar{N}(s) \wedge \bar{N}'(s)}{\|\bar{N}'(s)\|} \right),$$

temos que:

$$\begin{aligned} f(s, v) &= \langle X_{sv}(u, v), \tilde{N}(s, v) \rangle \\ &= \frac{1}{\|X_s \wedge X_v\|} \left\langle \alpha'(s) \wedge \frac{\bar{N}(s) \wedge \bar{N}'(s)}{\|\bar{N}'(s)\|}, \left(\frac{\bar{N}(s) \wedge \bar{N}'(s)}{\|\bar{N}'(s)\|} \right)' \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|X_s \wedge X_v\|} \left\langle \frac{\langle \alpha'(s), \bar{N}'(s) \rangle}{\|\bar{N}'(s)\|} \bar{N}(s), \left(\frac{\bar{N}(s) \wedge \bar{N}'(s)}{\|\bar{N}'(s)\|} \right)' \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\|X_s \wedge X_v\|} \left\langle \left(\frac{\langle \alpha'(s), \bar{N}'(s) \rangle}{\|\bar{N}'(s)\|} \bar{N}(s) \right)', \frac{\bar{N}(s) \wedge \bar{N}'(s)}{\|\bar{N}'(s)\|} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\|X_s \wedge X_v\|} \left[\left\langle \left(\frac{\langle \alpha'(s), \bar{N}'(s) \rangle}{\|\bar{N}'(s)\|} \right)' \bar{N}(s), \frac{\bar{N}(s) \wedge \bar{N}'(s)}{\|\bar{N}'(s)\|} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left\langle \frac{\langle \alpha'(s), \bar{N}'(s) \rangle}{\|\bar{N}'(s)\|} \bar{N}'(s), \frac{\bar{N}(s) \wedge \bar{N}'(s)}{\|\bar{N}'(s)\|} \right\rangle \right] = 0, \end{aligned}$$

pois

$$\left\langle \frac{\langle \alpha'(s), \bar{N}(s) \rangle}{\|\bar{N}'(s)\|} \bar{N}'(s), \frac{\bar{N}(s) \wedge \bar{N}'(s)}{\|\bar{N}'(s)\|} \right\rangle = 0.$$

Logo, $\mathbf{K}(s, v) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}(u, v) = 0$ para todo $(u, v) \in V$.

Para finalizar, daremos uma interpretação geométrica da superfície X .

Considere a família $\{T_{\alpha(s)} S\}$ de planos tangentes à superfície S ao longo da curva $\alpha(s)$. Se Δs é pequeno, os dois planos $T_{\alpha(s)} S$ e $T_{\alpha(s+\Delta s)} S$ da família intersectam-se ao longo de uma reta paralela ao vetor $\frac{\bar{N}(s) \wedge \bar{N}(s + \Delta s)}{\Delta s}$.

Fazendo $\Delta s \rightarrow 0$, esta reta se aproxima de uma posição limite paralela ao vetor

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\bar{N}(s) \wedge \bar{N}(s + \Delta s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \bar{N}(s) \wedge \frac{\bar{N}(s + \Delta s) - \bar{N}(s)}{\Delta s} = \bar{N}(s) \wedge \bar{N}'(s).$$

Isto significa que as geratrizes de X são as posições limites da intersecção de planos vizinhos da família $\{T_{\alpha(s)}\}$. A superfície X é chamada a *envoltória da família de planos tangentes de S ao longo de $\alpha(s)$* .

Exemplo 3.3 Seja $\alpha : I \rightarrow S^2$ um paralelo da esfera unitária S^2 centrada na origem.

Afirmção: Se $\alpha(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ é um equador de S^2 , então a envoltória de planos tangentes de S^2 ao longo de α é um cilindro.

De fato, como $\bar{N}(s) = \alpha(s)$, temos que $\bar{N}'(s) = (-\sin s, \cos s, 0)$. Logo, $\bar{N}(s) \wedge \bar{N}'(s) = (0, 0, 1)$. Portanto,

$$X(s, v) = \alpha(s) + v \frac{\bar{N}(s) \wedge \bar{N}'(s)}{\|\bar{N}'(s)\|} = (\cos s, \sin s, v)$$

que é uma parametrização do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Afirmção: Se

$$\alpha(s) = \left(\sqrt{1 - z_0^2} \cos s, \sqrt{1 - z_0^2} \sin s, z_0 \right), \quad 0 < z_0 < 1,$$

é um paralelo contido no plano $z = z_0$, então a envoltória de planos tangentes de S^2 ao longo de α é um cone.

De fato, como $\bar{N}(s) = \alpha(s)$, temos que

$$\bar{N}'(s) = \left(-\sqrt{1 - z_0^2} \sin s, \sqrt{1 - z_0^2} \cos s, 0 \right).$$

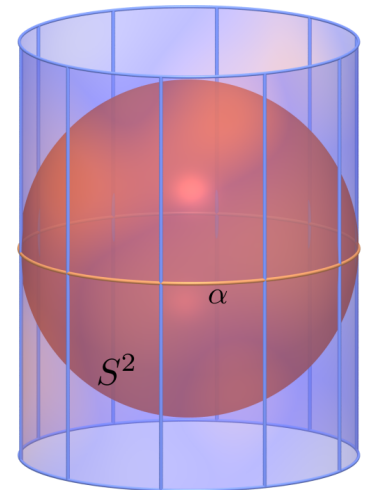


Fig. 13: A envoltória de α é um cilindro

Então

$$\frac{\bar{N}(s) \wedge \bar{N}'(s)}{\|\bar{N}'(s)\|} = \frac{\left(-z_0 \sqrt{1-z_0^2} \cos s, -z_0 \sqrt{1-z_0^2} \operatorname{sen} s, 1-z_0^2\right)}{\sqrt{1-z_0^2}} = \left(-z_0 \cos s, -z_0 \operatorname{sen} s, \sqrt{1-z_0^2}\right).$$

Portanto

$$\begin{aligned} X(s, v) &= \alpha(s) + v \frac{\bar{N}(s) \wedge \bar{N}'(s)}{\|\bar{N}'(s)\|} \\ &= \left(\sqrt{1-z_0^2} \cos s, \sqrt{1-z_0^2} \operatorname{sen} s, z_0\right) + v \left(-z_0 \cos s, -z_0 \operatorname{sen} s, \sqrt{1-z_0^2}\right) \\ &= \left(\left(\sqrt{1-z_0^2} - vz_0\right) \cos s, \left(\sqrt{1-z_0^2} - vz_0\right) \operatorname{sen} s, z_0 + v\sqrt{1-z_0^2}\right). \end{aligned}$$

Assim, X é uma parametrização do cone de revolução obtido girando a reta

$$\left\{ \left(0, \sqrt{1-z_0^2} - vz_0, z_0 + v\sqrt{1-z_0^2}\right) \mid v \in \mathbb{R} \right\}$$

em torno do eixo Oz . Como a reta corta o eixo Oz no ponto $\left(0, 0, \frac{1}{z_0}\right)$ e faz um ângulo φ , tal que $\tan \varphi = \frac{z_0}{\sqrt{1-z_0^2}}$ e

$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, com este eixo, temos que $\left(0, 0, \frac{1}{z_0}\right)$ é o vértice e

$$x^2 + y^2 = (\tan \varphi)^2 \left(z - \frac{1}{z_0}\right)^2 = \frac{z_0^2}{1-z_0^2} \left(z - \frac{1}{z_0}\right)^2$$

é a equação do cone. \square

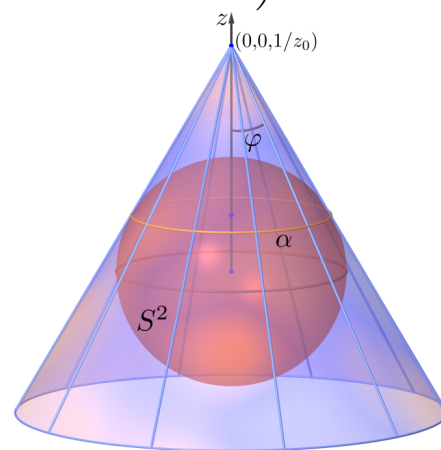


Fig. 14: A envoltória de α é um cone

Exemplo 3.4 Seja C um paralelo de colatitude ψ ($0 < \psi < \pi/2$) da esfera unitária S^2 orientada com a orientação $N(p) = p$, e seja w_0 um vetor unitário tangente a C em um ponto $p_0 \in C$.

Seja $\alpha : I \rightarrow S^2$,

$$\alpha(s) = \left(\cos \varphi \cos \frac{s+s_0}{\cos \varphi}, \cos \varphi \operatorname{sen} \frac{s+s_0}{\cos \varphi}, \operatorname{sen} \varphi\right),$$

uma parametrização pelo comprimento de arco de C com $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha'(0) = w_0$, onde

$$p_0 = \left(\cos \varphi \cos \frac{s_0}{\cos \varphi}, \cos \varphi \operatorname{sen} \frac{s_0}{\cos \varphi}, \operatorname{sen} \varphi\right).$$

Vamos determinar o transporte paralelo de w_0 ao longo de C . Considere o cone \bar{S} que é tangente à esfera ao longo de C (ver observação 3.11 e exemplo 3.3). Então $(0, 0, \frac{1}{\cos \psi})$ é o vértice, pois C está contido no plano $z = \cos \psi = \sin \varphi$, e $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$ é o ângulo no vértice do cone.

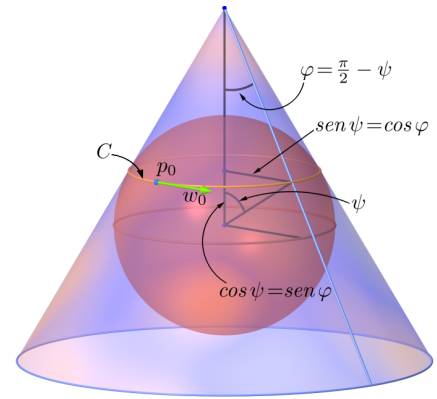


Fig. 15: Cone tangente a S^2 ao longo de C

Como \bar{S} é tangente à esfera ao longo de C , basta determinar (ver observação 3.9) o transporte paralelo de w_0 ao longo de C no cone \bar{S} .

Por outro lado, o cone menos uma geratriz é isométrico ao aberto

$$U = \{ (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0) \mid \rho \in (0, \infty) \text{ e } \theta \in (0, 2\pi \sin \varphi) \}$$

do plano xy .

Sejam G a isometria entre o cone menos uma geratriz e o aberto U , onde $G = F^{-1}$ e

$$F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0) = \left(\rho \sin \varphi \cos \left(\frac{\theta}{\sin \varphi} \right), \rho \sin \varphi \sin \left(\frac{\theta}{\sin \varphi} \right), -\rho \cos \varphi + \frac{1}{\sin \varphi} \right),$$

$\beta = G \circ \alpha$ e $\tilde{w}_0 = dG_{p_0}(w_0) = \beta'(0)$. Observe que

$$\beta(s) = (\cotg \varphi \cos(\tan \varphi (s + s_0)), \cot \varphi \sin(\tan \varphi (s + s_0)), 0).$$

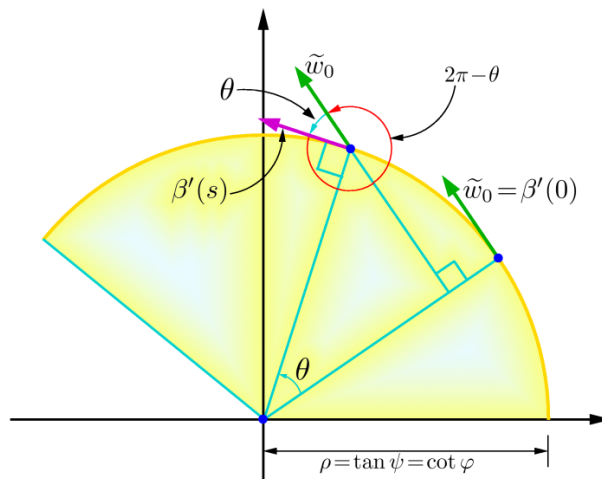


Fig. 16: Transporte paralelo de \tilde{w}_0 ao longo de β

Como no plano o transporte paralelo de \tilde{w}_0 ao longo de β é constante, temos que o ângulo orientado formado pelo vetor tangente $\beta'(s)$ e o transporte paralelo \tilde{w}_0 é $2\pi - \theta$, onde $\beta(s)$ é obtido girando o ponto $\beta(0)$ em torno da origem de um ângulo θ no sentido anti-horário.

Sendo que a isometria preserva ângulo e transporte paralelo (ver observação 3.10), temos que o transporte paralelo de w_0 ao longo de α em s é o vetor unitário que faz um ângulo orientado $2\pi - \theta$ com $\alpha'(s)$.

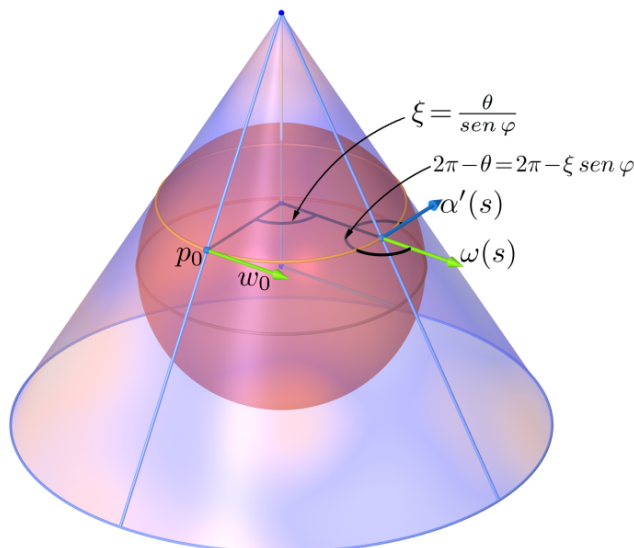


Fig. 17: Transporte paralelo de w_0 ao longo de α

Então, ao girarmos o ponto p_0 ao longo de α de um ângulo $\xi = \frac{\theta}{\text{sen } \varphi} \in [0, 2\pi]$, o ângulo formado por $\alpha'(s)$ e o transporte paralelo $\omega(s)$ é $2\pi - \theta = 2\pi - \xi \text{ sen } \varphi$ (Figura 17).

Portanto, após completar uma volta, o ângulo entre $\alpha'(0) = w_0$ e o transporte paralelo $\omega(2\pi)$ é $2\pi - 2\pi \text{ sen } \varphi = 2\pi(1 - \cos \psi)$. \square

Observação 3.12 Se α é um equador da esfera, então $\omega(s) = \alpha'(s)$, pois, neste caso, α' é um campo paralelo ao longo de α (ver exemplo 3.2).

Definição 3.7 Uma aplicação $\alpha : [0, \ell] \rightarrow S$ é uma *curva parametrizada regular por partes* se α é contínua e se existe uma partição $\{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = \ell\}$ do intervalo $[0, \ell]$ tal que a restrição $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$, $i = 0, \dots, k$, é uma curva parametrizada regular. Cada $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ é chamada um *arco regular de α* .

Observação 3.13 A noção de transporte paralelo pode ser estendida a uma curva parametrizada regular por partes.

De fato, se $w_0 \in T_{\alpha(t')}$ S e $t' \in [t_i, t_{i+1}]$, realizamos o transporte paralelo de w_0 ao longo do arco regular $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$. Se $t_{i+1} \neq \ell$, tomamos $\omega(t_{i+1})$ como o valor inicial para o transporte paralelo ao longo do arco $\alpha|_{[t_{i+1}, t_{i+2}]}$; e se $t_i \neq 0$, tomamos o transporte paralelo de $\omega(t_i)$ ao longo do arco $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$.

Prosseguindo desta maneira, obtemos um campo de vetores ω contínuo em $[0, \ell]$ tal que $\omega|_{[t_i, t_{i+1}]}$ é diferenciável e $\frac{D\omega|_{[t_i, t_{i+1}]}}{dt} = 0$ para todo $i = 0, \dots, k$.

Observação 3.14 As curvas parametrizadas não-constantes $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ do plano ao longo das quais o campo de vetores tangentes $\gamma'(t)$ é paralelo são as retas deste plano.

De fato, o campo $\omega(t) = \alpha'(t)$, $t \in I$, é paralelo ao longo de α se, e só se,

$$\frac{D\omega}{dt}(t) = \omega'(t) = \alpha''(t) = 0.$$

Ou seja, se, e só se, $\alpha(t) = vt + A$, $t \in I$, onde $\alpha'(t) = v \neq 0$.

Definição 3.8 Uma curva parametrizada não-constante $\gamma : I \rightarrow S$ é *uma geodésica em* $t_0 \in I$ se o campo de vetores tangentes $\gamma'(t)$ é paralelo ao longo de α em t_0 , isto é,

$$\frac{D\gamma'}{dt}(t_0) = 0.$$

γ é uma *geodésica* se é geodésica em todo $t \in I$.

Portanto, pela proposição 3.1, $\|\alpha'(t)\| = c \neq 0$ para todo $t \in I$. Assim, o parâmetro t de uma geodésica parametrizada γ é proporcional ao comprimento de arco, $s(t) = ct$, de γ .

Observação 3.15 Uma geodésica parametrizada pode ter auto-intersecções, mas é sempre regular.

Definição 3.9 Uma curva regular conexa $C \subset S$ é uma *geodésica* se, para todo $p \in C$, uma parametrização pelo comprimento de arco $\gamma : I \rightarrow \gamma(I) \subset C$ de C em p é uma geodésica parametrizada, isto é, $\gamma'(s)$ é um campo de vetores paralelo ao longo de α .

Observação 3.16 De um ponto de vista exterior à superfície, a definição 3.8 é equivalente a dizer que $\gamma''(s) = \kappa(s) \mathbf{n}(s)$ é normal ao plano tangente, isto é, paralela à normal à superfície em $\alpha(s)$.

Então, uma curva regular conexa $C \subset S$, com $\kappa(p) \neq 0$ para todo $p \in C$, é uma geodésica se, e só se, seu vetor normal $\mathbf{n}(p)$ em cada ponto p é paralelo ao vetor normal $N(p)$ a S em p .

Observação 3.17 Toda reta r contida em uma superfície S é uma geodésica de S , pois $\gamma''(s) = 0$ para todo $s \in I$, onde $\gamma : I \rightarrow S$ é uma parametrização pelo comprimento de arco de r .

Exemplo 3.5 Os grandes círculos são as únicas geodésicas da esfera $S_R(A)$ de centro A e raio $R > 0$.

De fato, os grandes círculos C de $S_R(A)$ são obtidos intersectando a esfera com um plano que passa pelo centro A da esfera.

A normal $\mathbf{n}(p)$ a C em p está na direção da reta que liga o ponto p ao centro A , pois C é um círculo de centro A . Como $S_R(A)$ é uma esfera, a normal $N(p)$ à esfera em p está nesta mesma direção, o que prova que C é uma geodésica.

Temos também que para cada $p \in S_R(A)$ e cada $v \in T_p S_R(A)$, existe um grande círculo que passa por p e é tangente a v neste ponto.

Para verificar esta afirmação, basta tomar o grande círculo $C = S_R(A) \cap \pi$, onde

$$\pi = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \langle X - A, v \wedge (p - A) \rangle = 0\}$$

é o plano que passa por A (e por p) e é paralelo aos vetores v e $p - A$.

Com efeito, neste caso C é um grande círculo que passa por p e é tangente a v em p , pois v é a única direção que é paralela ao plano π e ao plano tangente a $S_R(A)$ em p ao mesmo tempo, já que $p - A$ é normal à esfera em p .

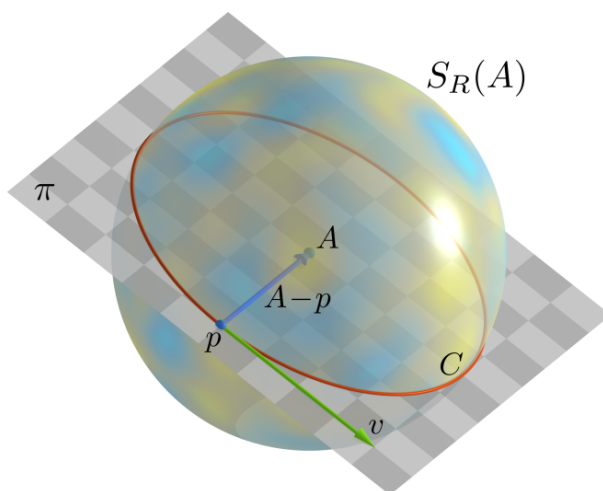


Fig. 18: Círculo $C = S_R(A) \cap \pi$

Provaremos mais adiante nesta seção o fato geral de que para cada ponto $p \in S$ e cada direção em $T_p S$ existe exatamente uma geodésica $C \subset S$ passando por p e tangente a esta direção.

Portanto, pelo visto acima, os grandes círculos são as *únicas geodésicas de uma esfera*. \square

Exemplo 3.6 Vamos determinar as geodésicas do cilindro $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$.

Todo meridiano do cilindro (reta paralela ao eixo Oz) é uma geodésica, pois, pela observação 3.17, toda reta contida numa superfície é uma geodésica.

Por outro lado, todo paralelo do cilindro é uma geodésica.

De fato, como $\alpha(s) = (\cos s, \sin s, z_0)$ é uma parametrização pelo comprimento de arco do paralelo $\mathcal{C} \cap \{z = z_0\}$, temos que $\alpha'(s) = (-\sin s, \cos s, 0)$ é paralelo ao vetor normal ao cilindro em $\alpha(s)$, pois $N(x, y, z) = (x, y, 0)$ é um vetor normal unitário a \mathcal{C} em (x, y, z) .

Antes de determinar as outras geodésicas do cilindro precisamos do seguinte resultado:

Se $F : S_1 \rightarrow S_2$ é uma isometria e $\alpha : I \rightarrow S_1$ é uma geodésica de S_1 , então $\beta = F \circ \alpha$ é uma geodésica de S_2 .

De fato, como $\beta'(s) = dF_{\alpha(s)}(\alpha'(s))$, temos, pela observação 3.17, que

$$\frac{D\beta'}{ds}(s) = dF_{\alpha(s)}\left(\frac{D\alpha'}{ds}(s)\right) = 0,$$

para todo $s \in I$.

Para verificar a existência de outras geodésicas C no cilindro que passam por um ponto $p = (\cos u_0, \sin u_0, v_0) \in \mathcal{C}$, consideremos a parametrização

$$X : (u_0 - \pi, u_0 + \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C} - \{\text{meridiano } u = u_0 - \pi\}$$

dada por

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, v),$$

onde $X(u_0, v_0) = p$. Nesta parametrização, uma vizinhança de p em C é expressa por $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$, onde s é o comprimento de arco e $\alpha(0) = X(u(0), v(0)) = X(u_0, v_0) = p$.

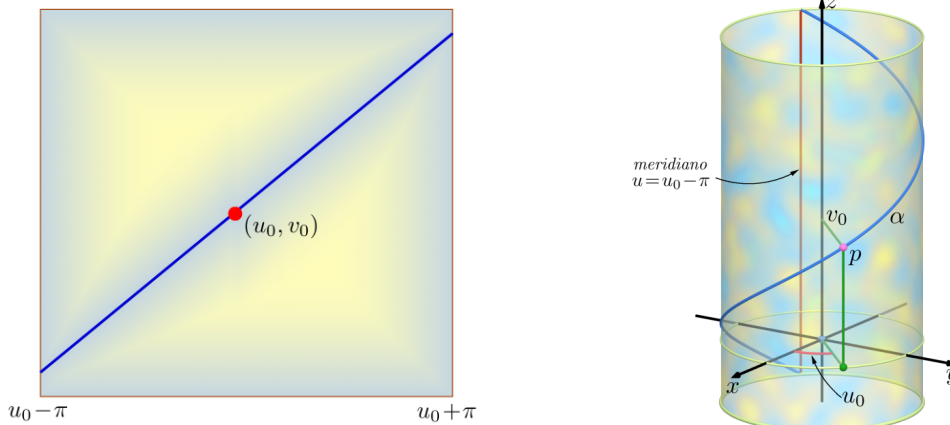


Fig. 19: Hélice α

Como X é uma isometria ($E = G = 1$ e $F = 0$), temos, pela observação feita acima, que α é uma geodésica do cilindro parametrizada pelo comprimento de arco com $\alpha(0) = p$ se, e só se, $\beta(s) = (u(s), v(s))$ é uma geodésica do plano parametrizada pelo comprimento de arco que passa pelo ponto $\beta(0) = (u_0, v_0)$.

Portanto, $\beta(s) = (as + u_0, bs + v_0)$, com $a^2 + b^2 = 1$, isto é, $\beta(I)$ é um segmento de reta que passa por (u_0, v_0) .

- Se $a = 0$, $\beta(s) = (u_0, \pm s + v_0)$, portanto, $\alpha(s) = (\cos u_0, \text{sen } u_0, \pm s + v_0)$ é um meridiano.
- Se $b = 0$, $\beta(s) = (\pm s + u_0, v_0)$, portanto, $\alpha(s) = (\cos(\pm s + u_0), \text{sen}(\pm s + u_0), v_0)$ é um paralelo.
- Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, $\alpha(s) = (\cos(as + u_0), \text{sen}(as + u_0), bs + v_0)$ é uma hélice de passo $\frac{2\pi b}{a}$. \square

Observação 3.18 Se dois pontos p e q pertencem a um mesmo paralelo, então os dois arcos deste paralelo são as únicas geodésicas do cilindro que ligam p e q .

Observação 3.19 Se dois pontos p e q não pertencem a um mesmo paralelo, então eles podem ser ligados por um número infinito de geodésicas, em contraste com o que ocorre no plano, onde dois pontos quaisquer são ligados por uma única geodésica (isto é, por uma única reta).

De fato, sejam $p = X(u_0, v_0) = (\cos u_0, \text{sen } u_0, v_0)$ e $q = X(u_1, v_1) = (\cos u_1, \text{sen } u_1, v_1)$, onde $u_1 \in (u_0 - \pi, u_0 + \pi)$ e $v_0 \neq v_1$.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a^2 + b^2 = 1$, e $s_1 \in \left(-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right)$, tais que $(as_1 + u_0, bs_1 + v_0) = (u_1, v_1)$. Isto é, (a, b) é o vetor unitário paralelo à única reta no plano que liga os pontos (u_0, v_0) e (u_1, v_1) . Portanto, se p e q não estão no mesmo meridiano, existe uma única hélice que liga os pontos p e q antes de completar uma volta.

Sejam

$$A_n = \frac{2\pi n + s_1 a}{\sqrt{(2\pi n + s_1 a)^2 + b^2 s_1^2}} \quad \text{e} \quad B_n = \frac{bs_1}{\sqrt{(2\pi n + s_1 a)^2 + b^2 s_1^2}},$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$, e seja a hélice $\alpha_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$ dada por:

$$\alpha_n(s) = (\cos(A_n s + u_0), \text{sen}(A_n s + u_0), B_n s + v_0).$$

Então $\alpha_n(0) = p$ e $\alpha_n(s_n) = q$, onde

$$s_n = \frac{bs_1}{B_n} = \frac{2\pi n + as_1}{A_n} = \frac{2\pi n}{A_n} + \frac{as_1}{A_n} \quad \text{e} \quad \frac{as_1}{A_n} \in \left(-\frac{\pi}{A_n}, \frac{\pi}{A_n}\right).$$

Logo, a hélice α_n só passa pelo ponto q após completar n voltas.

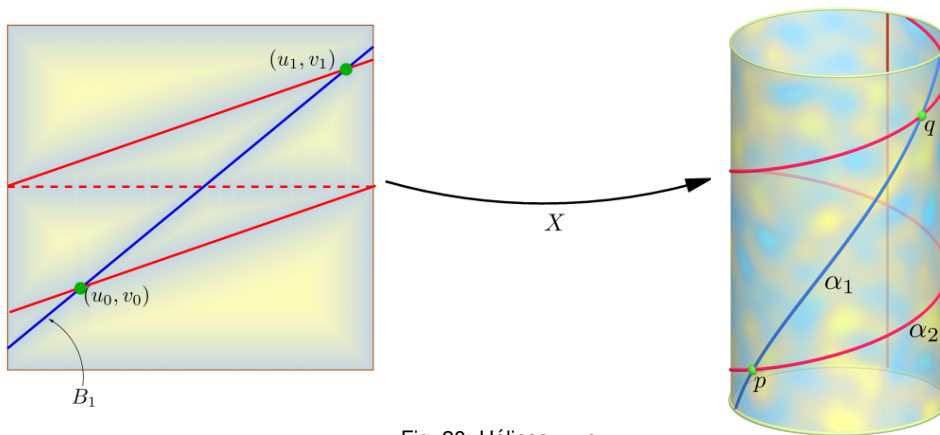


Fig. 20: Hélices α_1 e α_2

Observação 3.20 No plano, as geodésicas (isto é, as retas) são também caracterizadas como sendo as curvas regulares de curvatura zero.

No plano, associamos a uma curva $\alpha(s) = (x(s), y(s), 0)$ parametrizada pelo comprimento de arco, uma curvatura com sinal

$$\kappa(s) = \langle \alpha''(s), \mathbf{n}(s) \rangle,$$

onde $\mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s), 0)$ é o vetor normal a α em s tal que $\{\alpha'(s), \mathbf{n}(s), (0, 0, 1)\}$ é uma base positiva de \mathbb{R}^3 . O sinal de κ depende da orientação da curva e do plano ($N = (0, 0, 1)$).

Por analogia com o plano, definiremos a seguir a *curvatura geodésica de uma curva regular numa superfície S* cujo sinal depende da orientação da curva e da superfície, e caracterizaremos as geodésicas como sendo as curvas que possuem curvatura geodésica nula em todos os seus pontos.

Definição 3.10 Seja ω um campo diferenciável de vetores unitários ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ sobre uma superfície orientada S .

Como $\|\omega(t)\| = 1$ para todo $t \in I$, temos que $\langle \omega'(t), \omega(t) \rangle = 0$ para todo $t \in I$. Portanto, $\frac{D\omega}{dt}(t)$ é paralelo ao vetor $\bar{N}(t) \wedge \omega(t)$, isto é, existe $\lambda(t) \in \mathbb{R}$, tal que

$$\frac{D\omega}{dt}(t) = \lambda(t) (\bar{N}(t) \wedge \omega(t)),$$

onde $\bar{N}(t) = N \circ \alpha(t)$.

O número real $\lambda(t)$ denotado por $\left[\frac{D\omega}{dt}(t) \right]$, é chamado *valor algébrico da derivada covariante de ω em t* .

Observação 3.21 $\lambda(t) = \left[\frac{D\omega}{dt}(t) \right] (t) = \left\langle \frac{d\omega}{dt}(t), \bar{N}(t) \wedge \omega(t) \right\rangle$, pois $\frac{D\omega}{dt}(t)$ é a componente tangente de $\frac{d\omega}{dt}(t)$ e $\bar{N}(t) \wedge \omega(t)$ é um vetor tangente a S em $\alpha(t)$.

Observação 3.22 $\{ \omega(t), \bar{N}(t) \wedge \omega(t), \bar{N}(t) \}$ é uma base positiva de \mathbb{R}^3 , isto é,

$$\det(\omega(t), \bar{N}(t) \wedge \omega(t), \bar{N}(t)) = 1.$$

Observação 3.23 O valor algébrico $\left[\frac{D\omega}{dt} \right]$ depende da orientação de S e de α .

Observação 3.24 As definições de derivada covariante, transporte paralelo e geodésica não dependem da orientação de S .

Definição 3.11 Seja C uma curva regular orientada contida em uma superfície orientada S , e seja $\alpha : I \rightarrow C$ uma parametrização de C , numa vizinhança de $p \in C$, pelo comprimento de arco positivamente orientada. O valor algébrico $\left[\frac{D\alpha'}{ds}(s) \right] = \kappa_g(s)$ da derivada covariante de α' em s é chamada *curvatura geodésica de C em p* , onde $\alpha(s) = p$.

Observação 3.25 As geodésicas são as curvas regulares em S que têm curvatura geodésica nula em todos os seus pontos.

Observação 3.26 A curvatura geodésica de C muda de sinal se mudarmos a orientação de S ou de C .

Observação 3.27 Pela observação 3.22, $\kappa_g(s) = \langle \alpha''(s), \bar{N}(s) \wedge \alpha'(s) \rangle$. Portanto, como a curvatura normal de α em s é $\kappa_n(s) = \langle \alpha''(s), \bar{N}(s) \rangle$, temos que

$$\alpha''(s) = \kappa_g(s) \bar{N}(s) \wedge \alpha'(s) + \kappa_n(s) \bar{N}(s).$$

Então

$$\kappa(s)^2 = \|\alpha''(s)\|^2 = \kappa_g(s)^2 + \kappa_n(s)^2.$$

Assim, de um ponto de vista externo à superfície, o valor absoluto da curvatura geodésica $\kappa_g(s)$ de C em $p = \alpha(s)$ é o valor absoluto da componente tangencial do vetor $\alpha''(s) = \kappa(s) \mathbf{n}(s)$, e o valor absoluto da curvatura normal $\kappa_n(s)$ de C em p é o valor absoluto da componente normal do vetor $\alpha''(s) = \kappa(s) \mathbf{n}(s)$, onde κ é a curvatura de C em p e \mathbf{n} é o vetor normal a C em p .

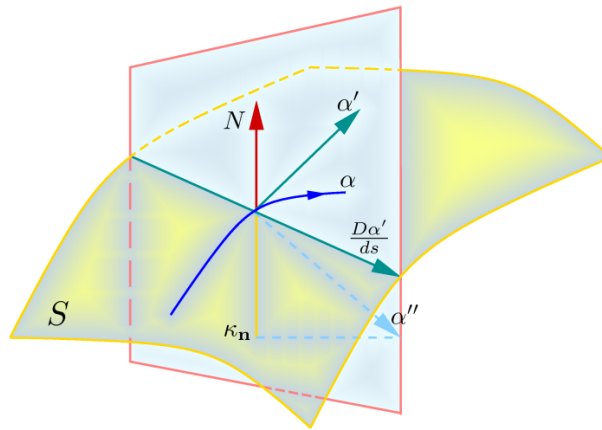


Fig. 21: $|\kappa_g|$ é o valor absoluto da componente tangencial de α''

Exemplo 3.7 Seja C o paralelo de colatitude φ , $0 < \varphi < \pi$, na esfera unitária centrada na origem S^2 . Como $\kappa = \frac{1}{\text{sen } \varphi}$ e $|\kappa_n| = 1$ (pois $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ para a orientação $N(p) = -p$ em S^2), temos que:

$$\left(\frac{1}{\text{sen } \varphi}\right)^2 = 1 + \kappa_g^2.$$

Ou seja,

$$\kappa_g^2 = -1 + \frac{1}{(\text{sen } \varphi)^2} = \frac{1 - \text{sen}^2 \varphi}{\text{sen}^2 \varphi} = \frac{\text{cos}^2 \varphi}{\text{sen}^2 \varphi} = \text{cotg}^2 \varphi.$$

Portanto, os paralelos têm curvaturas geodésicas constantes.

Tomando S^2 com a orientação $N(p) = p$, $p \in S^2$, e o paralelo C com a orientação dada na figura ao lado, temos que

$$\kappa_g(s) = \text{cotg } \varphi.$$

Em particular, se $\varphi = \frac{\pi}{2}$, isto é, se C é um grande círculo, $\kappa_g \equiv 0$, ou seja, C é uma geodésica. \square

Vamos agora obter uma expressão para o valor algébrico da derivada covariante. Para isto, precisamos de alguns preliminares.

Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada, e sejam v, w dois campos diferenciáveis de vetores unitários ao longo de α .

Seja $\bar{v}(t) = \bar{N}(t) \wedge v(t)$. Então $\{v(t), \bar{v}(t)\}$ é uma base ortonormal positiva de $T_{\alpha(t)}S$ para todo $t \in I$. Assim, $\omega(t)$ pode ser expresso como

$$\omega(t) = a(t)v(t) + b(t)\bar{v}(t).$$

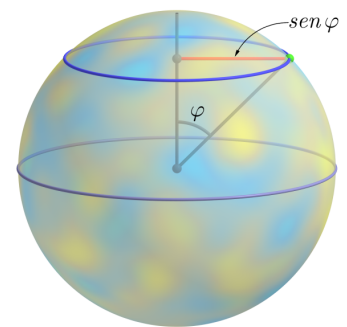


Fig. 22:

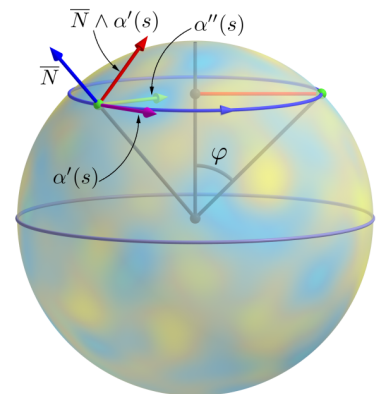


Fig. 23:

onde $\alpha, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis com $\alpha^2 + b^2 = 1$.

Então, fixada uma determinação φ_0 do ângulo de $\nu(t_0)$ a $\omega(t_0)$ (i.e., $\cos \varphi_0 = \alpha(t_0)$ e $\sin(\varphi_0) = b(t_0)$), existe uma única função ângulo $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável tal que $\varphi(t_0) = \varphi_0$ e $\alpha(t) = \cos \varphi(t)$, $b(t) = \sin \varphi(t)$ para todo $t \in I$.

Podemos agora relacionar a derivada covariante de dois campos de vetores unitários ao longo de uma curva com a variação do ângulo formado por eles.

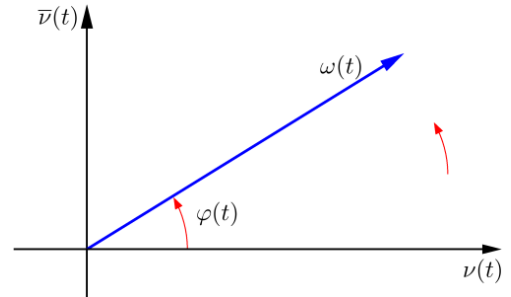


Fig. 24:

Lema 3.1 *Sejam ν e ω dois campos diferenciáveis de vetores unitários ao longo da curva $\alpha : I \rightarrow S$. Então*

$$\left[\frac{D\omega}{dt} \right] - \left[\frac{D\nu}{dt} \right] = \frac{d\varphi}{dt},$$

onde $\varphi(t)$ é uma determinação diferenciável do ângulo de $\nu(t)$ a $\omega(t)$, na orientação de S .

Prova.

Sejam $\bar{N} = N \circ \alpha(t)$, $\bar{\nu}(t) = \bar{N}(t) \wedge \nu(t)$, $\bar{\omega}(t) = \bar{N}(t) \wedge \omega(t)$ e $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma determinação diferenciável do ângulo de $\nu(t)$ a $\omega(t)$ na orientação de S , isto é,

$$\omega(t) = \cos \varphi(t) \nu(t) + \sin \varphi(t) \bar{\nu}(t).$$

Portanto,

$$\bar{\omega}(t) = \bar{N}(t) \wedge \omega(t) = \cos \varphi(t) \bar{N}(t) \wedge \nu(t) + \sin \varphi(t) \bar{N}(t) \wedge \bar{\nu}(t) = \cos \varphi(t) \bar{\nu}(t) - \sin \varphi(t) \nu(t),$$

e

$$\omega'(t) = -(\sin \varphi(t))\varphi'(t)\nu(t) + (\cos \varphi(t))\varphi'(t)\bar{\nu}(t) + \cos \varphi(t)\nu'(t) + \sin \varphi(t)\bar{\nu}'(t).$$

Como $\left[\frac{D\omega}{dt}(t) \right] = \langle \omega'(t), \bar{\omega}(t) \rangle$, temos que:

$$\begin{aligned} \left[\frac{D\omega}{dt}(t) \right] &= \langle -\varphi'(t)\nu(t) \sin \varphi(t) + \varphi'(t)\bar{\nu}(t) \cos \varphi(t) + \nu'(t) \cos \varphi(t) + \bar{\nu}'(t) \sin \varphi(t), \\ &\quad \bar{\nu}(t) \cos \varphi(t) - \nu(t) \sin \varphi(t) \rangle \end{aligned}$$

$$= (\sin \varphi(t))^2 \varphi'(t) + (\cos \varphi(t))^2 \varphi'(t) + (\cos \varphi(t))^2 \langle \nu'(t), \bar{\nu}(t) \rangle$$

$$- (\sin \varphi(t))^2 \langle \bar{\nu}'(t), \nu(t) \rangle$$

$$= \varphi'(t) + \langle \nu'(t), \bar{\nu}(t) \rangle$$

$$= \varphi'(t) + \left[\frac{D\nu}{dt}(t) \right],$$

pois

$$\langle \mathbf{v}(t), \mathbf{v}'(t) \rangle = \langle \bar{\mathbf{v}}(t), \bar{\mathbf{v}}'(t) \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{v}'(t), \bar{\mathbf{v}}(t) \rangle = -\langle \bar{\mathbf{v}}'(t), \mathbf{v}(t) \rangle,$$

já que

$$\langle \mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t) \rangle = \langle \bar{\mathbf{v}}(t), \bar{\mathbf{v}}(t) \rangle = 1 \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{v}(t), \bar{\mathbf{v}}(t) \rangle = 0,$$

para todo $t \in I$.

Assim,

$$\left[\frac{D\omega}{dt}(t) \right] - \left[\frac{D\mathbf{v}}{dt}(t) \right] = \varphi'(t).$$



Observação 3.28 Sejam C uma curva regular orientada em S , $\alpha : I \rightarrow C$ uma parametrização pelo comprimento de arco de C em p positivamente orientada e \mathbf{v} um campo paralelo de vetores unitários ao longo de α . Então, tomando $\omega(s) = \alpha'(s)$, obtemos, pelo lema acima, que

$$\kappa_g(s) = \left[\frac{D\alpha'}{ds}(s) \right] = \frac{d\varphi}{ds}(s).$$

Ou seja, a curvatura geodésica é a taxa de variação do ângulo que a tangente à curva faz com uma direção paralela ao longo da curva. No caso do plano ($\alpha'(s) = \cos \varphi(s)(1, 0, 0) + \sin \varphi(s)(0, 1, 0)$), a direção paralela é fixa $((1, 0, 0))$ e a curvatura geodésica reduz-se à curvatura $\kappa(s)$ usual.

Proposição 3.3 Sejam S uma superfície orientada e $X : U \rightarrow X(U) \subset S$ uma parametrização ortogonal compatível com a orientação de S . Seja $\omega(t)$ um campo diferenciável de vetores unitários ao longo da curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$. Então

$$\left[\frac{D\omega}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right) + \frac{d\varphi}{dt},$$

onde $\varphi(t)$ é uma determinação do ângulo de X_u a $\omega(t)$ na orientação de S .

Prova.

Como $\left\{ \frac{X_u}{\sqrt{E}}, \frac{X_v}{\sqrt{G}}, N = \frac{X_u \wedge X_v}{\sqrt{EG}} \right\}$ é uma base ortonormal positiva de \mathbb{R}^3 , temos que se

$$\mathbf{e}_1(t) = \frac{X_u(u(t), v(t))}{\sqrt{E(u(t), v(t))}},$$

então

$$\bar{\mathbf{e}}_1(t) = \bar{N}(t) \wedge \mathbf{e}_1(t) = \frac{X_v(u(t), v(t))}{\sqrt{G(u(t), v(t))}}.$$

Portanto, sendo

$$\omega(t) = \cos \varphi(t) e_1(t) + \text{sen } \varphi(t) \bar{e}_1(t),$$

temos, pelo lema anterior, que

$$\left[\frac{D\omega}{dt} \right] = \left[\frac{De_1}{dt} \right] + \frac{d\varphi}{dt} \cdot$$

Além disso, como

$$\begin{aligned} \left[\frac{De_1}{dt}(t) \right] &= \langle e_1'(t), \bar{e}_1(t) \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{E}} (u'(t)X_{uu} + v'(t)X_{uv}) + \left(\frac{1}{\sqrt{E(u(t), v(t))}} \right)' X_u, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG}} (u'(t)\langle X_{uu}, X_v \rangle + v'(t)\langle X_{uv}, X_v \rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG}} (-u'(t)\langle X_u, X_{vu} \rangle + v'(t)\langle X_{uv}, X_v \rangle) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v'(t) - E_v u'(t)), \end{aligned}$$

(pois $\langle X_u, X_v \rangle = 0$, $E_v = 2\langle X_u, X_{uv} \rangle$ e $G_u = 2\langle X_v, X_{vu} \rangle$), obtemos:

$$\left[\frac{D\omega}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right) + \frac{d\varphi}{dt} \cdot \blacksquare$$

Como conseqüência da proposição 3.3, provaremos novamente a existência e unicidade do transporte paralelo (proposição 3.2).

Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada e $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$, $t_0 \in I = [0, \ell]$. Então existe um único campo de vetores paralelo ao longo de α tal que $\omega(t_0) = w_0$.

Prova.

Suponhamos que $\alpha(t) \in X(U)$ para todo $t \in I$, onde $X : U \rightarrow X(U) \subset S$ é uma parametrização ortogonal de S . Sejam $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$,

$$\omega(t) = \cos \varphi(t) \frac{X_u}{\sqrt{E}}(u(t), v(t)) + \text{sen } \varphi(t) \frac{X_v}{\sqrt{G}}(u(t), v(t)),$$

e φ_0 uma determinação do ângulo de $\frac{X_u}{\sqrt{E}}(u(t_0), v(t_0))$ a w_0 na orientação dada.

Então, pela proposição 3.3, ω é um campo paralelo se, e só se,

$$\varphi'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v'(t) - E_v u'(t)) = B(t).$$

Logo,

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^t B(\xi) d\xi,$$

o que demonstra a existência e a unicidade de ω neste caso.

Caso $\alpha(I)$ não esteja contido em uma única vizinhança coordenada, utilizamos a compacidade de I para dividi-lo em um número finito de subintervalos $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k = \ell$ de modo que, para cada $i = 1, \dots, k$, $\alpha([t_{i-1}, t_i])$ esteja contido numa vizinhança coordenada $X_i(U_i)$, onde $X_i : U_i \rightarrow X_i(U_i)$ é uma parametrização ortogonal de S . Utilizando a existência e a unicidade obtida na primeira parte da demonstração, podemos provar a existência e a unicidade de um campo de vetores ω paralelo ao longo de α , com $\omega(t_0) = \omega_0$, da mesma maneira como foi feita na demonstração anterior. ■

Uma outra aplicação da proposição 3.3 é a seguinte expressão para a curvatura geodésica, conhecida como *fórmula de Liouville*.

Proposição 3.4 (Fórmula de Liouville)

Seja C uma curva regular orientada sobre uma superfície regular orientada S , e seja $\alpha : I \rightarrow C$ uma parametrização pelo comprimento de arco positivamente orientada de uma vizinhança de um ponto $p \in C$. Suponha que $\alpha(I) \subset X(U)$, onde $X : U \rightarrow X(U)$ é uma parametrização ortogonal de S compatível com a orientação. Se $\varphi(s)$ é uma determinação do ângulo de X_u a $\alpha'(s)$ na orientação dada, então

$$\kappa_g = (\kappa_g)_1 \cos \varphi + (\kappa_g)_2 \operatorname{sen} \varphi + \frac{d\varphi}{ds},$$

onde $(\kappa_g)_1$ e $(\kappa_g)_2$ são as curvaturas geodésicas das curvas coordenadas $v = \text{const.}$ e $u = \text{const.}$, respectivamente.

Prova.

Tomando $\omega(s) = \alpha'(s)$ na proposição 3.3, obtemos

$$\kappa_g = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right) + \frac{d\varphi}{ds}, \quad (29)$$

onde $\alpha'(s) = \cos \varphi(s) \frac{X_u}{\sqrt{E}} + \operatorname{sen} \varphi(s) \frac{X_v}{\sqrt{G}}$.

Sejam $\alpha(s) = X(u(s), v(s)) = X(\beta(s))$, $s_0 \in I$, $\gamma_1(t) = X(u_1(t), v(s_0))$ uma parametrização pelo comprimento de arco da curva coordenada $v = v(s_0)$ tal que $\gamma_1(t_1) = X(u_1(t_1), v(s_0)) = X(u(s_0), v(s_0))$ e $\gamma_2(\xi) = X(u(s_0), v_2(\xi))$ uma parametrização pelo comprimento de arco da curva coordenada $u = u(s_0)$ tal que $\gamma_2(\xi_2) = X(u(s_0), v_2(\xi_2)) = X(u(s_0), v(s_0))$.

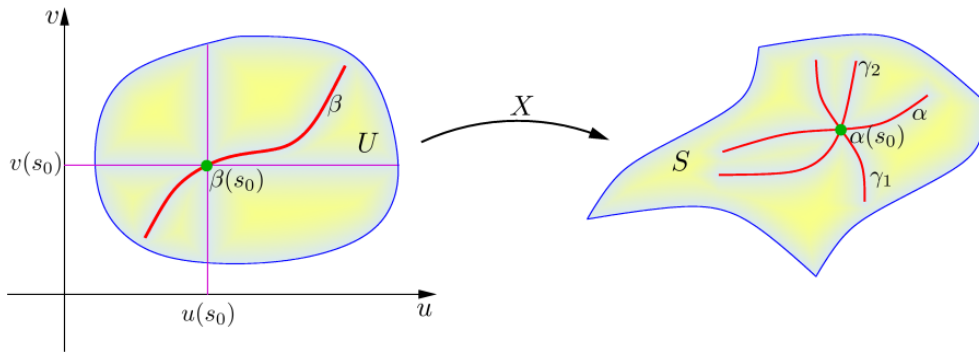


Fig. 25:

Então, como $\|\gamma_1'(t)\| = \|\mathbf{u}'_1(t) X_u(\mathbf{u}_1(t), v(s_0))\| = 1$ e $\|\gamma_2'(\xi)\| = \|\mathbf{v}'_2(\xi) X_v(\mathbf{u}(s_0), v_2(\xi))\| = 1$, podemos supor que $\mathbf{u}'_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E(\mathbf{u}_1(t), v(s_0))}}$ e $\mathbf{v}'_2(\xi) = \frac{1}{\sqrt{G(\mathbf{u}(s_0), v_2(\xi))}}$.

Pela proposição 3.3, obtemos, fazendo $\omega(t) = \gamma_1'(t)$, que

$$(\kappa_g)_1(t_1) = -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}(\mathbf{u}(s_0), v(s_0)) \frac{du_1}{dt}(t_1) + \frac{d\varphi_1}{dt},$$

onde $\varphi_1(t)$ é o ângulo de $\frac{X_u}{\sqrt{E}}(\mathbf{u}_1(t), v(s_0))$ a $\gamma_1'(t)$.

Como $\gamma_1'(t) = \frac{X_u}{\sqrt{E}}(\mathbf{u}_1(t), v(s_0))$, temos que $\varphi_1 = 0$ e, portanto,

$$(\kappa_g)_1(t_1) = -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}(\mathbf{u}(s_0), v(s_0)) \frac{du_1}{dt}(t_1) = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}(\mathbf{u}(s_0), v(s_0)). \quad (30)$$

De modo análogo, podemos provar que

$$(\kappa_g)_2(\xi_2) = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}(\mathbf{u}(s_0), v(s_0)). \quad (31)$$

Logo, por (29), (30) e (31),

$$\kappa_g(s_0) = (\kappa_g)_1(t_1)\sqrt{E}(\mathbf{u}(s_0), v(s_0))\mathbf{u}'(s_0) + (\kappa_g)_2(\xi_2)\sqrt{G}(\mathbf{u}(s_0), v(s_0))\mathbf{v}'(s_0) + \varphi'(s_0).$$

Além disso, como

$$\mathbf{u}'(s)X_u(\mathbf{u}(s), v(s)) + \mathbf{v}'(s)X_v(\mathbf{u}(s), v(s)) = \alpha'(s) = \cos \varphi(s) \frac{X_u}{\sqrt{E}}(\mathbf{u}(s), v(s)) + \sin \varphi(s) \frac{X_v}{\sqrt{G}}(\mathbf{u}(s), v(s)),$$

temos que

$$\cos \varphi(s) = \langle \alpha'(s), \frac{X_u}{\sqrt{E}} \rangle = \mathbf{u}'(s)\sqrt{E}(\mathbf{u}(s), v(s)),$$

e

$$\text{sen } \varphi(s) = \left\langle \alpha'(s), \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle = v'(s) \sqrt{G}(u(s), v(s)).$$

Logo,

$$\kappa_g(s_0) = (\kappa_g)_1(t_1) \cos \varphi(s_0) + (\kappa_g)_2(\xi_2) \text{sen } \varphi(s_0) + \varphi'(s_0).$$

Como $s_0 \in I$ é arbitrário, a fórmula de Liouville vale para todo $s \in I$. ■

Determinaremos agora as equações de uma geodésica em uma vizinhança coordenada. Para isto, seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada de S e seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S em $\alpha(t_0)$, $t_0 \in I$. Sejam $J \subset I$ um intervalo aberto contendo t_0 tal que $\alpha(J) \subset X(U)$, e $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in J$, a expressão de α na parametrização X .

Como o campo de vetores tangentes $\alpha'(t)$ é dado por

$$\alpha'(t) = u'(t)X_u + v'(t)X_v,$$

o fato de α' ser paralelo é equivalente ao sistema de equações diferenciais (não-linear):

$$\begin{cases} u''(t) + \Gamma_{11}^1(u'(t))^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'(t)v'(t) + \Gamma_{22}^1(v'(t))^2 = 0 \\ v''(t) + \Gamma_{11}^2(u'(t))^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'(t)v'(t) + \Gamma_{22}^2(v'(t))^2 = 0, \end{cases} \quad (32)$$

obtido da equação (26) fazendo $a(t) = u'(t)$ e $b(t) = v'(t)$, e igualando a zero os coeficientes de X_u e X_v .

Em outras palavras, $\alpha : I \rightarrow S$ é uma geodésica se, e só se, o sistema (32) é satisfeito para todo intervalo aberto $J \subset I$ tal que $\alpha(J)$ esteja contido em uma vizinhança coordenada.

O sistema (32) é conhecido como as *equações diferenciais das geodésicas de S* .

Proposição 3.5 *Dados um ponto $p \in S$ e um vetor $w \in T_p S$, $w \neq 0$, existem um $\varepsilon > 0$ e uma única geodésica $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$.*

Prova.

Sejam $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S em $p = X(u_0, v_0)$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0)$.

Pelo teorema de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias, existem $\varepsilon > 0$ e uma única solução $\beta(t) = (u(t), v(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ do sistema (32) tal que $\beta(0) = (u_0, v_0)$ e $\beta'(0) = (a, b)$.

Logo, $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, é a única geodésica de S tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = aX_u + bX_v = w$. ■

Observação 3.29 A razão para tomarmos $w \neq 0$ na proposição acima vem do fato de termos excluído as curvas constantes na definição 3.8 de geodésicas parametrizadas.

Daremos agora algumas aplicações geométricas do sistema de equações diferenciais (32) no caso em que S é uma superfície de revolução.

Exemplo 3.8 Seja S a superfície de revolução parametrizada por $X : (0, 2\pi) \times (a, b) \rightarrow S$,

$$X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sen u, g(v)),$$

com $f(v) > 0, v \in (a, b)$.

Como vimos no exemplo 2.1 da seção 4.2, os símbolos de Christoffel são dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{-f(v)f'(v)}{f'(v)^2 + g'(v)^2}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{f(v)f'(v)}{f(v)^2}, \\ \Gamma_{12}^2 &= 0, & \Gamma_{22}^1 &= 0, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v)}{f'(v)^2 + g'(v)^2}. \end{aligned}$$

Com os valores acima, o sistema (32) fica:

$$\begin{aligned} u'' + \frac{2ff'}{f^2} u'v' &= 0 \\ v'' - \frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2} (u')^2 + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2} (v')^2 &= 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Vamos obter alguns resultados a partir destas equações:

1. Os meridianos, $\alpha(s) = X(u_0, v(s))$, parametrizados pelo comprimento de arco são geodésicas.

De fato, a primeira das equações de (33) é trivialmente satisfeita, pois $u(s) = u_0 = \text{const.}$

A segunda equação para $u(s) = u_0 = \text{const.}$ fica:

$$v''(s) + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2} (v(s)) (v'(s))^2 = 0.$$

Como o meridiano $\alpha(s) = X(u_0, v(s))$ está parametrizado pelo comprimento de arco, temos

$$\|v'(s) X_v(u_0, v(s))\| = 1 \iff v'(s)^2 (f'(v(s))^2 + g'(v(s))^2) = 1,$$

para todo s .

Derivando a expressão acima, obtemos:

$$2v'(s)v''(s)(f'(v(s))^2 + g'(v(s))^2) + (2f'(v(s))f''(v(s)) + 2g'(v(s))g''(v(s)))v'(s)^3 = 0,$$

ou seja,

$$v'(s)v''(s) = -\frac{f'(v(s))f''(v(s)) + g'(v(s))g''(v(s))}{(f'(v(s)))^2 + (g'(v(s)))^2} v'(s)^3.$$

Como $v'(s) \neq 0$, temos

$$v''(s) = -\frac{f'(v(s))f''(v(s)) + g'(v(s))g''(v(s))}{(f'(v(s)))^2 + (g'(v(s)))^2} v'(s)^2.$$

Portanto, ao longo do meridiano a segunda equação de (33) também é satisfeita, o que mostra que de fato os meridianos são geodésicas.

Uma outra maneira de verificar que os meridianos parametrizados pelo comprimento de arco são geodésicas consiste em observar que sua curvatura geodésica é nula, pois $\kappa = |\kappa_{\mathbf{n}}|$, já que os meridianos são seções normais de S , e, portanto, pela relação $\kappa^2 = \kappa_{\mathbf{n}}^2 + \kappa_g^2$, obtemos que $\kappa_g^2 \equiv 0$ ao longo de um meridiano. Ou simplesmente observando que o vetor aceleração de um meridiano é paralelo ao vetor normal à superfície, já que ele é uma seção normal de S e, portanto, a derivada covariante do vetor tangente ao meridiano é nula.

2. *Um paralelo é uma geodésica se, e só se, é uma seção normal, ou seja, se, e só se, o vetor tangente à geratriz da superfície de revolução no ponto que dá origem ao paralelo é paralelo ao eixo de revolução ($\Leftrightarrow f'(v) = 0$).*

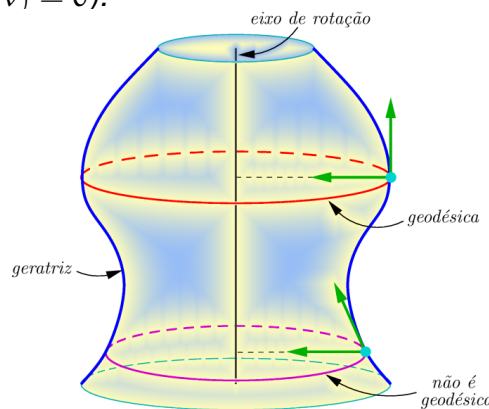


Fig. 26: Geodésicas na superfície de revolução

De fato, se um paralelo é uma seção normal, então seu vetor aceleração é paralelo ao vetor normal à superfície e, portanto, a derivada covariante do vetor tangente ao paralelo é nula.

Reciprocamente, se um paralelo é uma geodésica, a derivada covariante do vetor tangente ao paralelo é nula, isto é, o vetor aceleração do paralelo é paralelo ao vetor normal à superfície e, portanto, o paralelo é gerado pela rotação de um ponto da curva geratriz onde a tangente é paralela ao eixo de revolução.

Podemos obter o mesmo resultado utilizando o sistema (33).

De fato, se $X(u(t), v_0)$ é uma parametrização pelo comprimento de arco de um paralelo que é uma geodésica, obtemos, da primeira equação, que $u''(t) = 0$ ($\implies u'(t) = \text{const.} \neq 0$), e da segunda equação que

$$\frac{-f(v_0)f'(v_0)}{(f'(v_0))^2 + (g'(v_0))^2} (u'(t))^2 = 0.$$

Logo $f'(v_0) = 0$, já que $u'(t) \neq 0$ e $f(v_0) > 0$.

3. (Relação de Clairaut)

A primeira equação do sistema (33) pode ser escrita como

$$(f^2 u')' = f^2 u'' + 2ff'u'v' = 0.$$

Portanto,

$$f^2(v(t)) u'(t) = \text{const.} = c.$$

Por outro lado, o ângulo θ , $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, de uma geodésica $X(u(t), v(t))$ parametrizada pelo comprimento de arco com um paralelo que a intersecta é dado por

$$\cos \theta = \frac{|\langle X_u, u'X_u + v'X_v \rangle|}{\|X_u\|} = |u'f|,$$

pois $\langle X_u, X_u \rangle = f^2$.

Como $f(v(t)) = r$ é o raio do paralelo no ponto de intersecção, obtemos a *relação de Clairaut*:

$$r \cos \theta = \text{const.} = |c|.$$

No exemplo 3.9 mostraremos como esta relação pode ser útil.

4. O sistema (33) pode ser integrado por meio de primitivas.

Seja $X(u(s), v(s))$ uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco, que não é um meridiano nem um paralelo. A primeira equação de (33) é escrita como

$$(f(v(s)))^2 u'(s) = \text{const.} = c,$$

com $c \neq 0$, pois, caso contrário, $u'(s) \equiv 0$, e portanto, $u(s) = \text{const.}$, ou seja, a geodésica seria um meridiano.

Como $X(u(s), v(s))$ está parametrizada pelo comprimento de arco, temos que

$$\begin{aligned} \|u'(s)X_u + v'(s)X_v\|^2 &= u'(s)^2 \langle X_u, X_u \rangle + 2u'(s)v'(s) \langle X_u, X_v \rangle + v'(s)^2 \langle X_v, X_v \rangle \\ &= (f(v(s)))^2 u'(s)^2 + ((f'(v(s)))^2 + (g'(v(s)))^2) v'(s)^2 = 1, \end{aligned}$$

pois $E = \langle X_u, X_u \rangle = f(v)^2$, $F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$, e $G = \langle X_v, X_v \rangle = (f'(v))^2 + (g'(v))^2$.

Afirmação: A equação

$$(f(v(s)))^2 u'(s)^2 + ((f'(v(s)))^2 + (g'(v(s)))^2) v'(s)^2 = 1, \quad (34)$$

junto com a primeira equação de (33), $(f(v(s)))^2 u'(s) = c \neq 0$, é equivalente à segunda equação de (33).

De fato, substituindo $(f(v(s)))^2 u'(s) = c$ em (34), obtemos

$$((f'(v(s)))^2 + (g'(v(s)))^2) v'(s)^2 = 1 - \frac{c^2}{(f(v(s)))^2}. \quad (35)$$

Derivando a identidade (35) com relação a s ,

$$\begin{aligned} 2v'(s)v''(s)((f'(v(s)))^2 + (g'(v(s)))^2) + (v'(s))^3(2f'(v(s))f''(v(s)) + 2g'(v(s))g''(v(s))) \\ = 2c^2 \frac{f(v(s))f'(v(s))v'(s)}{(f(v(s)))^4} \\ = 2f(v(s))f'(v(s))(u'(s))^2 v'(s), \end{aligned}$$

pois $\frac{c^2}{(f(v(s)))^4} = u'(s)^2$.

Dividindo a equação acima por $2v'(s)((f'(v(s)))^2 + (g'(v(s)))^2)$, obtemos a segunda equação de (33):

$$v''(s) + \frac{f'(v(s))f''(v(s)) + g'(v(s))g''(v(s))}{((f'(v(s)))^2 + (g'(v(s)))^2)} v'(s)^2 = \frac{f(v(s))f'(v(s))}{(f'(v(s)))^2 + (g'(v(s)))^2} u'(s)^2. \quad (36)$$

□

Observação 3.30 Se $v'(s_0) = 0$, a geodésica é tangente no ponto $X(u(s_0), v(s_0))$ ao paralelo $v = v(s_0)$. Então este paralelo não pode ser uma geodésica, pois, caso contrário, pela unicidade das geodésicas, a geodésica seria o próprio paralelo, uma contradição, já que estamos supondo que a geodésica não é um paralelo.

Mas uma geodésica pode ser tangente a um paralelo que não é uma geodésica. Se isto ocorre em s_0 , isto é, $v'(s_0) = 0$, então existe uma seqüência $s_n \rightarrow s_0$ tal que $v'(s_n) \neq 0$. De fato, caso contrário, existiria um intervalo aberto I , $s_0 \in I$, tal que $v'(s) = 0$ para todo $s \in I$, ou seja, a geodésica restrita ao intervalo I estaria contida no paralelo $v = v(s_0)$ e, portanto, este paralelo seria uma geodésica, uma contradição.

Como a equação (36) pode ser obtida da equação (34) e da equação $(f(v(s)))^2 u'(s) = c$ nos pontos s_n , obtemos, por continuidade, que o mesmo vale em s_0 .

Por outro lado, como $u'(s) \neq 0$ para todo s , a função $u(s)$ possui uma inversa $s(u)$. Seja $\bar{v}(u) = v(s(u))$.

Multiplicando (34) por $\left(\frac{ds}{du}\right)^2$, obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{du}(u)\right)^2 &= f(v(s(u)))^2 \left(\frac{du}{ds}(s(u))\right)^2 \left(\frac{ds}{du}(u)\right)^2 \\ &+ ((f'(v(s(u))))^2 + (g'(v(s(u))))^2) \left(\frac{dv}{ds}(s(u))\right)^2 \left(\frac{ds}{du}(u)\right)^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(\frac{ds}{du}(u)\right)^2 = (f(\bar{v}(u)))^2 + ((f'(\bar{v}(u))))^2 + (g'(\bar{v}(u))))^2 \left(\frac{d\bar{v}}{du}(u)\right)^2. \quad (37)$$

Como

$$\left(\frac{du}{ds}(s)\right)^2 = \frac{c^2}{(f(v(s)))^4},$$

obtemos que

$$\left(\frac{ds}{du}(u)\right)^2 = \frac{(f(\bar{v}(u)))^4}{c^2}.$$

Logo, (37) fica

$$(f(\bar{v}(u)))^4 = c^2 \left((f(\bar{v}(u)))^2 + ((f'(\bar{v}(u))))^2 + (g'(\bar{v}(u))))^2 \left(\frac{d\bar{v}}{du}(u)\right)^2 \right),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (f(\bar{v}(u)))^2 &= c^2 + c^2 \frac{(f'(\bar{v}(u)))^2 + (g'(\bar{v}(u))))^2}{(f(\bar{v}(u)))^2} \left(\frac{d\bar{v}}{du}(u)\right)^2 \\ \implies \frac{d\bar{v}}{du}(u) &= \pm \frac{f(\bar{v}(u))}{c} \sqrt{\frac{(f(\bar{v}(u)))^2 - c^2}{(f'(\bar{v}(u)))^2 + (g'(\bar{v}(u))))^2}}. \end{aligned}$$

Logo, como

$$\frac{du}{d\bar{v}}(\bar{v}) = \frac{1}{\frac{d\bar{v}}{du}(u(\bar{v}))},$$

temos que

$$\frac{du}{d\bar{v}}(\bar{v}) = \pm \frac{c}{f(\bar{v})} \sqrt{\frac{(f'(\bar{v}))^2 + (g'(\bar{v}))^2}{(f(\bar{v}))^2 - c^2}},$$

ou seja,

$$u(v) = \pm \int \frac{c}{f(v)} \sqrt{\frac{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}{(f(v))^2 - c^2}} dv + \text{const.}, \quad (38)$$

que é a equação de um segmento de geodésica de uma superfície de revolução que não é um meridiano nem um paralelo.

Observação 3.31 Como $\bar{v}(u) = v(s(u))$ e $s'(u) > 0$ para todo u , temos que o sinal "+" ocorre quando $v'(s(u)) > 0$ e o sinal "-", quando $v'(s(u)) < 0$.

Exemplo 3.9 Vamos mostrar neste exemplo que qualquer geodésica do parabolóide de revolução $z = x^2 + y^2$, que não é um meridiano, se auto-intersecta uma infinidade de vezes.

Primeiro observe que nenhum paralelo do parabolóide é uma geodésica, pois o vetor tangente

à geratriz $\mathcal{C} : \begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ do parabolóide não é paralelo ao eixo Oz em ponto algum da curva \mathcal{C} .

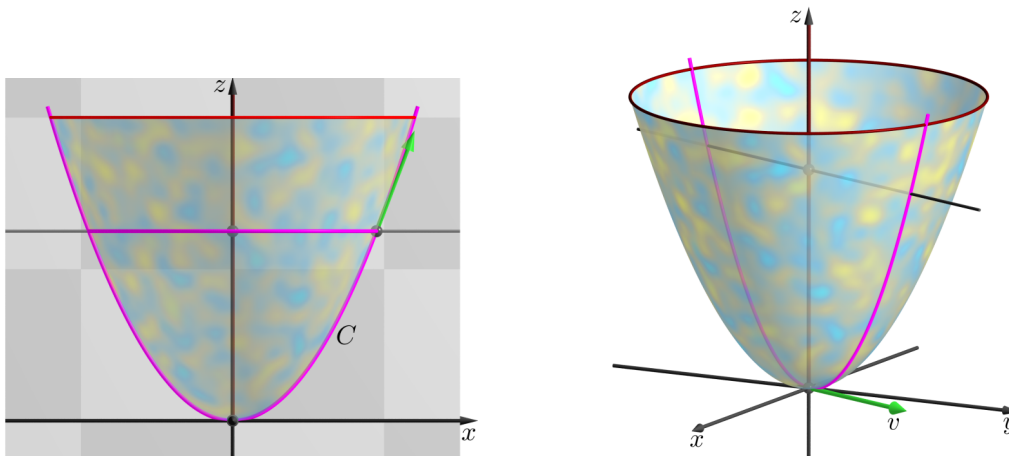


Fig. 27: Os meridianos são as únicas geodésicas no parabolóide que passam pela origem

E, pela unicidade das geodésicas, temos que os meridianos são as únicas geodésicas que passam pela origem $(0, 0, 0)$.

Sejam $\gamma(s) = (v(s) \cos u(s), v(s) \sin u(s), v(s)^2)$ uma geodésica que passa por $p_0 \neq (0, 0, 0)$, \mathcal{P}_0 o paralelo que contém p_0 , r_0 o raio deste paralelo e θ_0 , $0 \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$, o ângulo que γ faz com \mathcal{P}_0 em p_0 .

Pela relação de Clairaut,

$$r \cos \theta = r_0 \cos \theta_0 = |c|.$$

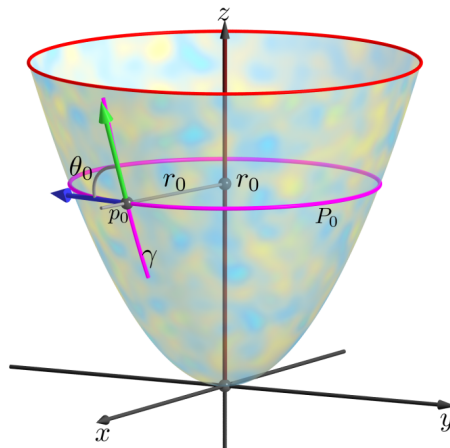


Fig. 28: γ é uma geodésica no parabolóide que passa pelo ponto $p_0 \neq (0, 0, 0)$

Como γ não é um meridiano, temos que $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ e $|c| \neq 0$.

Observe, pela relação de Clairaut, que quando r cresce, então $\cos \theta$ decresce, portanto θ cresce.

Além disso, como $(v(s))^2 u'(s) = c \neq 0$, podemos supor $u'(s) > 0$ e, portanto, $c > 0$.

Pela relação de Clairaut temos que $v(s) = r \geq c$ para todo $s \in \mathbb{R}$, e $v(s) = c$ se, e só se, $\theta = 0$, ou seja, a geodésica γ é tangente ao paralelo de raio c no ponto de intersecção.

Afirmção: Existe um único $\bar{s}_1 \in \mathbb{R}$ tal que $v(\bar{s}_1) = c$.

Para provar esta afirmação precisamos do seguinte fato (ver §4.7 do livro de Manfredo do Carmo): *nenhuma geodésica de uma superfície de revolução pode ser assintótica a um paralelo a não ser que este paralelo seja uma geodésica*.

Como nenhum paralelo do parabolóide é uma geodésica, a geodésica γ não pode assintotar paralelo algum.

Seja $c' = \inf_{s \in \mathbb{R}} v(s)$. Se existe $\bar{s}_1 \in \mathbb{R}$ tal que $v(\bar{s}_1) = c'$ e $c' > c$, temos, pela relação de Clairaut, que o ângulo θ' que γ faz com o paralelo $v = c'$ no ponto de intersecção é diferente de zero, ou seja, γ corta o paralelo transversalmente ($v'(\bar{s}_1) \neq 0$); portanto, existiriam pontos de γ em paralelos com raios menores do que c , uma contradição, já que $c' = \inf_{s \in \mathbb{R}} v(s)$.

Logo, se existe $\bar{s}_1 \in \mathbb{R}$ tal que $v(\bar{s}_1) = c'$, devemos ter $c' = c$ e, neste caso, a geodésica γ é tangente ao paralelo de raio c no ponto de intersecção $\gamma(\bar{s}_1)$.

Suponhamos agora que não existe $\bar{s}_1 \in \mathbb{R}$ tal que $v(\bar{s}_1) = c' = \inf_{s \in \mathbb{R}} v(s)$. Então existe uma seqüência (s_n) de números reais tais que a seqüência $(v(s_n))$ é decrescente, $v(s_n) \rightarrow c'$ e

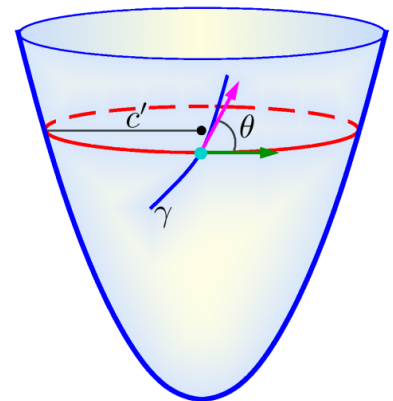


Fig. 29: γ é geodésica que passa por $p_0 \neq (0, 0, 0)$

$v(s_n) > c'$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, pela hipótese ($\nexists \bar{s}_1 \in \mathbb{R}; v(\bar{s}_1) = c'$), (s_n) não possui uma subsequência limitada. Portanto, $|s_n| \rightarrow +\infty$.

Podemos supor que $s_n \rightarrow \infty$ e (s_n) é crescente.

Então $v(s) \in (v(s_{n+1}), v(s_n))$ para todo $s \in (s_n, s_{n+1})$, pois, caso contrário, existiria $\tilde{s} \in (s_n, s_{n+1})$ tal que $v'(\tilde{s}) = 0$, e, pela relação de Clairaut, teríamos $v(\tilde{s}) = c$; neste caso, $\inf_{s \in \mathbb{R}} v(s)$ seria igual a c e existiria $\tilde{s} \in \mathbb{R}$ tal que $v(\tilde{s}) = c$, contradizendo a hipótese.

Logo $v(s) \rightarrow c'$ quando $s \rightarrow \infty$ e $v(s) > c'$ para todo $s \in \mathbb{R}$, ou seja, a geodésica γ é assintótica ao paralelo $\mathcal{P}_{c'}$ de raio c' , uma contradição.

Assim, existe $\bar{s}_1 \in \mathbb{R}$ tal que $v(\bar{s}_1) = c$ e a geodésica γ é tangente ao paralelo \mathcal{P}_c no ponto $\gamma(\bar{s}_1)$.

Suponhamos que existe $\bar{s}_2 \neq \bar{s}_1$ tal que $v(\bar{s}_2) = c$. Então, sendo $\bar{s}_2 < \bar{s}_1$, ou $v(s) = c$ para todo $s \in [\bar{s}_2, \bar{s}_1]$ ou existe um ponto de máximo $\bar{s}_3 \in (\bar{s}_2, \bar{s}_1)$, onde $v(\bar{s}_3) > c$ e $v'(\bar{s}_3) = 0$. No primeiro caso chegamos a uma contradição, pois o paralelo $v = c$ não é uma geodésica, e no segundo caso também chegamos a uma contradição, pois $r \cos \theta$ seria maior que c em \bar{s}_3 , uma vez que $r = v(\bar{s}_3) > c$ e $\theta(\bar{s}_3) = 0$.

Logo existe um único ponto $\bar{s}_1 \in \mathbb{R}$ tal que $v(\bar{s}_1) = c$ e, portanto, pela relação de Clairaut, existe um único ponto $\bar{s}_1 \in \mathbb{R}$ tal que $v'(\bar{s}_1) = 0$.

Temos, então, $v'(s) > 0$ em (\bar{s}_1, ∞) e $v'(s) < 0$ em $(-\infty, \bar{s}_1)$.

Afirmção: Se $s \rightarrow \pm\infty$ então $v(s) \rightarrow +\infty$ ($\implies \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$).

De fato, suponhamos que $v(s) \not\rightarrow \infty$ quando $s \rightarrow +\infty$.

Então existe uma seqüência crescente (s_n) tal que $s_n \rightarrow +\infty$ e $(v(s_n))$ converge para um ponto c' . Como a seqüência (s_n) é crescente, $s_n \rightarrow +\infty$ e $v' > 0$ em $(\bar{s}_1, +\infty)$, temos que $v(s) \rightarrow c'$ quando $s \rightarrow +\infty$ e $c' = \sup_{s \in [s_1, \infty)} v(s)$, ou seja, a geodésica γ é assintótica ao paralelo $\mathcal{P}_{c'}$ de raio c' .

Logo $v(s) \rightarrow \infty$ quando $s \rightarrow \infty$. De modo análogo, podemos provar que $v(s) \rightarrow \infty$ quando $s \rightarrow -\infty$.

Afirmção: Se $s \rightarrow \pm\infty$ então $u(s) \rightarrow \pm\infty$.

De fato, sendo $f(v) = v$ e $g(v) = v^2$, temos, pela expressão (38), que

$$u(v) - u(c_1) = \pm c \int_{c_1}^v \frac{1}{v} \sqrt{\frac{1+4v^2}{v^2-c^2}} dv,$$

onde $c_1 > c$.

Para $s > \bar{s}_1$, onde $v' > 0$, temos, pela observação 3.32, que:

$$\begin{aligned} u(v) - u(c_1) &= c \int_{c_1}^v \frac{1}{v} \sqrt{\frac{1+4v^2}{v^2-c^2}} dv \\ &> c \int_{c_1}^v \frac{1}{v} dv = c(\log v - \log c_1), \end{aligned}$$

pois $\frac{1+4v^2}{v^2-c^2} > 1$ e $c > 0$.

Logo $u(v) \rightarrow +\infty$ quando $v \rightarrow +\infty$, ou seja, $u(s) \rightarrow +\infty$ quando $s \rightarrow +\infty$, já que $\lim_{s \rightarrow \infty} v(s) = +\infty$.

Para $s < \bar{s}_1$, onde $v' < 0$, temos, pela observação 3.32, que:

$$\begin{aligned} u(v) - u(c_1) &= -c \int_{c_1}^v \frac{1}{v} \sqrt{\frac{1+4v^2}{v^2-c^2}} dv \\ &< -c \int_{c_1}^v \frac{1}{v} dv = -c(\log v - \log c_1). \end{aligned}$$

Assim, $\lim_{v \rightarrow \infty} u(v) = -\infty$, ou seja, $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = -\infty$, pois $v(s) \rightarrow +\infty$ quando $s \rightarrow -\infty$.

Podemos, então, concluir que a geodésica γ intersecta todos os meridianos um número infinito de vezes e, portanto, se auto-intersecta uma infinidade de vezes, já que os dois segmentos de geodésica $\gamma|_{[\bar{s}_1, \infty)}$ e $\gamma|_{(-\infty, \bar{s}_1]}$ dão uma infinidade de voltas em torno do parabolóide. \square

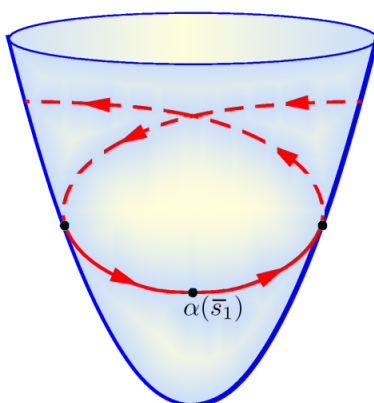


Fig. 30: γ se auto-intersecta infinitas vezes, pois é uma geodésica no parabolóide que não é um meridiano.

No exemplo acima, usamos o fato de que qualquer geodésica γ do parabolóide está definida para todo $s \in \mathbb{R}$, isto é, $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S$ está definida em toda a reta. Isto resulta do fato de o parabolóide ser uma superfície *fechada* em \mathbb{R}^3 .

4. Teorema de Gauss-Bonnet e suas Aplicações

Nesta seção, apresentaremos o *Teorema de Gauss-Bonnet* e algumas de suas aplicações. A dificuldade em prová-lo provém de certos fatos topológicos, que serão apresentados sem demonstrações.

O Teorema de Gauss-Bonnet é, provavelmente, o teorema mais profundo da Geometria Diferencial das Superfícies. Uma primeira versão deste teorema foi apresentada por Gauss no seu célebre trabalho *General Investigations of Curved Surfaces* (re-editado pela Raven Press, New York, 1965) e trata de *triângulos geodésicos em superfícies* (isto é, triângulos cujos lados são arcos de geodésicas). A grosso modo, ele afirma que o "excesso" sobre π da soma dos ângulos internos φ_1 , φ_2 e φ_3 de um triângulo geodésico T é igual à integral da curvatura Gaussiana K sobre T , isto é,

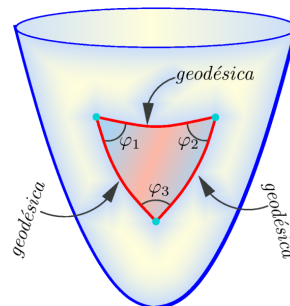


Fig. 31: Triângulo geodésico

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi = \iint_T K d\sigma.$$

Então, se:

- $K \equiv 0$, obtemos que $\sum_{i=1}^3 \varphi_i = \pi$, uma extensão do teorema de Tales para superfícies com curvatura nula.

- $K \equiv 1$, obtemos que $\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi = \text{área}(T) > 0$, ou seja, sobre uma esfera unitária a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo geodésico é maior que π e o excesso sobre π é exatamente a área de T .

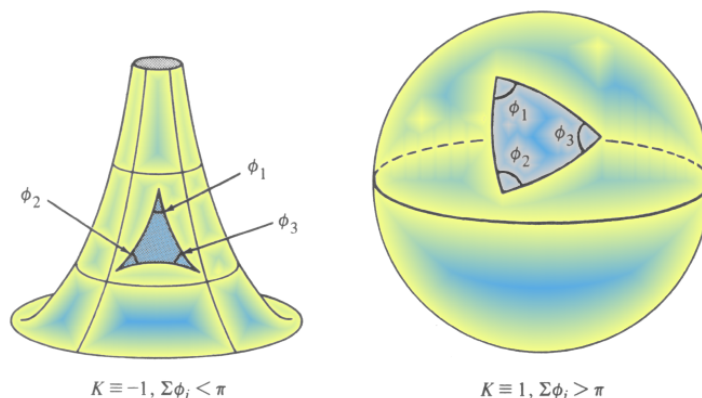


Fig. 32: Triângulos geodésicos em superfícies com Curvatura Gaussiana -1 e 1

• $K \equiv -1$, a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo geodésico é menor que π (por exemplo, na pseudo-esfera — exercício 6 da §3.3. do livro de Manfredo P. Do Carmo).

A extensão do teorema a uma região limitada por uma curva simples deve-se a Bonnet. Para estendê-lo a superfícies compactas, algumas considerações topológicas serão necessárias.

Uma das mais importantes características do Teorema de Gauss-Bonnet é a de estabelecer uma surpreendente relação entre a topologia de uma superfície compacta e a integral de sua curvatura (ver corolário 4.2).

Para provar a versão local do teorema de Gauss-Bonnet, precisamos de algumas definições.

Definição 4.1 Seja $\alpha : [0, \ell] \rightarrow S$ uma aplicação contínua de um intervalo fechado $[0, \ell]$ sobre uma superfície regular S .

Dizemos que α é uma *curva parametrizada simples, fechada e regular por partes* se:

- (1) $\alpha(0) = \alpha(\ell)$.
- (2) $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, se $t_1, t_2 \in [0, \ell]$ e $t_1 \neq t_2$.
- (3) existe uma partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = \ell$ do intervalo $[0, \ell]$ tal que α é diferenciável e regular em cada subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, k$.

Intuitivamente, α é uma curva fechada (condição 1) sem auto-intersecções (condição 2) que deixa de ter uma reta tangente bem definida apenas em um número finito de pontos (condição 3).

Os pontos $\alpha(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, k$, são chamados *vértices de α* , e os traços $\alpha[t_i, t_{i+1}]$ são chamados *arcos regulares de α* .

Sejam

$$\alpha'(t_i^+) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_i \\ t > t_i}} \alpha'(t) \quad \text{e} \quad \alpha'(t_i^-) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_i \\ t < t_i}} \alpha'(t)$$

Seja $N : S \rightarrow S^2$ a orientação de S e seja $|\theta_i|$, $0 < |\theta_i| \leq \pi$, a menor determinação do ângulo de $\alpha'(t_i^-)$ a $\alpha'(t_i^+)$.

Se $|\theta_i| \neq \pi$ (i.e. $\alpha(t_i)$ não é uma cúspide), o sinal de α_i é positivo se

$$\{ \alpha'(t_i^-), \alpha'(t_i^+), N(\alpha(t_i)), \}$$

é uma base positiva ($\iff \det(\alpha'(t_i^-), \alpha'(t_i^+), N(\alpha(t_i))) > 0$); e é negativo se

$$\{ \alpha'(t_i^-), \alpha'(t_i^+), N(\alpha(t_i)), \}$$

é uma base negativa ($\iff \det(\alpha'(t_i^-), \alpha'(t_i^+), N(\alpha(t_i))) < 0$).

O ângulo $\theta_i \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ é chamado *ângulo externo do vértice $\alpha(t_i)$* .

No caso em que o vértice é uma cúspide, isto é, $|\theta_i| = \pi$, escolhemos o sinal de θ_i do seguinte modo.

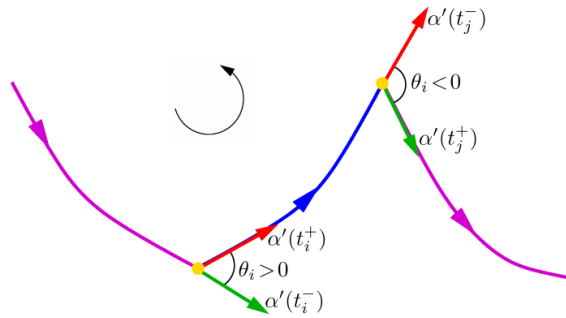


Fig. 33: Ângulos externos nos vértices $\alpha(t_i)$ e $\alpha(t_j)$

Sejam $v_1 = \frac{\alpha'(t_i^+)}{\|\alpha'(t_i^+)\|}$ e v_2 um vetor unitário ortogonal a v_1 , de modo que $\{v_1, v_2, N(\alpha(t_i))\}$ é uma base ortonormal positiva de $T_{\alpha(t_i)} S$.

Seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização ortogonal de S compatível com a orientação tal que $X(0, 0) = \alpha(t_i)$ e $X_u(0, 0) = v_1$. Logo $X_v(0, 0) = v_2$.

Seja $\beta : (t_i - \delta, t_i + \delta) \rightarrow U$ a curva diferenciável por partes tal que $X(\beta(t)) = \alpha(t)$. Então, como $\beta(t_i) = (0, 0)$, $dX_{\beta(t_i)}(\beta'(t_i^-)) = \alpha'(t_i^-)$ e $dX_{\beta(t_i)}(\beta'(t_i^+)) = \alpha'(t_i^+)$, temos que $\beta'(t_i^-) = (-\|\alpha'(t_i^+)\|, 0)$ e $\beta'(t_i^+) = (\|\alpha'(t_i^+)\|, 0)$.

Assim, existem $\delta' > 0$, $\varepsilon > 0$ e funções $f, g : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis tais que $\beta([t_i, t_i + \delta']) = \{(x, g(x)) \mid x \in [0, \varepsilon]\}$ é o gráfico da função g , e $\beta([t_i - \delta', t_i]) = \{(x, f(x)) \mid x \in [0, \varepsilon]\}$ é o gráfico da função f .

Como α não tem auto-intersecções, ou $f(x) > g(x)$ ou $f(x) < g(x)$ para todo $x \in (0, \varepsilon)$. No primeiro caso, definimos $\theta_i = \pi$ e, no segundo caso, definimos $\theta_i = -\pi$.

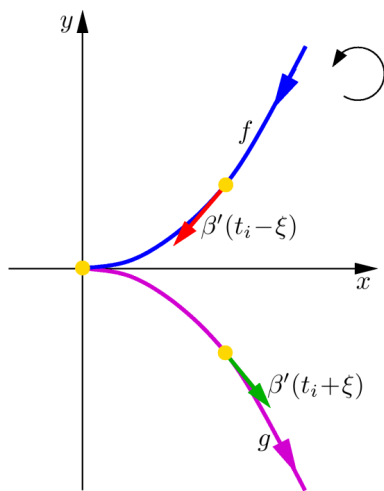


Fig. 34: $\theta_i = \pi$

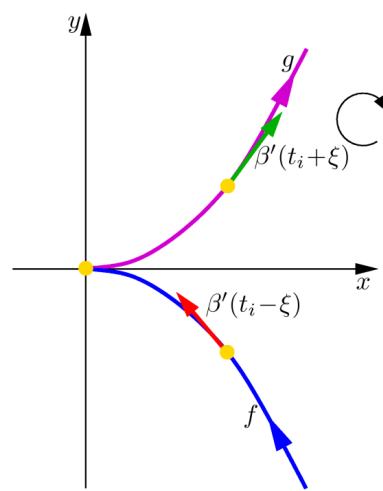


Fig. 35: $\theta_i = \pi$

Seja S uma superfície regular orientada. Dizemos que uma região $R \subset S$ (união de um conjunto

aberto conexo com a sua fronteira) é uma *região simples* se R é homeomorfo a um disco e a fronteira ∂R de R é o traço de uma curva parametrizada simples, fechada e regular por partes $\alpha : I \rightarrow S$.

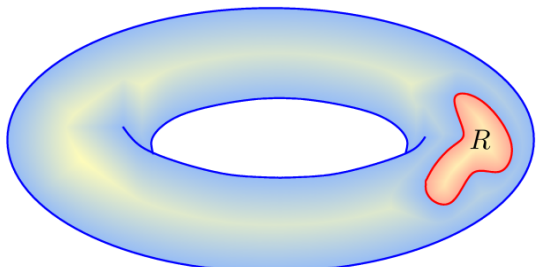


Fig. 36: R é simples

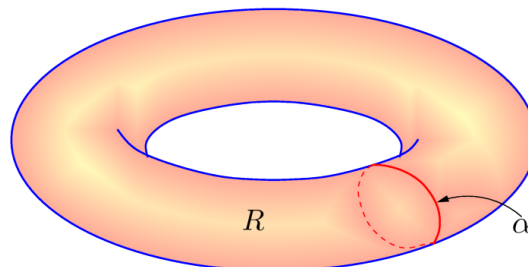


Fig. 37: R não é simples

Dizemos então que α é *orientada positivamente* se para cada $\alpha(t)$ pertencente a um arco regular, a base ortonormal positiva $\{\alpha'(t), h(t)\}$ satisfaz a condição de que $h(t)$ aponta para dentro de R , ou seja, para qualquer curva $\beta : I \rightarrow R$ com $\beta(0) = \alpha(t)$ e $\beta'(0) \neq \alpha'(t)$, temos que $\langle \beta'(0), h(t) \rangle > 0$.

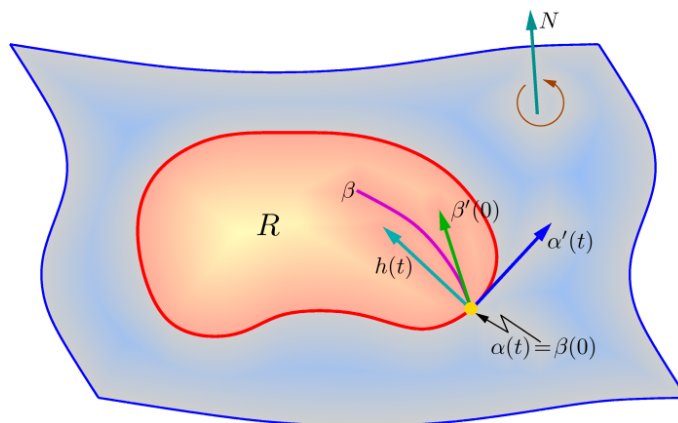


Fig. 38: $h(t)$ aponta para dentro de R

Intuitivamente, isto significa que ao andarmos pela curva α na direção positiva com a cabeça apontada para N , a região R estará à nossa esquerda.

Pode-se mostrar que uma das orientações possíveis de α faz com que ela fique positivamente orientada.

Seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização isotérmica compatível com a orientação de S tal que U é homeomorfo a um disco aberto do plano.

Seja $\alpha : [0, \ell] \rightarrow X(U) \subset S$ uma curva parametrizada simples, fechada e regular por partes, com vértices $\alpha(t_i)$ e ângulos externos θ_i , $i = 0, 1, \dots, k$.

Sejam $\varphi_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis que medem em cada $t \in [t_i, t_{i+1}]$ o ângulo positivo de X_u a $\alpha'(t)$.

O primeiro fato topológico que apresentaremos sem demonstração é o seguinte.

Teorema 4.1 (Teorema do índice de rotação)

Com a notação acima,

$$\sum_{i=0}^k (\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)) + \sum_{i=0}^k \theta_i = \pm 2\pi,$$

sendo $+2\pi$ se α está orientada positivamente, e -2π se α está orientada negativamente.

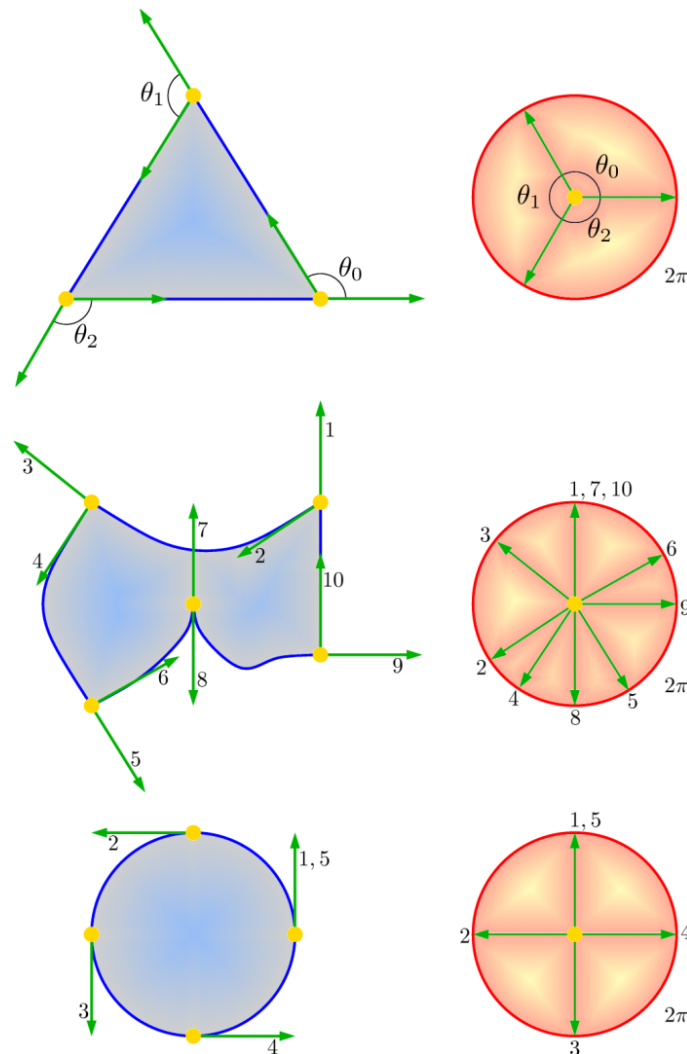


Fig. 39: Índice de rotação

O teorema acima diz que a variação total do ângulo do vetor tangente a α com uma direção dada mais os "saltos" nos vértices é igual a $\pm 2\pi$.

Uma demonstração do teorema do índice de rotação pode ser vista em *H. Hopf, Comp. Math. No. 2 (1935), pag. 50-62.*

Para o caso em que α é uma curva simples, fechada e regular (isto é, sem vértices) contida

num plano, a demonstração de H. Hopf pode ser encontrada no livro de Manfredo Do Carmo (teorema 2, §5.7).

Observação 4.1 Sejam agora $X : U \rightarrow X(U) \subset S$ uma parametrização compatível com a orientação de S e $R \subset X(U)$ uma região limitada de S . Se $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então a integral

$$\iint_{X^{-1}(R)} f \circ X \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv,$$

não depende da parametrização X compatível com a orientação de S .

De fato, seja $Y : \bar{U} \rightarrow Y(\bar{U})$ outra parametrização de S compatível com a orientação de S tal que $R \subset Y(\bar{U})$.

Então $R \subset W = X(U) \cap Y(\bar{U})$. Seja $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$ a aplicação de mudança de coordenadas.

Como

$$Y_{\bar{u}} \wedge Y_{\bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{u}, \bar{v})(X_u \wedge X_v)(h(\bar{u}, \bar{v})) \text{ e } \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} > 0 \text{ em } Y^{-1}(W),$$

temos, pelo teorema de mudança de variáveis em integrais duplas, que:

$$\begin{aligned} & \iint_{X^{-1}(R)} f(X(u, v)) \sqrt{EG - F^2}(u, v) \, du \, dv \\ &= \iint_{h^{-1}(X^{-1}(R))} f(X(h(\bar{u}, \bar{v}))) \sqrt{EG - F^2}(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{u}, \bar{v}) \, d\bar{u} \, d\bar{v} \\ &= \iint_{Y^{-1}(R)} f(Y(\bar{u}, \bar{v})) \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}(\bar{u}, \bar{v}) \, d\bar{u} \, d\bar{v}, \end{aligned}$$

já que

$$\begin{aligned} \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}(\bar{u}, \bar{v}) &= \|Y_{\bar{u}} \wedge Y_{\bar{v}}\|(\bar{u}, \bar{v}) \\ &= \|X_u \wedge X_v\|(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{u}, \bar{v}) \\ &= \sqrt{EG - F^2}(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{u}, \bar{v}). \end{aligned}$$

Esta integral é chamada *integral de f sobre a região R* e é denotada por $\iint_R f \, d\sigma$.

Teorema 4.2 (Teorema Local de Gauss-Bonnet)

Seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização isotérmica da superfície S compatível com a orientação, onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é homeomorfo a um disco aberto. Seja $R \subset X(U)$ uma região simples de S e seja $\alpha : I \rightarrow S$ tal que $\partial R = \alpha(I)$. Suponha que α é orientada positivamente, parametrizada pelo comprimento de arco s , e sejam $\alpha(s_0), \dots, \alpha(s_k)$ e $\theta_0, \dots, \theta_k$, respectivamente, os vértices e os ângulos externos de α . Então,

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa_g(s) ds + \iint_R \mathbf{K} d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi, \quad (39)$$

onde κ_g é a curvatura geodésica dos arcos regulares de α e \mathbf{K} é a curvatura Gaussiana de S .

Observação 4.2 Veremos no corolário 4.2, que o resultado acima é válido para qualquer região simples de uma superfície regular. Isto é plausível, pois a equação (39) não envolve de maneira alguma uma parametrização particular.

Prova.

Seja $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$ a expressão de α na parametrização X . Pela proposição 3.3 da seção 4.3, temos:

$$\kappa_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right) + \frac{d\varphi_i}{ds},$$

onde $\varphi_i(s)$ é uma função diferenciável que mede o ângulo positivo de X_u a $\alpha'(s)$ em $[s_i, s_{i+1}]$.

Integrando a expressão acima em todos os intervalos $[s_i, s_{i+1}]$ e somando os resultados, obtemos:

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa_g(s) ds = \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right) ds + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds. \quad (40)$$

Utilizaremos, agora, o Teorema de Gauss-Green no plano: se $P(u, v)$ e $Q(u, v)$ são funções diferenciáveis em uma região simples $A \subset \mathbb{R}^2$, cuja fronteira é dada por $\beta(s) = (u(s), v(s))$, então:

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(P \frac{du}{ds} + Q \frac{dv}{ds} \right) ds = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du dv.$$

Logo, a expressão (40) fica:

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa_g(s) ds = \iint_{X^{-1}(R)} \left[\left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right] du dv + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds.$$

Como $F \equiv 0$, temos, pelo exemplo 2.3 da seção 4.2, que

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right].$$

Portanto,

$$\iint_{X^{-1}(R)} \left[\left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right] du dv = - \iint_{X^{-1}(R)} \mathbf{K} \sqrt{EG} du dv = - \iint_R \mathbf{K} d\sigma.$$

Por outro lado, pelo teorema do índice de rotação,

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds = \sum_{i=0}^k (\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i)) = 2\pi - \sum_{i=0}^k \theta_i,$$

pois α é orientada positivamente.

Utilizando os fatos acima, obtemos

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa_g(s) ds + \iint_R \mathbf{K} d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi. \quad \blacksquare$$

Observação 4.3 Antes de passarmos à versão global do teorema de Gauss-Bonnet, vamos mostrar como as técnicas utilizadas na demonstração do teorema acima podem ser usadas para obter uma interpretação da curvatura Gaussiana em termos de paralelismo.

Sejam $X : U \rightarrow X(U) \subset S$ uma parametrização ortogonal compatível com a orientação, $R \subset X(U)$ uma região simples sem vértices e $p \in \text{int}(R)$.

Seja $\alpha : [0, \ell] \rightarrow X(U)$ uma curva parametrizada regular tal que $\alpha([0, \ell]) = \partial R$.

Seja w_0 um vetor unitário tangente a S em $\alpha(0)$ e seja $\omega(s)$, $s \in [0, \ell]$, o transporte paralelo de w_0 ao longo de α .

Então, pela proposição 3.3 da seção 4.3 e pelo teorema de Gauss-Green no plano, obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\ell \left[\frac{D\omega}{ds} \right] ds = \int_0^\ell \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right) ds + \int_0^\ell \frac{d\varphi}{ds} ds \\ &= - \iint_R \mathbf{K} d\sigma + \varphi(\ell) - \varphi(0) = - \iint_R \mathbf{K} d\sigma + \Delta\varphi, \end{aligned}$$

onde $\varphi(s)$ é uma determinação diferenciável do ângulo positivo de X_u a $\omega(s)$ e $X(u(s), v(s)) = \alpha(s)$.

Então, como

$$\Delta\varphi = \iint_R \mathbf{K} d\sigma,$$

temos que $\Delta\varphi$ não depende da parametrização ortogonal X , não depende da escolha de w_0 e também não depende da escolha de $\alpha(0)$.

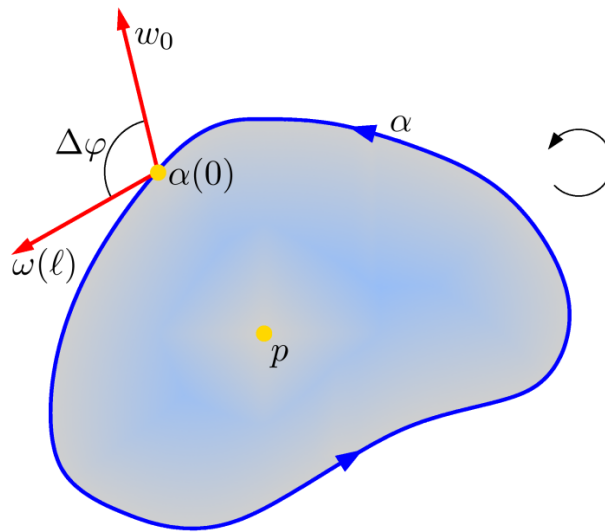


Fig. 40:

Tomando o limite, como na proposição 3.4 do capítulo 4, temos:

$$\lim_{R \rightarrow p} \frac{\Delta\varphi}{A(R)} = \mathbf{K}(p),$$

onde $A(R)$ é a área da região R .

- A expressão $\iint_R \mathbf{K} \, d\sigma = \Delta\varphi$ também é válida quando ∂R é uma curva simples, fechada e regular por partes, i.e., quando R é uma região simples com vértices.

Observação 4.4 Sejam C um paralelo da esfera unitária S^2 de colatitude φ e w_0 um vetor unitário tangente a C em um ponto $p \in C$. Então o ângulo orientado entre w_0 e seu transporte paralelo após completar uma volta é dado por

$$\Delta\varphi = \iint_R \mathbf{K} \, d\sigma = \iint_R d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^\varphi \sqrt{EG - F^2} \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\varphi \text{sen } \varphi \, d\varphi \, d\theta = 2\pi(1 - \cos \varphi),$$

como havíamos obtido anteriormente no exemplo 3.4 da seção 3 deste capítulo, onde $E = 1$, $G = (\text{sen } \varphi)^2$, $F = 0$ são os coeficientes da primeira forma fundamental da parametrização

$$X(\varphi, \theta) = (\text{sen } \varphi \cos \theta, \text{sen } \varphi \text{sen } \theta, \cos \varphi)$$

da esfera unitária. \square

Para demonstrarmos a versão global do teorema de Gauss-Bonnet, precisamos de alguns preliminares topológicos.

Definição 4.2 Seja S uma superfície regular. Dizemos que uma região $R \subset S$ é *regular* se R é compacta e a sua fronteira ∂R é uma união finita de curvas fechadas, simples, regulares por partes que não se intersectam.

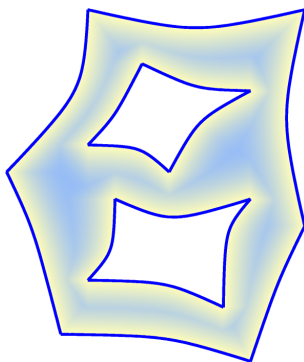


Fig. 41: Regular

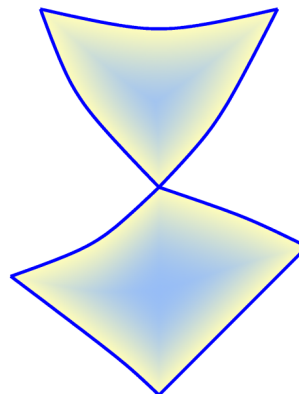


Fig. 42: Não é regular

Observação 4.5 Vamos considerar uma superfície compacta como uma região regular, cuja fronteira é o conjunto vazio.

Definição 4.3 Dizemos que uma região simples que tem apenas três vértices é um *triângulo*.

Definição 4.4 Uma *triangulação* de uma região regular $R \subset S$ é uma família finita \mathcal{T} de triângulos T_i , $i = 1, \dots, n$, tal que

- (1) $\bigcup_{i=1}^n T_i = R$,
- (2) Se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, $i \neq j$, então $T_i \cap T_j$ é uma aresta comum de T_i e T_j ou é um vértice comum de T_i e T_j .

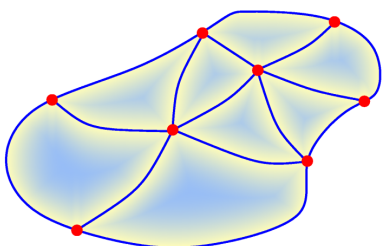


Fig. 43: Triangulação

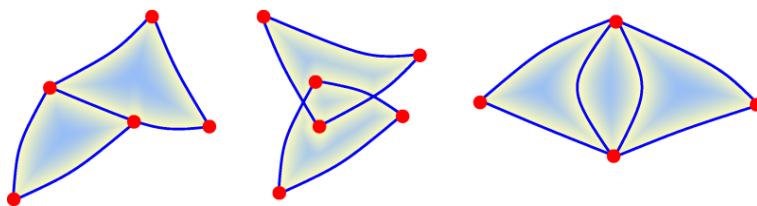


Fig. 44: Não são triangulações

Definição 4.5 Dada uma triangulação \mathcal{T} de uma região regular $R \subset S$ de uma superfície S , denotamos por F o número de triângulos (faces), por E o número de lados (arestas) e por V o número de vértices da triangulação. O número

$$\Xi(R) = F - E + V$$

é chamado a *característica de Euler-Poincaré* da triangulação \mathcal{T} .

Exemplo 4.1 Para a triangulação do disco D dada pela figura abaixo temos: $F = 4$, $E = 8$ e $V = 5$. Portanto, $\Xi(D) = 4 - 8 + 5 = 1$. \square

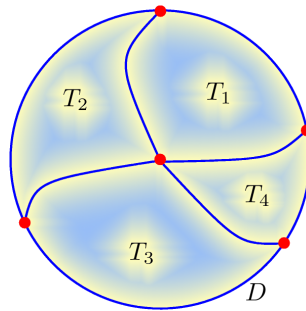


Fig. 45: Triangulação do disco D

As proposições abaixo serão apresentadas sem demonstração. Uma exposição destes fatos pode ser encontrada, por exemplo, no livro de L. Ahlfors e L. Sario, *Riemann Surfaces*, Princeton Univ. Press, NJ, 1960, cap. 1.

Proposição 4.1 *Toda região regular de uma superfície regular admite uma triangulação.*

Proposição 4.2 *A característica de Euler-Poincaré de uma região regular R de uma superfície S não depende da triangulação de R .*

Proposição 4.3 *Sejam S_1 e S_2 superfícies regulares. Então duas regiões regulares $R_1 \subset S_1$ e $R_2 \subset S_2$ são homeomorfas se, e só se, ∂R_1 e ∂R_2 têm o mesmo número de componentes conexas e $\Xi(R_1) = \Xi(R_2)$.*

A proposição acima mostra que a característica de Euler-Poincaré é um invariante topológico de uma região regular R .

Tendo em vista as aplicações do teorema de Gauss-Bonnet, mencionaremos o importante fato de que este invariante topológico possibilita uma classificação das superfícies compactas em \mathbb{R}^3 (\implies orientáveis).

Observemos primeiro que a característica de Euler-Poincaré da esfera é 2, a do toro (esfera com uma alça) é zero, a do bitoro (esfera com duas alças) é -2 e, em geral, a de um g -toro (esfera com g alças) é $2 - 2g$.

De fato, demonstra-se em Topologia Combinatória (ver o livro de Seifert e Threlfall, *Lecciones de Topologia*) que toda superfície compacta orientável é o espaço quociente de um polígono por uma relação de equivalência segundo a qual os lados que constituem o bordo do polígono são identificados dois a dois, de acordo com os esquemas que são ilustrados nas figuras abaixo.

Se $\pi : P \rightarrow S$ é a aplicação quociente do polígono P de $4n$ lados sobre a superfície S , o contorno de P é transformado por π numa reunião de $2g$ círculos com um ponto em comum.

O número

$$g = \frac{2 - \chi(S)}{2}$$

é chamado o *gênero de S* .

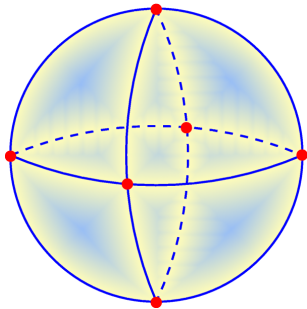


Fig. 46: Esfera

$$F = 8, E = 12, V = 6 \implies \chi(S^2) = 8 - 12 + 6 = 2$$

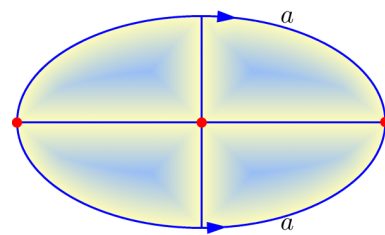


Fig. 47:

$$F = 4, E = 6, V = 4 \implies \chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$$

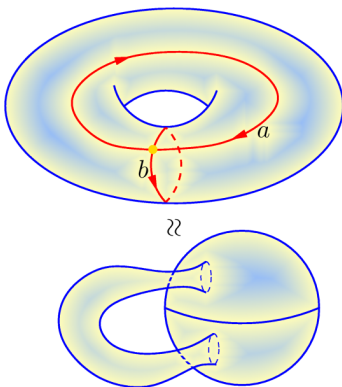


Fig. 48: Toro

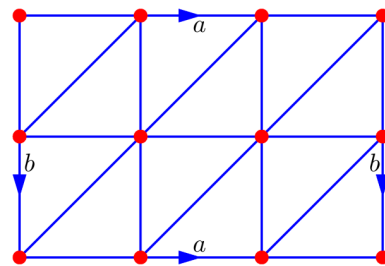


Fig. 49: Polígono de 4 lados

$$F = 12, E = 18, V = 6 \implies \chi(T) = 12 - 18 + 6 = 0$$

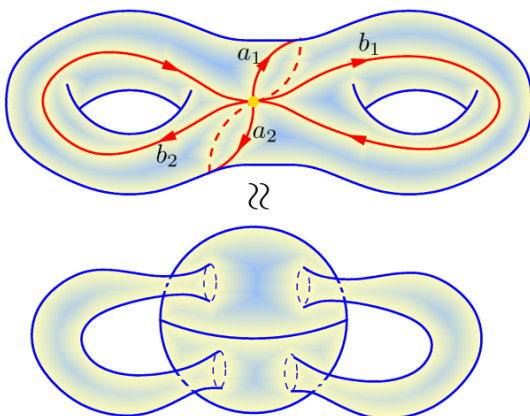


Fig. 50: Bitoro

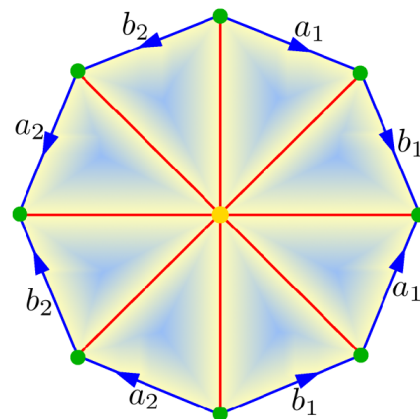


Fig. 51: Polígono de 8 lados

$$F = 8, E = 12, V = 2 \implies \chi(\text{bitoro}) = 8 - 12 + 2 = -2$$

Em geral: g -toro \sim esfera com g alças

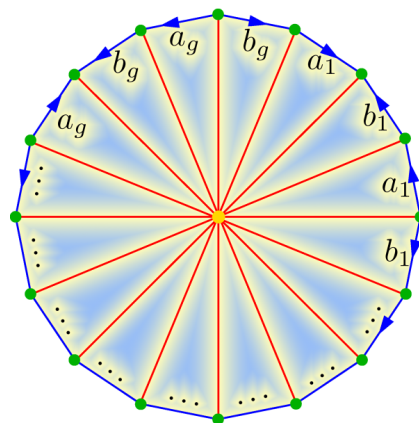


Fig. 52: Polígono de $4g$ lados

$$\implies \chi(g\text{-toro}) = 4g - 6g + 2 = 2 - 2g$$

Teorema 4.3 (Teorema de classificação das superfícies compactas regulares em \mathbb{R}^3)

Toda superfície regular compacta $S \subset \mathbb{R}^3$ é homeomorfa à esfera ou a um g -toro. Então $\Xi(S) = 2 - 2g$, $g = 0, 1, \dots$, sendo $g = 0$ no caso da esfera.

Corolário 4.1 Sejam S_1 e S_2 duas superfícies regulares compactas em \mathbb{R}^3 . Então S_1 é homeomorfa a S_2 se, e só se, $\Xi(S_1) = \Xi(S_2)$.

Proposição 4.4 Sejam S uma superfície regular orientada e seja $\{X_\alpha : U_\alpha \rightarrow X_\alpha(U_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ uma família de parametrizações compatíveis com a orientação de S que cobre toda a superfície S . Seja R uma região regular de S . Então existe uma triangulação \mathcal{T} de R tal que cada triângulo $T \in \mathcal{T}$ está contido em alguma vizinhança coordenada $X_\alpha(U_\alpha)$ da família $\{X_\alpha\}$. Além disso, se a fronteira de cada triângulo está orientado positivamente, triângulos adjacentes determinam orientações opostas no lado em comum.

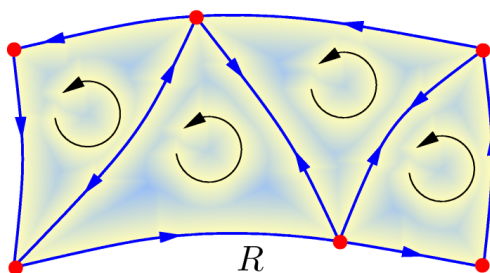


Fig. 53: Triangulação da região R

Finalmente, seja $R \subset S$ uma região regular de uma superfície orientada S e seja \mathcal{T} uma triangulação de R tal que todo triângulo $T_j \in \mathcal{T}$, $j = 1, \dots, k$, está contido em uma vizinhança coordenada $X_j(U_j)$ de uma família de parametrizações $\{X_\alpha : U_\alpha \rightarrow X_\alpha(U_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ compatíveis com a orientação de S . Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. A proposição abaixo mostra que faz sentido falar da a integral de f sobre a região S .

Proposição 4.5 *Com a notação acima, a soma*

$$\sum_{j=1}^k \iint_{X_j^{-1}(T_j)} f \circ X_j(u_j, v_j) \sqrt{E_j G_j - F_j^2}(u_j, v_j) du_j dv_j$$

não depende da triangulação \mathcal{T} nem da família $\{X_\alpha\}$ de parametrizações de S .

Esta soma é chamada a integral de f sobre a região regular R e será denotada por

$$\iint_R f d\sigma.$$

Teorema 4.4 (Teorema de Gauss-Bonnet Global)

Seja R uma região regular de uma superfície orientada S e sejam C_1, \dots, C_n as curvas fechadas, simples e regulares por partes que formam a fronteira ∂R de R . Suponha que cada C_i é orientada positivamente e que $\{\theta_1, \dots, \theta_p\}$ é o conjunto de todos os ângulos externos de C_1, \dots, C_n . Então

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} \kappa_g(s) ds + \iint_R \mathbf{K} d\sigma + \sum_{i=1}^p \theta_i = 2\pi\chi(R),$$

onde s denota o comprimento de arco de C_i , e a integral sobre C_i é a soma das integrais em cada arco regular de C_i .

Prova.

Seja $\{X_\alpha : U_\alpha \rightarrow X_\alpha(U_\alpha) \subset S \mid \alpha \in A\}$ uma família de parametrizações isotérmicas compatíveis com a orientação de S que cobre toda a superfície. Pela proposição 4.4, existe uma triangulação \mathcal{T} tal que cada triângulo $T \in \mathcal{T}$ está contido em uma vizinhança coordenada $X_\alpha(U_\alpha)$ da família $\{X_\alpha\}$. Além disso, se a fronteira de cada triângulo é orientada positivamente, triângulos adjacentes determinam orientações opostas no lado em comum.

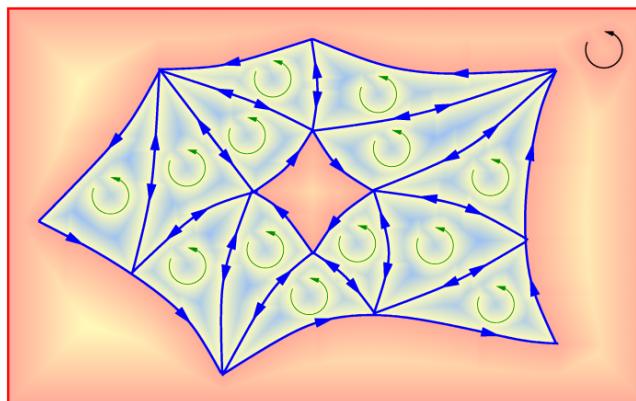


Fig. 54:

Aplicando o teorema de Gauss-Bonnet local a cada triângulo e somando os resultados obtemos, utilizando a proposição 4.5 e o fato de que cada aresta "interior" é contada duas vezes com orientações opostas, que

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} \kappa_g(s) ds + \iint_R \mathbf{K} d\sigma + \sum_{j,k=1}^{F,3} \theta_{j,k} = 2\pi F,$$

onde F é o número de triângulos de \mathcal{T} e $\theta_{j,1}, \theta_{j,2}, \theta_{j,3}$ são os ângulos externos do triângulo T_j .

Definimos $\varphi_i = \pi - \theta_i$ como sendo o **ângulo interno** a uma curva fechada, simples e regular por partes num de seus vértices que tem ângulo externo θ_i .

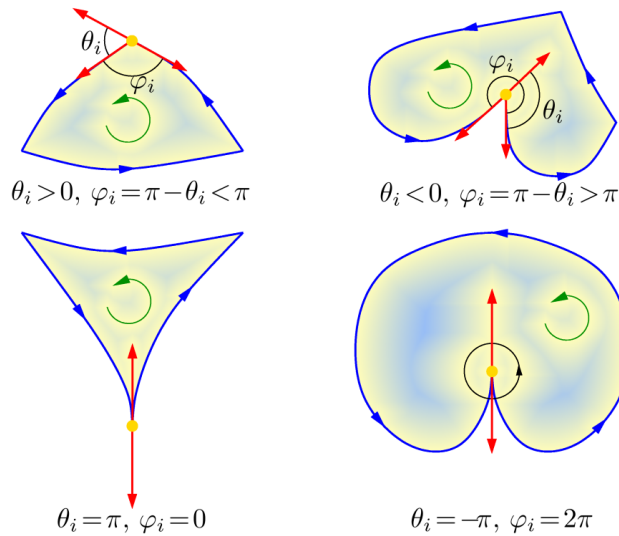


Fig. 55:

Então

$$\sum_{j,k=1}^{F,3} \theta_{j,k} = \sum_{j,k=1}^{F,3} \pi - \sum_{j,k=1}^{F,3} \varphi_{j,k} = 3\pi F - \sum_{j,k=1}^{F,3} \varphi_{j,k}.$$

Utilizaremos a notação:

- E_e = número de arestas externas de \mathcal{T} ;
- E_i = número de arestas internas de \mathcal{T} ;
- V_e = número de vértices externos de \mathcal{T} ;
- V_i = número de vértices internos de \mathcal{T} .

Como as curvas C_1, \dots, C_n do bordo de R são fechadas, temos que $V_e = E_e$.

Além disso, como $3F$ é a soma do número de lados dos triângulos de \mathcal{T} , temos que

$$3F = 2E_i + E_e.$$

Portanto,

$$\sum_{j,k=1}^{F,3} \theta_{j,k} = 2\pi E_i + \pi E_e - \sum_{j,k=1}^{F,3} \varphi_{j,k}.$$

Os vértices externos podem ser vértices de alguma curva C_i ou vértices introduzidos pela triangulação. Então

$$V_e = V_{ec} + V_{et},$$

onde V_{ec} é o número de vértices das curvas C_i e V_{et} é o número de vértices externos da triangulação que não são vértices de alguma das curvas C_i .

Como a soma dos ângulos internos ao redor de um vértice interno é 2π , e a soma dos ângulos internos em torno de um vértice externo que não é um dos vértices das curvas C_i é π , obtemos:

$$\sum_{j,k=1}^{F,3} \theta_{j,k} = 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \sum_{\ell=1}^p (\pi - \theta_\ell).$$

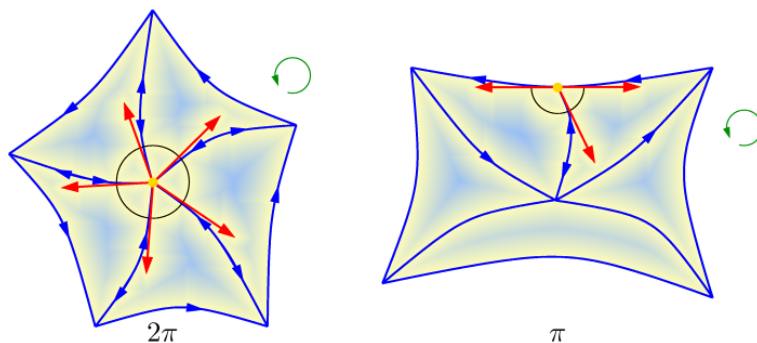


Fig. 56:

Somando e subtraindo πE_e na expressão acima e sendo $E_e = V_e = V_{ec} + V_{et}$, concluímos que:

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^{F,3} \theta_{j,k} &= 2\pi E_i + 2\pi E_e - \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \pi V_{ec} + \sum_{\ell=1}^p \theta_\ell \\ &= 2\pi(E_i + E_e) - \pi(V_{et} + V_{ec}) - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \pi V_{ec} + \sum_{\ell=1}^p \theta_\ell \\ &= 2\pi E - 2\pi(V_i + V_{et} + V_{ec}) + \sum_{\ell=1}^p \theta_\ell \\ &= 2\pi E - 2\pi V + \sum_{\ell=1}^p \theta_\ell. \end{aligned}$$

Juntando os resultados acima, obtemos

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} \kappa_g(s) ds + \iint_R \mathbf{K} d\sigma + \sum_{i=1}^p \theta_i = 2\pi(F - E + V) = 2\pi\Xi(R). \blacksquare$$

Como a característica de Euler-Poincaré de uma região simples R é 1 (ver exemplo 4.1 e proposição 4.2), obtemos (ver observação 4.2):

Corolário 4.2 *Se R é uma região simples de S , então*

$$\sum_{i=1}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa_g(s) ds + \iint_R \mathbf{K} d\sigma + \sum_{i=1}^k \theta_i = 2\pi.$$

Levando em conta o fato de que uma superfície compacta pode ser considerada como uma região com fronteira vazia, obtemos:

Corolário 4.3 *Seja S uma superfície regular compacta em \mathbb{R}^3 . Então*

$$\iint_S \mathbf{K} d\sigma = 2\pi\Xi(S).$$

Faremos agora algumas aplicações do teorema de Gauss-Bonnet. Para estas aplicações e para os exercícios no final desta seção, precisaremos do seguinte resultado da topologia do plano.

Teorema 4.5 (Teorema da curva de Jordan)

Seja $C \subset \mathbb{R}^2$ uma curva fechada, simples e regular por partes. Então $\mathbb{R}^2 - C$ tem duas componentes conexas, uma limitada D e outra ilimitada A , tais que $\partial D = \partial A = C$. Além disso, D é homeomorfo a um disco, isto é, C é o bordo de uma região simples.

(1) Uma superfície compacta com curvatura positiva é homeomorfa a uma esfera.

Pelo corolário 4.3, a característica de Euler-Poincaré de uma tal superfície é positiva. Portanto, pelo teorema 4.3 S é homeomorfa a uma esfera.

(2) Seja S uma superfície orientável com curvatura Gaussiana não-positiva (i.e. $\mathbf{K} \leq 0$). Então duas geodésicas γ_1 e γ_2 que partem de um ponto $p \in S$ não podem se encontrar novamente em um ponto $q \in S$ de tal forma que os traços de γ_1 e γ_2 constituam a fronteira de uma região simples R de S .

Suponhamos que o contrário seja verdade. Como $\Xi(R) = 1$ e as curvas do bordo de R são geodésicas, temos pelo teorema de Gauss-Bonnet, que

$$\iint_R \mathbf{K} d\sigma + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi,$$

onde θ_1 e θ_2 são os ângulos externos do bordo de R no pontos p e q .

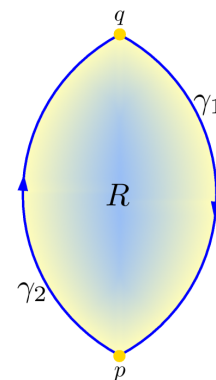


Fig. 57:

Temos $|\theta_i| \neq \pi$, isto é, $|\theta_i| < \pi$, $i = 1, 2$, pois, caso contrário, as geodésicas seriam tangentes e, portanto, iguais, pela unicidade das geodésicas; não seriam, então, bordo de região alguma.

Logo, como $K \leq 0$, teríamos

$$2\pi > \theta_1 + \theta_2 = 2\pi - \iint_R K d\sigma \geq 2\pi,$$

uma contradição.

Quando $\theta_1 = \theta_2 = 0$, a união dos traços das geodésicas γ_1 e γ_2 constituem uma geodésica simples e fechada de S (isto é, uma curva regular, simples e fechada que é uma geodésica).

Então sobre uma superfície de curvatura Gaussiana $K \leq 0$, não existe uma geodésica simples e fechada que seja fronteira de uma região simples.

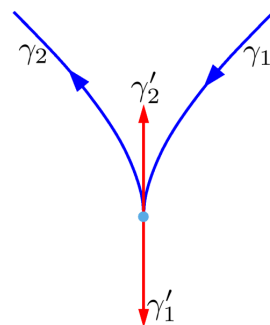


Fig. 58:

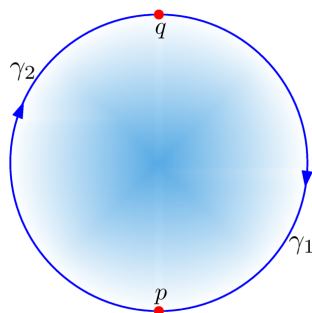


Fig. 59:

(3) Seja S uma superfície homeomorfa a um cilindro com curvatura Gaussiana $K < 0$. Então S tem no máximo uma geodésica fechada simples.

Sendo S homeomorfa a um cilindro, existe um homeomorfismo $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{p\}$ entre S e o plano menos um ponto p .

Suponhamos que S contém uma geodésica fechada simples Γ . Então $\varphi(\Gamma)$ é o bordo de uma região simples em \mathbb{R}^2 que contém p em seu interior.

De fato, como $K < 0$, pela aplicação **(2)**, Γ não pode ser o bordo de uma região simples; portanto, $\varphi(\Gamma)$ tem que ser o bordo de uma região do plano que contém o ponto p em seu interior.

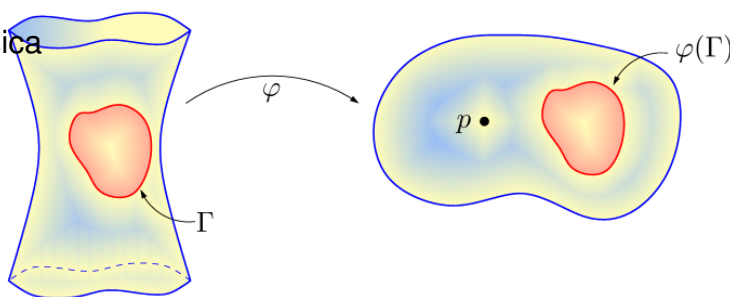


Fig. 60:

Suponhamos agora que S contenha outra geodésica simples fechada $\tilde{\Gamma}$.

É um fato conhecido que se duas superfícies regulares em \mathbb{R}^3 são homeomorfas então elas

são difeomorfas. Podemos, então, supor que $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{p\}$ é um difeomorfismo.

Afirmção: $\Gamma \cap \tilde{\Gamma} = \emptyset$.

(1º) Γ e $\tilde{\Gamma}$ não podem se intersectar em apenas um ponto.

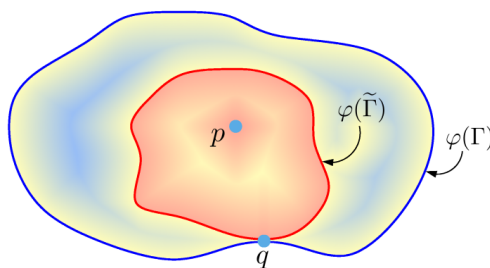


Fig. 61:

Suponhamos, por absurdo, que $\varphi(\Gamma)$ e $\varphi(\tilde{\Gamma})$ se intersectam só no ponto q . Então $\varphi(\Gamma)$ e $\varphi(\tilde{\Gamma})$ são tangentes em q . De fato, sejam r uma reta que passa por q e não é ortogonal às retas tangentes a $\varphi(\Gamma)$ e $\varphi(\tilde{\Gamma})$ em q .

Sejam $\gamma, \tilde{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ parametrizações pelo comprimento de arco de $\varphi(\Gamma)$ e $\varphi(\tilde{\Gamma})$, respectivamente, tais que $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = q$.

Seja ainda v_1 um vetor unitário paralelo à reta r e v_2 um vetor unitário ortogonal a v_1 . Então existem funções diferenciáveis $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= q + x(s)v_1 + y(s)v_2, \\ \tilde{\gamma}(s) &= q + \tilde{x}(s)v_1 + \tilde{y}(s)v_2, \end{aligned}$$

com $x(0) = y(0) = \tilde{x}(0) = \tilde{y}(0) = 0$.

Logo, sendo $x(s) = \langle \gamma(s) - q, v_1 \rangle$ e $\tilde{x}(s) = \langle \tilde{\gamma}(s) - q, v_1 \rangle$, temos que:

$$\begin{aligned} x'(0) &= \langle \gamma'(0), v_1 \rangle \neq 0 \\ \text{e } \tilde{x}'(0) &= \langle \tilde{\gamma}'(0), v_1 \rangle \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto, existe $\varepsilon' > 0, \varepsilon' < \varepsilon$, tal que $x|_{(-\varepsilon', \varepsilon')}$ e $\tilde{x}|_{(-\varepsilon', \varepsilon')}$ são invertíveis.

Sejam $s(x)$ e $\tilde{s}(x)$, $x \in (-\delta, \delta)$, as inversas de $x|_{(-\varepsilon', \varepsilon')}$ e $\tilde{x}|_{(-\varepsilon', \varepsilon')}$, respectivamente.

Logo,

$$\begin{aligned} \beta(x) &= \gamma(s(x)) = q + x v_1 + y(s(x)) v_2 \\ \text{e } \tilde{\beta}(x) &= \tilde{\gamma}(\tilde{s}(x)) = q + x v_1 + \tilde{y}(\tilde{s}(x)) v_2. \end{aligned}$$

Ou seja, $\varphi(\Gamma)$ e $\varphi(\tilde{\Gamma})$ podem ser escritas como gráficos sobre a reta r numa vizinhança do ponto q .

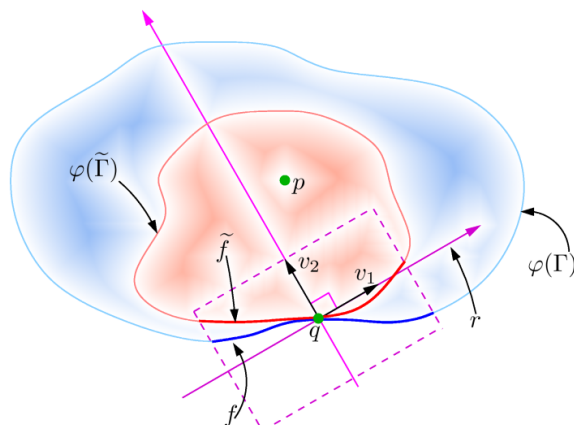


Fig. 62:

Sejam $f(x) = y(s(x))$ e $\tilde{f}(x) = \tilde{y}(\tilde{s}(x))$.

Então, como $\varphi(\tilde{\Gamma})$ está contida na região limitada por $\varphi(\Gamma)$, temos que $f(x) \leq \tilde{f}(x)$ para todo x . Logo $f'(0) = \tilde{f}'(0)$, pois 0 é um ponto de mínimo de $\tilde{f} - f$, já que $(\tilde{f} - f)(0) = 0$ e $(\tilde{f} - f)(x) \geq 0$ para todo $x \in (-\delta, \delta)$.

Portanto, como

$$\begin{aligned} \beta'(0) &= v_1 + f'(0) v_2 \\ \text{e } \tilde{\beta}'(0) &= v_1 + \tilde{f}'(0) v_2, \end{aligned}$$

$\varphi(\Gamma)$ e $\varphi(\tilde{\Gamma})$ são tangentes no ponto q .

Sendo $\varphi(\Gamma)$ e $\varphi(\tilde{\Gamma})$ tangentes no ponto q , Γ e $\tilde{\Gamma}$ também seriam tangentes no ponto $\varphi^{-1}(q)$; uma contradição, pois, pela unicidade das geodésicas, teríamos $\Gamma = \tilde{\Gamma}$.

(2º) Suponhamos que $\varphi(\Gamma) \cap \varphi(\tilde{\Gamma}) \neq \emptyset$. Então, pelo provado acima, $\varphi(\Gamma) \cap \varphi(\tilde{\Gamma})$ consiste de pelo menos dois pontos.

Sejam r_1 e r_2 dois pontos consecutivos da intersecção $\varphi(\Gamma) \cap \varphi(\tilde{\Gamma})$.

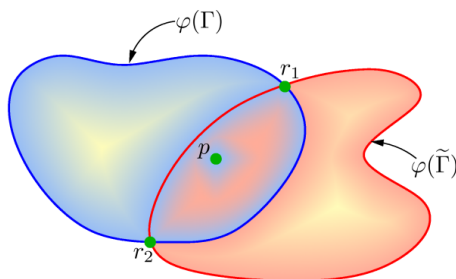


Fig. 63:

Então a união de um dos arcos de $\varphi(\Gamma)$ com um dos arcos de $\varphi(\tilde{\Gamma})$ entre r_1 e r_2 formaria a fronteira de uma região simples em $\mathbb{R}^2 - \{p\}$.

Assim, na superfície S , existiria uma região simples limitada por dois arcos de geodésicas, uma contradição, pela aplicação (2), pois $K < 0$.

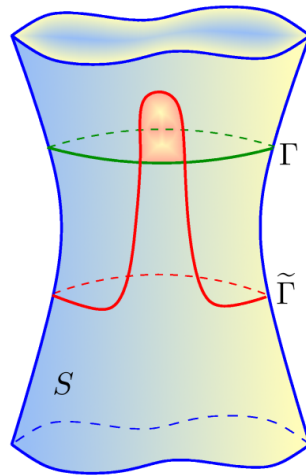


Fig. 64:

Logo $\Gamma \cap \tilde{\Gamma} = \emptyset$, como foi afirmado.

(3º) Suponhamos agora que existam duas geodésicas fechadas e simples Γ e $\tilde{\Gamma}$ em S que não se intersectam.

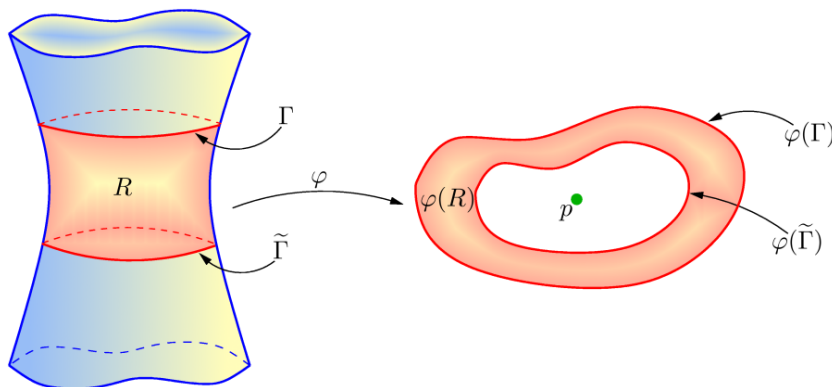


Fig. 65:

Seja R a região limitada por Γ e $\tilde{\Gamma}$. Como R é homeomorfa a um anel, temos que $\Xi(R) = 0$ (ver triangulação abaixo).

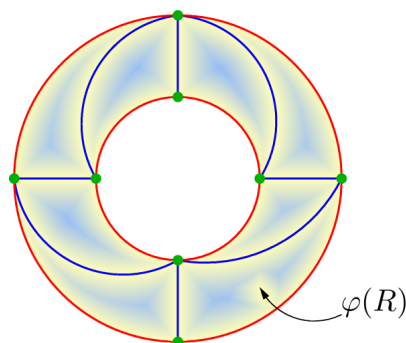


Fig. 66: $F = 8, E = 16, V = 8 \implies \chi(R) = 8 - 16 + 8 = 0$

Por outro lado, pelo teorema de Gauss-Bonnet,

$$\iint_R \mathbf{K} \, d\sigma = 2\pi\Xi(R) = 0,$$

o que é uma contradição, já que $\mathbf{K} < 0$.

(4) Se existem duas geodésicas fechadas e simples Γ_1 e Γ_2 numa superfície S compacta, conexa e com curvatura Gaussiana $\mathbf{K} > 0$, então Γ_1 e Γ_2 se intersectam.

Para provar este resultado precisamos do *teorema da curva de Jordan na esfera*: *Seja $C \subset S^2$ uma curva fechada, simples e regular por partes. Então $S^2 - C$ tem duas componentes conexas D_1 e D_2 limitadas homeomorfas a um disco, tais que $\partial D_1 = \partial D_2 = C$.*

Pela aplicação **(1)**, S é homeomorfa a uma esfera S^2 e, portanto, difeomorfa.

Seja $\varphi : S \rightarrow S^2$ um difeomorfismo. Suponhamos que S possui duas geodésicas fechadas e simples Γ_1 e Γ_2 que não se intersectam. Então $\varphi(\Gamma_1)$ e $\varphi(\Gamma_2)$ são duas curvas regulares, fechadas e simples na esfera que não se intersectam.

Seja D a região limitada por $\varphi(\Gamma_1)$ que contém $\varphi(\Gamma_2)$. Como D é homeomorfa a um disco, temos que a região R delimitada por $\varphi(\Gamma_1)$ e $\varphi(\Gamma_2)$ é homeomorfa a um anel. Logo, $\Xi(R) = 0$.

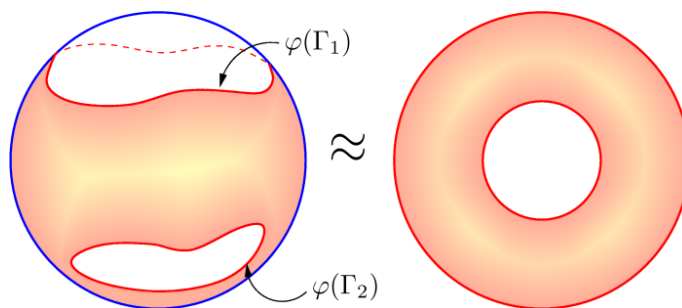


Fig. 67:

Pelo teorema de Gauss-Bonnet,

$$\iint_R \mathbf{K} \, d\sigma = 2\pi\Xi(R) = 0,$$

uma contradição, já que $\mathbf{K} > 0$.

(5) Provaremos agora o seguinte resultado, devido a Jacobi: *Seja $\alpha : [0, \ell] \rightarrow S$ uma curva parametrizada regular fechada (i.e. $\alpha(0) = \alpha(\ell)$ e $\alpha^{(i)}(0) = \alpha^{(i)}(\ell)$ para $i = 1, 2, \dots, n, \dots$) com curvatura diferente de zero em todos os pontos. Suponha que a curva descrita pelo vetor normal à curva $\eta : I \rightarrow S^2$ é simples. Então $\eta(I)$ divide S^2 em duas regiões com áreas iguais.*

Podemos supor que α está parametrizada pelo comprimento de arco.

Seja

$$\bar{s}(s) = \int_0^s \|\eta'(\xi)\| d\xi,$$

a função comprimento de arco da curva $\eta : I \rightarrow S^2$. Então $\bar{s}'(s) = \|\eta'(s)\|$ e

$$\frac{ds}{d\bar{s}}(\bar{s}) = \frac{1}{\|\eta'(s(\bar{s}))\|},$$

onde $s(\bar{s})$ é a inversa de $\bar{s}(s)$.

A curvatura geodésica κ_g de $\eta \circ s$ em \bar{s} é:

$$\kappa_g(\bar{s}) = \left\langle \frac{d^2(\eta \circ s)}{d\bar{s}^2}(\bar{s}), (\eta \circ s)(\bar{s}) \wedge \frac{d(\eta \circ s)}{d\bar{s}}(\bar{s}) \right\rangle,$$

onde estamos considerando a esfera S^2 com a orientação $N(p) = p$, para todo $p \in S^2$.

Como

- $\frac{d(\eta \circ s)}{d\bar{s}}(\bar{s}) = \eta'(s(\bar{s})) \cdot \frac{ds}{d\bar{s}}(\bar{s}) = (-\kappa(s(\bar{s}))\alpha'(s(\bar{s})) - \tau(s(\bar{s})) \cdot b(s(\bar{s}))) \frac{ds}{d\bar{s}}(\bar{s})$
- $\frac{d^2(\eta \circ s)}{d\bar{s}^2}(\bar{s}) = (-\kappa\alpha' - \tau b)(s(\bar{s})) \frac{d^2s}{d\bar{s}^2}(\bar{s}) - (\kappa'\alpha' + \tau'b)(s(\bar{s})) \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2(\bar{s}) - (\kappa^2 + \tau^2)(s(\bar{s})) \eta(s(\bar{s})) \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2(\bar{s}),$
- $\frac{ds}{d\bar{s}}(\bar{s}) = \frac{1}{\|\eta'(s(\bar{s}))\|} = \frac{1}{(\kappa^2 + \tau^2)^{1/2}(s(\bar{s}))},$

obtemos:

$$\begin{aligned} \kappa_g(\bar{s}) &= \frac{1}{(\kappa^2 + \tau^2)^{1/2}(s(\bar{s}))} \langle ((\kappa\alpha' + \tau b) \wedge \eta)(s(\bar{s})), \frac{d^2(\eta \circ s)}{d\bar{s}^2}(s(\bar{s})) \rangle \\ &= -\frac{1}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}(s(\bar{s}))} \langle (\kappa b - \tau\alpha')(s(\bar{s})), (\kappa'\alpha' + \tau'b)(s(\bar{s})) \rangle \\ &= \frac{\kappa'\tau - \tau'\kappa}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}}(s(\bar{s})) = \left(\frac{\kappa'\tau - \tau'\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \right) (s(\bar{s})) \frac{ds}{d\bar{s}}(\bar{s}) \\ &= -\frac{d}{ds} \left(\arctan \frac{\tau}{\kappa} \right) (s(\bar{s})) \frac{ds}{d\bar{s}}(\bar{s}). \end{aligned}$$

Então, sendo $s([0, \bar{\ell}]) = [0, \ell]$, temos

$$\int_0^{\bar{\ell}} \kappa_g(\bar{s}) d\bar{s} = -\int_0^{\ell} \frac{d}{ds} \left(\arctan \frac{\tau}{\kappa} \right) (s) ds = 0,$$

pois $\tau(0) = \tau(\ell)$ e $\kappa(0) = \kappa(\ell)$, já que $\alpha(0) = \alpha(\ell)$, $\alpha'(0) = \alpha'(\ell)$, $\alpha''(0) = \alpha''(\ell)$ e $\alpha'''(0) = \alpha'''(\ell)$.

Observe também que $\eta(0) = \eta(\ell)$ ($\implies b(0) = b(\ell)$) e $\eta'(0) = \eta'(\ell)$, isto é, $\eta : I \longrightarrow S^2$ é uma curva fechada e regular.

Seja R uma das regiões limitadas por $\eta(I)$ na esfera. Como η é uma curva simples, fechada e regular, pelo teorema da curva de Jordan na esfera, R é uma região simples. Logo $\Xi(R) = 1$ e, pelo teorema de Gauss-Bonnet,

$$\text{área}(R) = \iint_R \mathbf{K} \, d\sigma = 2\pi\Xi(R) = 2\pi,$$

já que $\mathbf{K} \equiv 1$. Assim, $\text{área}(S^2 - A) = 4\pi - 2\pi = 2\pi$, pois $\text{área}(S^2) = 4\pi$.

(6) Seja T um triângulo geodésico (i.e. os lados de T são geodésicas) em uma superfície orientada S . Sejam θ_1, θ_2 e θ_3 os ângulos externos de T e $\varphi_1 = \pi - \theta_1$, $\varphi_2 = \pi - \theta_2$, $\varphi_3 = \pi - \theta_3$ os ângulos internos.

Pelo teorema de Gauss-Bonnet,

$$\iint_T \mathbf{K} \, d\sigma + \sum_{i=1}^3 \theta_i = 2\pi.$$

Assim,

$$\iint_T \mathbf{K} \, d\sigma = 2\pi - \sum_{i=1}^3 (\pi - \varphi_i) = -\pi + \sum_{i=1}^3 \varphi_i.$$

Então a soma dos ângulos internos $\sum_{i=1}^3 \varphi_i$ de um triângulo geodésico é:

1. Igual a π se $\mathbf{K} = 0$;
2. Maior que π se $\mathbf{K} > 0$;
3. Menor que π se $\mathbf{K} < 0$.

Além disso, $\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi$ (o *excesso de T*) é dado por $\iint_T \mathbf{K} \, d\sigma$. Se $\mathbf{K} \neq 0$ em T e a restrição de

N a T é injetora, $\iint_T \mathbf{K} \, d\sigma$ é a área (com sinal) da imagem $N(T)$ de T pela aplicação de Gauss $N : S \longrightarrow S^2$ (ver final da observação 3.14 do capítulo 4).

Esta foi a forma como o próprio Gauss enunciou seu teorema: *O excesso de um triângulo geodésico T é igual à área de sua imagem esférica N(T).*

O fato acima está relacionado com uma controvérsia histórica sobre a possibilidade de provar (a partir dos quatro primeiros axiomas) o quinto axioma de Euclides (o axioma das paralelas), do qual decorre que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a π .

Considerando as geodésicas como retas, é possível mostrar que as superfícies com curvatura negativa constante constituem um modelo (local) de uma geometria onde valem os axiomas de Euclides, exceto o quinto e o axioma que garante a possibilidade de estender retas indefinidamente.

Em verdade, Hilbert mostrou que *não existe em \mathbb{R}^3 uma superfície com curvatura negativa constante cujas geodésicas possam ser estendidas indefinidamente* (a pseudo-esfera do exercício 6, seção 3.3 do livro de Manfredo Do Carmo, tem uma aresta circular de pontos singulares). Portanto, as superfícies em \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana negativa constante não fornecem um modelo para testar a independência do quinto axioma de Euclides.

No entanto, utilizando a noção de superfície abstrata, é possível contornar este problema e construir um modelo de geometria onde todos os axiomas de Euclides, menos o quinto, são válidos. Este axioma é, portanto, independente dos demais.

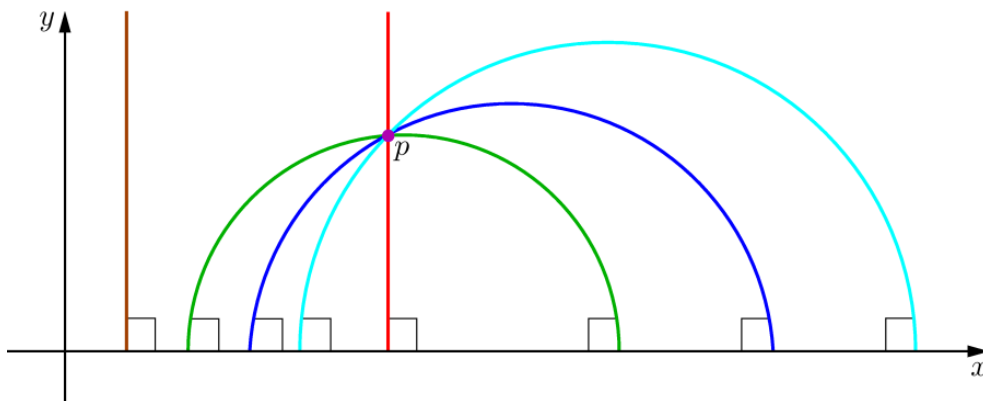


Fig. 68: Semi-plano de Poincaré

O Semi-plano de Poincaré (figura acima) é o semi-plano $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ com a métrica

$$\langle\langle v, w \rangle\rangle_{(x,y)} = \frac{1}{y^2} \langle v, w \rangle,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual de \mathbb{R}^2 . Com esta métrica, a superfície (abstrata) \mathcal{H} tem curvatura Gaussiana constante igual a -1 e suas geodésicas são as semi-retas e os semi-círculos perpendiculares ao eixo O_x .

(7) Campos de vetores sobre superfícies

Seja ν um campo diferenciável de vetores em uma superfície orientada S .

Dizemos que $p \in S$ é um *ponto singular* de ν se $\nu(p) = 0$. O ponto singular é dito *isolado* se existe uma vizinhança V de p em S tal que ν não tem pontos singulares em V além de p .

A cada ponto singular isolado p de um campo de vetores ν vamos associar um número inteiro,

o *índice de ν em p* , da seguinte maneira:

Seja $X : U \rightarrow X(U) \subset S$ uma parametrização ortogonal em $p = X(u_0, v_0)$, $(u_0, v_0) \in U$, compatível com a orientação de S , tal que $\nu(\bar{p}) \neq 0$ para todo $\bar{p} \in X(U) - \{p\}$, e seja $\alpha : [0, \ell] \rightarrow S$ uma curva parametrizada simples, fechada, regular por partes e orientada positivamente tal que $\alpha([0, \ell]) \subset X(U)$ é a fronteira de uma região simples R contendo p em seu interior.

Seja $\nu(t) = \nu(\alpha(t))$, $t \in [0, \ell]$, a restrição de ν ao longo de α , e seja $\varphi : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ uma determinação diferenciável por partes do ângulo positivo de X_u a $\nu(t)$, isto é,

$$\frac{\nu(t)}{\|\nu(t)\|} = \cos \varphi(t) \frac{X_u}{\|X_u\|}(\beta(t)) + \sin \varphi(t) \frac{X_v}{\|X_v\|}(\beta(t)),$$

onde $\alpha(t) = X(\beta(t))$ (o lema 5.1 do capítulo 1 pode ser estendido a curvas regulares por partes).

Como α é fechada ($\alpha(0) = \alpha(\ell)$) existe um inteiro \mathbb{I} definido por

$$2\pi\mathbb{I} = \varphi(\ell) - \varphi(0) = \int_0^\ell \varphi'(t) dt, \quad (41)$$

pois $\cos \varphi(\ell) = \cos \varphi(0)$ e $\sin \varphi(\ell) = \sin \varphi(0)$, já que $\nu(0) = \nu(\ell)$, $X_u(\beta(0)) = X_u(\beta(\ell))$ e $X_v(\beta(0)) = X_v(\beta(\ell))$. O inteiro \mathbb{I} é chamado o *índice de ν em p* .

Precisamos mostrar que \mathbb{I} está bem definido, isto é, que \mathbb{I} independe da parametrização X e da curva α escolhidas.

1º \mathbb{I} independe da parametrização X .

Seja $w_0 \in T_{\alpha(0)} S$ um vetor unitário e seja $\omega(t)$ o transporte paralelo de w_0 ao longo de α . Seja $\psi(t)$ uma determinação diferenciável por partes do ângulo positivo de $X_u(\beta(t))$ a $\omega(t)$.

Então, pela observação 4.3,

$$\psi(\ell) - \psi(0) = \iint_R \mathbf{K} d\sigma, \quad (42)$$

que independe da parametrização X .

Subtraindo as relações (41) e (42), obtemos:

$$\iint_R \mathbf{K} d\sigma - 2\pi\mathbb{I} = (\psi - \varphi)(\ell) - (\psi - \varphi)(0), \quad (43)$$

Sejam $e_1(t) = \frac{X_u}{\|X_u\|}(\beta(t))$, $e_2(t) = \frac{X_v}{\|X_v\|}(\beta(t))$, $\nu_1(t) = \frac{\nu(t)}{\|\nu(t)\|} = \cos \varphi(t) e_1(t) + \sin \varphi(t) e_2(t)$ e $w(t) = \cos \psi(t) e_1(t) + \sin \psi(t) e_2(t)$.

Sejam $v_2(t) = N(\alpha(t)) \wedge v_1(t)$ e $\xi(t)$ uma determinação diferenciável por partes do ângulo positivo de $v_1(t)$ a $w(t)$, isto é,

$$w(t) = \cos \xi(t) v_1(t) + \operatorname{sen} \xi(t) v_2(t).$$

Então, sendo $\bar{N}(t) = N \circ \alpha(t)$, temos:

$$\begin{aligned} w(t) &= \cos \xi(t) (\cos \varphi(t) e_1(t) + \operatorname{sen} \varphi(t) e_2(t)) \\ &+ \operatorname{sen} \xi(t) (\cos \varphi(t) \bar{N}(t) \wedge e_1(t) + \operatorname{sen} \varphi(t) \bar{N}(t) \wedge e_2(t)) \\ &= \cos \xi(t) (\cos \varphi(t) e_1(t) + \operatorname{sen} \varphi(t) e_2(t)) + \operatorname{sen} \xi(t) (\cos \varphi(t) e_2(t) - \operatorname{sen} \varphi(t) e_1(t)) \\ &= \cos(\xi(t) + \varphi(t)) e_1(t) + \operatorname{sen}(\xi(t) + \varphi(t)) e_2(t). \end{aligned}$$

Logo, existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que

$$\psi(t) = \xi(t) + \varphi(t) + 2\pi k,$$

para todo $t \in [0, \ell]$. Assim,

$$(\psi - \varphi)(\ell) - (\psi - \varphi)(0) = \xi(\ell) - \xi(0)$$

independe da parametrização X .

Portanto, \mathbb{I} independe da parametrização X .

2º \mathbb{I} independe da curva α .

Sejam α_0 e α_1 duas curvas como na definição do índice. Suponhamos primeiro que os traços de α_0 e α_1 não se intersectam. Suponhamos também que α_0 e α_1 estão definidas no mesmo intervalo $I = [0, \ell]$ e que α_0 está contida na região simples R limitada pelo traço de α_1 .

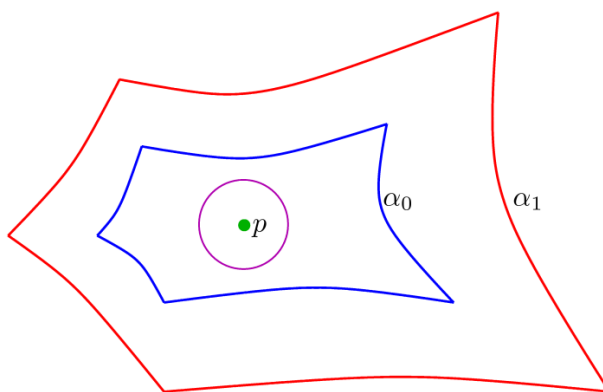


Fig. 69:

Sejam $\varphi, \psi : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ determinações diferenciáveis por partes do ângulo positivo de X_u a v ao longo de α_0 e α_1 , respectivamente.

Sejam $a, b : [0, \ell] \rightarrow S^1$ as funções contínuas dadas por:

$$a(t) = (\cos \varphi(t), \operatorname{sen} \varphi(t)) \quad \text{e} \quad b(t) = (\cos \psi(t), \operatorname{sen} \psi(t)).$$

- Consideremos primeiro o caso particular em que vale $|\alpha(t) - \beta(t)| < 2$ para todo $t \in [0, \ell]$, isto é, os pontos $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ nunca são antípodas.

Então podemos tomar $\varphi(0) = \varphi_0$ e $\psi(0) = \psi_0$ de modo que $|\varphi_0 - \psi_0| < \pi$.

Como $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ nunca são antípodas, temos que $|\varphi(t) - \psi(t)| \neq \pi$ para todo $t \in [0, \ell]$. Este fato, junto com $|\varphi(0) - \psi(0)| < \pi$ nos dá $|\varphi(t) - \psi(t)| < \pi$ para todo $t \in [0, \ell]$.

Sendo

$$2\pi(\mathbb{I}(\alpha_1) - \mathbb{I}(\alpha_0)) = (\psi(\ell) - \psi(0)) - (\varphi(\ell) - \varphi(0)) = (\psi(\ell) - \varphi(\ell)) - (\psi(0) - \varphi(0)),$$

temos que

$$|2\pi(\mathbb{I}(\alpha_1) - \mathbb{I}(\alpha_0))| \leq |\psi(\ell) - \psi(0)| + |\varphi(0) - \varphi(\ell)| < 2\pi,$$

ou seja, $|\mathbb{I}(\alpha_1) - \mathbb{I}(\alpha_0)| < 1$. Logo, $\mathbb{I}(\alpha_1) = \mathbb{I}(\alpha_0)$.

- Como \mathbb{R} é homeomorfa a um disco, α_0 e α_1 são *livremente homotópicas*, isto é, existe uma aplicação contínua

$$H : [0, \ell] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},$$

tal que $H(t, 0) = \alpha_0(t)$, $H(t, 1) = \alpha_1(t)$ e $H(0, s) = H(\ell, s)$ para todo $s \in [0, 1]$, isto é, para todo $s \in [0, 1]$, a curva $H_s : [0, \ell] \longrightarrow \mathbb{R}$, $H_s(t) = H(t, s)$, é fechada.

Sejam as funções contínuas $f, g : [0, \ell] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por:

$$\frac{v(H(t, s))}{\|v(H(t, s))\|} = f(t, s) \frac{X_u(\beta(t, s))}{\|X_u(\beta(t, s))\|} + g(t, s) \frac{X_v(\beta(t, s))}{\|X_v(\beta(t, s))\|},$$

onde $X(\beta(t, s)) = H(t, s)$.

Logo $\tilde{H} : [0, \ell] \times [0, 1] \longrightarrow S^1$, $\tilde{H}(t, s) = (f(t, s), g(t, s))$, é uma função contínua (uma homotopia) tal que $\tilde{H}(t, 0) = \alpha(t)$, $\tilde{H}(t, 1) = \beta(t)$ e $\tilde{H}(0, s) = \tilde{H}(\ell, s)$.

Como $\tilde{H} : [0, \ell] \times [0, 1] \longrightarrow S^1$ é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$|s - s'| < \delta \implies |\tilde{H}(t, s) - \tilde{H}(t, s')| < 2,$$

para todo $t \in [0, \ell]$.

Sejam $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = 1$ tais que $s_{i+1} - s_i < \delta$ e definamos os caminhos fechados $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k = \beta$ em S^1 , pondo $\alpha_i(t) = \tilde{H}(t, s_i)$. Então

$$|\alpha_i(t) - \alpha_{i+1}(t)| < 2,$$

para todo $t \in [0, \ell]$.

Logo, pelo provado acima, $\mathbb{I}(\alpha_0) = \mathbb{I}(H_{s_1}) = \mathbb{I}(H_{s_2}) = \dots = \mathbb{I}(H_{s_{k-1}}) = \mathbb{I}(\alpha_1)$.

Observação 4.6 O lema 5.1 do capítulo 1 também vale para caminhos $\beta : [0, \ell] \rightarrow S^1$ contínuos, isto é, se $\beta(0) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$, existe uma única função $\theta : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $\theta(0) = \theta_0$ e

$$\beta(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)),$$

para todo $t \in [0, \ell]$. Fato que usamos acima, já que os caminhos $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ são apenas contínuos.

- Se os traços de α_0 e α_1 se intersectam, escolhemos uma curva suficientemente pequena cujo traço não intersecta os traços de α_0 e α_1 e aplicamos o resultado anterior.

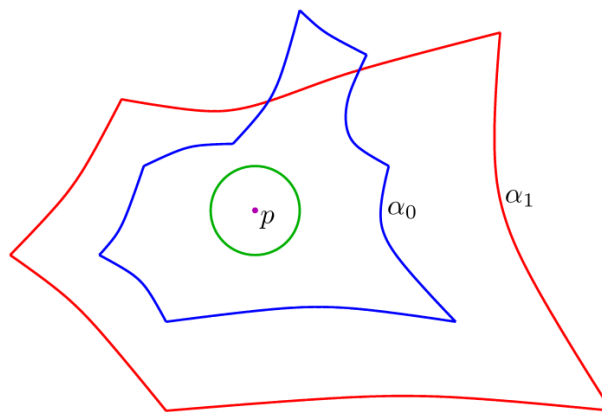


Fig. 70:

Observação 4.7 A definição de índice também pode ser aplicada quando p não é um ponto singular de v (isto é, $v(p) \neq 0$). Neste caso o índice é nulo.

De fato, sendo $v \neq 0$ numa vizinhança de p , existe, pela observação abaixo, uma parametrização $X : U \rightarrow X(U)$ ortogonal, com $p \in X(U)$, compatível com a orientação de S , tal que $v \parallel X_u$.

Assim, $\varphi(t) \equiv 0$ ou $\varphi(t) \equiv \pi$. Em qualquer caso, $\mathbb{I} = \frac{\varphi(\ell) - \varphi(0)}{2\pi} = 0$.

Observação 4.8 Seja $Y : V \rightarrow Y(V)$ uma parametrização ortogonal de S em p . Sejam as funções diferenciáveis $a, b : V \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$w(Y(\bar{u}, \bar{v})) = a(\bar{u}, \bar{v})Y_{\bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) + b(\bar{u}, \bar{v})Y_{\bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}).$$

Considere agora o campo de vetores diferenciável \bar{w} ortogonal ao campo w dado por:

$$\bar{w}(Y(\bar{u}, \bar{v})) = (b\bar{G})(\bar{u}, \bar{v})Y_{\bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) - (a\bar{E})(\bar{u}, \bar{v})Y_{\bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}),$$

onde $\bar{E} = \langle Y_{\bar{u}}, Y_{\bar{u}} \rangle$ e $\bar{G} = \langle Y_{\bar{v}}, Y_{\bar{v}} \rangle$.

Como $w(p)$ e $\bar{w}(p)$ são LI, existe, pelo teorema 4.4 do capítulo 4, uma parametrização $X : U_0 \rightarrow X(U_0)$ de S em p , tal que $X_u(u, v) \parallel w(X(u, v))$ e $X_v(u, v) \parallel \bar{w}(X(u, v))$ para todo $(u, v) \in U_0$. Então X é uma parametrização ortogonal.

Caso X não seja compatível com a orientação de S , isto é, $N(X(u, v)) = -\frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(u, v)$, basta considerar a parametrização $\bar{X} = X \circ h : U \rightarrow X(U)$, onde $h(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, -\bar{v})$ e $h(U_0) = U$ ($\implies h(U) = h^2(U_0) = U_0$).

De fato, $\bar{X}_{\bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) = X_u(\bar{u}, -\bar{v}) \parallel w(\bar{X}(\bar{u}, \bar{v}))$, $\bar{X}_{\bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) = -X_v(\bar{u}, -\bar{v})$ e, portanto,

$$\frac{\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}}{\|\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}\|}(\bar{u}, \bar{v}) = -\frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(u, -v) = N(X(\bar{u}, -\bar{v})) = N(\bar{X}(\bar{u}, \bar{v})).$$

Exemplo 4.2 Calcularemos os índices de alguns campos de vetores no plano que têm $(0, 0)$ como ponto singular. As curvas que aparecem no desenho são as trajetórias dos campos de vetores.

(1) $w(x, y) = (-x, -y)$.

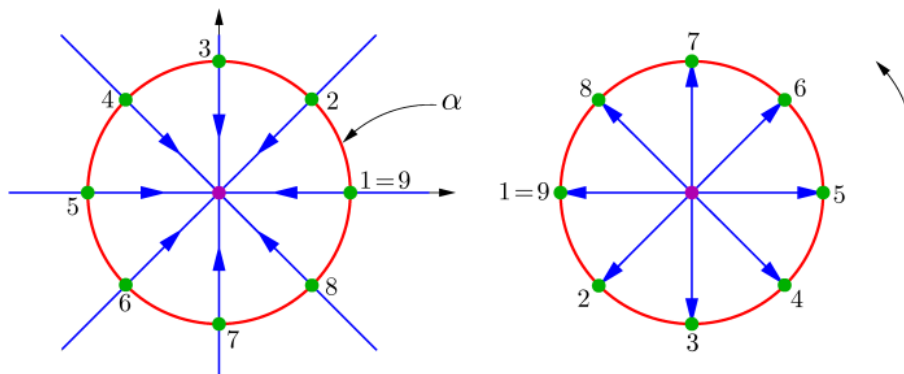


Fig. 71:

Restringindo w à curva fechada $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, obtemos

$$w(t) = w(\alpha(t)) = (-\cos t, -\sin t) = (\cos(t + \pi), \sin(t + \pi)),$$

isto é, o ângulo positivo de $(1, 0)$ a $w(t)$ é $t + \pi$. Logo, o índice do ponto singular $(0, 0)$ é

$$\mathbb{I} = \frac{\varphi(2\pi) - \varphi(0)}{2\pi} = \frac{3\pi - \pi}{2\pi} = 1.$$

(2) $w(x, y) = (-x, y)$.

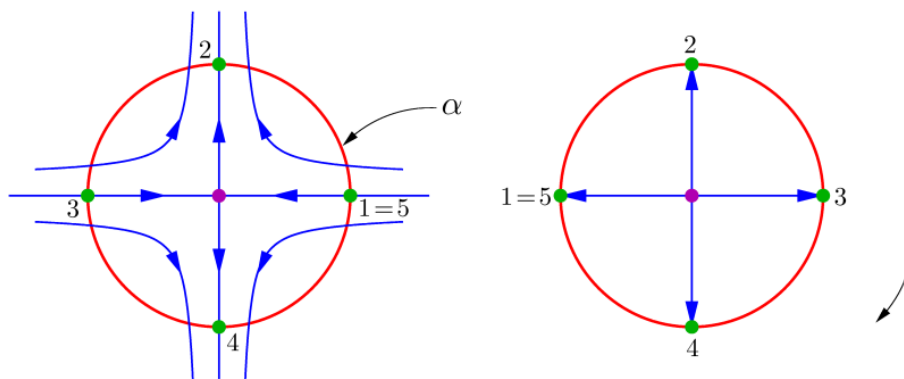


Fig. 72:

Tomando a curva fechada $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, obtemos que:

$$w(t) = w(\alpha(t)) = (-\cos t, \sin t) = (\cos(-t + \pi), \sin(-t + \pi)),$$

isto é, $\varphi(t) = -t + \pi$ é o ângulo positivo de $(1, 0)$ a $w(t)$. Logo o índice do ponto singular $(0, 0)$ é

$$\mathbb{I} = \frac{\varphi(2\pi) - \varphi(0)}{2\pi} = \frac{-\pi - \pi}{2\pi} = -1.$$

(3) $w(x, y) = (x^3 - 3xy^2, y^3 - 3x^2y)$.

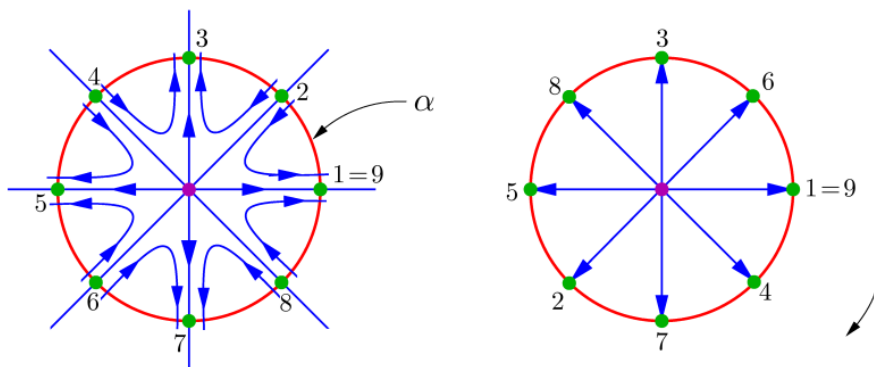


Fig. 73:

Restringindo w à curva fechada $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, obtemos:

$$w(t) = w(\alpha(t)) = (\cos^3 t - 3 \cos t \sin^2 t, \sin^3 t - 3 \cos^2 t \sin t) = (\cos(-3t), \sin(-3t)),$$

pois:

$$\begin{aligned} \cos 3t &= \cos(2t + t) = \cos 2t \cos t - \sin 2t \sin t = (\cos^2 t - \sin^2 t) \cos t - 2 \sin^2 t \cos t \\ &= \cos^3 t - 3 \sin^2 t \cos t, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 3t &= \operatorname{sen}(2t + t) = \operatorname{sen} 2t \cos t + \cos 2t \operatorname{sen} t = 2 \operatorname{sen} t \cos^2 t + \cos^2 t \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^3 t \\ &= -\operatorname{sen}^3 t + 3 \operatorname{sen} t \cos^2 t. \end{aligned}$$

Logo $\varphi(t) = -3t$ é o ângulo positivo de $(1, 0)$ a $w(t)$.

Portanto, o índice do ponto singular $(0, 0)$ é

$$\mathbb{I} = \frac{\varphi(2\pi) - \varphi(0)}{2\pi} = -\frac{6\pi}{2\pi} = -3. \quad \square$$

Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta orientada e v um campo de vetores diferenciável em S cujos pontos singulares são isolados.

Então v tem um número finito de singularidades, pois, caso contrário, o conjunto dos pontos singulares teria, por compacidade, um ponto de acumulação que seria uma singularidade não isolada.

Seja $\{X_\alpha : U_\alpha \rightarrow X_\alpha(U_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ uma família de parametrizações ortogonais compatíveis com a orientação de S que cobre toda a superfície. Seja \mathcal{T} uma triangulação de S tal que:

- (1) Cada triângulo $T \in \mathcal{T}$ está contido em alguma vizinhança coordenada da família $\{X_\alpha\}$.
- (2) Cada triângulo $T \in \mathcal{T}$ contém no máximo um ponto singular e se existir, está no seu interior.
- (3) A fronteira de qualquer triângulo $T \in \mathcal{T}$ está orientada positivamente.

Aplicando a equação (43) a um dos triângulos $T_i \in \mathcal{T}$, obtemos

$$\iint_{T_i} \mathbf{K} \, d\sigma - 2\pi\mathbb{I}_i = \xi_i(\ell_i) - \xi_i(0) \tag{44}$$

onde $\xi_i(t)$ é uma determinação diferenciável por partes do ângulo positivo de $v_1^i(t) = \frac{v(\alpha_i(t))}{\|v(\alpha_i(t))\|}$ a $w_i(t)$, sendo $w_i(t)$ o transporte paralelo de um vetor unitário $w_0 \in T_{\alpha(0)}S$ ao longo da parametrização $\alpha_i : [0, \ell_i] \rightarrow S$ regular por partes do bordo ∂T_i , isto é, $w_i(t) = \cos \xi_i(t)v_1^i(t) + \operatorname{sen} \xi_i(t)(\bar{N}(t) \wedge v_1^i(t))$.

Seja $T_j \in \mathcal{T}$ um triângulo que tem uma aresta, $\alpha_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow S$, em comum com o triângulo T_i .

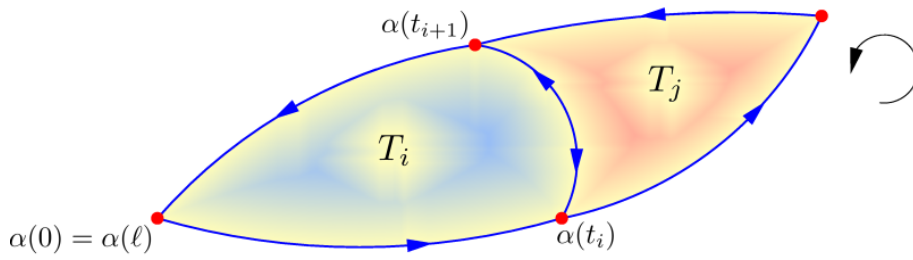


Fig. 74:

Seja $\beta_j : I \rightarrow S$ uma parametrização regular por partes do bordo ∂T_j orientada positivamente, tal que $\beta_j|_{[s_j, s_{j+1}]}$ é a parametrização regular do lado em comum com T_i .

Então existe uma função diferenciável decrescente $h_{ij} : [s_j, s_{j+1}] \rightarrow [t_i, t_{i+1}]$

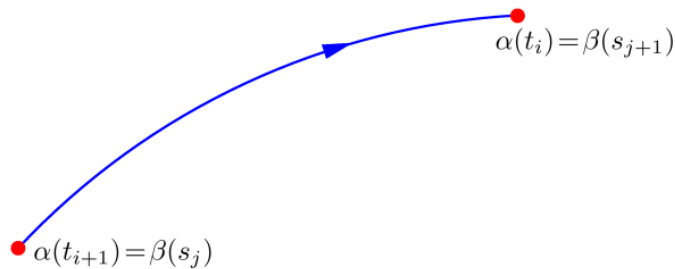


Fig. 75:

tal que $\beta_j(s) = \alpha_i(h_{ij}(s))$ para todo $s \in [s_j, s_{j+1}]$.

Seja $w_j(s)$ o transporte paralelo do vetor unitário $w_i(t_{i+1}) \in T_{\alpha_i(t_{i+1})}S = T_{\beta_j(s_j)}S$ ao longo de $\beta_j : [s_j, s_{j+1}] \rightarrow S$.

Seja $\bar{w}_j(s) = w_i(h_{ij}(s))$. Como

$$\frac{D\bar{w}_j}{ds}(s) = \frac{Dw_i}{dt}(h_{ij}(s)) h_{ij}(s) = 0,$$

e $\bar{w}_j(s_j) = w_i(h_{ij}(s_j)) = w_i(t_{i+1})$, segue-se da unicidade do transporte paralelo, que $w_j(s) = \bar{w}_j(s)$, para todo $s \in [s_j, s_{j+1}]$.

Logo

$$w_j(s) = w_i(h_{ij}(s)) = \cos(\xi_i(h_{ij}(s)))v_1^i(h_{ij}(s)) + \text{sen}(\xi_i(h_{ij}(s)))v_2^i(h_{ij}(s)),$$

onde $v_2^i(t) = N(t) \wedge v_1(t)$.

Ou seja, $\xi_i \circ h_{ij}$ é uma determinação diferenciável do ângulo positivo de $\frac{v(\beta_j(s))}{\|v(\beta_j(s))\|}$ a $w_j(s)$.

Então

$$(\xi_i \circ h_{ij})(s_{j+1}) - (\xi_i \circ h_{ij})(s_j) = \xi_i(t_i) - \xi_i(t_{i+1}) = -(\xi_i(t_{i+1}) - \xi_i(t_i)).$$

Observação 4.9 A diferença $\xi(t_{i+1}) - \xi(t_i)$ não depende do campo paralelo de vetores unitários ao longo da curva parametrizada regular $\alpha : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow S$.

De fato, sejam w_1 e w_2 campos de vetores unitários paralelos ao longo de α , e

$$\begin{aligned} w_1(t) &= \cos \xi_1(t) v_1(t) + \operatorname{sen} \xi_1(t) v_2(t), \\ w_2(t) &= \cos \xi_2(t) v_1(t) + \operatorname{sen} \xi_2(t) v_2(t), \end{aligned}$$

onde $\xi_i(t)$ é uma determinação diferenciável do ângulo positivo de $v_1(t)$ a $w_i(t)$, $i = 1, 2$.

Como

$$\langle w_1(t), w_2(t) \rangle = \cos \xi_1(t) \cos \xi_2(t) + \operatorname{sen} \xi_1(t) \operatorname{sen} \xi_2(t) = \cos(\xi_1(t) - \xi_2(t)) = \operatorname{const.},$$

pois $\frac{d}{dt} \langle w_1, w_2 \rangle(t) = \left\langle \frac{Dw_1}{dt}(t), w_2(t) \right\rangle + \left\langle w_1(t), \frac{Dw_2}{dt}(t) \right\rangle = 0$ para todo t , temos que existem $\theta_0 \in \mathbb{R}$ e $k_0 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\xi_1(t) - \xi_2(t) = \theta_0 + 2\pi k_0$$

para todo t .

Logo

$$\xi_1(t_{i+1}) - \xi_1(t_i) = \xi_2(t_{i+1}) - \xi_2(t_i),$$

como havíamos afirmado.

Aplicando a equação (44) a todos os triângulos $T \in \mathcal{T}$, somando os resultados e levando em conta que a aresta de cada $T \in \mathcal{T}$ aparece duas vezes com orientações opostas, obtemos, pelo provado acima, que

$$\iint_S \mathbf{K} \, d\sigma - 2\pi \sum_{i=1}^k \mathbb{I}_i = 0,$$

onde \mathbb{I}_i é o índice do ponto singular p_i , $i = 1, \dots, k$.

Então, pelo teorema de Gauss-Bonnet (corolário 4.3), chegamos finalmente a

$$\sum_{i=1}^k \mathbb{I}_i = \frac{1}{2\pi} \iint_S \mathbf{K} \, d\sigma = \Xi(S).$$

Provamos, assim, o seguinte resultado:

Teorema 4.6 (Teorema de Poincaré)

A soma dos índices de um campo de vetores diferenciável v com singularidades isoladas em uma superfície compacta S é igual à característica de Euler-Poincaré de S .

Este resultado implica que $\sum \mathbb{I}_i$ não depende de ν mas apenas da topologia de S .

Por exemplo, em qualquer superfície homeomorfa a uma esfera, todos os campos de vetores diferenciáveis com singularidades isoladas devem ter a soma de seus índices igual a 2. Em particular, nenhuma destas superfícies pode ter um campo de vetores diferenciável sem pontos singulares, ou seja, uma esfera *cabeluda* não pode ser *penteada*.

Capítulo 6

Rigidez da Esfera

Vamos provar que a esfera é *rígida*, isto é, se uma superfície regular S é isométrica a uma esfera, então S é de fato uma esfera.

Para provar a rigidez da esfera, precisamos do seguinte resultado.

Teorema 0.7 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, compacta e conexa com curvatura Gaussiana constante \mathbf{K} . Então S é uma esfera.*

A rigidez da esfera segue-se deste teorema. De fato, seja $\varphi : \Sigma \rightarrow S$ uma isometria de uma esfera Σ sobre uma superfície regular S . Então, como φ é contínua, $\varphi(\Sigma) = S$ é compacta e conexa. Além disso, S tem curvatura constante igual à da esfera Σ , pois a curvatura Gaussiana é invariante por isometria, isto é, $\mathbf{K}_S(\varphi(p)) = \mathbf{K}_\Sigma(p)$ para todo $p \in \Sigma$, onde \mathbf{K}_S e \mathbf{K}_Σ são as curvaturas Gaussianas de S e Σ respectivamente.

Observação 0.10 Existem superfícies homeomorfas à esfera que não são rígidas.

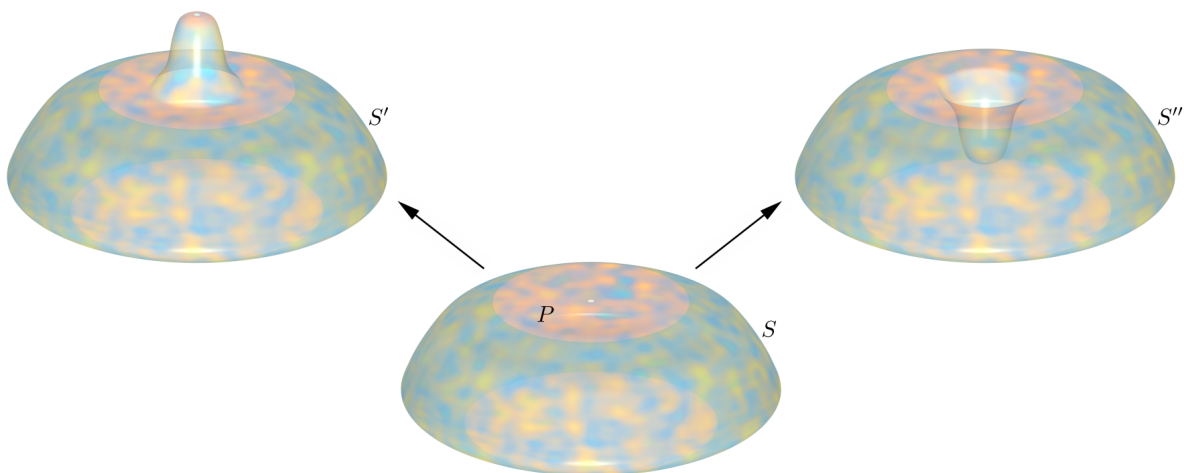


Fig. 1: Superfícies homeomorfas à esfera que não são rígidas

Substituindo um disco da região plana P da superfície regular S por uma "lombada para fora" de forma que a superfície resultante S' seja regular, obtemos uma outra superfície regular S'' , refletindo os pontos de S' acima do plano P em relação a este plano, que é isométrica à superfície S' . Observe que não existe uma isometria de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 que leve S' em S'' .

Observação 0.11 Na realidade, a rigidez da esfera segue-se de um resultado mais geral, devido a *Cohn-Vossen*:

"Se $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ é uma isometria entre duas superfícies ovais, então φ é a restrição de uma isometria de \mathbb{R}^3 (i.e., a composta de uma isometria linear com uma translação)". As superfícies ovais ou ovalóides são as superfícies compactas conexas em \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana positiva em todos os pontos.

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em *Curves and Surfaces in Euclidean Spaces* de *S. S. Chern*, Studies in Global Geometry and Analysis, MAA Studies in Mathematics, The Mathematical Association of America, 1967. \square

A demonstração do Teorema 1 é baseada no seguinte lema local, no qual escolhemos as curvaturas principais κ_1 e κ_2 de modo que $\kappa_1(q) \geq \kappa_2(q)$ para todo $q \in S$. Desta maneira, κ_1 e κ_2 são funções contínuas em S que são diferenciáveis exceto, possivelmente, nos pontos umbílicos (onde $\kappa_1 = \kappa_2$) de S (ver observações 3.1, 3.2 e 3.3 do Capítulo 4).

Lema 0.1 *Sejam S uma superfície regular e p um ponto de S satisfazendo as seguintes condições:*

- 1.** $K(p) > 0$, isto é, a curvatura Gaussiana de S em p é positiva.
- 2.** p é ao mesmo tempo um ponto de máximo local da função κ_1 e um ponto de mínimo local da função κ_2 ($\kappa_1 \geq \kappa_2$).

Então p é um ponto umbílico de S .

Prova.

Suponhamos que p não é um ponto umbílico. Então existe uma parametrização $X : U \rightarrow X(U)$ de S em p tal que as curvas coordenadas são as linhas de curvatura (ver Corolário 4.4 do Capítulo 4).

Logo $f = F = 0$ e, pela Observação 3.11 do Capítulo 4, as curvaturas principais são dadas por $\frac{e}{E}$ e $\frac{g}{G}$.

Podemos supor também que todos os pontos de $X(U)$ não são umbílicos e que $\kappa_1 = \frac{e}{E}$ e

$\kappa_2 = \frac{g}{G}$ em $X(U)$ (intercambiando as variáveis u e v , se necessário).

Neste sistema de coordenadas, as equações de Mainardi-Codazzi (ver Exemplo 2.2 do Capítulo 5) são:

$$e_v = \frac{1}{2}E_v(\kappa_1 + \kappa_2) \quad \text{e} \quad g_u = \frac{1}{2}G_u(\kappa_1 + \kappa_2).$$

Derivando a equação $\kappa_1 = \frac{e}{E}$ com relação a v ,

$$e_v = (\kappa_1)_v E + \kappa_1 E_v,$$

e usando a equação $e_v = \frac{1}{2}E_v(\kappa_1 + \kappa_2)$, obtemos

$$\frac{1}{2}E_v(\kappa_1 + \kappa_2) = (\kappa_1)_v E + \kappa_1 E_v \iff E(\kappa_1)_v = \frac{1}{2}E_v(\kappa_2 - \kappa_1). \quad (1)$$

Analogamente, derivando a equação $\kappa_2 = \frac{g}{G}$ com relação a u e usando a equação $g_u = \frac{1}{2}G_u(\kappa_1 + \kappa_2)$, obtemos que

$$G(\kappa_2)_u = \frac{1}{2}G_u(\kappa_1 - \kappa_2). \quad (2)$$

Por outro lado, como $F = 0$, a fórmula de Gauss (ver Exercício 2.3 do Capítulo 5) se reduz a:

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right).$$

Logo,

$$-2\mathbf{K}\sqrt{EG} = \frac{E_{vv}}{\sqrt{EG}} + \frac{G_{uu}}{\sqrt{EG}} - \frac{(\sqrt{EG})_v E_v}{EG} - \frac{(\sqrt{EG})_u G_u}{EG},$$

ou seja,

$$-2\mathbf{K}EG = E_{vv} + G_{uu} + ME_v + NG_u, \quad (3)$$

onde $M = -\frac{(\sqrt{EG})_v}{\sqrt{EG}}$ e $N = -\frac{(\sqrt{EG})_u}{\sqrt{EG}}$ são funções diferenciáveis em U .

Pelas equações (1) e (2),

$$E_v = \frac{2E(\kappa_1)_v}{\kappa_2 - \kappa_1} \quad (4)$$

$$\text{e} \quad G_u = \frac{2G(\kappa_2)_u}{\kappa_1 - \kappa_2}. \quad (5)$$

Derivando as equações (4) e (5) com respeito a v e a u , respectivamente, obtemos:

$$E_{vv} = \frac{2E_v(\kappa_1)_v + 2E(\kappa_1)_{vv}}{\kappa_2 - \kappa_1} - \frac{2E(\kappa_1)_v(\kappa_2 - \kappa_1)_v}{(\kappa_2 - \kappa_1)^2}$$

e

$$G_{uu} = \frac{2G_u(\kappa_2)_u + 2G(\kappa_2)_{uu}}{\kappa_1 - \kappa_2} - \frac{2G(\kappa_2)_u(\kappa_1 - \kappa_2)_u}{(\kappa_1 - \kappa_2)^2};$$

Ou seja,

$$E_{vv} = -\frac{2E(\kappa_1)_{vv}}{\kappa_1 - \kappa_2} + L(\kappa_1)_v \quad (6)$$

$$e \quad G_{uu} = \frac{2G(\kappa_2)_{uu}}{\kappa_1 - \kappa_2} + \tilde{L}(\kappa_2)_u, \quad (7)$$

onde $L(u, v)$ e $\tilde{L}(u, v)$ são funções diferenciáveis em U .

Introduzindo as equações (4), (5), (6) e (7) na equação (3), temos:

$$-2\mathbf{KEG} = -\frac{2E}{\kappa_1 - \kappa_2}(\kappa_1)_{vv} + \frac{2G}{\kappa_1 - \kappa_2}(\kappa_2)_{uu} + \tilde{M}(\kappa_1)_v + \tilde{N}(\kappa_2)_u,$$

onde \tilde{M} e \tilde{N} são funções diferenciáveis em U .

Então,

$$-2(\kappa_1 - \kappa_2)\mathbf{KEG} = -2E(\kappa_1)_{vv} + 2G(\kappa_2)_{uu} + \tilde{M}(\kappa_1 - \kappa_2)(\kappa_1)_v + \tilde{N}(\kappa_1 - \kappa_2)(\kappa_2)_u. \quad (8)$$

Como $\mathbf{K}(p) > 0$ e $\kappa_1(p) > \kappa_2(p)$, o primeiro membro da equação (8) é negativo em p .

Por outro lado, como κ_1 atinge um máximo local em p e κ_2 atinge um mínimo local em p , temos:

$$(\kappa_1)_v = 0, \quad (\kappa_2)_u = 0, \quad (\kappa_1)_{vv} \leq 0 \quad e \quad (\kappa_2)_{uu} \geq 0,$$

em p . Assim, o segundo membro da equação (8) é positivo ou nulo, o que é uma contradição, já que o primeiro membro é negativo. ■

Observação 0.12 Supondo que κ_1 tem um mínimo local e κ_2 um máximo local em p , não se chega, na demonstração acima, a uma contradição. Em verdade, como veremos no exemplo abaixo, tal situação pode ocorrer em uma superfície com curvatura Gaussiana positiva sem pontos umbílicos.

Exemplo 0.3 Seja S a superfície de revolução dada por

$$X(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v)),$$

onde $u \in (0, 2\pi)$, $c > 1$,

$$\begin{aligned}\varphi(v) &= c \cos v, \\ \psi(v) &= \int_0^v \sqrt{1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \xi} \, d\xi, \quad \psi(0) = 0,\end{aligned}$$

e $|v| < \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{c}$, de modo que $\psi(v)$ fique bem definida.

Então:

$$\begin{aligned}E &= \varphi(v)^2 = c^2 \cos^2 v; \\ F &= 0; \\ G &= \varphi'(v)^2 + \psi'(v)^2 = 1; \\ e &= -\varphi(v) \psi'(v) = -c \cos v \sqrt{1 - c^2 \operatorname{sen}^2 v}; \\ f &= 0; \\ g &= \psi'(v) \varphi''(v) - \psi''(v) \varphi'(v) \\ &= -c \cos v \sqrt{1 - c^2 \operatorname{sen}^2 v} - \frac{c^3 \operatorname{sen} v \operatorname{sen} v \cos v}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{sen}^2 v}} \\ &= -\frac{c \cos v (1 - c^2 \operatorname{sen}^2 v + c^2 \operatorname{sen}^2 v)}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{sen}^2 v}} \\ &= -\frac{c \cos v}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{sen}^2 v}};\end{aligned}$$

e, pela Observação 3.11 do Capítulo 4,

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \frac{e}{E} = -\frac{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{sen}^2 v}}{c \cos v} \\ \text{e} \quad \kappa_2 &= \frac{g}{G} = -\frac{c \cos v}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{sen}^2 v}},\end{aligned}$$

com $\kappa_1 > \kappa_2$, pois $c > 1$.

Portanto, S não tem pontos umbílicos e tem curvatura Gaussiana $\mathbf{K} = \kappa_1 \kappa_2 = 1$ positiva e constante.

Além disso, como $\kappa_1 = -\frac{1}{c}$ para $v = 0$ e

$$\kappa_1 = -\frac{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{sen}^2 v}}{c \cos v} > -\frac{1}{c},$$

para $v \neq 0$ (pois $\cos^2 v - 1 = -\sin^2 v > -c^2 \sin^2 v$), temos que κ_1 atinge um mínimo e, portanto, κ_2 atinge um máximo (pois $\kappa_1 \kappa_2 = 1$) nos pontos do paralelo $v = 0$. \square

Este exemplo também mostra que a hipótese de compacidade da superfície no Teorema 1 é essencial, pois a superfície S dada acima tem curvatura positiva constante, mas não é uma esfera.

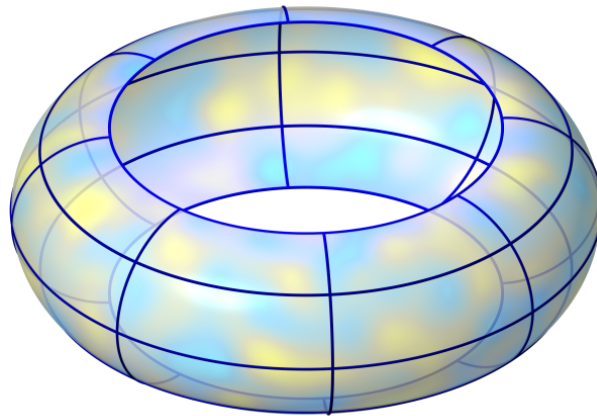


Fig. 2: Superfície com curvatura positiva constante em todo ponto e que não é uma esfera

Na demonstração do Teorema 1 vamos utilizar o seguinte resultado.

Lema 0.2 *Uma superfície regular compacta $S \subset \mathbb{R}^3$ possui um ponto elíptico.*

Prova.

Seja $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e considere a função diferenciável $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(p) = \|p - p_0\|^2$.

Como S é compacta e f é uma função contínua, existe $p_1 \in S$ tal que $f(p_1) \geq f(p)$ para todo $p \in S$, ou seja, $\|p - p_0\| \leq R$, para todo $p \in S$, onde $R = \|p_1 - p_0\|$.

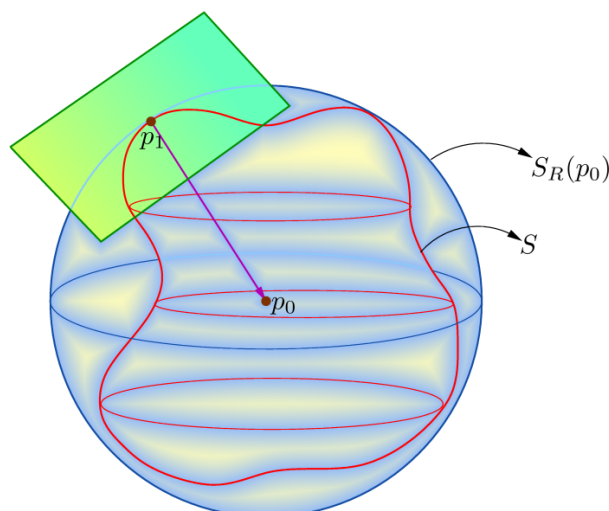


Fig. 3:

Afirmção 1: $T_{p_1}S = T_{p_1}(S_R(p_0))$, onde $S_R(p_0)$ é a esfera de centro p_0 e raio R .

De fato, seja $T_{p_1}(S_R(p_0)) = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid \langle q - p_1, p_0 - p_1 \rangle = 0\}$ o plano tangente a $S_R(p_0)$ em p_1 .

Pelo Exercício 18 da seção 2.4, basta mostrar que $(T_{p_1}(S_R(p_0))) \cap S = \{p_1\}$, pois, neste caso, teremos $T_{p_1}S = T_{p_1}S_R(p_0)$. □

Afirmção 2: Se $\|q - p_0\| \leq R$, então $\langle q - p_1, p_0 - p_1 \rangle \geq 0$, e $\langle q - p_1, p_0 - p_1 \rangle = 0$ se, e só se, $q = p_1$.

De fato, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \langle q - p_1, p_0 - p_1 \rangle &= \langle q - p_0 + p_0 - p_1, p_0 - p_1 \rangle = \langle q - p_0, p_0 - p_1 \rangle + R^2 \\ &\geq -\|q - p_0\| \|p_0 - p_1\| + R^2 \geq -R^2 + R^2 = 0, \end{aligned}$$

pois $\|q - p_0\| \leq R$ e $\|p_0 - p_1\| = R$.

E $\langle q - p_1, p_0 - p_1 \rangle = 0$ se, e só se, $\|q - p_0\| = R$ e

$$\langle q - p_0, p_0 - p_1 \rangle = -\|q - p_0\| \|p_0 - p_1\| = -R^2$$

Como $\langle q - p_0, p_0 - p_1 \rangle = -\|q - p_0\| \|p_0 - p_1\|$ se, e só se, $q - p_0 = \lambda(p_0 - p_1)$, com $\lambda < 0$, e $\|q - p_0\| = \|p_0 - p_1\| = R$, temos que $\langle q - p_1, p_0 - p_1 \rangle = 0$ se, e só se, $q - p_0 = -(p_0 - p_1)$, ou seja, se, e só se, $q = p_1$. □

Sejam $v \in T_{p_1}S - \{0\}$ e π_v o plano que passa por p_1 e é paralelo a v e $p_0 - p_1$.

Então $\pi_v \cap S_R(p_0)$ é um grande círculo e $\pi_v \cap S = C_v$ é a seção normal de S em p_1 na direção v .

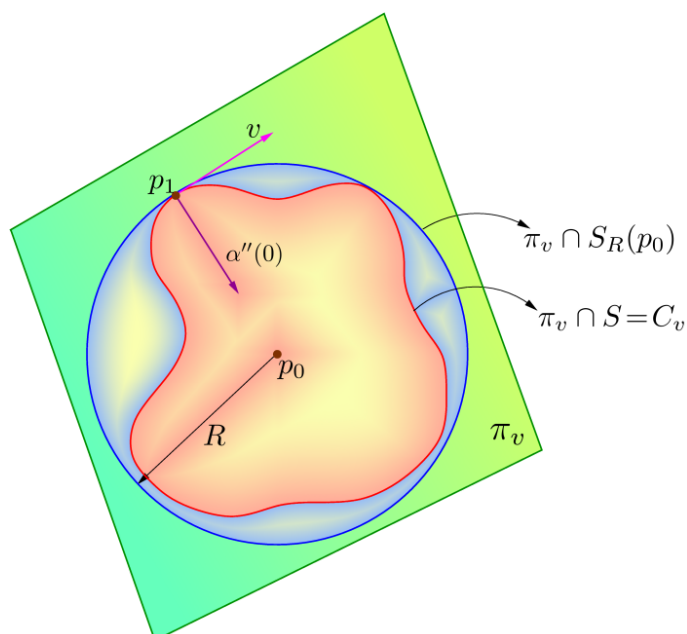


Fig. 4:

Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow C_v$ uma parametrização pelo comprimento de arco de C_v em p_1 tal que $\alpha(0) = p_1$, e considere a função diferenciável $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(s) = \langle \alpha(s) - p_0, \alpha(s) - p_0 \rangle.$$

Como $f(0) = \|p_1 - p_0\|^2 = R^2$ e $f(s) \leq R^2$ para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, 0 é um ponto de máximo da função f .

Assim, $f'(0) = 2\langle \alpha'(0), p_1 - p_0 \rangle = 0$ e

$$f''(0) = 2\langle \alpha''(0), p_1 - p_0 \rangle + 2\langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle = 2(\langle \alpha''(0), p_1 - p_0 \rangle + 1) \leq 0,$$

pois $\|\alpha'(0)\| = 1$.

Como $\alpha''(0) \perp \alpha'(0)$ e $\langle \alpha''(0), p_0 - p_1 \rangle \geq 1$, temos que $\alpha''(0)$ é um múltiplo positivo de $p_0 - p_1$.

Então

$$\mathbf{n}(0) = \frac{\alpha''(0)}{\|\alpha''(0)\|} = \frac{p_0 - p_1}{R} = N(p_1),$$

onde $\mathbf{n}(0)$ é o vetor normal a α em 0 e $N(p_1)$ é o vetor unitário normal à superfície S em p_1 .

Assim,

$$\langle \kappa_\alpha(0) \mathbf{n}(0), p_0 - p_1 \rangle = \kappa_\alpha(0) \langle \frac{p_0 - p_1}{R}, p_0 - p_1 \rangle = \kappa_\alpha(0) R \geq 1,$$

ou seja,

$$\kappa_\alpha(0) \geq \frac{1}{R},$$

onde $\kappa_\alpha(0)$ é a curvatura de α em 0 .

Então, tomando $N(p_1) = \frac{p_0 - p_1}{R}$, $\kappa_{\mathbf{n}_{p_1}}(v) = \kappa_\alpha(0) \langle \mathbf{n}(0), N(p_1) \rangle = \kappa_\alpha(0) \geq \frac{1}{R}$ para todo $v \in T_p S - \{0\}$, onde $\kappa_{\mathbf{n}_{p_1}}(v)$ é a curvatura normal de S em p_1 na direção v .

Portanto p_1 é um ponto elíptico de S , pois $\mathbf{K}(p_1) = \kappa_1(p_1) \kappa_2(p_1) \geq \frac{1}{R^2} > 0$, já que as curvaturas principais, $\kappa_1(p_1)$ e $\kappa_2(p_1)$, de S em p_1 são ambas maiores ou iguais a $\frac{1}{R}$. ■

Prova.

(Demonstração do Teorema 1) Como S é compacta, pelo Lema 2, S possui um ponto elíptico. E sendo \mathbf{K} constante, $\mathbf{K} > 0$ em S .

Por compacidade, a função contínua κ_1 atinge um máximo em um ponto $p \in S$. Como $\mathbf{K} = \kappa_1 \kappa_2$ é uma constante positiva, κ_2 é uma função decrescente de κ_2 e, portanto, atinge um mínimo

em p . Logo, pelo lema 1, p é um ponto umbílico de S , isto é, $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$. Seja q um ponto qualquer de S . Como estamos supondo que $\kappa_1(q) \geq \kappa_2(q)$, temos que

$$\kappa_1(p) \geq \kappa_1(q) \geq \kappa_2(q) \geq \kappa_2(p) = \kappa_1(p).$$

Portanto, $\kappa_1(q) = \kappa_2(q)$ para todo $q \in S$, isto é, todos os pontos de S são umbílicos. Assim, pela Proposição 2.4 do Capítulo 4, S está contida em uma esfera ou em um plano. Sendo $K > 0$, S está contida em uma esfera Σ .

Por compacidade, S é fechada em Σ e como S é uma superfície regular, S é aberta em Σ . Logo, como Σ é conexa, $S = \Sigma$.

Então, a superfície S é uma esfera. ■

Observação 0.13 O Teorema 1 é um resultado típico da Geometria Diferencial Global, isto é, informação sobre conceitos locais (neste caso, a curvatura) junto com hipóteses globais fracas (neste caso, compacidade e conexidade) implicam fortes restrições sobre a superfície como um todo (neste caso, ser uma esfera). Observe que o único efeito da conexidade é impedir a ocorrência de duas ou mais esferas na conclusão do Teorema 1. Por outro lado, a hipótese de compacidade é essencial em vários aspectos. Uma de suas funções foi a de assegurar que obtemos uma esfera inteira e não apenas uma superfície contida em uma esfera.

Observação 0.14 Na demonstração do Teorema 1, a hipótese de que $K = \kappa_1 \kappa_2$ é constante (e portanto, positiva) foi usada para garantir que κ_2 é uma função decrescente de κ_1 . A mesma conclusão é válida se supormos que a curvatura média $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ é constante.

Teorema 0.8 *Seja S uma superfície regular compacta e conexa com curvatura Gaussiana positiva e curvatura média constante. Então S é uma esfera.*

A demonstração deste Teorema é análoga à que foi dada para o Teorema 1.

Em verdade o argumento pode ser aplicado sempre que $\kappa_2 = f(\kappa_1)$, onde f é uma função decrescente de κ_1 .

Teorema 0.9 *Seja S uma superfície regular compacta e conexa com curvatura Gaussiana $K > 0$. Se existe uma relação $\kappa_2 = f(\kappa_1)$ onde f é uma função decrescente de κ_1 , $\kappa_1 \geq \kappa_2$, então S é uma esfera.*

Observação 0.15 O Teorema 2 pode ser enunciado da seguinte maneira: *Um ovolóide com curvatura média constante é uma esfera.*

Por outro lado, uma consequência do Teorema de Gauss-Bonnet (aplicação 1) é que um ovolóide é homeomorfo a uma esfera. H. Hopf provou que o Teorema 2 continua válido com o seguinte enunciado (mais forte): *Uma superfície regular com curvatura média constante que é homeomorfa a uma esfera é uma esfera.*

Um teorema devido a A. Alexandroff estende este resultado ao substituir a condição de ser homeomorfa a uma esfera por compacidade: *Uma superfície regular conexa e compacta com curvatura média constante é uma esfera.*

Uma exposição dos resultados mencionados acima pode ser encontrada em *Lectures on Differential Geometry in the Large* de H. Hopf, Lecture Notes in Mathematics, 1000, Springer-Verlag, 1983.

Capítulo 7

Aplicação Exponencial e Superfícies Completas

Como vimos na seção 4.4 (Proposição —), dado um ponto p de uma superfície regular S e um vetor não-nulo $v \in T_p S$, existe uma única geodésica parametrizada $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Para indicar a dependência desta geodésica em relação ao vetor v , vamos denotá-la por $\gamma(t, v) = \gamma$.

Lema 0.3 *Se a geodésica $\gamma(t, v)$ é definida para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, então a geodésica $\gamma(t, \lambda v)$, $\lambda > 0$, é definida para $t \in \left(-\frac{\varepsilon}{\lambda}, \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)$ e $\gamma(t, \lambda v) = \gamma(\lambda t, v)$ para todo $t \in \left(-\frac{\varepsilon}{\lambda}, \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)$.*

Prova.

Seja $\alpha : \left(-\frac{\varepsilon}{\lambda}, \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) \rightarrow S$ a curva parametrizada dada por $\alpha(t) = \gamma(\lambda t, v)$. Então $\alpha(0) = \gamma(0, v) = p$ e $\alpha'(0) = \lambda \gamma'(0, v) = \lambda v$.

Como $\alpha''(t) = \lambda^2 \gamma''(\lambda t, v)$, temos que

$$\frac{D\alpha'}{dt}(t) = \lambda^2 \frac{D\gamma'}{dt}(\lambda t, v) = 0.$$

Segue-se que $\alpha : \left(-\frac{\varepsilon}{\lambda}, \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) \rightarrow S$ é uma geodésica com condições iniciais $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \lambda v$ e, por unicidade,

$$\alpha(t) = \gamma(t, \lambda v) = \gamma(\lambda t, v),$$

para todo $t \in \left(-\frac{\varepsilon}{\lambda}, \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)$. ■

- Intuitivamente, como a velocidade (em módulo) de uma geodésica é constante, o Lema 1 significa que podemos percorrer o traço de uma geodésica em um tempo prescrito ajustando a velocidade de maneira apropriada.

Notação: Se $v \in T_p S - \{0\}$ é tal que $\gamma\left(\|v\|, \frac{v}{\|v\|}\right) = \gamma(1, v)$ está definido, escrevemos

$$\exp_p(v) = \gamma(1, v) \quad \text{e} \quad \exp_p(0) = p.$$

Esta construção corresponde a percorrer (se possível) um comprimento igual a $\|v\|$ ao longo da geodésica passando por p na direção de v , o ponto assim obtido é denotado por $\exp_p(v)$.

Exemplo 0.4 Na esfera S^2 , $\exp_p(v)$ está definida para todo $v \in T_p S^2$, pois toda geodésica γ da esfera está definida em toda a reta.

Para $v \in T_p S^2$, com $\|v\| = \pi, 3\pi, \dots, (2n+1)\pi$, $\exp_p(v)$ é o ponto antípoda $-p$ de p , e para $v \in T_p S^2$, com $\|v\| = 0, 2\pi, 4\pi, \dots, (2n)\pi$, $\exp_p(v)$ é o próprio p . \square

***** Figura pag 3

Exemplo 0.5 No cone C de uma folha menos o vértice, $\exp_p(v)$ não está definido para um vetor $v \in T_p C$ na direção de um meridiano que conecta p ao vértice, quando $\|v\| \geq d$ e d é a distância de p ao vértice. \square

***** Figura pag 4

Se, no exemplo da esfera, removermos de S^2 o antípoda de p , então \exp_p fica definida apenas no interior de um disco de $T_p S^2$ de raio π e centro na origem.

Para provar que \exp_p está definida e é diferenciável em alguma vizinhança da origem de $T_p S$, utilizaremos o Teorema de existência, unicidade e dependência diferenciável das condições iniciais de um sistema de equações diferenciais.

Um *campo de vetores diferenciável num aberto* $V \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável, e uma *trajetória de ω* é uma curva $\alpha : I \rightarrow V$ tal que $\alpha'(t) = \omega(\alpha(t))$. Em outras palavras, uma trajetória é uma curva cuja velocidade em cada ponto p é o vetor $\omega(p)$.

Teorema 0.10 *Dado um campo de vetores diferenciável $\omega : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $p_0 \in V$, existem $\varepsilon > 0$, uma vizinhança aberta $U \subset V$ de p_0 , e uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow V$ tais que, para cada $p \in U$, a curva $t \mapsto \alpha(t, p)$ é a única trajetória de ω com condição inicial $\alpha(0, p) = p$ (no sentido de que qualquer outra trajetória com a mesma condição inicial coincide com esta na intersecção dos domínios).*

Observação 0.16 Num ponto p onde o campo ω se anula, uma trajetória de ω que passa por p é a curva constante $\alpha(t) = p$; e o teorema garante que esta é a única trajetória que passa por p . Assim, as *singularidades do campo ω* correspondem às *trajetórias estacionárias*. As trajetórias dos outros pontos são curvas regulares, já que, se a derivada de $\alpha(t)$ se anular em t_0 , então $\alpha(t_0)$ é uma singularidade de ω e a única trajetória que passa por $\alpha(t_0)$ é a estacionária; assim, uma trajetória não-constante não pode ter pontos de velocidade nula.

Vamos aplicar o Teorema acima ao sistema de equações diferenciais das geodésicas.

Seja $X : U \rightarrow X(U) \subset S$ uma parametrização de S . Então, como vimos na seção — do Capítulo 5, uma curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma geodésica se, e só se,

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 = 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

O sistema (1) pode ser reescrito na forma:

$$\begin{cases} u'' = H_1(u, v, u', v') \\ v'' = H_2(u, v, u', v'), \end{cases} \quad (2)$$

ou ainda

$$\begin{cases} u' = a \\ v' = b \\ a' = H_1(u, v, u', v') \\ b' = H_2(u, v, u', v'), \end{cases} \quad (3)$$

onde H_1 e H_2 são funções diferenciáveis definidas em $U \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^4$, sendo U o domínio da parametrização $X : U \rightarrow X(U)$.

O Teorema — garante que para cada $(u_0, v_0, a_0, b_0) \in U \times \mathbb{R}^2$ existem uma vizinhança aberta W , que podemos supor da forma $W = W_1 \times W_2$, $\varepsilon_1 > 0$ e uma aplicação diferenciável

$$\tilde{\beta} : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times W_1 \times W_2 \rightarrow U \times \mathbb{R}^2,$$

tais que, para cada $(u, v, a, b) \in W_1 \times W_2$, a curva

$$t \mapsto \tilde{\beta}(t; u, v, a, b)$$

é a única solução do sistema (3) com condição inicial $\tilde{\beta}(0; u, v, a, b) = (u, v, a, b)$.

Escrevendo $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, temos que:

$$\beta_3 = \frac{\partial \beta_1}{\partial t} \quad \text{e} \quad \beta_4 = \frac{\partial \beta_2}{\partial t}.$$

Pondo $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, a conclusão que obtemos para o sistema (2), e portanto para o sistema (1) é a seguinte.

A aplicação $\beta : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times W_1 \times W_2 \longrightarrow U$, sendo W_1 e W_2 vizinhanças abertas de (u_0, v_0) e (a_0, b_0) , respectivamente, é tal que, para $(u, v, a, b) \in W_1 \times W_2$, a curva $t \mapsto \beta(t; u, v, a, b)$ é a única solução de (2) com condições iniciais:

$$\beta(0; u, v, a, b) = (u, v) \quad \text{e} \quad \frac{d\beta}{dt}(t; u, v, a, b)|_{t=0} = (a, b).$$

Em resumo, uma solução $(u(t), v(t))$ de (1) fica completamente determinada pelas condições iniciais $(u(0), v(0))$ e $(u'(0), v'(0))$, e as soluções dependem diferenciavelmente dessas condições iniciais.

Dado $p_0 = X(u_0, v_0) \in X(U)$, sejam $W_1 \times W_2$ a vizinhança aberta associada a $(u_0, v_0, 0, 0)$, o $\varepsilon_1 > 0$ e a aplicação $\beta : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times W_1 \times W_2 \longrightarrow U$ correspondentes.

Teorema 0.11 *Dado $p_0 \in S$, existem números reais $\varepsilon_1 > 0$ e $\delta_1 > 0$ e uma aplicação diferenciável*

$$\gamma : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times B_{\delta_1}(0) \longrightarrow S,$$

onde $B_{\delta_1}(0) = \{v \in T_{p_0}S \mid \|v\| < \delta_1\}$, tais que para $v \in B_{\delta_1}(0) - \{0\}$, a curva $t \mapsto \gamma(t, v)$ é a única geodésica de S com $\gamma(0, v) = p$ e $\gamma'(0, v) = v$, e, para $v = 0$, $\gamma(t, 0) = p$.

Prova.

Seja a aplicação linear $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{p_0}S$ dada por $L(a, b) = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0)$. Então L é um isomorfismo e

$$L^{-1}(v) = \frac{1}{EG - F^2} (\langle v, X_u \rangle, \langle v, X_v \rangle) \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

onde E, F, G são os coeficientes da primeira forma fundamental de X em (u_0, v_0) , $X_u = X_u(u_0, v_0)$, $X_v = X_v(u_0, v_0)$.

Como o conjunto

$$V_1 = \{aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0) \mid (a, b) \in W_2\}$$

é um aberto de $T_{p_0}S$ que contém a origem, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$B_{\delta_1}(0) = \{v \in T_{p_0}S \mid \|v\| < \delta_1\} \subset V_1.$$

Seja a aplicação $\gamma : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times B_{\delta_1}(0) \longrightarrow S$, dada por

$$\gamma(t, v) = X \circ \beta(t; (u_0, v_0), L^{-1}(v)).$$

Então γ é diferenciável e, para cada $v \in B_{\delta_1}(0) - \{0\}$, $t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$, a curva $t \mapsto \gamma(t, v)$ é a única geodésica de S com $\gamma(0, v) = p$, $\gamma'(0, v) = v$, e para $v = 0$, $\gamma(t, 0) = p$. ■

Proposição 0.6 Dado $p_0 \in S$, existe $\delta > 0$ tal que \exp_p está definida e é diferenciável na bola aberta $B_\delta(0) = \{v \in T_{p_0}S \mid \|v\| < \delta\}$.

Prova.

Pelo Teorema —, dado $p_0 \in S$, existem $\varepsilon_1 > 0$, $\delta_1 > 0$ e uma aplicação diferenciável

$$\gamma : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times B_{\delta_1}(0) \longrightarrow S,$$

tais que, para cada $v \in B_{\delta_1}(0) - \{0\}$, $t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$, a curva $t \mapsto \gamma(t, v)$ é a única geodésica de S com $\gamma(0, v) = p$, $\gamma'(0, v) = v$ e, para $v = 0$, $\gamma(t, 0) = p$.

Como a geodésica $\gamma(t, v)$ está definida para $|t| < \varepsilon_1$ e $\|v\| < \delta_1$, obtemos, fazendo $\lambda = \frac{\delta_1}{2}$ no lema —, que $\gamma\left(t, \frac{\varepsilon_1}{2} v\right)$ está definida para todo $t \in (-2, 2)$ e $\|v\| < \delta_1$.

Portanto, $\exp_p(v) = \gamma(1, v)$ está definida no disco aberto $B_\delta(0) \subset T_p S$, onde $0 < \delta < \frac{\varepsilon_1 \delta_1}{2}$. Além disso, como a aplicação $\gamma\left(\frac{\varepsilon_1}{2}, \frac{2}{\varepsilon_1} v\right)$ é diferenciável com respeito a v e $\exp_p(v) = \gamma\left(\frac{\varepsilon_1}{2}, \frac{2}{\varepsilon_1} v\right)$ em $B_\delta(0)$, temos que a aplicação

$$\exp_p : B_\delta(0) \longrightarrow S$$

é diferenciável. ■

Proposição 0.7 A aplicação $\exp_p : B_\delta(0) \longrightarrow S$ é um difeomorfismo em um aberto $U \subset B_\delta(0)$, com $0 \in U$.

Prova.

Vamos mostrar que a diferencial $d(\exp_p)_0$ é um isomorfismo. Para isto, identificamos o espaço de vetores tangentes a $T_p S$ em 0 com o próprio $T_p S$.

Consideremos a curva $\alpha(t) = tv$ em $T_p S$. Então $\alpha(0) = 0$ e $\alpha'(0) = v$. Como $\exp_p \circ \alpha(t) = \exp_p(tv) = \gamma(t, v)$, temos que:

$$\frac{d}{dt}(\exp_p \circ \alpha)(t)|_{t=0} = \gamma'(0, v) = v,$$

ou seja, $d(\exp_p)_0(v) = v$. Logo, $d(\exp_p)_0 : T_p S \rightarrow T_p S$ é um isomorfismo.

Pelo Teorema da Aplicação Inversa, obtemos que existem um aberto $U \subset B_\varepsilon(0)$, com $0 \in U$, e um aberto $V \subset S$ com $p \in S$, tais que $\exp_p : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo. ■

Como aplicação do resultado acima, podemos provar o seguinte fato.

Proposição 0.8 *Sejam S_1, S_2 superfícies regulares e $\varphi, \psi : S_1 \rightarrow S_2$ isometrias de S_1 sobre S_2 . Suponhamos que S_1 é conexa e existe $p_0 \in S_1$ tal que $\varphi(p_0) = \psi(p_0)$ e $d\varphi_{p_0} = d\psi_{p_0}$. Então $\varphi = \psi$.*

Prova.

Seja $A = \{p \in S_1 \mid \varphi(p) = \psi(p) \text{ e } d\varphi_p = d\psi_p\}$. Então, por hipótese, A é não-vazio.

Afirmação 1: A é fechado em S_1 .

De fato, seja (p_n) uma seqüência de pontos de A que converge para um ponto $\bar{p} \in S_1$.

Como φ e ψ são contínuas e $\varphi(p_n) = \psi(p_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\varphi(\bar{p}) = \psi(\bar{p})$.

Seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S_1 em \bar{p} , com $X(u_0, v_0) = \bar{p}$.

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in X(U)$ para todo $n \geq n_0$ e sejam $(u_n, v_n) \in U$ tais que $X(u_n, v_n) = p_n$ para todo $n \geq n_0$.

Como $d\varphi_{p_n} = d\psi_{p_n}$ para todo n , temos que

$$(\varphi \circ X)_u(u_n, v_n) = d\varphi_{p_n}(X_u(u_n, v_n)) = d\psi_{p_n}(X_u(u_n, v_n)) = (\psi \circ X)_u(u_n, v_n),$$

para todo $n \geq n_0$.

Logo, $(\varphi \circ X)_u(u_0, v_0) = (\psi \circ X)_u(u_0, v_0)$, isto é, $d\varphi_{\bar{p}}(X_u(u_0, v_0)) = d\psi_{\bar{p}}(X_u(u_0, v_0))$.

De modo análogo, podemos provar que $d\varphi_{\bar{p}}(X_v(u_0, v_0)) = d\psi_{\bar{p}}(X_v(u_0, v_0))$.

Como $\{X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0)\}$ é uma base de $T_{\bar{p}}S_1$, temos que $d\varphi_{\bar{p}} = d\psi_{\bar{p}}$. Logo, $\bar{p} \in A$.

Afirmação 2: A é aberto em S_1 .

Seja $\bar{p} \in A$. Pela Proposição —, existe $\delta > 0$ tal que $V = \exp_{\bar{p}}(B_\delta(0))$ é um aberto de S_1 que contém \bar{p} , onde $B_\delta(0) = \{v \in T_{\bar{p}}S_1 \mid \|v\| < \delta\}$.

Pela definição da exponencial,

$$\exp_p(B_\delta(0)) = \{\gamma_1(t; \bar{p}, v) \mid t \in [0, \delta], v \in T_{\bar{p}}S_1, \|v\| = 1\}.$$

Além disso, como φ e ψ são isometrias, temos, pela —, que se $\gamma_1(t) = \gamma_1(t; \bar{p}, v)$, $t \in [0, \delta]$, é a geodésica de S_1 com $\gamma_1(0) = \bar{p}$ e $\gamma_1'(0) = v$, então $\varphi \circ \gamma_1$ e $\psi \circ \gamma_2$ são geodésicas de S_2 tais que

$\varphi \circ \gamma_1(0) = \varphi(\bar{p}) = \psi(\bar{p}) = \psi \circ \gamma_1(0)$ e $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = d\varphi_{\bar{p}}(\gamma_1'(0)) = d\psi_{\bar{p}}(\gamma_1'(0)) = (\psi \circ \gamma_1)'(0)$. Logo, pela unicidade das geodésicas, $\varphi \circ \gamma_1(t) = \psi \circ \gamma_1(t)$ para todo $t \in [0, \delta]$. Como $v \in T_{\bar{p}}S_1$, $\|v\| = 1$, é arbitrário, temos que $\varphi(p) = \psi(p)$ para todo $p \in V$. Sendo V aberto em S_1 , temos também que $d\varphi_p = d\psi_p$ para todo $p \in S_1$. Logo $V \subset A$.

Provamos, assim, que A é aberto em S_1 .

Como A é não-vazio, aberto e fechado em S_1 e S_1 é conexa, temos que $A = S_1$, isto é, $\varphi(p) = \psi(p)$ para todo $p \in S_1$. ■

Corolário 0.4 As isometrias da esfera unitária

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

são as restrições a S^2 das transformações lineares ortogonais de \mathbb{R}^3 .

Prova.

Seja $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear ortogonal de \mathbb{R}^3 , isto é, L é linear e

$$\langle L(v), L(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

para todos $v, w \in \mathbb{R}^3$.

Como $L(S^2) = S^2$ e $dL_p = L$ para todo $p \in \mathbb{R}^3$, temos que $L : S^2 \rightarrow S^2$ é uma isometria de S^2 .

Por outro lado, se $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$ é uma isometria de S^2 , $p_0 \in S^2$ e $\{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal de $T_{p_0}S^2$, então $\{p_0, v_1, v_2\}$ e $\{\varphi(p_0), d\varphi_{p_0}(v_1), d\varphi_{p_0}(v_2)\}$ são bases ortonormais de \mathbb{R}^3 , pois: $\|p_0\| = \|\varphi(p_0)\| = 1$; $\{d\varphi_{p_0}(v_1), d\varphi_{p_0}(v_2)\}$ é uma base ortonormal de $T_{\varphi(p_0)}S^2$, já que $d\varphi_p : T_pS^2 \rightarrow T_{\varphi(p)}S^2$ preserva produto interno;

$$T_{p_0}S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, p_0 \rangle = 0\} \quad \text{e} \quad T_{\varphi(p_0)}S^2 = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, \varphi(p_0) \rangle = 0\}.$$

Então existe uma isometria linear $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $L(p_0) = \varphi(p_0)$, $L(v_1) = d\varphi_{p_0}(v_1)$ e $L(v_2) = d\varphi_{p_0}(v_2)$.

Como S^2 é conexa e $L : S^2 \rightarrow S^2$ é uma isometria tal que $L(p_0) = \varphi(p_0)$ e $dL_{p_0} = d\varphi_{p_0}$, pois $dL_{p_0}(v_i) = L(v_i) = d\varphi_{p_0}(v_i)$, $i = 1, 2$, temos, pela Proposição —, que $\varphi = L$, isto é, φ é a restrição a S^2 da isometria linear L . ■

Observação 0.17 Seja $S_R^2(p_0)$ a esfera de centro p_0 e raio $R > 0$. Então as isometrias de $S_R^2(p_0)$ são as restrições a $S_R^2(p_0)$ das isometrias de \mathbb{R}^3 da forma $T \circ L$, onde L é uma isometria linear de \mathbb{R}^3 e T é a translação $T(p) = p + p_0 - L(p_0)$.

De fato, seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o difeomorfismo dado por $f(p) = Rp + p_0$. Então $f(S^2) = S_{\mathbb{R}}^2(p_0)$, $f^{-1}(q) = \frac{q - p_0}{R}$, $df_p(v) = Rv$ e $df^{-1}_q(w) = \frac{w}{R}$ para todos $v, w \in \mathbb{R}^3$.

Seja $\varphi : S_{\mathbb{R}}^2(p_0) \rightarrow S_{\mathbb{R}}^2(p_0)$ uma isometria de $S_{\mathbb{R}}^2(p_0)$. Então $f^{-1} \circ \varphi \circ f$ é uma isometria de S^2 , pois $f^{-1} \circ \varphi \circ f(S^2) = S^2$, $f^{-1} \circ \varphi \circ f : S^2 \rightarrow S^2$ é um difeomorfismo e

$$\begin{aligned} d(f^{-1} \circ \varphi \circ f)_p(v) &= d(f^{-1})_{\varphi \circ f(p)} \circ d\varphi_{f(p)} \circ df_p(v) = d(f^{-1})_{\varphi \circ f(p)} \left(d\varphi_{f(p)} \left(\frac{v}{R} \right) \right) \\ &= d(f^{-1})_{\varphi \circ f(p)}(R d\varphi_{f(p)}(v)) = \frac{R}{R} d\varphi_{f(p)}(v) = d\varphi_{f(p)}(v), \end{aligned}$$

para todo $p \in S^2$ e todo $v \in T_p S^2 = T_{f(p)} S_{\mathbb{R}}^2(p_0)$.

Logo, pelo corolário acima, existe uma isometria linear $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $L(p) = f^{-1} \circ \varphi \circ f(p)$ para todo $p \in S^2$. Assim,

$$\varphi(q) = f \circ L \circ f^{-1}(q) = f \left(L \left(\frac{q - p_0}{R} \right) \right) = f \left(\frac{1}{R} (L(q) - L(p_0)) \right) = L(q) + p_0 - L(p_0),$$

para todo $q \in S_{\mathbb{R}}^2(p_0)$, isto é,

$$\varphi = T \circ L,$$

onde T é a translação $T(q) = q + p_0 - L(p_0)$.

Definição 0.6 Dizemos que um aberto $V \subset S$ é uma *vizinhança normal de $p \in S$* se $V = \exp_p(U)$, onde U é um aberto de $T_p S$, com $0 \in U$, tal que $\exp_p : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo.

Aplicação: Sendo a aplicação $\exp_p : U \rightarrow V$ um difeomorfismo, ela pode ser usada para introduzir coordenadas em V .

1. As *coordenadas normais* que correspondem a um sistema de coordenadas retangulares no plano tangente $T_p S$.

As coordenadas normais são obtidas através da escolha de dois vetores unitários ortogonais e_1 e e_2 do plano tangente $T_p S$. Como $\exp_p : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo, temos que $X : U_0 \rightarrow V$, $X(u, v) = \exp_p(ue_1 + ve_2)$, é uma parametrização de S em p , com $X(0, 0) = p$, onde $U_0 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid ue_1 + ve_2 \in U\}$ é um aberto de \mathbb{R}^2 . Assim, se $q = \exp_p(ue_1 + ve_2)$, então (u, v) são as coordenadas normais do ponto q com respeito à parametrização X .

Em um sistema de coordenadas normais centrado em p , as geodésicas que passam que passam por p são imagens $X(at, bt) = \exp_p((ae_1 + be_2)t)$ das retas (at, bt) que passam pela origem.

Como $X(u, 0) = \exp_p(ue_1) = \gamma(u, e_1)$ e $X(0, v) = \exp_p(ve_2) = \exp_p(ve_2) = \gamma(v, e_2)$, temos que $X_u(0, 0) = \gamma'(0, e_1) = e_1$ e $X_v(0, 0) = \gamma'(0, e_2) = e_2$. Logo os coeficientes da primeira forma fundamental na origem de um tal sistema de coordenadas são dados por $E(0, 0) = G(0, 0) = 1$ e $F(0, 0) = 0$.

2. As coordenadas polares geodésicas que correspondem às coordenadas polares no plano tangente $T_p S$.

Sejam e_1, e_2 dois vetores unitários ortogonais de $T_p S$ e $X(u, v) = \exp_p(ue_1 + ve_2)$ o sistema de coordenadas normais visto acima. Vamos tomar $U = B_\varepsilon(0)$. Neste caso, $U_0 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < \varepsilon^2\}$.

Sejam (ρ, θ) as coordenadas polares de (u, v) , isto é, $(u, v) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ com $\rho > 0$ e $\theta \in (0, 2\pi)$.

Como $(\rho, \theta) \mapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ é um difeomorfismo de $(0, \varepsilon) \times (0, 2\pi)$ sobre $U_0 - \{(u, 0) \mid u \in [0, \varepsilon]\}$, temos que a aplicação $Y : (0, \varepsilon) \times (0, 2\pi) \rightarrow V - L$, dada por

$$Y(\rho, \theta) = \exp_p(\rho \cos \theta e_1 + \rho \sin \theta e_2),$$

é uma parametrização de S , onde $L = \exp_p(\ell)$ e $\ell = \{te_1 \mid t \in [0, \varepsilon]\}$.

***** Figura pag 9

Dizemos que (ρ, θ) são as **coordenadas polares geodésicas** do ponto $\exp_p(\rho \cos \theta e_1 + \rho \sin \theta e_2)$.

Definição 0.7 As imagens por $\exp_p : U \rightarrow V$ de círculos em U centrados em 0 são chamados **círculos geodésicos** de V , e as imagens por \exp_p de retas passando por 0 são chamadas **geodésicas radiais** de V .

Proposição 0.9 Seja $Y : U - \ell \rightarrow V - \ell$ um sistema de coordenadas polares geodésicas (ρ, θ) . Então os coeficientes $E = E(\rho, \theta)$, $F = F(\rho, \theta)$ e $G = G(\rho, \theta)$ da primeira forma fundamental satisfazem as condições:

$$E \equiv 1, \quad F \equiv 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} G = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho = 1.$$

Proposição 0.10 Para abreviar a notação escrevemos $\nu_\theta = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ e $\omega_\theta = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2$.

Temos assim

$$E = \langle Y_\rho, Y_\rho \rangle = \left\| \frac{d}{d\rho} \exp_p(\rho \nu_\theta) \right\|^2 = \|\gamma'(\rho, \nu_\theta)\|^2 = \|\nu_\theta\|^2 = 1,$$

já que $\rho \mapsto \exp_p(\rho \nu_\theta) = \gamma(\rho, \nu_\theta)$ é uma geodésica e, portanto, $\|\gamma'(\rho, \nu_\theta)\|$ é constante.

Além disso, como a derivada covariante $\frac{D}{d\rho} Y_\rho$ de Y_ρ ao longo de $\rho \mapsto Y(\rho, \theta)$ é nula, pois Y_ρ é o campo de vetores tangentes à geodésica $\rho \mapsto Y(\rho, \theta)$, temos que

$$\begin{aligned} F_\rho &= \frac{d}{d\rho} \langle Y_\rho, Y_\theta \rangle = \left\langle \frac{DY_\rho}{d\rho}, Y_\theta \right\rangle + \langle Y_\rho, Y_{\theta\rho} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \langle Y_\rho, Y_\rho \rangle = 0, \end{aligned}$$

já que $E = \langle Y_\rho, Y_\rho \rangle \equiv 1$.

Então F não depende de ρ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} F &= \langle Y_\rho, Y_\theta \rangle = \langle d(\exp_p)_{\rho\nu_\theta}(\nu_\theta), d(\exp_p)_{\rho\nu_\theta}(\omega_\theta) \rangle \\ &= \rho \langle d(\exp_p)_{\rho\nu_\theta}(\nu_\theta), d(\exp_p)_{\rho\nu_\theta}(\omega_\theta) \rangle. \end{aligned}$$

Logo

$$|F| \leq \rho \left\| d(\exp_p)_{\rho\nu_\theta}(\nu_\theta) \right\| \left\| d(\exp_p)_{\rho\nu_\theta}(\omega_\theta) \right\|.$$

Como $\exp_p : B_\varepsilon(0) \rightarrow V$ é uma aplicação diferenciável, $(\exp_p)_0 = \text{id}$ e $\|\nu_\theta\| = \|\omega_\theta\| = 1$, temos que $\lim_{\rho \rightarrow 0} F = 0$. Junto com o fato de que F não depende de ρ , isto implica que $F = 0$.

Para provar as duas últimas igualdades, consideremos o sistema de coordenadas normais $X(u, v) = \exp_p(ue_1 + ve_2)$, cujos coeficientes designaremos por \bar{E} , \bar{F} e \bar{G} . Como $u = \rho \cos \theta$, $v = \rho \sin \theta$, para $(u, v) \in \{(u, 0) \mid u \in [0, \varepsilon]\}$, $\bar{E}(0, 0) = \bar{G}(0, 0) = 1$ e $\bar{F}(0, 0) = 0$, e lembrando que

$$\sqrt{G} = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\rho, \theta)} \right|,$$

onde $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\rho, \theta)}$ é o Jacobiano da mudança de coordenadas, temos

$$\sqrt{G}(\rho, \theta) = \rho \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).$$

Portanto, $\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0$ e

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} + \rho \frac{d}{d\rho} \left(\sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} \right) \right] \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} + \rho \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial u} \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial v} \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} \right) = 1. \end{aligned}$$

Observação 0.18 O significado geométrico do fato de que $F = 0$ é que em uma vizinhança normal a família de círculos geodésicos é ortogonal à família de geodésicas radiais. Tal fato é conhecido como o *Lema de Gauss*.

Apresentaremos agora algumas aplicações geométricas das coordenadas normais e das coordenadas polares geodésicas.

Primeiro, vamos estudar as superfícies com curvatura Gaussiana constante. Como em um sistema, $E = 1$ e $F = 0$, temos, pelo — do Capítulo 5, que

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_\theta}{\sqrt{EG}} \right)_\theta + \left(\frac{G_\rho}{\sqrt{EG}} \right)_\rho \right) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{G}} \left(\frac{G_\rho}{\sqrt{G}} \right)_\rho = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left((\sqrt{G})_\rho \right)_\rho = -\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}. \end{aligned}$$

Esta expressão pode ser considerada como uma equação diferencial a ser satisfeita por $\sqrt{G}(\rho, \theta)$ se queremos que a superfície tenha (na vizinhança em questão) curvatura $\mathbf{K}(\rho, \theta)$. Se \mathbf{K} é constante, a expressão acima ou de forma equivalente,

$$(\sqrt{G})_{\rho\rho} + \mathbf{K}\sqrt{G} = 0,$$

é uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes.

Teorema 0.12 (Minding)

Quaisquer duas superfícies com a mesma curvatura Gaussiana constante são localmente isométricas. Mais precisamente, sejam S_1 e S_2 duas superfícies regulares com a mesma curvatura constante \mathbf{K} . Sejam $p_1 \in S_1$, $p_2 \in S_2$ e bases ortonormais $\{e_1, e_2\}$ de $T_{p_1}S_1$, $\{f_1, f_2\}$ de $T_{p_2}S_2$. Então existem vizinhanças abertas V_1 de p_1 , V_2 de p_2 e uma isometria $\psi : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $\psi(p_1) = p_2$, $d\psi_{p_1}(e_1) = f_1$ e $d\psi_{p_1}(e_2) = f_2$.

- Para provar o teorema acima vamos utilizar o seguinte resultado de Análise na Reta.

Lema 0.4 *Seja $f : [\alpha, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em (α, b) e tal que existe e é finito $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f'(x)$. Então f é derivável em α e $f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f'(x)$.*

Observação 0.19 Fixado θ , os lemas — e —, dizem que a extensão contínua de $(0 < \rho < \delta) \rightarrow \sqrt{G}(\rho, \theta)$, dada por $\sqrt{G}(0, \theta) = 0$, é derivável e sua derivada em zero vale 1.

Além disso, o lema — junto com a igualdade $(\sqrt{G})_{\rho\rho} = -\mathbf{K}\sqrt{G}$ nos dá que \sqrt{G} é duas vezes derivável em 0 e $(\sqrt{G})_{\rho\rho}(0) = 0$, pois

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} (\sqrt{G})_{\rho\rho} = - \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \mathbf{K}\sqrt{G} = 0,$$

pelo lema —.

Temos assim que $\rho \in [0, \delta) \rightarrow \sqrt{G}(\rho, \theta)$ é a solução da equação diferencial

$$X''(\rho) + \mathbf{K}X(\rho) = 0 \tag{4}$$

com condições iniciais $X(0) = 0$ e $X'(0) = 1$.

Há três casos a considerar.

1. Se $\mathbf{K} = 0$, então $\sqrt{G} = A\rho + B$.

Como $\sqrt{G}(0) = 0$ e $(\sqrt{G})_{\rho} = 1$, temos que $\sqrt{G}(\rho, \theta) = \rho$, ou seja, $G(\rho, \theta) = \rho^2$.

Neste caso,

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \rho^2.$$

2. Se $\mathbf{K} > 0$, a solução geral da equação (4) é dada por

$$\sqrt{G} = A \cos(\sqrt{\mathbf{K}}\rho) + B \sen(\sqrt{\mathbf{K}}\rho).$$

Como $\sqrt{G}(0) = 0$ e $(\sqrt{G})_{\rho}(0) = 1$, temos que

$$\sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{K}}} \sen(\sqrt{\mathbf{K}}\rho).$$

Neste caso,

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \frac{1}{\mathbf{K}} \sen^2(\sqrt{\mathbf{K}}\rho).$$

3. Se $\mathbf{K} < 0$, a solução geral da equação (4) é dada por

$$\sqrt{G} = A \cosh(\sqrt{-\mathbf{K}}\rho) + B \sinh(\sqrt{-\mathbf{K}}\rho).$$

Utilizando as condições iniciais $\sqrt{G}(0) = 0$ e $(\sqrt{G})_{\rho}(0) = 1$, verifica-se que

$$\sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{-\mathbf{K}}} \sinh(\sqrt{-\mathbf{K}}\rho).$$

Então, neste caso,

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = -\frac{1}{K} \operatorname{senh}^2 \left(\sqrt{-K} \rho \right).$$

Concluimos, assim, que se K for constante, então os coeficientes E , F e G da parametrização $Y(\rho, \theta)$ só dependem de K .

Prova.

(do Teorema de Minding)

Seja $\delta > 0$ tal que $B_\delta(p_1) = \exp_{p_1}(B_\delta^1(0))$ e $B_\delta(p_2) = \exp_{p_2}(B_\delta^2(0))$ sejam vizinhanças normais de p_1 e p_2 , respectivamente, isto é,

$$\begin{aligned} \exp_{p_1} : B_\delta^1(0) \subset T_{p_1}S_1 &\longrightarrow B_\delta(p_1) \subset S_1 \\ \text{e} \quad \exp_{p_2} : B_\delta^2(0) \subset T_{p_2}S_2 &\longrightarrow B_\delta(p_2) \subset S_2 \end{aligned}$$

são difeomorfismos.

Seja $L : T_{p_1}S_1 \longrightarrow T_{p_2}S_2$ a isometria linear tal que $L(e_1) = f_1$ e $L(e_2) = f_2$.

Afirmação: $f = \exp_{p_2} \circ L \circ (\exp_{p_1})^{-1} : B_\delta(p_1) \longrightarrow B_\delta(p_2)$ é uma isometria.

De fato, f é um difeomorfismo, pois L é um difeomorfismo e $L(B_\delta^1(0)) = B_\delta^2(0)$.

Além disso, as coordenadas polares geodésicas $Y : (0, \delta) \times (0, 2\pi) \longrightarrow B_\delta^1(p_1) - \ell_1$, $Y(\rho, \theta) = \exp_{p_1}(\rho \cos \theta e_1 + \rho \operatorname{sen} \theta e_2)$, onde $\ell_1 = \{ \exp_{p_1}(\rho e_1) \mid \rho \in [0, \delta] \}$, associadas à base ortonormal $\{e_1, e_2\}$, são levadas por f nas coordenadas polares geodésicas \bar{Y} de $B_\delta^2(p_2) - \ell_2$, associadas à base ortonormal $\{f_1, f_2\}$, onde $\ell_2 = \{ \exp_{p_2}(\rho f_1) \mid \rho \in [0, \delta] \}$, pois

$$\begin{aligned} f \circ Y(\rho, \theta) &= \exp_{p_2} \circ L \circ (\exp_{p_1})^{-1} \circ \exp_{p_1}(\rho \cos \theta e_1 + \rho \operatorname{sen} \theta e_2) \\ &= \exp_{p_2} \circ L(\rho \cos \theta e_1 + \rho \operatorname{sen} \theta e_2) = \exp_{p_2}(\rho \cos \theta f_1 + \rho \operatorname{sen} \theta f_2) = \bar{Y}(\rho, \theta). \end{aligned}$$

Como $f = \bar{Y} \circ Y^{-1}$ em $B_\delta^1(p_1) - \ell_1$ e os coeficientes da primeira forma fundamental de Y e \bar{Y} são iguais (observação —) temos, pela proposição — do Capítulo 5, que $f|_{B_\delta^1(p_1) - \ell_1}$ é uma isometria.

Como, para todo $\theta_0 \in [0, 2\pi)$, podemos considerar os sistemas de coordenadas polares geodésicos

$$\begin{aligned} Y_{\theta_0} : (0, \delta) \times (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi) &\longrightarrow B_\delta^1(p_1) - \ell_1^{\theta_0} \\ \text{e} \quad \bar{Y}_{\theta_0} : (0, \delta) \times (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi) &\longrightarrow B_\delta^2(p_2) - \ell_2^{\theta_0}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \ell_1^{\theta_0} &= \{ \exp_{p_1} (\rho \cos \theta_0 e_1 + \rho \operatorname{sen} \theta_0 e_2) \mid \rho \in [0, \delta] \} \\ \text{e} \quad \ell_2^{\theta_0} &= \{ \exp_{p_2} (\rho \cos \theta_0 f_1 + \rho \operatorname{sen} \theta_0 f_2) \mid \rho \in [0, \delta] \}, \end{aligned}$$

podemos provar, usando os argumentos feitos acima, que $f|_{B_\delta^1(p_1) - \ell_1^{\theta_0}} = \tilde{Y}_{\theta_0} \circ Y_{\theta_0}^{-1}$ é uma isometria. Logo $f|_{B_\delta^1(p_1) - \{p_1\}}$ é uma isometria, pois

$$\bigcup_{\theta_0 \in [0, 2\pi)} (B_\delta^1(p_1) - \ell_1^{\theta_0}) = B_\delta^1(p_1) - \{p_1\}.$$

Por outro lado, como $d(\exp_{p_1})_0 = \operatorname{id} : T_{p_1}S_1 \rightarrow T_{p_1}S_1$, $d(\exp_{p_2})_0 = \operatorname{id} : T_{p_2}S_2 \rightarrow T_{p_2}S_2$ e $dL_0 = L : T_{p_1}S_1 \rightarrow T_{p_2}S_2$, temos que $df_{p_1} = L$ é uma isometria, isto é, $df_{p_1} : T_{p_1}S_1 \rightarrow T_{p_2}S_2$ preserva produto interno.

Portanto, $f : B_\delta^1(p_1) \rightarrow B_\delta^2(p_2)$ é uma isometria. ■

Como outra aplicação das coordenadas polares geodésicas, vamos estudar algumas propriedades minimizantes das geodésicas.

Definição 0.8 Dizemos que uma curva regular por partes $\alpha : [a, b] \rightarrow S$, tal que $\alpha(a) = p$ e $\alpha(b) = q$, *minimiza a distância* (ou *é minimizante*) se $\ell(\alpha) = d(p, q)$, onde

$$d(p, q) = \inf \{ \ell(\beta) \mid \beta : [a, b] \rightarrow S \text{ é regular por partes, } \beta(a) = p, \beta(b) = q \}$$

é a distância intrínseca entre p e q em S (ver —).

Exemplo 0.6 Nem sempre existem curvas em uma superfície S que minimizam a distância.

De fato, basta tomar S como sendo um plano furado (i.e. um plano do qual se retirou um ponto O) e considerar em S dois pontos p e q tais que $O \in [p, q]$. A distância intrínseca entre p e q é $\|p - q\|$, mas não existe em S nenhuma curva de p a q com comprimento $\|p - q\|$. □

***** Figura pag 30

Uma propriedade fundamental de uma geodésica é o fato de que, localmente, ela minimiza o comprimento de arco. Mais precisamente, temos:

Proposição 0.11 *Seja p um ponto em uma superfície regular S . Se $B_\delta(p)$ é uma vizinhança normal de p e $q \in B_\delta(p)$, então a geodésica radial de p a q é a única curva minimizante*

entre p e q , isto é, se $\gamma : [0, 1] \rightarrow B_\delta(p)$ é a geodésica radial tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ e $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ é uma curva diferenciável por partes ligando p a q , então

$$\ell(\gamma) \leq \ell(\alpha),$$

onde ℓ denota o comprimento da curva. Além disso, se $\ell(\alpha) = \ell(\gamma)$, então o traço de α coincide com o traço de γ entre p e q .

Prova.

Seja $t_1 = \sup\{t \in [a, b] \mid \alpha(t) = p\}$. Como o conjunto $\{t \in [a, b] \mid \alpha(t) = p\}$ é fechado e não-vazio e $\alpha(b) = q \neq p$, temos que $t_1 \in [a, b)$, $\alpha(t_1) = p$ e $\alpha(t) \neq p$ para todo $t \in (t_1, b]$.

Basta, então provarmos que

$$\ell(\gamma) \leq \ell(\alpha|_{[t_1, b]}),$$

pois $\ell(\alpha|_{[t_1, b]}) \leq \ell(\alpha)$, e $\ell(\alpha|_{[t_1, b]}) = \ell(\alpha)$, se, e só se, $\alpha(t) = p$, $t \in [a, t_1]$.

Suponhamos primeiro que $\alpha([t_1, b]) \subset B_\delta(p)$. Como \exp_p é um difeomorfismo em $B_\delta(p)$, existe uma curva $\beta : [t_1, b] \rightarrow B_\delta(p)$ diferenciável por partes tal que $\exp_p(\beta(t)) = \alpha(t)$. Além disso, como $\beta(0) = 0$ e $\beta(t) \neq 0$ para $t \in (t_1, b]$, α pode ser escrita na forma

$$\alpha(t) = \exp_p(\rho(t) \nu(t)),$$

onde $\nu = \frac{\beta}{\|\beta\|} : (t_1, b] \rightarrow T_p S$ é uma curva diferenciável por partes em $T_p S$ com $\|\nu\| = 1$ e

$\rho = \|\beta\| : (t_1, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva diferenciável por partes.

Seja a aplicação diferenciável por partes $f : (0, \delta) \times (t_1, b] \rightarrow S$ dada por

$$f(\rho, t) = \exp_p(\rho \nu(t)).$$

Logo, exceto para um número finito de pontos,

$$\alpha'(t) = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho(t), t) \rho'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\rho(t), t), \quad (5)$$

pois $\alpha(t) = f(\rho(t), t)$ para $t \in (t_1, b]$.

Como (ver observação —) em uma vizinhança normal a família de círculos geodésicos é ortogonal à família de geodésicas radiais, temos que

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial \rho}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle(\rho(t), t) = 0.$$

Além disso, $\left| \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho, t) \right| = 1$, pois, para t fixo, $f(\rho, t) = \exp_p(\rho \nu(t))$ é uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco, já que $\|\nu(t)\| = 1$. Logo, por (5),

$$\|\alpha'(t)\|^2 = \rho'(t)^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(\rho(t), t) \right\|^2 \geq \rho'(t)^2, \quad (6)$$

para todo $t \in (t_1, b]$.

Então, para $\varepsilon > 0$ pequeno,

$$\int_{t_1+\varepsilon}^b \|\alpha'(t)\| dt \geq \int_{t_1+\varepsilon}^b |\rho'(t)| dt \geq \int_{t_1+\varepsilon}^b \rho'(t) dt = \rho(b) - \rho(t_1 + \varepsilon). \quad (7)$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos que $\ell(\alpha|_{[t_1, b]}) \geq \ell(\gamma)$, pois $\rho(t_1) = 0$ e $\rho(b) = \ell(\gamma)$, já que $\alpha(b) = \exp_p(\rho(b) \nu(b)) = q$ e, portanto, $\gamma(s) = \exp_p(s \rho(b) \nu(b))$.

Se a desigualdade (6) ou a segunda desigualdade em (7) é estrita, então $\ell(\alpha|_{[t_1, b]}) > \ell(\gamma)$.

Logo, se $\ell(\gamma) = \ell(\alpha|_{[t_1, b]})$, então $|\rho'(t)| = \rho'(t)$ e $\left\| \frac{\partial f}{\partial t}(\rho(t), t) \right\| = 0$, isto é, $\nu'(t) = 0$, pois

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\rho(t), t) = d(\exp_p)_{\rho(t)\nu(t)}(\rho(t)\nu'(t)),$$

$d(\exp_p)_{\rho(t)\nu(t)}$ é um isomorfismo e $\rho(t) > 0$, para todo $t \in (t_1, b]$.

Assim, $\nu(t) = \text{const} = \nu(b)$. Segue-se daí que $\alpha(t) = \exp_p(\rho(t)\nu(b))$ é uma reparametrização positiva de $\gamma(s) = \exp_p(s \rho(b) \nu(b))$.

Se $\alpha([t_1, b])$ não está contida em $B_\delta(p)$, então, dado $0 < r < \delta$, seja

$$t_r = \inf\{t \in [t_1, b] \mid \alpha(t) \text{ pertence ao círculo geodésico de raio } \rho = r\}.$$

Como o conjunto

$$A = \{t \in [t_1, b] \mid \alpha(t) \text{ pertence ao círculo geodésico de raio } \rho = r\}$$

é fechado e não-vazio, pelo teorema da alfândega (ver *Curso de Análise*, vol 1, de Elon Lima, pag. —) e $t_1 \notin A$, temos $t_r \in A$ e $t_r > t_1$. Então, pelo provado acima,

$$\ell(\alpha|_{[t_1, b]}) \geq \ell(\alpha|_{[t_1, t_r]}) \geq r,$$

e esta desigualdade, valendo para todo $0 < r < \delta$, implica que $\ell(\alpha|_{[t_1, b]}) \geq \delta > \rho(b) = \ell(\gamma)$, pois $q = \exp_p(\rho(b) \nu(b)) \in B_\delta(p)$. ■

***** Fig pag 36

Observação 0.20 A proposição anterior não é válida globalmente, isto é, se considerarmos um arco suficientemente grande de geodésica, ele pode deixar de ser minimizante.

No cilindro $x^2 + y^2 = 1$, por exemplo, a geodésica $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ não minimiza a distância entre $\alpha(0) = (1, 0, 0)$ e $\alpha(2\pi) = (1, 0, 2\pi)$, pois o segmento de reta $\gamma(t) = (1, 0, t)$, $t \in [0, 2\pi]$, contido no cilindro, é a curva de menor comprimento que liga os pontos $(1, 0, 0)$ e $(1, 0, 2\pi)$.

Na esfera, também, dois pontos que não são antípodas podem ser ligados por dois arcos de geodésicas de comprimentos diferentes e apenas o menor deles satisfaz as conclusões da proposição.

***** Figura pag 39

Observação 0.21 Se $\exp_p : B_\delta(0) \rightarrow B_\delta(p)$ é um difeomorfismo, então $B_\delta(p) = \{q \in S \mid d(p, q) < \delta\}$.

De fato, se $q \in B_\delta(p)$, temos, pela proposição —, que se $q = \exp_p(v)$, $\|v\| < \delta$, então $d(p, q) = \ell(\gamma)$, onde γ é a geodésica radial $\gamma(s) = \exp_p(sv)$, $s \in [0, 1]$. Então

$$B_\delta(p) \subset \{q \in S \mid d(p, q) < \delta\}.$$

Por outro lado, se $q \in S - B_\delta(p)$, resulta da demonstração da proposição —, que $d(p, q) \geq \delta$. Logo,

$$\{q \in S \mid d(p, q) < \delta\} \subset B_\delta(p).$$

Resulta desta observação que para todo $p \in S$, existe $\delta > 0$, tal que a bola aberta de centro p e raio δ' na métrica d ,

$$\{p \in S \mid d(p, q) < \delta'\},$$

é um aberto de S com a topologia induzida de \mathbb{R}^3 , para todo $0 < \delta' < \delta$, fato que usaremos para provar que os abertos de S com a métrica d coincidem com os abertos de S com a topologia induzida de \mathbb{R}^3 (ver —).

Por outro lado, se uma curva α diferenciável por partes é minimizante, provaremos que α é uma geodésica. Para isto, necessitamos de um refinamento da proposição —.

Teorema 0.13 Dado $p \in S$, existem um aberto $W \subset S$, com $p \in W$, e um número $\delta > 0$ tais que, para cada $q \in W$, \exp_q é um difeomorfismo em $B_\delta(0) \subset T_q S$ e $\exp_q(B_\delta(0)) \supset W$; isto é, W é uma vizinhança normal de todos os seus pontos.

Prova.

Seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S em p_0 , com $X(u_0, v_0) = p_0$.

Sejam $\varepsilon_1 > 0$, $V_1 \subset U$, V_2 vizinhanças abertas de (u_0, v_0) e $(0, 0)$, respectivamente, e

$$\beta : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times V_1 \times V_2 \longrightarrow U$$

o fluxo local do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 &= 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Ou seja, para cada $(u, v, a, b) \in V_1 \times V_2$ a curva $t \mapsto \beta(t; u, v, a, b)$ é a única solução de (8) com condições iniciais:

$$\begin{aligned} \beta(0; u, v, a, b) &= (u, v) \\ \text{e } \frac{d\beta}{dt}(t; u, v, a, b)|_{t=0} &= (a, b). \end{aligned}$$

Podemos tomar $V_2 = B_{\delta_1}(0, 0) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 < \delta_1^2\}$. Seja $\delta_2 = \frac{\delta_1 \varepsilon_1}{2} > 0$. Como, para $\lambda > 0$, $\beta(t; u, v, \lambda a, \lambda b) = \beta(\lambda t; u, v, a, b)$ para todo $t \in \left(-\frac{\varepsilon_1}{\lambda}, \frac{\varepsilon_1}{\lambda}\right)$ (correspondente ao lema — em coordenadas locais), temos que, para todo $(u, v) \in W_1$ e todo $(a, b) \in B_{\delta_1}(0, 0)$,

$$\beta\left(t; u, v, \frac{\varepsilon_1}{2}a, \frac{\varepsilon_1}{2}b\right)$$

está definida em $(-2, 2)$.

Portanto

$$\beta(t; u, v, a, b)$$

está definida em $(-2, 2)$, para todo $(u, v) \in V_1$ e todo $(a, b) \in B_{\delta_2}(0, 0)$.

Seja a aplicação diferenciável

$$\phi : V_1 \times B_{\delta_2}(0, 0) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^2,$$

dada por

$$\phi(u, v, a, b) = (u, v, \beta(1; u, v, a, b)).$$

Afirmção: $d\phi_{(u_0, v_0, 0, 0)} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ é um isomorfismo.

De fato, seja $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow V_1$ uma curva diferenciável com $\gamma(0) = (u_0, v_0)$ e $\gamma'(0) = (c, d) \in \mathbb{R}^2$. Então $t \mapsto (\gamma(t), 0, 0)$ é uma curva em $V_1 \times B_{\delta_2}(0, 0)$ que passa por $(u_0, v_0, 0, 0)$ com velocidade $(c, d, 0, 0)$.

Assim,

$$d\phi_{(u_0, v_0, 0, 0)}(c, d, 0, 0) = \frac{d}{dt}\phi(\gamma(t), 0, 0, 0)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(t), \gamma(t))|_{t=0} = (c, d, c, d),$$

pois $\beta(t; u_0, v_0, (0, 0)) = (u_0, v_0)$ para todo t .

Por outro lado, se $(e, f) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, então a curva $t \mapsto (u_0, v_0, te, tf)$, $|t| < \frac{\delta_2}{\sqrt{e^2 + f^2}}$, está contida em $V_1 \times B_{\delta_2}(0, 0)$ e passa por $(u_0, v_0, 0, 0)$ com velocidade $(0, 0, e, f)$. Portanto,

$$\begin{aligned} d\phi_{(u_0, v_0, 0, 0)}(0, 0, e, f) &= \frac{d}{dt}\phi(u_0, v_0, te, tf)|_{t=0} \\ &= \left(0, 0, \frac{d}{dt}\beta(1; u_0, v_0, te, tf)|_{t=0}\right) \\ &= \left(0, 0, \frac{d}{dt}\beta(t; u_0, v_0, e, f)|_{t=0}\right) \\ &= (0, 0, e, f). \end{aligned}$$

Concluimos assim que

$$d\phi_{(u_0, v_0, 0, 0)}(c, d, e, f) = (c, d, c + e, d + f),$$

para qualquer $(c, d, e, f) \in \mathbb{R}^4$, o que mostra que $d\phi_{(u_0, v_0, 0, 0)} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é um isomorfismo.

Pelo Teorema da Aplicação Inversa, existem abertos $V_3 \subset V_1$, $B_{\delta_3}(0, 0) \subset B_{\delta_2}(0, 0)$ e $V \subset U \times \mathbb{R}^2$, com $(u_0, v_0) \in V_3$ e $(u_0, v_0, u_0, v_0) \in V$, tais que

$$\phi : V_3 \times B_{\delta_3}(0, 0) \rightarrow V$$

é um difeomorfismo.

Seja V_0 um aberto tal que $(u_0, v_0) \in V_0$, $\overline{V_0} \subset V_3$, e seja $S^1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1\}$.

Considere a aplicação contínua $\psi : \overline{V_0} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(u, v, a, b) = \|aX_u(u, v) + bX_v(u, v)\|.$$

Seja $\delta_0 = \inf \{ \phi(u, v, a, b) \mid (u, v) \in \overline{V_0} \text{ e } (a, b) \in S^2 \}$. Como ψ é contínua e $\overline{V_0} \times S^1$ é compacto, existe $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{a}, \bar{b}) \in \overline{V_0} \times S^1$ tal que

$$\|\bar{a}X_u(\bar{u}, \bar{v}) + \bar{b}X_v(\bar{u}, \bar{v})\| = \delta_0.$$

Sendo $(\bar{a}, \bar{b}) \neq (0, 0)$ e $X_u(\bar{u}, \bar{v}), X_v(\bar{u}, \bar{v})$ vetores LI, temos que $\delta_0 > 0$.

Logo,

$$\left\| \frac{a X_u(u, v) + b X_v(u, v)}{\|(a, b)\|_0} \right\| \geq \delta_0,$$

para todo $(u, v) \in \bar{V}$ e todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, onde $\|(a, b)\|_0 = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Assim,

$$\|a X_u(u, v) + b X_v(u, v)\| \geq \delta_0 \|(a, b)\|_0, \quad (9)$$

para todo $(u, v) \in \bar{V}$ e todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Seja $\delta = \delta_0 \delta_3 > 0$. Então, se $(u, v) \in \bar{V}_0$ e

$$\|a X_u(u, v) + b X_v(u, v)\| < \delta,$$

temos, por (9), que

$$\delta > \|a X_u(u, v) + b X_v(u, v)\| \geq \delta_0 \|(a, b)\|_0 \implies \|(a, b)\|_0 < \frac{\delta}{\delta_0} = \delta_3.$$

Sejam $q \in X(V_0) = \widetilde{W}$, $w \in B_\delta(0) = \{v \in T_q S \mid \|v\| < \delta\}$, e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $w = a X_u(\tilde{u}, \tilde{v}) + b X_v(\tilde{u}, \tilde{v})$, onde $X(\tilde{u}, \tilde{v}) = q$. Então $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in V_0$ e $(a, b) \in B_{\delta_3}(0, 0)$.

Como $\gamma = X \circ \beta(t; \tilde{u}, \tilde{v}, a, b)$, $t \in (-2, 2)$ é a geodésica de S com $\gamma(0) = X(\tilde{u}, \tilde{v}) = q$ e $\gamma'(0) = a X_u(\tilde{u}, \tilde{v}) + b X_v(\tilde{u}, \tilde{v}) = w$, temos que \exp_q está definida em $B_\delta(0)$ para todo $q \in \widetilde{W}$.

Afirmção: Sejam $B_\delta(\widetilde{W}) = \{(q, w) \mid q \in \widetilde{W}, w \in T_q S, \|w\| < \delta\}$ e a aplicação contínua injetora $DX : U \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^6$, dada por

$$DX(u, v, a, b) = (X(u, v), a X_u(u, v) + b X_v(u, v)).$$

Então $(DX)^{-1}(B_\delta(\tilde{w}))$ é um aberto de $U \times \mathbb{R}^2$ que contém o ponto $(u_0, v_0, 0, 0)$.

De fato, se $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{a}, \bar{b}) \in (DX)^{-1}(B_\delta(\tilde{w}))$, isto é, $X(\bar{u}, \bar{v}) \in \widetilde{W}$ e $\|\bar{a} X_u(\bar{u}, \bar{v}) + \bar{b} X_v(\bar{u}, \bar{v})\| < \delta$, então existem um aberto $U_0 \subset U$, com $(\bar{u}, \bar{v}) \in U_0$, e um aberto $V_0 \subset \mathbb{R}^2$, com $(\bar{a}, \bar{b}) \in V_0$, tais que $X(u, v) \in \widetilde{W}$ e $\|a X_u(u, v) + b X_v(u, v)\| < \delta$ para todo $(u, v) \in U_0$ e todo $(a, b) \in V_0$, pois as aplicações $X : U \longrightarrow X(U)$ e

$$\begin{aligned} U \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v, a, b) &\longmapsto a X_u(u, v) + b X_v(u, v), \end{aligned}$$

são contínuas e $\widetilde{W} \subset X(U)$ é aberto. \square

Sejam $\delta_4 > 0$, $\delta_4 < \delta_3$ e $V_4 \subset V_0$ aberto com $(u_0, v_0) \in V_4$ tal que $V_4 \times B_{\delta_4}(0, 0) \subset (DX)^{-1}(B_\delta(\widetilde{W}))$, e seja $V_5 \subset V_4$ aberto tal que $(u_0, v_0) \in V_5$ e

$$V_5 \times V_5 \subset \phi(V_4 \times B_{\delta_4}(0, 0)).$$

Seja $W = X(V_5)$.

Afirmação: \exp_q é um difeomorfismo em $B_\delta(0)$ e $W \subset \exp_q(B_\delta(0, 0))$ para todo $q \in W$.

De fato, como $\phi : V_0 \times B_{\delta_3}(0, 0) \rightarrow \widetilde{V}$ é um difeomorfismo e

$$\phi(u, v, a, b) = (u, v, g(u, v, a, b)),$$

onde $g(u, v, a, b) = \beta(1; u, v, a, b)$, temos que, para todo $(\bar{u}, \bar{v}) \in V$, a aplicação $g_{(\bar{u}, \bar{v})}(a, b) = g(\bar{u}, \bar{v}, a, b)$ é um difeomorfismo em $B_{\delta_3}(0, 0)$, já que $g_{(\bar{u}, \bar{v})}$ é injetora e $d(g_{(\bar{u}, \bar{v})})_{(a, b)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um isomorfismo para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Logo, como

$$\exp_q(w) = X \circ \beta \left(1; \bar{u}, \bar{v}, L_{(\bar{u}, \bar{v})}^{-1}(w) \right) = X \circ g_{(\bar{u}, \bar{v})} \circ L_{(\bar{u}, \bar{v})}^{-1}(w),$$

onde $q = X(\bar{u}, \bar{v})$ e $L_{(\bar{u}, \bar{v})}(a, b) = aX_u(\bar{u}, \bar{v}) + bX_v(\bar{u}, \bar{v})$ é um isomorfismo linear, temos que \exp_q é um difeomorfismo em $B_\delta(0)$ para todo $q \in W$, pois $B_\delta(0) \subset L_{(\bar{u}, \bar{v})}(B_{\delta_3}(0, 0))$, para todo $(\bar{u}, \bar{v}) \in V_0$.

Além disso, como $V_5 \times V_5 \subset \phi(V_4 \times B_{\delta_4}(0, 0))$, se $(\bar{u}, \bar{v}) \in V_5$, então

$$\{(\bar{u}, \bar{v})\} \times V_5 \subset \phi(\{(\bar{u}, \bar{v})\} \times B_{\delta_4}(0, 0)),$$

isto é, $V_5 \subset g_{(\bar{u}, \bar{v})}(B_{\delta_4}(0, 0))$.

Logo

$$W = X(V_5) \subset X \circ g_{(\bar{u}, \bar{v})}(B_{\delta_4}(0, 0)) \subset X \circ g_{(\bar{u}, \bar{v})} \circ L_{(\bar{u}, \bar{v})}^{-1}(B_\delta(0)) = \exp_q(B_\delta(0)),$$

para todo $q = X(\bar{u}, \bar{v}) \in W = X(V_5)$, pois

$$B_{\delta_4}(0, 0) \subset L_{(\bar{u}, \bar{v})}^{-1}(B_\delta(0))$$

para todo $(\bar{u}, \bar{v}) \in V_5 \subset V_4$. ■

Proposição 0.12 *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ uma curva regular por partes tal que em cada arco regular o parâmetro é proporcional ao comprimento de arco. Suponha que o comprimento entre quaisquer dois de seus pontos seja menor ou igual ao comprimento de qualquer curva diferenciável por partes ligando estes pontos. Então α é uma geodésica parametrizada; em particular, α é regular por toda parte.*

Prova.

Basta provar que, dado um ponto qualquer $p_0 = \alpha(s_0)$ na curva, existe $\varepsilon > 0$ tal que a restrição $\alpha|_{[s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon]}$ ($[a, a + \varepsilon)$ ou $(b - \varepsilon, b]$ se for $s_0 = a$ ou $s_0 = b$) é uma geodésica.

Sejam $\delta > 0$ e o aberto $W \subset S$, com $p_0 = \alpha(s_0) \in W$, dados pela proposição —. Seja $\varepsilon > 0$ tal que tal que $p = \alpha(s_0 - \varepsilon)$ e $q = \alpha(s_0 + \varepsilon)$ estejam ambos em W .

Como $W \subset \exp_p(B_\delta(0)) = B_\delta(p)$ e $\alpha|_{[s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon]}$ é minimizante, temos, pela proposição —, que

$$\alpha(t) = \exp_p(\rho(t)v),$$

onde $\rho'(t) > 0$ e $\|v\| = 1$.

Sendo $\exp_p(\rho(t)v) = \gamma(\rho(t), v)$, temos que $\|\alpha'(t)\| = \rho'(t) \|\gamma'(\rho(t), v)\| = \rho'(t)$. Além disso, como $\|\alpha'(t)\|$ é constante em cada arco regular, temos que $\rho(t) = ct$ para algum $c > 0$ e para todo $t \in [s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon]$.

Então $\alpha(t) = \exp_p(ctv) = \gamma(t, cv)$ é uma geodésica parametrizada em $[s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon]$. ■

Como consequência dos resultados acima, provaremos o seguinte:

Teorema 0.14 (de Hopf e Rinow) *Seja S uma superfície completa. Então, dados dois pontos $p, q \in S$, existe uma geodésica minimizante ligando p a q .*

Definição 0.9 Dizemos que uma superfície conexa S é **completa** se qualquer geodésica parametrizada $\gamma(t; p, v)$ de S está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. De modo equivalente, S é **completa** se, para qualquer $p \in S$, \exp_p está definida em todo o espaço tangente $T_p S$.

Exemplo 0.7 O plano é evidentemente uma superfície completa. O cone menos o vértice não é uma superfície completa, pois quando estendemos suficientemente uma geratriz (que é uma geodésica), atingimos o vértice, que não pertence à superfície (ver observação —). A esfera é uma superfície completa, pois suas geodésicas parametrizadas (cujos traços são os grandes círculos da esfera) podem ser definidas em toda a reta real. O cilindro também é uma superfície completa, pois as suas geodésicas são círculos, retas e hélices que estão definidas para todos os valores reais. □

O resultado abaixo nos dá muitos exemplos de superfícies completas.

Proposição 0.13 *Toda superfície regular conexa é fechada.*

Prova.

Seja S uma superfície regular conexa e sejam $p \in S$ e $v \in T_p S$, com $\|v\| = 1$. Então a geodésica $\gamma(s) = \gamma(s; p, v)$ está definida para todo $s \in [0, \infty)$.

De fato, seja $A = \{s_0 > 0 \mid \gamma \text{ está definida em } [0, s_0]\}$.

Pela proposição —, A é não-vazio. Seja $\bar{s} = \sup A$.

Afirmção: $\bar{s} = +\infty$.

Suponhamos, por absurdo, que $\bar{s} > 0$ é finito. Como $\bar{s} = \sup A$, existe uma seqüência (s_n) , com $s_n \in A$, crescente e tal que $s_n \rightarrow \bar{s}$.

Então γ está definida em $[0, s_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, γ está definida em $[0, \bar{s})$.

Como $\|p - q\| \leq d(p, q)$ para todos $p, q \in S$ (ver observação —), temos que

$$\|\gamma(s_n) - \gamma(s_m)\| \leq d(\gamma(s_n), \gamma(s_m)) \leq \|s_n - s_m\|,$$

pois $\|s_n - s_m\|$ é o comprimento da geodésica γ entre s_n e s_m .

Assim, $(\gamma(s_n))$ é uma seqüência de Cauchy em \mathbb{R}^3 . Como S é fechada, o limite \bar{p} desta seqüência pertence a S .

Pelo Teorema —, existe $\delta > 0$ e um aberto $W \subset S$, com $\bar{p} \in W$ tais que \exp_q está definida em $B_\delta(0)$ para todo $q \in W$, isto é, as geodésicas radiais que emanam de q estão definidas pelo menos no intervalo $[0, \delta)$.

Fixemos $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $s_{n_0} > \bar{s} - \frac{\delta}{2}$ e $\gamma(s_{n_0}) \in W$, e sejam $q = \gamma(s_{n_0})$, $w = \gamma'(s_{n_0})$.

***** Figura pag 55

Como a geodésica $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t; q, w)$ está definida em $[-\delta, \delta]$, $\tilde{\gamma}(0) = q$ e $\tilde{\gamma}'(0) = w$, temos que $\alpha(s) = \tilde{\gamma}(s - s_{n_0})$ é uma geodésica definida em $[-\delta + s_{n_0}, \delta + s_{n_0}]$, tal que $\alpha(s_{n_0}) = \tilde{\gamma}(0) = q = \gamma(s_{n_0})$ e $\alpha'(s_{n_0}) = \tilde{\gamma}'(0) = w = \gamma'(s_{n_0})$.

Logo, pela unicidade das geodésicas, γ está definida em $[0, \delta + s_{n_0}] \supset [0, \bar{s} + \frac{\delta}{2}]$, uma contradição, já que $\bar{s} = \sup\{s_0 > 0 \mid \gamma \text{ está definida em } [0, s_0]\}$. □

De modo análogo, podemos provar que a geodésica $\gamma(s) = \gamma(s; 0, v)$ está definida em $(-\infty, 0]$. Logo, $\gamma(s; p, v)$ está definida para qualquer valor real. ■

Corolário 0.5 *Toda superfície conexa compacta é completa.*

Observação 0.22 Mas existem superfícies completas que não são fechadas em \mathbb{R}^3 . Portanto a hipótese de completude é mais fraca do que a de compacidade.

Exemplo 0.8 Seja a aplicação $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = ((1 + e^{-u}) \cos u, (1 + e^{-u}) \sin u, v).$$

É fácil verificar que S é uma bijeção diferenciável sobre $S = X(\mathbb{R}^2)$ que é homeomorfismo, pois

$$X^{-1}(x, y, z) = \left(\log \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2} - 1} \right), z \right)$$

é uma aplicação diferenciável em $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 > 1 \text{ e } z \in \mathbb{R}\}$ e $S = X(\mathbb{R}^2) \subset A$.

Logo, S é uma superfície regular. Na realidade S é o cilindro sobre a curva

$$\alpha(u) = ((1 + e^{-u}) \cos u, (1 + e^{-u}) \sin u, 0), \quad u \in \mathbb{R},$$

***** Figura pag 57

Com geratrizes paralelas ao eixo Oz .

***** Fig pag 400 com as setas ao contrário.

Como $X_v(u, v) = (0, 0, 1)$ e $X_u(u, v) = (-\sin u - e^{-u}(\cos u + \sin u), \cos u + e^{-u}(\cos u - \sin u), 0)$, temos, por um cálculo simples, que:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + 2e^{-2u} + 2e^{-u} = \varphi(u); \quad F = 0; \quad \text{e} \quad G = 1.$$

Seja a função diferenciável dada por $\xi(u) = \int_0^u \sqrt{\varphi(s)} ds$.

Afirmção: $\xi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

De fato, como $\sqrt{\varphi(u)} = \sqrt{1 + 2e^{-2u} + 2e^{-u}} \geq 1$ para todo $u \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\xi(u) = \int_0^u \sqrt{\varphi(s)} ds \geq \int_0^u 1 ds = u,$$

para todo $u \geq 0$, e

$$\xi(u) = \int_0^u \sqrt{\varphi(s)} ds = - \int_u^0 \sqrt{\varphi(s)} ds < - \int_u^0 1 ds = u,$$

para todo $u \leq 0$.

Logo, $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} \xi(u) = \pm\infty$. Assim, $\xi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, já que $\xi(\mathbb{R})$ é um intervalo.

Além disso, como $\xi'(u) = \sqrt{\varphi(u)} > 0$, $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possui uma inversa diferenciável $h_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida em toda a reta.

Seja $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o difeomorfismo dado por $h(\bar{u}, \bar{v}) = (h_1(\bar{u}), h_2(\bar{v}))$, onde $h_2(\bar{v}) = \bar{v}$.

Então $Y = X \circ h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow S$ é uma parametrização de S tal que $Y(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = S$,

$$Y_{\bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) = X_{\bar{u}}(h(\bar{u}, \bar{v})) h'_1(\bar{u}) = \frac{X_{\bar{u}}(h(\bar{u}, \bar{v}))}{\sqrt{E}(h_1(\bar{u}))},$$

$$Y_{\bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) = X_{\bar{v}}(h(\bar{u}, \bar{v})) h'_2(\bar{v}) = X_{\bar{v}}(h(\bar{u}, \bar{v})),$$

Logo, $\bar{E} = \langle Y_{\bar{u}}, Y_{\bar{u}} \rangle = 1$, $\bar{F} = \langle Y_{\bar{u}}, Y_{\bar{v}} \rangle = 0$ e $\bar{G} = \langle Y_{\bar{v}}, Y_{\bar{v}} \rangle = 1$. Portanto, $\bar{\Gamma}_{ij}^k = 0$, para $i, j, k = 1, 2$, onde $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ são os símbolos de Christoffel da parametrização Y .

Pela equação diferencial da geodésica (—), $Y(\bar{u}(t), \bar{v}(t))$ é uma geodésica se, e só se, $\bar{u}''(t) = \bar{v}''(t) = 0$.

Isto é, as geodésicas parametrizadas de S são da forma

$$Y(at + x_0, bt + y_0), \quad t \in \mathbb{R},$$

onde $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Logo S é uma superfície completa. No entanto, S não é fechada em \mathbb{R}^3 , pois cada ponto do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ não pertence a S , mas é o limite em \mathbb{R}^3 de alguma seqüência de pontos de S . Por exemplo, se $(x_0, y_0, z_0) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0, z_0)$ pertence ao cilindro, basta tomar a seqüência $p_n = Y(\theta_0 + 2\pi n, z_0)$ de pontos de S . \square

Para provarmos o Teorema —, precisamos do seguinte resultado.

Proposição 0.14 *Seja p_0 um ponto da superfície S . Então a função $f(p) = d(p_0, p)$, $p \in S$, é contínua em S .*

Prova.

Sejam $p \in S$ e $\varepsilon > 0$. Pela proposição —, existe $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, tal que $\exp_p : B_{\varepsilon'}(0) \longrightarrow B_{\varepsilon'}(p)$ é um difeomorfismo, onde (ver observação —)

$$B_{\varepsilon'}(0) = \{v \in T_p S \mid \|v\| < \varepsilon'\} \quad \text{e} \quad B_{\varepsilon'}(p) = \exp_p(B_{\varepsilon'}(0)) = \{q \in S \mid d(p, q) < \varepsilon'\}.$$

Logo, como V é aberto em S , existe $\delta > 0$ tal que $\tilde{B}_\delta(p) \cap S \subset B_{\varepsilon'}(p)$, onde $\tilde{B}_\delta(p) = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid \|q - p\| < \delta\}$ é a bola aberta de \mathbb{R}^3 de raio δ e centro p . Assim, se $q \in \tilde{B}_\delta(p) \cap S$, ou seja, se $\|p - q\| < \delta$ e $q \in S$, então

$$|f(q) - f(p)| = |d(q, p_0) - d(p, p_0)| \leq d(p, q) < \varepsilon' < \varepsilon,$$

o que completa a demonstração. \blacksquare

Assim, a restrição da função $f(p) = d(p, p_0)$ a qualquer compacto de S atinge um máximo e um mínimo.

Prova.

(Demonstração do Teorema —) Sejam $p \in S$ e $\delta > 0$ tais que $\exp_p : B_\delta(0) \rightarrow B_\delta(p)$ é um difeomorfismo. Se $q \in B_\delta(p)$, existe $v \in B_\delta(0)$ tal que $\exp_p(v) = \gamma(1; p, v) = q$.

Logo, pela proposição —, $d(p, q) = \|v\|$, isto é, $\gamma(t; p, v)$, $t \in [0, \|v\|]$, é a única geodésica minimizante que liga os pontos p e q .

Suponhamos que $\ell = d(p, q) \geq \delta$, isto é, que $q \notin B_\delta(p)$, e considere o círculo geodésico $S^1(p; \delta/2)$ de centro p e raio $\frac{\delta}{2}$. Como $S^1(p; \delta/2)$ é compacto, pois $S^1(p; \delta/2) = \exp_p \left\{ v \in T_p S; \|v\| = \frac{\delta}{2} \right\}$, temos, pela observação acima, que existe um ponto $x_0 \in S^1(p; \delta/2)$ tal que

$$d(q, r) \leq d(q, x),$$

para todo $x \in S^1(p; \delta/2)$.

O ponto x_0 pode ser escrito como $x_0 = \exp_p(\delta/2, v)$, onde $v \in T_p S$, $\|v\| = 1$. Seja γ a geodésica parametrizada pelo comprimento de arco dada por $\gamma(s) = \exp_p(sv)$.

***** Figura pag 64

Como S é completa, γ está definida para todo $s \in \mathbb{R}$. Em particular, γ está definida no intervalo $[0, \ell]$. Se mostrarmos que $\gamma(\ell) = q$, então γ é uma geodésica ligando p a q que é minimizante, pois $\ell(\gamma) = \ell = d(p, q)$.

Para provar isto, vamos mostrar que se $s \in \left[\frac{\delta}{2}, \ell \right]$, então

$$d(\gamma(s), q) = \ell - s. \tag{10}$$

A equação (10) implica, para $s = \ell$, que $\gamma(\ell) = q$ como desejado.

Para provar a equação (10), vamos mostrar primeiro que ela vale para $s = \frac{\delta}{2}$.

Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ uma curva diferenciável por partes tal que $\alpha(a) = p$ e $\alpha(b) = q$. Então, pelo Teorema da Alfândega, a curva α intersecta o conjunto $S^1(p; \delta/2)$.

Seja $t_0 = \inf \{ t \in [a, b] \mid \gamma(t) \in S^1(p; \delta/2) \}$.

Como γ é contínua e $S^1(p; \delta/2)$ é fechado, temos que $\gamma(t_0) \in S^1(p; \delta/2)$.

Então

$$\ell(\alpha) = \ell(\alpha|_{[a, t_0]}) + \ell(\alpha|_{[t_0, b]}) \geq d(p, \alpha(t_0)) + d(\alpha(t_0), q) \geq \frac{\delta}{2} + d(x_0, q),$$

pois $d(p, \alpha(t_0)) = \delta/2$ e $d(x_0, q) \leq d(x, q)$ para todo $x \in S^1(p; \delta/2)$.

Logo, $\ell \geq \frac{\delta}{2} + d(x_0, q)$, pois

$$\ell = d(p, q) = \inf\{\ell(\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{C}_{p,q}\},$$

onde $\mathcal{C}_{p,q} = \{\alpha : [a, b] \rightarrow S \mid \alpha \text{ é diferenciável por partes ; } \alpha(a) = p \text{ e } \alpha(b) = q\}$. Daí

$$d(\gamma(\delta/2), q) \leq \ell - \frac{\delta}{2}. \quad (11)$$

Por outro lado, pela desigualdade triangular,

$$d(\gamma(\delta/2), q) = d(x_0, q) \geq d(p, q) - d(p, x_0) = \ell - \frac{\delta}{2}. \quad (12)$$

Assim, por (11) e (12),

$$d(\gamma(\delta/2), q) = \ell - \frac{\delta}{2}.$$

Observe que o conjunto

$$A = \{s \in [\delta/2, \ell] \mid d(\gamma(s), q) = \ell - s\}$$

é fechado em $[\delta/2, \ell]$ e, pelo provado acima, também é não-vazio.

Seja $s_0 = \sup A$. Como A é fechado, $s_0 \in A$. Suponhamos que $s_0 \in [\delta/2, \ell)$.

Afirmção: Existe $\delta' > 0$ tal que $s_0 + \delta' \in A$.

Pela proposição —, existe $\delta'' > 0$, $\delta'' < \ell - s_0$, tal que $\exp_{\gamma(s_0)}$ é um difeomorfismo.

Observe que a curva que vai de p a $\gamma(s_0)$ por γ e de $\gamma(s_0)$ a x'_0 por uma geodésica radial de $B_{\delta''}(\gamma(s_0))$ tem comprimento $s_0 + \frac{\delta''}{2}$, é diferenciável por partes, e, em cada arco regular, está

parametrizada pelo comprimento de arco. Além disso, como $d(p, x'_0) \geq s_0 + \frac{\delta''}{2}$, esta curva, que liga p a x'_0 , tem comprimento mínimo. Então, pela proposição —, esta curva é uma geodésica.

Assim, pela unicidade das geodésicas, ela deve coincidir com γ em $[0, s_0 + \delta''/2]$.

Logo $\gamma(s_0 + \delta''/2) = x'_0$ e a equação (4) pode ser escrita como

$$d(\gamma(s_0 + \delta''/2), q) = \ell - (s_0 + \delta''/2),$$

que é a equação — para $s = s_0 + \frac{\delta''}{2}$ em $B_{\delta''}(0) = \{v \in T_{\gamma(s_0)}S \mid \|v\| < \delta''\}$.

Seja $S^1(\gamma(s_0); \delta''/2) = \exp_{\gamma(s_0)}(\partial B_{\delta''/2}(0))$. Se $x' \in S^1(\gamma(s_0); \delta''/2)$, a função contínua $d(x', q)$ atinge um mínimo em $x'_0 \in S^1(\gamma(s_0); \delta''/2)$.

***** Figura pag 68

Então, como anteriormente, podemos provar que:

$$d(x'_0, q) = d(\gamma(s_0), q) - \delta''/2.$$

Como a equação — vale em s_0 , temos que $d(\gamma(s_0), q) = \ell - s_0$ e, portanto,

$$d(x'_0, q) = \ell - s_0 - \frac{\delta''}{2}. \quad (13)$$

Além disso, como

$$d(p, x'_0) \geq d(p, q) - d(x'_0, q),$$

obtemos, da equação (13), que:

$$d(p, x'_0) \geq \ell - (\ell - s_0 - \delta''/2) = s_0 + \frac{\delta''}{2}.$$

Fazendo $\delta' = \delta''/2$, obtemos que $s_0 + \delta' \in A$, pois $s_0 + \delta' \in [\delta/2, \ell)$.

Como $s_0 = \sup A$ e $s_0 + \delta' \in A$, chegamos a uma contradição. Logo $s_0 = \ell$. ■

Observação 0.23 Na realidade, olhando a demonstração acima, provamos o seguinte resultado: *se $p \in S$ é tal que as geodésicas que emanam de p se estendem a todos os valores do parâmetro então, para qualquer ponto $q \in S$, existe alguma geodésica minimizante de p a q .*

Definição 0.10 Dizemos que uma superfície conexa S é *estendível* se existe uma superfície conexa \tilde{S} tal que $S \subset \tilde{S}$ como um subconjunto próprio. Se não existe uma tal \tilde{S} , S é chamada *não-estendível*.

Vamos provar abaixo que qualquer superfície completa é não-estendível e que existem superfícies não-estendíveis que não são completas. Portanto, a hipótese de completude é mais forte do que a de não-estendibilidade.

Proposição 0.15 *Toda superfície completa S é não-estendível.*

Prova.

Suponhamos que existe uma superfície conexa \tilde{S} tal que $S \subset \tilde{S}$. Como S é um subconjunto aberto de \tilde{S} , as geodésicas de S são também geodésicas de \tilde{S} . Fixemos $p \in S$. Assim, as geodésicas de \tilde{S} que emanam de p , por serem geodésicas de S , estão definidas para todos os

valores do parâmetro. Então, dado $q \in \tilde{S}$, existe, pela observação acima, alguma geodésica minimizante γ de p a q . Mas $\gamma \subset S$ e, portanto, $q \in S$, o que mostra que $\tilde{S} \subset S$.

Logo, $\tilde{S} = S$, isto é, S é não-estendível. ■

Exemplo 0.9 Já vimos (ver observação —) que o cone $\mathcal{C} : z^2 = x^2 + y^2, z > 0$, não é uma superfície completa. Provaremos agora que \mathcal{C} é não-estendível.

De fato, suponhamos, por absurdo, que existe uma superfície S conexa tal que $\mathcal{C} \subset S$ e $\mathcal{C} \neq S$. Como \mathcal{C} é uma superfície regular, \mathcal{C} é aberta em S . A fronteira $\partial\mathcal{C}$ de \mathcal{C} em S é não-vazia, pois, caso contrário, $S = \mathcal{C} \cup (S - \mathcal{C})$ seria a união de dois abertos disjuntos S e $S - \mathcal{C}$, o que contradiz a conexidade de S . Portanto, existe um ponto $p \in \partial\mathcal{C}$ e como \mathcal{C} é aberto em S , $p \notin \mathcal{C}$.

Seja (p_n) uma seqüência de pontos de \mathcal{C} que converge para p .

Afirmção: Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que p_n está abaixo do plano $z = \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Suponhamos, por absurdo, que a afirmação acima não é verdadeira. Então existe $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito tal que a subseqüência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ está contida em $\mathcal{C} \cap \{z \geq \varepsilon\}$. Como $\mathcal{C} \cap \{z \geq \varepsilon\}$ é fechado e $p_n \xrightarrow{n \in \mathbb{N}'} p$, temos que $p \in \mathcal{C} \cap \{z \geq \varepsilon\} \subset \mathcal{C}$, o que é uma contradição.

Logo, pela afirmação acima, $z_n \rightarrow 0$, isto é, $z = 0$, onde $p_n = (x_n, y_n, z_n)$ e $p = (x, y, z)$. Como $z_n^2 = x_n^2 + y_n^2 \rightarrow x^2 + y^2$, temos que $x^2 + y^2 = 0$, isto é, $x = y = 0$. Então $p = (0, 0, 0)$. Assim, a fronteira de \mathcal{C} em S é constituída só pelo ponto $(0, 0, 0)$.

Portanto, $S = \mathcal{C} \cup \{(0, 0, 0)\}$, pois, caso contrário, teríamos $S = \mathcal{C} \cup \{(0, 0, 0)\} \cup \text{int}(\mathcal{C} - S)$ e $S - \{(0, 0, 0)\}$ não seria conexa. Mas $\mathcal{C} \cup \{(0, 0, 0)\}$ não é uma superfície regular, o que prova a inexistência de S . □

Observação 0.24 Na demonstração acima usamos o seguinte resultado: *se S é uma superfície conexa e $p_0 \in S$, então $S - \{p_0\}$ é conexa.*

De fato, como $S - \{p_0\}$ é um aberto de S , temos que $S - \{p_0\}$ é uma superfície regular e, portanto, um conjunto localmente conexo por caminhos (ver —, Capítulo 3). Além disso, como S é conexa por caminhos, dados $p, q \in S - \{p_0\}$, existe uma curva contínua $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ tal que $\alpha(a) = p$ e $\alpha(b) = q$.

Suponhamos que existe $\tilde{t} \in (a, b)$ tal que $\alpha(\tilde{t}) = p_0$. Seja $X : U \rightarrow X(U)$ uma parametrização de S em p_0 , com $X(u_0, v_0) = p_0$, onde $U = (u_0 - \delta, u_0 + \delta) \times (v_0 - \delta, v_0 + \delta)$.

Sejam $t_1 = \inf\{t \in [a, b] \mid \alpha(t) = p_0\}$ e $t_2 = \sup\{t \in [a, b] \mid \alpha(t) = p_0\}$. Então $a < t_1 \leq t_2 < b$, $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = p_0$ e $\alpha(t) \neq p_0$ para todo $t \in [a, t_1) \cup (t_2, b]$.

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $t_1 - \varepsilon \in [a, t_1)$, $t_2 + \varepsilon \in (t_2, b]$, $\alpha(t_1 - \varepsilon) \in X(U) - \{p_0\}$ e $\alpha(t_2 + \varepsilon) \in X(U) - \{p_0\}$.

Como $U - \{(u_0, v_0)\}$ é conexo por caminhos, existe uma curva contínua $\beta : [t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon] \rightarrow U - \{(u_0, v_0)\}$ tal que $\beta(t_1 - \varepsilon) = (u_1, v_1)$ e $\beta(t_2 + \varepsilon) = (u_2, v_2)$, onde $X(u_1, v_1) = \alpha(t_1 - \varepsilon)$ e $X(u_2, v_2) = \alpha(t_2 + \varepsilon)$.

***** Figura pag 75

Então a curva contínua $\gamma : [a, b] \rightarrow S - \{p_0\}$ dada por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{se } t \in [a, t_1 - \varepsilon] \cup [t_2 + \varepsilon, b] \\ X \circ \beta(t), & \text{se } t \in [t_1 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon], \end{cases}$$

liga os pontos $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$ em $S - \{p_0\}$.

Provamos, assim, que $S - \{p_0\}$ é conexo por caminhos. Logo, $S - \{p_0\}$ é conexa, pois $S - \{p_0\}$ é localmente conexa por caminhos (ver — do Capítulo 3).