uff Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 1 - 2012-1

Integral definida
Teorema Fundamental do Cálculo
Área de regiões planas

Nos exercícios 1 a 10, calcule a integral indicada.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left((\sqrt[3]{t}\,)^2 - 2 \right) dt$
2. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x - \sqrt{x}}{3}\, dx$
3. $\displaystyle\int_{1}^{3} \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) dx$
4. $\displaystyle\int_{1}^{2} \sqrt{\frac{2}{x}}\, dx$
5. $\displaystyle\int_{0}^{2} (2-s)\sqrt{s}\, ds$
6. $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|\, dx$
7. $\displaystyle\int_{0}^{4} \left|x^2 - 4x + 3\right| dx$
8. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x\, dx$
9. $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{x}{\sqrt{x-1}}\, dx$
10. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$

11. Se aplicarmos o Teorema Fundamental do Cálculo em $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$, obteremos a seguinte igualdade: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2.$ Como a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$, isto não faz sentido. O que está errado?

Nos exercícios 12 a 16, derive a função dada.

12. $f(x) = \displaystyle\int_{-x}^{1} \frac{t^2 - 2t}{t^2 + 4}\, dt$
13. $f(x) = \displaystyle\int_{-\operatorname{sen}^2 x}^{x^4} \cos t^3\, dt$
14. $f(x) = x^2 \displaystyle\int_{1}^{2\sqrt{x}} \sqrt{t^2+1}\, dt$
15. $F(x) = \displaystyle\int_{1}^{|\operatorname{sen} x|} \ln t\, dt$
16. $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{\sqrt{x}} e^{t^2+1}\, dt$

Nos exercícios 17 e 18, calcule o limite indicado.

17. $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{x}{2}} \cos(\operatorname{sen} t)\, dt}{(x-\pi)^3}$
18. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\displaystyle\int_{-x}^{1} e^{t^2}\, dt}{(x+1)^3}$

Nos exercícios 19 a 25, calcule a área da região R descrita.

19. R é a região entre os gráficos de $y = x^2 - 1$ e $y = x + 5$.
20. R é a região limitada pela curva de equação $y = x^2 - 2x$, pelo eixo x e pelas retas $x = -2$ e $x = 4$.
21. R é a região entre a reta $x = 2$ e a curva de equação $x = y^2 + 1$.
22. R é o conjunto dos pontos (x, y) tais que $x^2 \le y \le \sqrt{x}$.
23. R é a região entre os gráficos de $y = |x|$ e $y = x^2$, com $-3 \le x \le 3$.
24. R é a região delimitada pelas curvas de equações $y = x$, $xy^2 = 1$ e $y = 2$.
25. R é a região delimitada pelos gráficos de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = -\operatorname{sen} 2x$; $0 \le x \le \pi$.
26. Esboce e encontre a área da região compreendida entre o eixo x e a hipérbole de equação $y = \dfrac{4}{x-1}$, para $2 \le x \le 3$.
27. Esboce e encontre a área da região delimitada pelo gráfico de $y = \dfrac{3}{x-1}$, pela reta $x = -4$ e pelos eixos x e y.
28. Esboce e encontre a área da região limitada pelo gráfico de $y = e^x$ e pela reta que contém os pontos $(0, 1)$ e $(1, e)$.
29. Determine m de modo que a área da região limitada por $y = mx$ e $y = 2x - x^2$ seja 36.

30. A reta de equação $y = 1 - x$ divide a região compreendida entre as parábolas de equações $y = 2x^2 - 2x$ e $y = -2x^2 + 2$ em duas partes. Mostre que as áreas das regiões obtidas são iguais e calcule o seu valor.

31. Seja f diferenciável. Calcule $\int_0^1 xf'(x)\,dx$, sabendo que $f(1) = 2$ e que $\int_0^1 f(t)\,dt$ é igual a área da região R entre o gráfico de $y = -x^2$ e as retas $y = 1$, $x = 0$ e $x = 1$. $\left(\text{sugestão: } \dfrac{d}{dx}(xf(x)) = f(x) + xf'(x)\right)$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES:

1. Determine $f(4)$, se $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x\cos\frac{\pi x}{8}$.

2. Mostre que $y(x) = \frac{1}{a}\int_0^x f(t)\,sena(x-t)\,dt$ é solução do problema de valor inicial : $y'' + ay = f(x)$, $y'(0) = y(0) = 0$, onde $a \in \mathbb{R}^*$ é constante.
Sugestão: Use a identidade do seno da diferença e derive duas vezes.

3. Determine a curva que é gráfico de $y = y(x)$, passa por (1,-1) e tal que, $y'(x) = 3x^2 + 2$.

4. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + ... + n^5}{n^6}$, mostrando que o limite é $\int_0^1 x^5\,dx$ e calculando a integral.

5. Determine x, onde ocorre o mínimo da função $f(x) = \int_{x^2}^{x} \ln t\,dt$, para $x \in (0,1)$.

6. Mostre que a função $\displaystyle\int_a^{1/x} \frac{1}{t^2+1}\,dt + \int_a^x \frac{1}{t^2+1}\,dt$, para $x > 0$, é constante.

7. Mostre que se a função integrável f for periódica, de período p, então a função $g(x) = \int_x^{x+p} f(t)\,dt$ será constante. Dê um exemplo.

RESPOSTAS

1. $-\frac{14}{5}$
2. $-\frac{1}{18}$
3. 0
4. $\left(4 - 2\sqrt{2}\right)$
5. $\frac{16}{15}\sqrt{2}$
6. 1
7. 4
8. $\frac{5}{12}\sqrt{2}$
9. $\dfrac{1}{3}\left(10\sqrt{2} - 8\right)$
10. $\dfrac{1}{2}\,\text{arcsen}\,\dfrac{1}{4}$

11. De acordo com as hipóteses do Teorema Fundamental do Cálculo a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ teria que ser definida e contínua no intervalo $[-1,1]$. Neste caso, a função não está definida em todos os pontos do intervalo $[-1,1]$, pois não está definida em $x = 0$. Logo, não é possível aplicar o teorema para calcular a integral.

12. $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 + 4}$

13. $f'(x) = 4x^3\cos x^{12} + \text{sen}\,2x\ \cos\left(\text{sen}^6 x\right)$

14. $f'(x) = \sqrt{(4x+1)x^3} + 2x\displaystyle\int_1^{2\sqrt{x}} \sqrt{t^2+1}\,dt$

15. $F'(x) = \dfrac{\text{sen}\,x}{|\,\text{sen}\,x|}(\cos x)\ln|\,\text{sen}\,x|$

16. $F'(x) = \dfrac{e^{x+1}}{2\sqrt{x}}$

17. ∞

18. ∞

19. $\displaystyle\int_{-2}^{3} \left((x+5) - \left(x^2 - 1\right)\right) dx$

20. $\displaystyle\int_{-2}^{0} \left(x^2 - 2x\right) dx + \int_0^2 -\left(x^2 - 2x\right) dx + {}$
$\displaystyle+ \int_2^4 \left(x^2 - 2x\right) dx = \frac{44}{3}$

21. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(2 - \left(y^2 + 1\right)\right) dy = \frac{4}{3}$

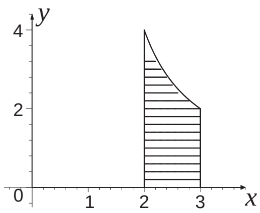
22. $\displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \frac{1}{3}$

23. $\displaystyle 2\int_0^1 \left(x - x^2\right) dx + {}$
$\displaystyle +2\int_1^3 \left(x^2 - x\right) dx = \frac{29}{3}$

24. $\displaystyle\int_1^2 \left(y - y^{-2}\right) dy = 1$

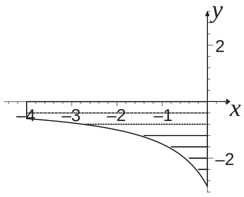
25. $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}} (\,\text{sen}\,x + \text{sen}\,2x)\,dx + {}$
$\displaystyle +2\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} -(\,\text{sen}\,x + \text{sen}\,2x)\,dx = \frac{5}{2}$

26.



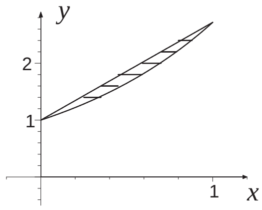
área $= 4 \ln 2$

27.



área $= 3 \ln 5$

28.



área$= \dfrac{3-e}{2}$

29. $m = -4$

30. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left[\left(2-2x^2\right) - (1-x)\right] \; dx =$

$\displaystyle= \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left[(1-x) - \left(2x^2 - 2x\right)\right] \; dx = \frac{9}{8}$

31. $\dfrac{2}{3}$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES:

1. $\frac{\sqrt{2}}{32}(4-\pi)$

3. $y(x) = x^3 + 2x - 4.$

4. $1/6$

5. $x = 1/4$

7. $f(x) = \cos x$, $p = 2\pi$.