

**uff** Universidade Federal Fluminense  
 EGM - Instituto de Matemática  
 GMA - Departamento de Matemática Aplicada

**LISTA 4 - 2012-1**  
 Integração por substituição trigonométrica  
 Técnica de frações parciais  
 Integração por substituições especiais

Nos exercícios 1 a 13, use substituição trigonométrica para calcular a integral dada.

- |   |  |   |
|---|--|---|
| 1. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}} dx$               | 5. $\int_{-4}^{-3} \frac{dx}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}$ | 10. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+5}} dx$ |
| 2. $\int \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$              | 6. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx$                  | 11. $\int \frac{x}{x^2+6x+13} dx$       |
| 3. $\int_0^2 \frac{3x^2}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ | 7. $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}$            | 12. $\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$         |
| 4. $\int \frac{dx}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}$          | 8. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-16}} dx$              | 13. $\int \frac{2x}{(x^2-4x+8)^2} dx$   |
|   | 9. $\int 2\sqrt{8-2x-x^2} dx$                        |   |

Nos exercícios 14 a 19, calcule a integral dada, usando transformação de funções racionais em frações parciais.

- |                                  |   |   |
|----------------------------------|---|---|
| 14. $\int \frac{x-1}{x(x+1)} dx$ | 16. $\int \frac{3x^3-5x^2-3x+1}{(x+1)^2(x-1)^2} dx$ | 18. $\int \frac{3x^3+1}{x^2(x^2+1)^2} dx$ |
| 15. $\int \frac{3x-2}{x^2-4} dx$ | 17. $\int \frac{dx}{x(x^2+4)}$                      | 19. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$         |

Nos exercícios 20 a 22, calcule a integral indicada, fazendo uma substituição do tipo  $x = y^n$ , para algum valor inteiro  $n$ .

- |   |  |   |
|---|--|---|
| 20. $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{4}}}$ | 21. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}$ | 22. $\int \frac{2\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$ |
|---|--|---|

Nos exercícios 23 a 25, resolva as integrais multiplicando e dividindo o integrando pelo conjugado.

- |                                  |   |   |
|----------------------------------|---|---|
| 23. $\int \frac{dx}{1 - \sin x}$ | 24. $\int \frac{\sec x}{1 + \sin x} dx$ | 25. $\int \frac{\cos x}{\sin x \cos x + \sin x} dx$ |
|----------------------------------|---|---|

A substituição tangente do arco metade, a saber  $z = \tan \frac{x}{2}$ ,  $x \in (-\pi, \pi)$ , reduz o problema de integrar uma expressão racional de  $\sin x$  ou  $\cos x$  ao problema de integrar uma função racional de  $z$ , que pode-se resolver, por exemplo, usando frações parciais. Para tal, precisamos das identidades abaixo, que estão demonstradas no livro do G.Thomas vol.1, seção 8.5:

a)  $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$     b)  $\sin x = \frac{2z}{1 + z^2}$     c)  $\cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}$     d)  $dx = \frac{2dz}{1 + z^2}$

Use esta substituição para resolver as integrais dos exercícios 26 a 28:

$$26. \int \frac{dx}{3 + \cos x}$$

$$27. \int \frac{5}{3 \sin x + 4 \cos x} dx$$

$$28. \int \frac{dx}{2 - \cos x + 2 \sin x}$$

RESPOSTAS DA LISTA 4

$$1. \frac{1}{2}x\sqrt{4+x^2} - 2 \ln |\sqrt{4+x^2} + x| + C$$

$$2. \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1-x^2} + C$$

$$3. \frac{3x}{\sqrt{9-x^2}} - 3 \operatorname{arcsen} \frac{x}{3} \Big|_0^2 = \\ = \frac{6}{5}\sqrt{5} - 3 \operatorname{arcsen} \frac{2}{3} + C$$

$$4. \frac{-x}{4\sqrt{x^2-4}} + C$$

$$5. \frac{3}{20}\sqrt{5} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$$

$$6. \sqrt{4-x^2} + 2 \ln \left| \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x} \right| + C$$

$$7. \frac{1}{2} \ln |\sqrt{4x^2+9} + 2x| \Big|_{-2}^2 = \ln 3$$

$$8. 3\sqrt{x^2-16} - \ln |x + \sqrt{x^2-16}| + C$$

$$9. 9 \operatorname{arcsen} \left( \frac{x+1}{3} \right) + (x+1)\sqrt{8-2x+x^2} + C$$

$$10. \sqrt{x^2+2x+5} - \ln |\sqrt{x^2+2x+5} + x + 1| + C$$

$$11. \ln \sqrt{x^2+6x+13} - \frac{3}{2} \operatorname{arctan} \frac{x+3}{2} + C$$

$$12. \frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctan} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \frac{x}{4(x^2+2)} + C$$

$$13. \frac{x-4}{2(x^2-4x+8)} + \frac{1}{4} \operatorname{arctan} \left( \frac{x}{2} - 1 \right) + C$$

$$14. 2 \ln |x+1| - \ln |x| + C$$

$$15. \ln |x-2| + 2 \ln |x+2| + C$$

$$16. \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + 3 \ln |x+1| + C$$

$$17. \frac{\ln |x|}{4} - \frac{\ln(4+x^2)}{8} + C$$

$$18. -\frac{1}{x} - \frac{x+3}{2(x^2+1)} - \frac{3}{2} \operatorname{arctan} x + C$$

$$19. \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctan}(1 + \sqrt{2}x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctan}(-1 + \sqrt{2}x) + C$$

$$20. -4x^{\frac{1}{4}} - 4 \ln |1 - x^{\frac{1}{4}}| + C$$

$$21. 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4 \ln(1 + \sqrt[4]{x}) + C$$

$$22. \frac{12x^{\frac{7}{6}}}{7} - \frac{12x^{\frac{5}{6}}}{5} + 4\sqrt{x} - 12x^{\frac{1}{6}} + 12 \operatorname{arctan} x^{\frac{1}{6}} + C$$

$$23. \tan x + \sec x + C$$

$$24. \left(1 + \tan \frac{x}{2}\right)^{-1} - \left(1 + \tan \frac{x}{2}\right)^{-2} + \frac{1}{2} \ln \left|1 + \tan \frac{x}{2}\right| - \\ \frac{1}{2} \ln \left|-1 + \tan \frac{x}{2}\right| + C$$

$$25. \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{4} \tan^2 \frac{x}{2} + C$$

$$26. \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctan} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \tan \frac{x}{2} \right) + C$$

$$27. \ln \left|1 + 2 \tan \frac{x}{2}\right| - \ln \left|-2 + \tan \frac{x}{2}\right| + C$$

$$28. \ln \left|1 + 3 \tan \frac{x}{2}\right| - \ln \left|1 + \tan \frac{x}{2}\right| + C$$