

uff Universidade Federal Fluminense

EGM - Instituto de Matemática

GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 6 - 2012-1

Volume: método dos discos

Volume: método das cascas

Comprimento de arco

Em cada um dos exercícios 1 a 6 considere a região R limitada pelas curvas de equações dadas. Aplicando o método dos discos circulares, calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo E dado.

- | | |
|---|--|
| 1. $R: y = x^3, y = 0, x = 2;$
$E: \text{eixo } x$ | 4. $R: y = x^2 - 2x, y = 4 - x^2;$
$E: \text{reta } y = 4$ |
| 2. $R: y = \ln x, y = 0, x = e^2;$
$E: \text{eixo } y$ | 5. $R: y = \cos x, y = \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$
$E: \text{reta } y = -1$ |
| 3. $R: y = x^2, x + y = 2;$
$E: \text{eixo } x$ | 6. $R: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1;$
$E: \text{eixo } x$ |

Em cada um dos exercícios 7 a 10 considere a região R limitada pelas curvas de equações dadas. Aplicando o método das cascas cilíndricas, calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo E dado.

- | | |
|--|--|
| 7. $R: y = \frac{1}{4 - x^2}, x = 0, x = 1, y = 0;$
$E: \text{eixo } y$ | 9. $R: x = y^2, x = 0, y = 1;$
$E: \text{reta } y = 2$ |
| 8. $R: y = x^2, x = y^2;$
$E: \text{reta } x = -2$ | 10. $R: y = \ln x, y = 0, x = e^2;$
$E: \text{eixo } x$ |

Em cada um dos exercícios 11 a 14 considere a região R limitada pelas curvas de equações dadas. Calcule, por dois métodos distintos, o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo E dado.

- | | |
|--|---|
| 11. $R: y = x^3, y = 0, x = 2;$
$E: \text{eixo } y$ | 13. $R: xy = 4, x + y = 5;$
$E: y = 1$ |
| 12. $R: y = \frac{x}{2}, y = \sqrt{x};$
$E: \text{eixo } x$ | 14. $R: y = \ln x, y = \frac{x-1}{e-1};$
$E: \text{eixo } x$ |

15. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo x , pelo método que achar conveniente.

$$R: \begin{cases} y = \frac{x}{4} + 1, & \text{se } -4 \leq x < 0 \\ y = \sqrt{1 - x^2}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ y = 0, & \text{se } -4 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

16. Calcule o comprimento de arco do gráfico de $y = x^2$, desde o ponto $(0, 0)$ até $(1, 1)$.

17. Calcule o comprimento de arco do gráfico da função $g(y) = \frac{y^3}{3} + \frac{1}{4y}$, de $(1, g(1))$ até $(2, g(2))$.

18. Quando giramos o gráfico de uma função de classe C^1 , $y = f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$, em torno do eixo $0x$, obtemos uma **superfície de revolução**, cuja área é definida pela integral

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

(para maiores detalhes, veja o livro do Stewart vol. 1, seção 8.2)

Calcule a área da superfície de revolução obtida pela rotação em torno de $0x$ do gráfico de cada função indicada. Faça um esboço da superfície.

a) $f(x) = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1$ b) $f(x) = e^x, 0 \leq x \leq 1$ c) $f(x) = \sqrt{1 - 4x^2}, -1/2 \leq x \leq 1/2$

RESPOSTAS DA LISTA 6

1. $\int_0^2 \pi (x^3)^2 dx = \frac{128\pi}{7}$
2. $\int_0^2 \pi ((e^2)^2 - (e^y)^2) dy = \frac{\pi(3e^4 + 1)}{2}$
3. $\int_{-2}^1 \pi ((-x + 2)^2 - (x^2)^2) dx = \frac{72\pi}{5}$
4. $\int_{-1}^2 \pi ((x^2 - 2x - 4)^2 - (4 - x^2 - 4)^2) dx = 45\pi$
5. $2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \pi ((1 + \cos x)^2 - (1 + \sin x)^2) dx = (4\sqrt{2} - 3) \pi$
6. $2 \int_0^1 \pi \left(\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \right)^2 dx = \frac{32\pi}{105}$
7. $\int_0^1 2\pi x \frac{1}{4 - x^2} dx = \pi(\ln 4 - \ln 3)$
8. $\int_0^1 2\pi(x + 2)(\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{49\pi}{30}$
9. $\int_0^1 2\pi(2 - y)y^2 dy = \frac{5\pi}{6}$
10. $\int_0^2 2\pi y (e^2 - e^y) dy = 2\pi(e^2 - 1)$
11. $\int_0^8 \pi (2^2 - (\sqrt[3]{y})^2) dy = \int_0^2 2\pi x x^3 dx = \frac{64\pi}{5}$
12. $\int_0^4 \pi \left((\sqrt{x})^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \right) dx = \int_0^2 2\pi y (2y - y^2) dy = \frac{8\pi}{3}$
13. $\int_1^4 \pi \left((5 - x - 1)^2 - \left(\frac{4}{x} - 1\right)^2 \right) dx = \int_1^4 2\pi(y - 1) \left(5 - y - \frac{4}{y}\right) dy = 2\pi(8 \ln 2 - 3)$
14. $\int_1^e \pi \left((\ln x)^2 - \left(\frac{x - 1}{e - 1}\right)^2 \right) dx = \int_0^1 2\pi y (1 + (e - 1)y - e^y) dy = \frac{\pi(2e - 5)}{3}$

$$15. \int_{-4}^0 \pi \left(\frac{x}{4} + 1 \right)^2 dx + \int_0^1 \pi \left(\sqrt{1-x^2} \right)^2 dx = \int_0^1 2\pi y \left(4 - 4y + \sqrt{1-y^2} \right) dy = 2\pi$$

$$16. \int_0^1 \sqrt{1+4x^2} dx = \frac{2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})}{4}$$

$$17. \int_1^2 \sqrt{1 + \left(y^2 - \frac{1}{4y^2} \right)^2} dy = \frac{59}{24}$$

$$18. \text{ a) } S = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1); \quad \text{ b) } S = \pi[e\sqrt{1+e^2} + \ln(e + \sqrt{1+e^2}) - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)]; \\ \text{ c) } S = 4\sqrt{3}\pi[2\sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})]$$