

**uff** Universidade Federal Fluminense  
 EGM - Instituto de Matemática  
 GMA - Departamento de Matemática Aplicada

**LISTA 7 - 2012-1**  
 O gradiente e as curvas e superfícies de nível  
 Reta normal. Reta e plano tangente

1. A figura 1 mostra uma porção de um mapa da região sul de Minas Gerais onde estão indicadas as curvas de nível da função altura  $h$  com relação ao nível do mar. Existe uma linha grossa para cada 100 m de elevação e uma linha fina em cada intervalo de 20 m. Considere os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$  no mapa. As setas indicam o vetor gradiente de  $h$  no ponto indicado. Diga se as relações abaixo são verdadeiras ou não, marcando um “V” se a relação for verdadeira e um “F” se ela for falsa.

- |   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> $h(C) = h(E),$   | <input type="checkbox"/> $h(A) > h(C),$   |
| <input type="checkbox"/> $\frac{\partial h}{\partial x}(A) > 0,$                                | <input type="checkbox"/> $\frac{\partial h}{\partial y}(A) > 0,$                                |
| <input type="checkbox"/> $\frac{\partial h}{\partial x}(B) < 0,$                                | <input type="checkbox"/> $\frac{\partial h}{\partial y}(B) < 0,$                                |
| <input type="checkbox"/> $\frac{\partial h}{\partial x}(D) > 0,$                                | <input type="checkbox"/> $\frac{\partial h}{\partial y}(E) < 0,$                                |
| <input type="checkbox"/> $\frac{\partial h}{\partial x}(A) > \frac{\partial h}{\partial x}(E),$ | <input type="checkbox"/> $\frac{\partial h}{\partial x}(B) > \frac{\partial h}{\partial x}(D).$ |

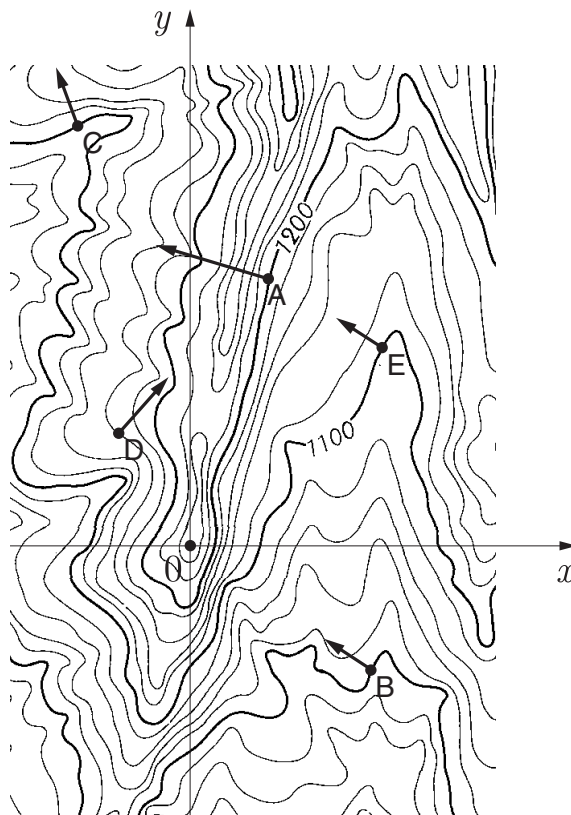


Figura 1: Mapa de contorno de uma região no sul de Minas Gerais.

2. Seja  $f(x, y, z) = z - e^x \operatorname{sen} y$  e  $P = (\ln 3, 3\pi/2, 2)$ . Obtenha:
  - (a)  $\nabla f(P)$
  - (b) A equação de  $S$ , a superfície de nível de  $f$  que contém  $P$
  - (c) A equação da reta normal à  $S$  em  $P$ .
  - (d) A equação do plano tangente à  $S$  em  $P$ .
3. Determine a equação do plano tangente e da reta normal à superfície  $x^2 + xy^2 + y^3 + z + 1 = 0$ , contendo o ponto  $P = (2, -3, 4)$ .
4. Determine a equação do plano tangente e da reta normal à superfície  $\operatorname{sen}(xy) + \operatorname{sen}(yz) + \operatorname{sen}(xz) = 1$ , contendo o ponto  $P = \left(1, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ .
5. Descreva parametricamente a reta tangente à curva de interseção das superfícies  $x^2 + y^2 + z^2 = 49$  e  $x^2 + y^2 = 13$ , no ponto  $(3, 2, -6)$  (Sugestão: observe que essa é a reta de interseção dos planos tangentes aos gráficos das superfícies, em  $P$ ).
6. Seja  $S_1$  o gráfico da função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $S_2$  a superfície de nível 0 de  $F(x, y, z) = x^2 - y + z^2$ . Seja  $\mathcal{C} = S_1 \cap S_2$  e  $P = (1, 2, 1) \in \mathcal{C}$ . Determine a equação da reta tangente à  $\mathcal{C}$  em  $P$ , sabendo que  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 3$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 5$ .
7. As curvas definidas a seguir se interceptam no ponto  $(2\pi, \pi)$ , formando um ângulo de  $\frac{\pi}{2}$  rad.

$$\gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy - \cos(x - 2y) = 2\pi^2 - 1\} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x)\}$$

- (a) Encontre um valor possível para  $f'(2\pi)$ . Quantas soluções tem esse problema?
  - (b) Resolva o mesmo problema supondo que o ângulo é  $\frac{\pi}{6}$  rad.
- Sugestão: Nos dois casos encontre um vetor  $\vec{u}$  perpendicular a curva  $\gamma_1$  em  $(2\pi, \pi)$ , um vetor  $\vec{v}$  tangente a curva  $\gamma_2$  em  $(2\pi, \pi)$  e use a fórmula do ângulo  $\theta$  entre esses vetores,  $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$ .

RESPOSTAS DA LISTA 7

2. (a)  $\nabla f(P) = (3, 0, 1)$       (b)  $z - e^x \operatorname{sen} y = 5$       (c)  $(x, y, z) = \left(\ln 3 + 3\lambda, \frac{3\pi}{2}, 2 + \lambda\right)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$   
 (d)  $3x + z = 2 + 3 \ln 3$ .
3. Reta normal:  $(x, y, z) = (2 + 13\lambda, -3 + 15\lambda, 4 + \lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , plano tangente:  $13x + 15y + z = -15$ .
4. Reta normal:  $(x, y, z) = \left(1, \frac{\pi}{2}, \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\lambda\right)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , plano tangente:  $z = 0$ .
5.  $(x, y, z) = (3 + 2\lambda, 2 - 3\lambda, -6)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$
6.  $(x, y, z) = (1 - 9\lambda, 2 + 8\lambda, 1 + 13\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$
7. (a) Uma solução:  $f'(2\pi) = 2$   
 (b) Duas soluções:  $f'(2\pi) = \frac{8 + 5\sqrt{3}}{11}$  e  $f'(2\pi) = \frac{8 - 5\sqrt{3}}{11}$ .