Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 9 - 2012-1
Máximos e mínimos.

Nos exercícios 1. a 8. use o teorema de Weierstrass (teorema dos valores extremos) para dizer se é possível garantir, a priori, se o problema de otimização possui ou não uma solução.

1. Maximizar $f(x,y) = x + y$
   sujeito às restrições $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1.$
2. Maximizar $f(x,y) = x^2 - y^2$
   sujeito às restrições $x \geq 0,\ y \geq 0.$
3. Minimizar $f(x,y) = x \cdot y$
   sujeito às restrições $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y = 1.$
4. Maximizar $f(x,y) = \operatorname{sen}\big(x^2 + y^2\big)$
   sujeito às restrições $x^2 + y^2 < 1.$
5. Maximizar $f(x,y) = \operatorname{sen}\big(x^2 + y^2\big)$
   sujeito às restrições $x^2 + y^2 \leq 1.$
6. Maximizar $f(x,y) = \operatorname{sen}\big(x^2 + y^2\big)$
   sujeito às restrições $x^2 + y^2 = 1.$
7. Maximizar $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$
   sujeito às restrições $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z \leq 1.$
8. Maximizar $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$
   sujeito às restrições $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \leq x^2 + y^2.$

Nos exercícios 9. a 13. obtenha e classifique os pontos críticos da função dada. Depois de classificar, por pura inspeção ou usando um programa computacional gráfico, tente concluir se f possui máximo ou mínimo global nos extremantes locais de f.

Obs.: os extremantes locais de uma função são os pontos de máximo e de mínimo local da função; os extremantes globais de uma função são os pontos de máximo e de mínimo global da função.

9. $f(x,y) = x^2 - xy + y$
10. $f(x,y) = x + y \operatorname{sen} x$
11. $f(x,y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$
12. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 3xy + 2x + 2y$
13. $f(x,y) = 3\left(x^2 + 3y^2\right) e^{-x^2-y^2}$

Nos exercícios 14. a 17. utilize o seguinte resultado para encontrar os pontos de máximo e mínimo global da função dada.

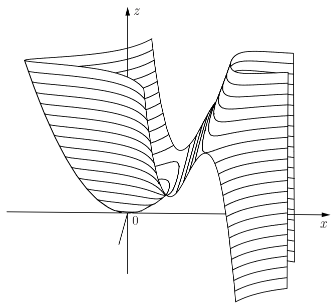
Seja $f(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$, onde a, b, c, d, e e f são constantes, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$. É possível provar que se (x_0, y_0) for um extremante local de f então (x_0, y_0) também será um extremante global de f.

14. $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - x + 2y$
15. $f(x,y) = x + 2y - 2xy - x^2 - 3y^2$
16. $f(x,y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$
17. $f(x,y) = 4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y$

18. Obtenha o máximo de $f(x,y) = xy\, e^{-x-y}$ para $x \geq 0,\ y \geq 0$. (Sugestão: após encontrar os pontos críticos de f e verificar que (x_0, y_0) é um ponto de máximo relativo de f, mostre que $f(x,y) \leq f\left(x_0, y_0\right)$).

19. Mostre que a função $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$ admite máximo local em $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ e mínimo local em $\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$.

20. Considere a função $z = f(x,y) = x^2 + (1-x)^3 y^2$.

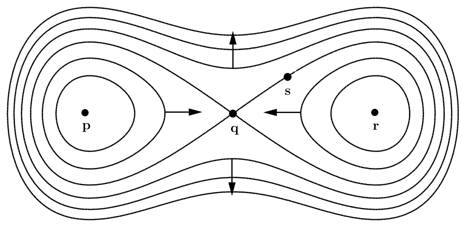


   (a) Encontre o único ponto crítico de f e verifique que é um ponto de mínimo local de f;

   (b) Observe o gráfico de f na figura ao lado e conclua que o valor de f nesse ponto não é um mínimo global de f.

O objetivo desse exercício foi verificar que a afirmação descrita a seguir, bastante útil para determinar o máximo ou o mínimo absoluto de uma função real de uma variável, infelizmente não pode ser generalizada para função real de mais de uma variável: "se uma função real de uma variável, contínua em um intervalo I, tem um único ponto crítico no interior de I, e se esse ponto for um ponto de máximo relativo (ou de mínimo relativo) da função então também será um ponto de máximo absoluto (ou de mínimo absoluto) da função em I".

21. Na figura a seguir encontram-se as curvas de nível de uma função escalar f de classe C^∞ definida em $\mathbb{R}^2$. Os únicos pontos críticos de f são os pontos **p**, **q** e **r**. Os vetores indicam a direção e sentido do vetor gradiente.



   (a) O ponto **p** é máximo local, mínimo local ou ponto de sela para a função f? Justifique sua resposta.

   (b) O ponto **q** é máximo local, mínimo local ou ponto de sela para a função f? Justifique sua resposta.

   (c) O ponto **r** é máximo local, mínimo local ou ponto de sela para a função f? Justifique sua resposta.

   (d) O ponto **s** é máximo local, mínimo local ou ponto de sela para a função f? Justifique sua resposta.

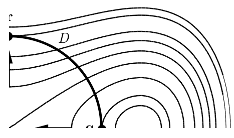
22. Na figura a seguir encontram-se algumas curvas de nível de uma função escalar f e uma curva de nível D de uma função escalar h, com f e h de classe C^∞ definidas em $\mathbb{R}^2$. Os vetores indicam a direção e sentido do vetor gradiente.

   (a) O ponto **p** pode ser extremo local de f na curva de nível D? Em caso afirmativo, o ponto $\vec{p}$ seria máximo ou mínimo local? É possível garantir a globalidade?

   (b) O ponto **q** pode ser extremo local de f na curva de nível D? Em caso afirmativo, o ponto $\vec{q}$ seria máximo ou mínimo local? É possível garantir a globalidade?

   (c) O ponto **r** pode ser extremo local de f na curva de nível D? Em caso afirmativo, o ponto $\vec{r}$ seria máximo ou mínimo local? É possível garantir a globalidade?

   (d) O ponto **s** pode ser extremo local de f na curva de nível D? Em caso afirmativo, o ponto $\vec{s}$ seria máximo ou mínimo local? É possível garantir a globalidade?



Desenho das curvas de nível de f e do *conjunto admissível* D (curva com traçado mais forte).

Nos exercícios 23. a 25. encontre os extremantes da *função objetivo* f no conjunto admissível (conjunto que satisfaz a restrição). Encontre também, se houverem, os extremantes de f em $\mathbb{R}^2$.

23. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeito à $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1$.

24. $f(x,y) = x^2 + y^2$, sujeito à $5x^2 + 6xy + 5y^2 \leq 8$.

25. $f(x,y) = y^2 - x^2$, sujeito à $x^2 + y^2 \leq 4$.

26. Determine o valor máximo de $f(x,y) = x + 5y$ onde x e y estão sujeitos às restrições: $5x + 6y \leq 30$, $3x + 2y \leq 12$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$. (sugestão: desenhe o conjunto admissível de f e as curvas de nível de f, conclua que a solução está em um dos vértices desse conjunto e resolva o problema)

27. Encontre a expressão geral (em termos de todos os parâmetros) do ponto (x_1, x_2) que maximiza a *função de Cobb-Douglas* $U(x_1, x_2) = kx_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$ sujeito a $p_1x_1 + p_2x_2 = I$. (obs. $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, a função de Cobb-Douglas é usada em economia e representa uma função de produção)

28. O lucro de uma loja foi determinado como sendo $L(x,y) = 1400 - (12 - x)^2 - (40 - y)^2$. Quais os valores de x e y que o maximizam?

29. Um disco circular tem a forma da região $x^2 + y^2 \leq 1$. Se T graus é a temperatura em qualquer ponto do disco e $T = 2x^2 + y^2 - y$, encontre os pontos mais quentes e mais frios do disco.

30. Encontre o ponto (x^*, y^*) da parábola $y = 2x^2$ que está mais próximo do ponto $(4, 5/4)$. Você pode assumir que tal ponto existe.

31. Determine a menor distância do ponto $P = (2, 1, -1)$ ao plano $4x - 3y + z = 56$ e dê o ponto do plano em que a distância é mínima.

32. Uma caixa de madeira sem tampa deve ser construída de forma a conter α cm^3, onde α é um número positivo dado. Ignorando-se a espessura da madeira, como a caixa deve ser construída a fim de se utilizar a menor quantidade de madeira (medida pela soma das áreas das faces da caixa)?

33. Maximize $x^2y^2z^2$ sujeito a $x^2 + y^2 + z^2 = c$, onde c é uma constante real positiva fixa. Qual é o valor máximo da função-objetivo no conjunto determinado pela restrição? Mostre que para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ ocorre
$$\sqrt[3]{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}.$$
Esta desigualdade afirma que a *média geométrica* de três números positivos é sempre menor ou igual do que a *média aritmética* destes três números. Mais ainda, estas médias são iguais se, e somente se, os três números (x^2, y^2 e z^2) são iguais. Naturalmente, a mesma demonstração funciona para um conjunto de n números positivos:
$$\sqrt[n]{x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot \cdots \cdot x_n^2} \leq \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}$$
com igualdade se, e somente se, $x_1^2 = x_2^2 = \cdots = x_n^2$.

34. Obtenha o ponto da elipse $4x^2 + y^2 = 4$ situado no 1o. quadrante, no qual a tangente à curva forma com os eixos coordenados o triângulo de menor área possível. Calcule essa área mínima.

35. Determine as dimensões do paralelepípedo retângulo de volume máximo e faces paralelas aos planos coordenados que pode ser inscrito no elipsóide $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$.

36. Determine a equação do plano tangente à superfície $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1$, $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$ que forma com os planos coordenados um tetraedro de volume mínimo.

RESPOSTAS DA LISTA 9 (com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. Sim 2. Não 3. Sim 4. Não 5. Sim 6. Sim 7. Sim 8. Não

9. $(1,2)$: sela. 10. $\left(k\pi, (-1)^{k+1}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$: selas.

11. mín local de f em $(1,1)$; f não possui mín global, pois quando $x =$ constante e $y \to -\infty$, temos $f(x,y) \to -\infty$; máx local de f em $(-1,-1)$; f não possui máximo global, pois quando $x =$ constante e $y \to \infty$, temos $f(x,y) \to \infty$; selas: $(-1,1)$ e $(1,-1)$.

12. $(2,-2)$: sela

13. $f(0,0) = 0 =$ mín local de $f =$ mín global de f, pois $x^2 + 3y^2 \geq 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $e^t > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$; $(0,1)$ e $(0,-1)$ são pontos de máximo local de f; com um programa computacional visualize o gráfico de f e observe que o máx global ocorre nesses pontos; $f(0,\pm 1) = 9e^{-1} =$ máx global de f; selas: $(1,0)$ e $(-1,0)$.

14. mín local e global em $\left(2, -\dfrac{3}{2}\right)$ 15. máx local e global em $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$

16. mín local e global em $\left(\dfrac{54}{7}, -\dfrac{22}{7}\right)$

17. mín local e global em todos os pontos da reta $2x + y = 1$

18. máx de $f = e^{-2}$, em $(1,1)$.

19. $\nabla f\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right) = (0,0)$; $Hess(f)\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{9}{4} > 0$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ é ponto de máx local. $\nabla f\left(\dfrac{5\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right) = (0,0)$; $Hess(f)\left(\dfrac{5\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right) = \dfrac{9}{4} > 0$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{5\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right) = \sqrt{3} > 0 \Rightarrow \left(\dfrac{5\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right)$ é ponto de mín local.

20. (a) $(0,0)$
    (b) Pelo gráfico existem valores de f menores que $f(0,0) = 0$.

21. (a) Mínimo local. Partindo de $\mathbf{p}$, f cresce.
    (b) Sela. Partindo de $\mathbf{q}$, em duas direções f cresce e nas outras duas f decresce.
    (c) Idem item (a)
    (d) Nenhum deles. O ponto s não é ponto crítico.

22. (a) e (b) Sim. Mínimo local. (c) e (d) Não. Máximo local.

23. mín de $f = 1$ em $(\pm 1, 0, 0)$; máx de $f = 9$ em $(0,0,\pm 3)$. Sem a restrição, o único ponto crítico de f é $(0,0,0)$ que é um ponto de mínimo local e global de f, pois $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \geq 0 = f(0,0,0)$.

24. mín de $f = 0$ em $(0,0)$; max de $f = 4$ em $\pm\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$. Sem a restrição, o único ponto crítico de f é $(0,0)$ que é um ponto de mínimo local e global de f.

25. mín de $f = -4$ em $(0,\pm 2)$; max de $f = 4$ em $(\pm 2, 0)$. Sem a restrição, o único ponto crítico de f é $(0,0)$ que é um ponto de sela do gráfico de f.

26. máx de $f = 25$ em $(0,5)$.

27. $(x_1, x_2) = \left(\dfrac{\alpha I}{p_1}, \dfrac{(1-\alpha) I}{p_2}\right)$

28. $x = 12,\quad y = 40$

29. Ponto mais frio: $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, $T = -\dfrac{1}{2}$;

    pontos mais quentes: $\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, $T = \dfrac{9}{4}$

30. $(x^*, y^*) = (1,2)$

31. A distância mínima é $2\sqrt{26}$, o ponto é $(10,-5,1)$.

32. Lados da base $\sqrt[3]{2\alpha}$ e altura $\sqrt[3]{\alpha}/2$

33. Máximo $= \dfrac{c^3}{27}$. Logo $x^2y^2z^2 \leq \dfrac{c^3}{27} \Longrightarrow$

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leq \sqrt[3]{\frac{c^3}{27}} = \frac{c}{3} = \frac{x^2+y^2+z^2}{3}$$

34. $6x + 4y + 3z = 12\sqrt{3}$, que corresponde ao plano tangente em $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{\sqrt{3}}, \dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)$.

35. O ponto é $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ e a área mínima é igual a 2.

36. $x = \sqrt{3},\quad y = 2\sqrt{3},\quad z = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.