

uff Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 11 - 2012-1

EDO linear de ordem n :
PVI, existência e unicidade
Funções L. I. e Wronskiano
Conjunto fundamental de soluções
EDO linear de 2^{a} ordem: redução de ordem

Nos exercícios 1 a 4 determine o maior intervalo na vizinhança de x_0 onde se tem certeza que o PVI (problema de valor inicial) dado tem solução única.

- $2y^{iv} - 3x^2y'' + 4xy = 3 \operatorname{sen} x$; $y(\pi) = 2$; $y'(\pi) = -1$; $y''(\pi) = 0$; $y'''(\pi) = 1$
- $2y^{iv} - 3x^2y'' + 4xy = 3 \ln x$; $y(2) = -1$; $y'(2) = 0$; $y''(2) = 0$; $y'''(2) = 2$
- $(x^2 - 4)y''' + (x - 1)y' + 4xy = e^{2x}$; $y(-1) = -1$; $y'(-1) = 1$; $y''(-1) = 0$
- $(x^2 - 4)y''' + (x - 1)y' + 4xy = \frac{1}{x}$; $y(-1) = -1$; $y'(-1) = 1$; $y''(-1) = 0$

Nos exercícios 5 e 6 verificar que qualquer membro da família dada é uma solução da EDO linear no intervalo I . Encontrar, se possível, a única solução que satisfaz as condições iniciais dadas.

- $x^2y'' - 20y = 0$; família: $y = C_1x^5 + \frac{C_2}{x^4}$ em $I = (0, \infty)$
condições iniciais: $y(1) = 4$; $y'(1) = 2$
- $y''' - 2y'' + 2y' = \cos x + 2 \operatorname{sen} x$; família: $y = C_1 + e^x(C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x$ em $I = \mathbb{R}$
condições iniciais: $y(0) = 3$, $y'(0) = 6$, $y''(0) = 6$
- Sabe-se que $y = C_1 + C_2x^2$, $x \in \mathbb{R}$ é uma família a dois parâmetros de soluções de $x^2y'' - y' = 0$.
 - Mostre que não existem constantes C_1 e C_2 para que um membro da família satisfaça as condições $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Explique porque isso não constitui uma violação do Teorema da Existência e Unicidade para um PVI linear.
 - Encontre dois membros da família que satisfazem $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Nos exercícios 8 a 13 verifique se o conjunto de funções dadas são linearmente independentes. Se forem linearmente dependentes determine a relação de dependência entre elas.

- $2x - 3$, $x^2 + 1$, $2x^2 - x$
- $2x - 3$, $2x^2 + 1$, $3x^2 + x$
- $2x - 3$, $x^2 + 1$, $2x^2 - x$, $x^2 + x + 1$
- $2x - 3$, $x^3 + 1$, $2x^2 - x$, $x^2 + x + 1$
- e^x , e^{-x} , $\operatorname{senh} x$
- x , $x \ln x$, $x^2 \ln x$, $x > 0$
- Mostre que as funções $y = x$, $y = x^{-2}$, $y = x^{-2} \ln x$, $x > 0$ formam um conjunto fundamental (base) de soluções da EDO $x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0$. Forme a solução geral.

Nos exercícios 15 a 18 encontre uma segunda solução da EDO linear de 2^{a} ordem, a partir da solução dada, isto é, use o método da redução de ordem para encontrar uma segunda solução.

- $y'' - y = 0$, $y_1 = \cosh x$
- $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$, $y_1 = x^4$
- $(1 + 2x)y'' + 4xy' - 4y = 0$, $y_1 = e^{-2x}$
- $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$, $y_1 = x^3 \ln x$

Nos exercícios 19 e 20 resolva o PVI, se uma solução $y_1(x)$ da EDO é dada.

- $y'' - 3(\tan x)y' = 0$; $y_1(x) = 1$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$
- $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$, $y_1(x) = x^2 + x^3$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 3$

RESPOSTAS DA LISTA 11 (Com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. $(-\infty, \infty)$
2. $(0, \infty)$
3. $(-2, 2)$
4. $(-2, 0)$
5. $x^2 y'' - 20y = x^2 (20C_1 x^3 + 20C_2 x^{-6}) - 20(C_1 x^5 + C_2 x^{-4}) = 20C_1 x^5 + 20C_2 x^{-4} - 20C_1 x^5 - 20C_2 x^{-4} = 0$
 $x_0 = 1 \in I = (0, \infty)$; única solução: $y = x^5 + 1/x^4$
6. Determinando as derivadas até a ordem 3 e simplificando, encontra-se
 $y' = e^x [(-C_2 + C_3) \sin x + (C_3 + C_2) \cos x] + \cos x \implies 2y' = e^x [(-2C_2 + 2C_3) \sin x + (2C_3 + 2C_2) \cos x] + 2 \cos x$
 $y'' = e^x [2C_3 \cos x - 2C_2 \sin x] - \sin x \implies -2y'' = e^x [-4C_3 \cos x + 4C_2 \sin x] + 2 \sin x$
 $y''' = e^x [(2C_3 - 2C_2) \cos x - (2C_2 + 2C_3) \sin x] - \cos x$
 Substituindo na EDO dada, $y''' - 2y'' + 2y' = e^x [(2C_3 - 2C_2 - 4C_3 + 2C_3 + 2C_2) \cos x] +$
 $+ e^x [(-2C_2 - 2C_3 + 4C_2 - 2C_2 + 2C_3) \sin x] - \cos x + 2 \sin x + 2 \cos x = \cos x + 2 \sin x$ c.q.d.
 Única solução: $y = 1 + e^x(2 \cos x + 3 \sin x) + \sin x$
7. (a) $y = C_1 + C_2 x^2 \implies y' = 2C_2 x \implies y'(0) = 0 \neq 1$. Neste caso a hipótese $a_2(x) = x^2 \neq 0$ do teorema da existência e unicidade não está satisfeita, logo não é possível garantir que existe solução que satisfaz o PVI.
 (b) $y = x^2$ e $y = -x^2$. Na verdade qualquer parábola $y = C_2 x^2$ satisfaz o PVI.
8. São L. I. porque $W(2x - 3, x^2 + 1, 2x^2 - x) = -14 \neq 0$
9. São L. D. Relação de dependência: $(2x - 3) + 3(2x^2 + 1) - 2(3x^2 + x) = 0$
10. São L. D. Relação de dependência: $2(2x - 3) + 13(x^3 + 1) - 3(2x^2 - x) - 7(x^2 + x + 1)$
11. São L. I. porque $W(2x - 3, x^3 + 1, 2x^2 - x, x^2 + x + 1) = 156 \neq 0$
12. São L. D. Relação de dependência: $e^x - e^{-x} - 2 \sinh x = 0$
13. São L. I. porque $W(x, x \ln x, x^2 \ln x) = 2x + x \ln x \neq 0, \forall x \neq e^{-2}$. Atenção: para ser L. I. basta o wronskiano ser não nulo em um dos pontos do intervalo.
14. Para ver que são soluções é preciso derivar cada função, substituir no lado esquerdo da EDO e verificar que se anula.
 São L. I. porque $W(x, x^{-2}, x^{-2} \ln x) = 9/x^6 \neq 0, \forall x > 0$.
15. $y_2 = \sinh x$
16. $y_2 = x^4 \ln |x|$
17. $y_2 = x$
18. $y_2 = x^3$
19. Solução geral: $y = C_1 + C_2(\tan x \sec x + \ln |\sec x + \tan x|)$
 Solução do PVI: $y = 2 + 6(\tan x \sec x + \ln |\sec x + \tan x|)$
20. Solução geral: $y = C_1 x^2 + C_2 x^3$ Solução do PVI: $y = -3x^2 + 3x^3$