Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 12 - 2012-1
Função implícita.
Teorema da Função Implícita.

1. Verifique as hipóteses do Teorema da Função Implícita no ponto $P_0 = (1,1)$ e calcule $y'(1)$ e $y''(1)$ para $\ln(xy) - 2xy + 2 = 0$.

2. Considere a equação $y(x-2)^3 + xe^{y-1} = 0$. É possível, pelo Teorema da Função Implícita, garantir que esta equação define implicitamente uma única função $y = f(x)$, com x numa vizinhança de x_0 e y numa vizinhança de y_0, quando (x_0, y_0) é
   (a) $(1,1)$? (b) $(0,0)$? (c) $(2,1)$?

3. Seja $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $z = F(x,y) = (y-x)^4$.
   (a) Faça um esboço das curvas de nível de F associadas aos níveis $z = 0$, $z = 1$ e $z = 16$.
   (b) Faça um esboço do gráfico de F.
   (c) Mostre que $P = (0,0)$ pertence à curva de nível
   $$\mathcal{F}_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; F(x,y) = 0\}$$
   de F associada ao nível $z = 0$.
   (d) Mostre que $F_x(0,0) = 0$ e $F_y(0,0) = 0$.
   (e) Mostre que a curva de nível $\mathcal{F}_0$ pode ser representada como o gráfico de uma função $y = f(x)$, com $x \in \mathbb{R}$.
   (f) Este exercício constitui um contra-exemplo para o teorema da função implícita para $\mathbb{R}^2$? Justifique cuidadosamente sua resposta.

4. A equação $y^3 + xy + x^3 = 4$ define implicitamente uma função $y = f(x)$ de classe C^1, cujo gráfico está na vizinhaça do ponto $(0, \sqrt[3]{4})$? Em caso afirmativo, expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x e y.

5. Mostre que a equação $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$ define implicitamente uma função $z = f(x,y)$ de classe C^1, cujo gráfico está na vizinhança do ponto $(1,1,1)$. Expresse $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ em termos de x, y e z.

Nos exercícios 6. e 7. obtenha f_x e f_y para $z = f(x,y)$ definida pela equação dada.

6. $\ln(xyz) + e^z = 1$

7. $xz^2 - 3yz + \cos z = 0$

8. Seja uma função $z = f(x,y)$ de classe C^1, cujo gráfico está contido na superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Sabe-se que $f(0.5, 0.5) > 0$. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de f no ponto $(0.5,\ 0.5, f(0.5, 0.5)\,)$.

9. Sabendo que a equação $x^2 + z^3 - z - xy \operatorname{sen} z = 1$ define implicitamente uma função $z = f(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ cujo gráfico está numa vizinhança do ponto $(1,1,0)$, determine $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$, para (x,y) na vizinhança de $(1,1)$ e encontre a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1,0)$.

10. Seja $y = y(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x = F\left(x^2 + y, y^2\right)$, onde F é de classe C^1. Expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x, y e das derivadas parciais de F.

11. A função $z = z(x,y)$, de classe C^1, é dada pela equação $f\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{z}{x^\lambda}\right) = 0$ ($\lambda \neq 0$ é um real fixo), onde $f(u,v)$ é de classe C^1 e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v) \neq 0$. Verifique que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \lambda z$.

12. Sabendo que a equação $e^{x+y+z} + xyz = 1$ define implicitamente uma função $z = f(x, y)$ de classe C^1, cujo gráfico está na vizinhança do ponto $(0, 0, 0)$, determine a taxa de variação de f no ponto $(0, 0)$ na direção e sentido do vetor $(1, 1)$.

13. Mostre que $y = y(x)$ e $z = z(x)$ são funções diferenciáveis definidas implicitamente pelo sistema

$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ y + x = 1 \end{cases}$ numa vizinhança de $x = 0$ tal que $y(0) = 1, z(0) = -1$ e calcule $\dfrac{dy}{dx}(0)$ e $\dfrac{dz}{dx}(0)$.

14. Suponha que $y = y(x)$ e $z = z(x)$ são diferenciáveis e definidas implicitamente por $\begin{cases} x^2 + z^2 = 25 \\ y^2 + z^2 = 20 \end{cases}$

   (a) Expresse $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{dz}{dx}$ em termos de x, y e z.

   (b) Determine explicitamente as funções $y = y(x)$ e $z = z(x)$ que são definidas implicitamente pelo sistema tal que $y(3) = -2$, $z(3) = 4$. Dê o maior intervalo aberto possível contendo $x = 3$ em que essas funções estão definidas.

15. Suponha que $y = y(u, v, w, x)$ e $z = z(u, v, w, x)$ estão definidas implicitamente pelo sistema $\begin{cases} uv - xy = z \\ x^2 + y^2 = w \end{cases}$ Encontre todas as derivadas parciais de y e z em termos de u, v, w, x, y e z.

16. Se $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ são dadas implicitamente pelo sistema $\begin{cases} u = x + y \\ v = \dfrac{y}{x}, \quad x \neq 0 \end{cases}$

mostre que $\left(1 + \dfrac{y}{x}\right)\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right) = 1$.

17. As equações $\begin{cases} x^2 - y\cos(uv) + z^2 &= 0 \\ x^2 - y^2 - \operatorname{sen}(uv) + 2z^2 &= 0 \\ xy - \operatorname{sen}(u)\cos(v) + z &= 0 \end{cases}$ definem x, y, z como funções de u e v próximo ao ponto $x = y = 1$, $u = \dfrac{\pi}{2}$, $v = z = 0$? Calcule as derivadas parciais $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ em $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$.

18. Dado o sistema $\begin{cases} x + y^2 - 2yv - uv &= 2z \\ x^2 - yz - 2u &= v \end{cases}$

   (a) Verifique que o sistema define implicitamente $(u, v) = f(x, y, z)$ na vizinhança de $(1, -1, 1)$ e tal que $f(1, -1, 1) = (2, -2)$
   (b) Determine $f'(1, -1, 1)$
   (c) Determine a função afim que aproxima f na vizinhança de $(1, -1, 1)$
   (d) Calcule, aproximadamente, $f(1.08, -0.9, 0.98)$.

19. Seja $g(u, v) = f(x, y)$, onde f é real e diferenciável e satisfaz $x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Suponha ainda $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ dadas implicitamente por $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy \end{cases}$

   (a) Mostre que $\dfrac{\partial y}{\partial u} = -\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial x}{\partial u}$

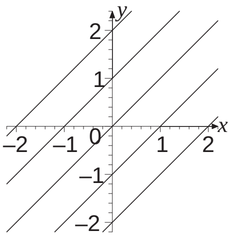
   (b) Supondo provado o item (a), calcule $\dfrac{\partial g}{\partial u}$.

RESPOSTAS DA LISTA 12 (com indicação ou resumo de algumas resoluções)

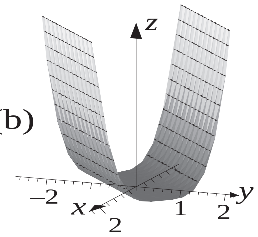
1. Hipóteses satisfeitas: $F(x,y) = \ln(xy) - 2xy + 2)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ no conjunto aberto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; xy > 0\}$ que contém $(1,1)$, pois $F_x(x,y) = \dfrac{1}{x} - 2y$ e $F_y(x,y) = \dfrac{1}{y} - 2x$ são contínuas em A e ainda i) $F(1,1) = 0$; ii) $F_y(1,1) = -1 \neq 0$. $y'(1) = -1$ e $y''(1) = 2$.

2. $F(x,y) = y(x-2)^3 + xe^{y-1}$ é de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto $A = \mathbb{R}^2$, que contém qualquer (x_0, y_0), pois $F_x(x,y) = 3y(x-2)^2 + e^{y-1}$ e $F_y(x,y) = (x-2)^3 + xe^{y-1}$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$, logo essa hipótese é válida nos três casos. Nas outras duas: i) $F(1,1) = 0$; $F(0,0) = 0$; $F(2,1) \neq 0$ e ii) $F_y(1,1) = 0$; $F_y(0,0) = -8$; $F_y(2,1) = 1 \neq 0$. A hipótese i) falha no ponto $(2,1)$, logo é impossível encontrar uma função f tal que $f(2) = 1$. A hipótese ii) falha no ponto $(1,1)$, neste caso nada se pode afirmar sobre a possibilidade da equação definir uma função $y = f(x)$ tal que $f(1) = 1$. As hipóteses i) e ii) são satisfeitas no ponto $(0,0)$, logo o Teorema da Função Implícita é aplicável apenas neste ponto.

3. (a)



(b)



(c)$F(0,0) = 0$ (e) $y = f(x) = x$

(f) Não é um contra-exemplo.
Não contradiz pois a condição $F_y(0,0) \neq 0$ é uma condição suficiente, mas não é necessária para a existência de uma função implícita $y = f(x)$.

4. Sim, pois as hipóteses do Teorema da Função Implícita estão satisfeitas, a saber: $F(x,y) = y^3 + xy + y^3$ é de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto $A = \mathbb{R}^2$, que contém $\left(0, \sqrt[3]{4}\right)$, pois $F_x(x,y) = y + 3x^2$ e $F_y(x,y) = x + 3y^2$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$ e ainda i) $F\left(0, \sqrt[3]{4}\right) = 4$ e ii) $F_y\left(0, \sqrt[3]{4}\right) = 6\sqrt[3]{2} \neq 0$. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y + 3x^2}{x + 3y^2}$.

5. $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - x - y - z$ é de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto $A = \mathbb{R}^3$, que contém $(1,1,1)$, pois $F_x(x,y,z) = 3x^2 - 1$, $F_y(x,y,z) = 3y^2 - 1$ e $F_z(x,y,z) = 3z^2 - 1$ são contínuas em $\mathbb{R}^3$. E ainda i) $F(1,1,1) = 0$ e ii) $F_z(1,1,1) = 2 \neq 0$. Logo as hipóteses do Teorema da Função Implícita estão satisfeitas, o que garante que a equação define implicitamente uma função $z = z(x,y)$ definida numa vizinhança de $(x_0, y_0) = (1,1)$, cuja imagem está numa vizinhança de $z_0 = 1$, logo o gráfico estará numa vizinhança de $(1,1,1)$. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{3x^2 - 1}{3z^2 - 1}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{3x^2 - 1}{3z^2 - 1}$.

6. $f_x = \dfrac{-z}{x(1 + ze^z)}$; $f_y = \dfrac{-z}{y(1 + ze^z)}$

7. $f_x = \dfrac{-z^2}{2xz - 3y - \operatorname{sen} z}$; $f_y = \dfrac{3z}{2xz - 3y - \operatorname{sen} z}$

8. Reta tangente: $x + y + \sqrt{2}z = 2$; reta normal: $(x,y,z) = \left(1/2, 1/2, \sqrt{2}/2\right) + \lambda(1, 1, \sqrt{2})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

9. $z = x - 1$

10. $$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x\dfrac{\partial F}{\partial u}\left(x^2 + y, y^2\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial u}\left(x^2 + y, y^2\right) + 2y\dfrac{\partial F}{\partial v}\left(x^2 + y, y^2\right)}$$

11. Considere $F(x,y,z) = f(u,v)$. Sabendo-se que $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, aplicando essas equações no lado esquerdo da equação a ser demonstrada e simplificando-a, obtém-se: $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-1}{\frac{\partial F}{\partial z}}\left(x\dfrac{\partial F}{\partial x} + y\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)$.

    Aplicando a regra da cadeia em $f(u,v)$ para determinar $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial F}{\partial z}$, substituindo e simplificando, $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x^\lambda}{\frac{\partial f}{\partial v}}\left(x \cdot \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial u} - \dfrac{\lambda z}{x^\lambda} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial v} - \dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial u}\right) = \lambda z$.

12. taxa de variação $= -\sqrt{2}$

13. Seja $F(x,y,z) = \big(x^2+y^2+z^2-2, x+y-1\big)$. Verifica-se que F é de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^3$ pois suas derivadas parciais são funções polinomiais, que são contínuas e ainda $U=\mathbb{R}^3$ é aberto.

    Verifica-se também que (i) $F(0,1,-1)=(0,0)$ e (ii) para $X=x$ e $Y=(y,z)$, $det\,(F_Y(0,1,-1)) = det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$. Assim, todas as hipóteses do teorema da função implícita estão satisfeitas, logo vale a tese, a saber o par (x,y) está definido implicitamente pelo sistema perto de $x=0$, tal que $y(0)=1$ e $z(0)=-1$. E ainda $\dfrac{dy}{dx}(0)=-1$ e $\dfrac{dz}{dx}(0)=-1$.

14. (a) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}$ e $\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{x}{z}$ (b) $y=-\sqrt{x^2-5}$ e $z=\sqrt{25-x^2}$; $\sqrt{5}<x<5$

15. $\dfrac{\partial y}{\partial u}=\dfrac{\partial y}{\partial v}=\dfrac{\partial y}{\partial w}=\dfrac{1}{2y}$; $\dfrac{\partial y}{\partial x}=-\dfrac{x}{y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}=v$; $\dfrac{\partial z}{\partial v}=u$; $\dfrac{\partial z}{\partial w}=-\dfrac{x}{2y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x^2-y^2}{y}$

17. (a) Sim, pois $F(u,v,x,y,z) = \big(x^2-y\cos(uv)+z^2, x^2-y^2-\operatorname{sen}(uv)+2z^2, xy-\operatorname{sen}(u)\cos(v)+z\big)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ em $U=\mathbb{R}^5$ (todas as derivadas parciais são composições, somas e multiplicações de funções contínuas), U é aberto. E ainda (i) $F\left(\dfrac{\pi}{2},0,1,1,0\right)=(0,0,0)$ (ii) para $Y=(x,y,z)$ tem-se $\det\left(F_Y\left(\dfrac{\pi}{2},0,1,1,0\right)\right)=-2\neq 0$. Assim todas as hipóteses são satifeitas e o Teorema da Função Implícita se aplica.

    (b) 0

18. (a) $F(x,y,z,u,v)=\big(x+y^2-2yv-uv, 2z, x^2-yz-2u\big)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ em $U=\mathbb{R}^5$ pois admite derivadas parciais contínuas em $U=\mathbb{R}^5$ (todas são funções polinomiais).
    Também (i) $F(1,-1,1,2,-2)=(0,0)$ (ii) para $Y=(u,v)$, $\det(F_Y(1,-1,1,2,-2))=-2\neq 0$.
    Logo, estão satisfeitas as hípóteses do Teorema da Função Implícita, donde aplicando-se a tese, verifica-se que o sistema define implicitamente u e v perto de $(1,-1,1,2,-2)$, isto é, na vizinhança de $(1,-1,1)$ tal que $f(1,-1,1)=(2,-2)$.

    (b) $f'(1,-1,1)=\begin{bmatrix} -1/2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

    (c) $A(x,y,z)=\begin{bmatrix} 1/2-x/2-y+z \\ -3+3x+y-z \end{bmatrix}$

    (d) $\begin{bmatrix} 1,84 \\ -1,64 \end{bmatrix}$

19. (b) 0