

NOTAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

ALEJANDRO KOCSARD

1. BIBLIOGRAFIA

A referência principal será o livro de Sotomayor [Sot79]. Como referências complementares, sugiro os livros de Arnold [Arn06], o de Tesch [Tes12] e o de Perko [Per01].

2. INTRODUÇÃO

As equações diferenciais são equações onde as incógnitas são funções “suaves” e estas equações estabelecem certas relações entre as diversas derivadas delas.

Uma *equação diferencial ordinária* é uma equação diferencial onde todas suas incógnitas são funções reais ou vetoriais de uma variável real.

A grande maioria dos modelos da Física, Química, Biologia e Economia envolvem equações diferenciais. A continuação mencionaremos alguns exemplos importantes.

2.1. Cálculo de integrais. O exemplo mais simples de equação diferencial que já temos encontrado em cursos anteriores, é o de cálculo de integrais. De fato, pelo Teorema Fundamental do Cálculo sabemos que se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^1 tal que $F'(t) = f(t)$, para todo $t \in (a, b)$, então

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Isto significa que se desejamos calcular a integral $\int_a^b f(t) dt$, então uma possibilidade é resolver a equação diferencial

$$\dot{x}(t) = f(t).$$

2.2. As leis de Newton. Na Mecânica Clássica a trajetória de uma partícula ao longo do tempo costuma ser descrita por uma função $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Em geral esta função é duas vezes diferenciável, sua derivada primeira $v := \dot{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é chamada de *velocidade* e sua derivada segunda $a := \dot{v} = \ddot{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de *aceleração*.

Neste modelo, se a partícula está se movimentando dentro de um campo de forças externo $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, então a *Segunda Lei de Newton* estabelece que existe uma constante m , que depende só da partícula envolvida e não do campo de forças atuante, chamada *massa da partícula*, tal que

$$m\ddot{x}(t) = F(x(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Este é um exemplo de uma EDO de *segunda ordem*, já que nesta equação só aparecem derivadas de ordem menor ou igual a 2.

Porém, por um argumento já clássico, esta EDO de segunda ordem pode ser transformada num *sistema de EDOs de primeira ordem*:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t), \\ \dot{v}(t) = \frac{1}{m}F(x(t)). \end{cases}$$

2.3. Noções básicas e notação. Uma *equação diferencial ordinária* (EDO) para nós será uma equação da forma

$$F(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(k)}(t)) = 0,$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k \times d}$ é um conjunto aberto e $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Uma solução desta equação, é uma função C^k $x: J \subset \mathbb{R}^d$ tal que J é um intervalo aberto não vazio, $(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(k)}(t)) \in \Omega$, e $F(t, x(t), \dots, x^{(k)}(t)) = 0$, para todo $t \in J$; e onde

$$x^{(k)}(t) := \frac{d^k x}{dt^k}(t).$$

Também utilizaremos as notações clássicas $\dot{x}(t) = x'(t) = x^{(1)}(t)$ e $\ddot{x}(t) = x''(t) = x^{(2)}(t)$.

Infelizmente em geral é bastante complicado lidar com EDOs tão gerais e portanto é mais comum utilizar elas na sua *forma explícita*, cuja existência só pode ser garantida nos casos em que as hipóteses do Teorema da Função Implícita são verificadas.

Por este motivo, doravante trabalharemos quase exclusivamente com EDOs explícitas da seguinte forma:

$$(1) \quad x^{(k)} = f(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(k-1)}(t)),$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{(k-1) \times d}$ é aberto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função contínua.

Nestas definições, o número natural k é chamado a *ordem da EDO* e o d a dimensão do *espaço de fases*, ou também a quantidade de equações do sistema, já que uma função com valores em $\mathbb{R}^d$ pode ser pensada como d funções de reais.

2.3.1. Redução da ordem. É fácil ver que introdução de variáveis auxiliares, como foi feito na § 2.2, permite transformar qualquer EDO de ordem k e dimensão d numa EDO de primeira ordem e dimensão $k \times d$.

Por este motivo é que daqui para frente trabalharemos a maior parte do tempo só com EDOs de primeira ordem.

2.3.2. Equações autônomas. A EDO (1) é dita autônoma quando a função f independe da variável independente t .

É importante mencionar que fazendo uma mudança de variáveis similar àquele feito em § 2.2, é possível transformar uma EDO não-autônoma numa autônoma aumentando a dimensão do espaço de fases.

De fato, seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ um conjunto aberto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma função contínua. Consideremos a seguinte EDO

$$(2) \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)).$$

Por outro lado, seja $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ a função dada por

$$g(y) = (1, f(y)), \quad \forall y \in \Omega,$$

e consideremos a EDO autônoma

$$(3) \quad \dot{y} = g(y).$$

Exercício 1. Mostre que $x: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ é solução da equação (2) se e só se a função $y: J \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ dada por

$$y(t) := (t, x(t)), \quad \forall t \in J,$$

é solução da equação (3).

2.3.3. Problemas de valores iniciais. Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ um conjunto aberto, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma função contínua e $(t_0, x_0) \in \Omega$ um ponto qualquer. O *problema de valores iniciais* (PVI) associado a estes dados é o seguinte:

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Uma *solução* deste PVI é um par (ϕ, J) , onde $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto com $t_0 \in J$, $\phi: J \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função C^1 tal que

$$\text{Graph}(\phi) := \{(t, \phi(t)) : t \in J\} \subset \Omega,$$

$\phi(t_0) = x_0$ e $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$, para todo $t \in J$.

É bem sabido, do curso de Cálculo 2, que em geral as EDOs não costumam ter uma única solução (e.g. cálculo de integrais indefinidas, vide § 2.1), mas com o seguinte exemplo vamos ver que existem PVIs que também admitem mais de uma solução:

Exemplo 2.1. Seja $\Omega = \mathbb{R}^2$ e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t, x) = 3x^{2/3}$. Dado $c \in \mathbb{R}$, definamos a função $\phi_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\phi_c(t) := \begin{cases} (t-c)^3, & t \geq c; \\ 0, & t < c. \end{cases}$$

Observar que dado qualquer $t_0 \in \mathbb{R}$, $(\phi_c, \mathbb{R})$ é solução do PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x^{2/3}, \\ x(t_0) = 0, \end{cases}$$

para todo $c > t_0$, o que significa que este PVI admite infinitas soluções diferentes.

Este exemplo nos leva a definir uma *noção de ordem parcial* entre as soluções de um PVI: dadas duas soluções $(\phi, I), (\psi, J)$ do PVI (4), dizemos que (ϕ, I) é uma *extensão* de (ψ, J) , e notamos $(\phi, I) \geq (\psi, J)$, quando $I \supset J$ e $\phi(t) = \psi(t)$, para todo $t \in J$.

Como é usual, uma solução (ϕ, I) será dita *solução maximal* quando dada qualquer outra solução (ψ, J) tal que $(\psi, J) \geq (\phi, I)$, então temos $(\phi, I) = (\psi, J)$.

Como consequência direta do Lema de Zorn é fácil ver que sempre existem soluções maximais.

Outro exemplo importante é o seguinte:

Exemplo 2.2. Seja $\Omega = \mathbb{R}^2$ e $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t, x) = x^2 + 1$. Considere o seguinte PVI

$$\begin{cases} x' = f(t, x) = x^2 + 1, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Pelo *método de separação de variáveis* é fácil ver que a única solução maximal do PVI é $\phi: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(t) = \tan t$, para todo $t \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Mais ainda, pode-se verificar que dada qualquer condição inicial $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, o domínio da solução maximal única do PVI correspondente tem comprimento π .

3. EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES

Nesta seção discutiremos alguns resultados de existência e outros de unicidade de soluções para problemas de valores iniciais, também chamado *problema de Cauchy*.

O teorema fundamental sobre existência de soluções para problemas de Cauchy é devido a Peano:

Teorema 3.1 (Teorema de Peano). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ um conjunto aberto e não vazio, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $(t_0, x_0) \in \Omega$ um ponto arbitrário. Então existe uma solução (ϕ, I) para o PVI dado por (4).*

Demonstração. A demonstração deste teorema combina uma idéia inspirada no método da *poligonal de Euler* e o Teorema de Arzela-Ascoli.

Inicialmente, observemos que, como consequência do Teorema Fundamental do Cálculo, (ϕ, I) é uma solução do PVI (4) se e só se

$$(5) \quad \phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) \, ds, \quad \forall t \in I.$$

Dado que o domínio Ω é aberto, sabemos que existe um número real $r > 0$ tal que $A_r := [t_0 - r, t_0 + r] \times B[x_0, r] \subset \Omega$, onde $B[x_0, r]$ denota a bola fechada de centro x_0 e raio r .

Dado que A_r é compacto e f é contínua, temos

$$C_r := \sup_{(t,x) \in A_r} \|f(t, x)\| = \max_{(t,x) \in A_r} \|f(t, x)\| < +\infty.$$

Definamos então $\alpha := \min\{r, r/C_r\} > 0$ e sejam $I_\alpha := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ e $A_\alpha := I_\alpha \times B[x_0, \alpha] \subset \Omega$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos o intervalo I_α dividido em $2k$ subintervalos iguais e a função $\phi_k: I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^d$ definida da seguinte forma: inicialmente definimos

$$\phi_k(t) := x_0, \quad \forall t \in [t_0 - \alpha/k, t_0 + \alpha/k].$$

Uma vez feito isto, indutivamente, suponha que ϕ_k já foi definida no intervalo $[t_0 - \alpha i/k, t_0 + \alpha i/k]$, para algum $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$; então definimos a função ϕ_k nos intervalos $[t_0 - \alpha(i+1)/k, t_0 - \alpha i/k]$ e $(t_0 + \alpha i/k, t_0 + \alpha(i+1)/k]$ por

$$\phi_k(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t+\alpha/k} f(s, \phi_k(s)) \, ds, \quad \forall t \in [t_0 - \alpha(i+1)/k, t_0 - \alpha i/k],$$

e

$$\phi_k(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t-\alpha/k} f(s, \phi_k(s)) \, ds, \quad \forall t \in (t_0 + \alpha i/k, t_0 + \alpha(i+1)/k].$$

Observemos que a família de funções $\{\phi_k: I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^d\}_{k \geq 1}$ é equicontínua já que, para todo $k \geq 1$ temos

$$|\phi_k(t) - \phi_k(t')| \leq C_r |t - t'|, \quad \forall t, t' \in I_\alpha,$$

o qual em particular implica que

$$|\phi_k(t) - x_0| = |\phi_k(t) - \phi_k(t_0)| \leq C_r |t - t_0| \leq C_r \alpha \leq r, \quad \forall t \in I_\alpha.$$

Portanto, o gráfico da função ϕ_k está contido em Ω , para todo $k \geq 1$, e podemos aplicar o Teorema de Arzelá-Ascoli para concluir que existe uma subsequência $\{\phi_{k_j}\}_{j \geq 1}$ e uma função contínua $\phi: I_\alpha \rightarrow B[x_0, r]$ tais que $\phi_{k_j} \rightarrow \phi$ uniformemente em I_α , quando $k_j \rightarrow +\infty$.

Para provar que (ϕ, I_α) é de fato uma solução de (4), mostraremos que ϕ satisfaz (5). Para isso, seja t um ponto arbitrário de $[t_0, t_0 + \alpha]$ (o caso em que $t \in [t_0 - \alpha, t_0]$ se trata em forma completamente análoga) e observemos que, dado $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\phi_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_k(s)) \, ds - \int_{t_0 - \alpha/k}^t f(s, \phi_k(s)) \, ds, \quad \forall k \geq 1.$$

Desta forma temos por um lado que

$$\left| \int_{t_0 - \alpha/k}^t f(s, \phi_k(s)) \, ds \right| \leq \int_{t_0 - \alpha/k}^t |f(s, \phi_k(s))| \, ds \leq \frac{\alpha}{k} C_r \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow +\infty$.

Por outro, o fato de que $\phi_{k_j} \rightarrow \phi$ uniformemente em I_α nos permite afirmar

$$\int_{t_0}^t f(s, \phi_{k_j}(s)) \, ds \rightarrow \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) \, ds, \quad \text{quando } k_j \rightarrow +\infty,$$

e para todo $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$.

Portanto, (ϕ, I_α) satisfaz a equação (5). $\square$

É importante observar que a demonstração do Teorema 3.1 nos permite ter uma estimativa inferior para o comprimento do intervalo de definição de uma solução do problema de valores iniciais (4) que só depende da geometria do domínio Ω e a cota superior do $|f|$ numa vizinhança da condição inicial.

Provaremos a continuação o chamado Teorema de Picard que estabelece a unicidade de soluções para PVI como (4) sob a hipótese adicional de regularidade de f . Mas para isso precisamos antes relembrar os conceitos de regularidade.

Uma função $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita *Lipschitz* se existe uma constante $L > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

De esta forma, uma função $f: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é dita *Lipschitz na sua segunda variável* quando função existe uma constante $L > 0$ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in \Omega.$$

Finalmente, diremos uma função $f: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, onde Ω é um conjunto aberto, é *localmente Lipschitz na segunda variável* quando para todo $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe uma vizinhança $V \subset \Omega$ de (t_0, x_0) tal que $f|_V$ é uniformemente Lipschitz na segunda variável.

Exercício 2. Mostre que toda função C^1 $f: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, com Ω aberto, é localmente Lipschitz.

Exercício 3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto, $K \subset \Omega$ compacto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função localmente Lipschitz. Mostre que $f|_K$ é Lipschitz.

Precisaremos também do seguinte resultado:

Proposição 3.2 (Ponto Fixo de Banach). *Seja (X, d) um espaço métrico completo e $f: X \rightarrow X$ uma aplicação contrativa, i.e. existe uma constante $L \in (0, 1)$ tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Então existe um único ponto $p \in X$ tal que $f(p) = p$ e $f^n(x) \rightarrow p$, quando $n \rightarrow +\infty$, para todo $x \in X$ (onde $f^1(x) = f(x)$ e $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$, para todo $n \geq 1$).

Exercício 4. Provar a Proposição 3.2

Corolário 3.3. *Seja (X, d) um espaço métrico completo e $f: X \rightarrow X$ uma aplicação contínua tal que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que f^{n_0} é uma contração. Então existe um único ponto fixo $p \in X$ para f e $f^n(x) \rightarrow p$, quando $n \rightarrow +\infty$, para todo $x \in X$.*

Exercício 5. Prove o Corolário 3.3.

Teorema 3.4 (Teorema de Picard). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ um conjunto aberto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma função contínua localmente Lipschitz na segunda variável. Considere o PVI dado por (4).*

Então existe uma única solução maximal (ϕ, I) para (4). Por outro lado, se $a, b, M > 0$ são constantes tais que $A_{a,b} := [t_0 - a, t_0 + a] \times B[x_0, b] \subset \Omega$ e

$$\sup_{(t,x) \in A_{a,b}} |f(t, x)| \leq M,$$

então $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \subset I$, onde

$$\alpha := \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}.$$

Demonstração. Seja $I_\alpha := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ e $X := C^0(I_\alpha, B[x_0, b])$. Consideremos a X munido da distância d dada por

$$d(\phi_1, \phi_2) := \max_{t \in I_\alpha} \|\phi_1(t) - \phi_2(t)\|, \quad \forall \phi_1, \phi_2 \in X.$$

Considere o operador $F: X \rightarrow C^0(I_\alpha, \mathbb{R}^d)$ definido por

$$F(\phi)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) \, ds, \quad \forall t \in I_\alpha, \quad \forall \phi \in X.$$

Primeiramente observemos que, por (5), todo ponto fixo de F é solução do PVI (4). Por outro lado temos

$$\|F(\phi)(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, \phi(s))\| \, ds \leq M\alpha \leq b,$$

para todo $\phi \in X$, e todo $t \in I_\alpha$. Logo $F(X) \subset X$.

Portanto, provaremos que o operador F possui um único ponto fixo mostrando que algum iterado de F é uma contração e aplicando então o Corolário 3.3.

Dado que f é localmente Lipschitz na sua segunda variável, pelo Exercício 3 sabemos que $f|_{A_{a,b}}$ é Lipschitz na segunda variável e portanto existe $K > 0$ tal que

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq K \|x_1 - x_2\|, \quad \forall t \in I_\alpha, \quad \forall x_1, x_2 \in B[x_0, r].$$

Afirmamos então que,

$$(6) \quad \|F^n(\phi_1)(t) - F^n(\phi_2)(t)\| \leq \frac{K^n |t - t_0|^n}{n!} d(\phi_1, \phi_2), \quad \forall \phi_1, \phi_2 \in X,$$

para todo $n \geq 0$ e qualquer $t \in I_\alpha$.

Provaremos (6) indutivamente. Isto é trivialmente verdadeiro para $n = 0$. Então supondo que (6) é verdadeiro para $n = k$, observemos que dados quaisquer $\phi_1, \phi_2 \in X$ e $t \in I_\alpha$ temos

$$\begin{aligned} \|F^{k+1}(\phi)(t) - F^{k+1}(\phi_2)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, F^k(\phi_1)(s)) - f(s, F^k(\phi_2)(s)) \, ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, F^k(\phi_1)(s)) - f(s, F^k(\phi_2)(s))\| \, ds \\ &\leq \int_{t_0}^t K \|F^k(\phi_1)(s) - F^k(\phi_2)(s)\| \, ds \\ &\leq \int_{t_0}^t K \frac{K^k}{k!} |s - t_0|^k d(\phi_1, \phi_2) \, ds \\ &= \frac{K^{k+1} |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} d(\phi_1, \phi_2). \end{aligned}$$

Logo, para concluir a existência de um único ponto fixo $\phi \in X$ para aplicação $F: X \hookrightarrow$ basta aplicar o Corolário 3.3, observando que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{K^{n_0} \alpha^{n_0}}{n_0!} < 1.$$

O feito até aqui nos permite afirmar que para todo ponto $(\bar{t}, \bar{x}) \in \Omega$ existe um intervalo aberto $I(\bar{t}, \bar{x})$, com $(\bar{t}, \bar{x}) \in I(\bar{t}, \bar{x})$, e uma função C^1 $\phi_{\bar{t}, \bar{x}}: I(\bar{t}, \bar{x}) \rightarrow \mathbb{R}^d$ que

é solução do PVI

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(\bar{t}) = \bar{x}, \end{cases}$$

tal que se (ψ, J) é uma outra solução deste PVI, então

$$\phi_{\bar{t}, \bar{x}}(t) = \psi(t), \quad \forall t \in I(\bar{t}, \bar{x}) \cap J.$$

Isto nos permitirá concluir a demonstração do teorema, mostrando que de fato existe uma única solução maximal.

Para isso, sejam (ϕ, I) e (ψ, J) duas soluções maximais do PVI (4), e consideremos o “conjunto de coincidência”

$$\mathcal{C}(\phi, \psi) := \{t \in I \cap J : \phi(t) = \psi(t)\}.$$

Dado que ϕ e ψ são contínuas, temos que $\mathcal{C}(\phi, \psi)$ é fechado em $I \cap J$. Por outro lado, pela observação anterior e dado que (ϕ, I) e (ψ, J) são soluções maximais, temos que

$$\mathcal{C}(t, \phi(t)) \subset I \cap J, \quad \forall t \in I \cap J.$$

Isto mostra que $\mathcal{C}(\phi, \psi)$ é também aberto em $I \cap J$. Finalmente, dado que I e J são conexos, isto implica que $I = J = \mathcal{C}(\phi, \psi)$, e portanto $(\phi, I) = (\psi, J)$, o que mostra que a solução maximal é única. $\square$

A unicidade de soluções maximais para o PVI (4) nos permite estabelecer a seguinte notação: se supomos que $f: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função contínua e o PVI (4) admite uma única solução maximal para todo $(t_0, x_0) \in \Omega$, então esta solução maximal será denotada por $\phi_{t_0, x_0}: J(t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^d$, onde $J(t_0, x_0) =]\omega^-(t_0, x_0), \omega^+(t_0, x_0)[$, com $\omega(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $\omega^+(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

4. SOLUÇÕES MAXIMAIS E EQUAÇÕES COMPLETAS

Dada uma função contínua $f: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, dizemos que uma solução (ϕ, I) da EDO

$$x' = f(t, x)$$

é *completa* quando $I = \mathbb{R}$. Mas ainda, diremos que a EDO é *completa* quando toda solução maximal de qualquer PVI associado a esta EDO é completa.

O seguinte resultado nos permite entender o comportamento assintótico das soluções maximais quando o tempo converge a alguns dos extremos do domínio da solução:

Teorema 4.1 (Teorema do escape de compactos). *Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma função contínua, sendo Ω um conjunto compacto. Dado $(t_0, x_0) \in \Omega$, considere o PVI dado por (4), e $\phi:]\omega^-, \omega^+[\rightarrow \mathbb{R}^d$ uma solução maximal do PVI. Então temos*

$$(t, \phi(t)) \rightarrow \partial\Omega, \quad \text{quando } t \rightarrow \omega^\pm,$$

o que significa que dado qualquer $K \subset \Omega$ compacto, existem números reais a, b , com $\omega^- < a < b < \omega^+$, e tais que

$$(t, \phi(t)) \notin K, \quad \forall t \in]\omega^-, a[\cup]b, \omega^+].$$

Demonstração. Só provaremos a afirmação para ω^+ . Raciocinando por contradição, suponha que $\omega^+ < +\infty$, existe $K \subset \Omega$ compacto e uma sequência $(t_n)_{n \geq 1}$ contida em $]\omega^-, \omega^+[$ que converge a ω^+ e tal que $(t_n, \phi(t_n)) \in K$, para todo $n \geq 1$.

Pela compacidade de K , existe uma subsequência $(t_{n_j})_{j \geq 1}$ e $(\omega^+, \bar{x}) \in K$ tais que $(t_{n_j}, \phi(t_{n_j})) \rightarrow (\omega^+, \bar{x})$, quando $n_j \rightarrow +\infty$.

Mostraremos agora que a função ϕ pode ser estendida continuamente a ω^+ . De fato, para isso basta provar que $(s_n, \phi(s_n)) \rightarrow (\omega^+, \bar{x})$, para toda sequência $(s_n)_{n \geq 1}$ contida em $] \omega^-, \omega^+[$ tal que $s_n \rightarrow \omega^+$ quando $n \rightarrow +\infty$.

Raciocinando novamente por contradição, suponha que isto não é verdade. Então afirmamos que não há perda de generalidade fazendo as seguintes suposições:

- a sequência $(t_{n_j})_{j \geq 1}$ é estritamente crescente;
- existe uma vizinhança compacta V de $(\omega^+, \bar{x})$, com $V \subset \Omega$ e tal que $(t_{n_j}, \phi(t_{n_j})) \in V$, para todo $j \geq 1$;
- para todo $j \geq 1$, existe $s_j \in (t_{n_j}, t_{n_{j+1}})$ tal que $(s_j, \phi(s_j)) \in \partial V$, (onde ∂V denota o bordo do conjunto V) e $(t, \phi(t)) \in V$, para todo $t \in (s_j, t_{n_{j+1}})$.

(**Exercício:** Mostre que de fato não há perda de generalidade em ter feito estas suposições.)

Pela compacidade de V , existe $M > 0$ tal que $|f(t, x)| \leq M$, para todo $(t, x) \in V$. Desta forma, pelas hipóteses feitas acima sobre a vizinhança V e as sequências (s_j) e (t_{n_j}) , e como consequência da desigualdade do valor médio temos que para cada $j \geq 1$, vale

$$\begin{aligned} \|\phi(s_j) - \phi(t_{n_{j+1}})\| &\leq \max_{t \in (s_j, t_{n_{j+1}})} \|\phi'(t)\| |s_j - t_{n_{j+1}}| \\ &= \max_{t \in (s_j, t_{n_{j+1}})} \|f(t, \phi(t))\| |s_j - t_{n_{j+1}}| \\ &\leq M |s_j - t_{n_{j+1}}| \rightarrow 0, \quad \text{quando } j \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

o que claramente contradiz o fato de que $(t_{n_j}, \phi(t_{n_j})) \rightarrow (\omega^+, \bar{x})$, quando $j \rightarrow +\infty$, sendo $(\bar{t}, \bar{x})$ um ponto do interior de V , e que $(s_j, \phi(s_j)) \in \partial V$, para todo $j \geq 1$.

Isto nos permite mostrar que definindo $\phi(\omega^+) := \bar{x}$ obtemos uma extensão contínua da nossa função ϕ . Finalmente, aplicando a técnica utilizada para demonstrar o Teorema 3.1 pode se estender a solução ϕ a uma vizinhança do ponto ω^+ , contradizendo o fato de que ϕ é uma solução maximal. $\square$

O Teorema de Escape de Compactos nos permite estabelecer critérios para determinar a completitude de EDOs “com crescimento linear:”

Teorema 4.2. *Seja $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma função contínua e suponha que existem funções contínuas $C, b: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ tais que*

$$\|f(t, x)\| \leq C(t) \|x\| + b(t), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d.$$

Então a EDO $x' = f(t, x)$ é completa.

Este resultado permite obter o seguinte corolário sobre a completitude dos sistemas lineares:

Corolário 4.3. *Seja $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$ o espaço de matrizes $d \times d$ com coeficientes reais, e $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$ e $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ aplicações contínuas. Então a EDO*

$$x'(t) = A(x(t))x(t) + b(t)$$

é completa.

Exercício 6. Prove o Corolário 4.3, mostrando que ele segue do Teorema 4.2.

Para provar o Teorema 4.2 antes precisamos do seguinte

Lema 4.4 (Lema de Gronwall). *Sejam $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ funções contínuas e $K > 0$ uma constante, tais que*

$$x(t) \leq K + \int_a^t x(s)g(s) \, ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

Então vale

$$x(t) \leq K \exp \left(\int_a^t g(s) \, ds \right), \quad \forall t \in [a, b].$$

Demonstração do Lema 4.4. Considere as funções $u, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$u(t) := K + \int_a^t g(s)x(s) \, ds,$$

e

$$h(t) := K \exp \left(\int_a^t g(s) \, ds \right), \quad \forall t \in [a, b].$$

Então temos

$$h'(t) = h(t)g(t), \quad \forall t \in [a, b];$$

e por outro lado, lembrando que $x(t) \leq u(t)$, para todo $t \in [a, b]$, temos

$$u'(t) = g(t)x(t) \leq g(t)u(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{h} \right)'(t) &= \frac{u'(t)h(t) - u(t)h'(t)}{(h(t))^2} \\ &= \frac{u'(t)h(t) - u(t)h(t)g(t)}{(h(t))^2} = \frac{u'(t) - u(t)g(t)}{h(t)} \leq 0, \end{aligned}$$

para todo $t \in [a, b]$; e dado que $u(a) = h(a) = K$, isto implica que

$$\frac{u(t)}{h(t)} \leq \frac{u(a)}{h(a)} = 1, \quad \forall t \in [a, b],$$

o que prova que

$$x(t) \leq u(t) \leq h(t) = K \exp \left(\int_a^t g(s) \, ds \right), \quad \forall t \in [a, b].$$

□

Demonstração do Teorema 4.2. Seja (t_0, x_0) um ponto arbitrário de $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ e (ϕ, I) uma solução maximal do PVI

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Para provar a completude da EDO, mostraremos que dado qualquer $R > 0$ tal que o intervalo $I_R^+ := [t_0, t_0 + R)$ está contido em I , então $t_0 + R \in I$. O caso para valores menores do que t_0 é completamente análogo.

Desta forma, seja $R > 0$ tal que $I_R^+ \subset I$. Definamos então a constante

$$M := \max \left\{ \max_{t \in I_R^+} |C(t)|, \max_{t \in I_R^+} \|b(t)\| \right\}.$$

Logo, como consequência de (5) temos que para todo $t \in I_R^+$ vale

$$\begin{aligned}
 \|\phi(t)\| &= \left\| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) \, ds \right\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, \phi(s))\| \, ds \\
 (7) \quad &\leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t C(s) \|\phi(s)\| + b(s) \, ds \\
 &\leq \|x_0\| + RM + \int_{t_0}^t M \|\phi(s)\| \, ds.
 \end{aligned}$$

Então, pelo Lema 4.4 sabemos que

$$\|\phi(t)\| \leq (\|x_0\| + RM) \exp\left(\int_{t_0}^t M \, ds\right) \leq (\|x_0\| + RM)e^{MR}, \quad \forall t \in I_R^+.$$

Isto mostra que

$$(t, \phi(t)) \in \overline{I_R} \times B[x_0, (\|x_0\| + RM)e^{MR}], \quad \forall t \in I_R^+,$$

sendo este último conjunto compacto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Logo, pelo Teorema 4.1 concluímos que $t_0 + R \in I_R^+$, e portanto, se $I =]\omega^-, \omega^+]$, então $\omega^+ = +\infty$.

Por outro lado, como já foi dito acima, com um raciocínio completamente análogo pode-se provar que $\omega^- = -\infty$, e portanto a EDO é completa. $\square$

5. DEPENDÊNCIA EM RELAÇÃO ÀS CONDIÇÕES INICIAIS

Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ um conjunto aberto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma função contínua que é localmente Lipschitz na sua segunda variável. Então, pelo Teorema de Picard (Teorema 3.4) sabemos que para todo ponto $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe uma única solução maximal $\phi_{t_0, x_0}: J(t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^d$ do PVI (4).

Consideremos então o conjunto

$$\hat{\Omega} := \left\{ (t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : (t_0, x_0) \in \Omega, t \in J(t_0, x_0) \right\}.$$

Então o primeiro resultado sobre a dependência em relação às condições iniciais é o seguinte

Teorema 5.1 (Continuidade respeito às condições iniciais). *Se f e $\hat{\Omega}$ são como acima, então o conjunto $\hat{\Omega}$ é aberto e aplicação $\phi: \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ dada por*

$$\phi(t, t_0, x_0) := \phi_{t_0, x_0}(t), \quad \forall (t, t_0, x_0) \in \hat{\Omega},$$

é contínua.

Iste resultado tem como consequência o seguinte

Corolário 5.2. *Sob as hipóteses do Teorema 5.1, dados $(t_0, x_0) \in \Omega$, $I \subset J(t_0, x_0)$ um intervalo compacto e $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$ tal que para todo $(t_1, x_1) \in B((t_0, x_0), \delta) \subset \Omega$ se verifica $I \subset J(t_1, x_1)$ e*

$$\|\phi(t, t_1, x_1) - \phi(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon.$$

Exercício 7. Demonstre que o Corolário 5.2 é consequência do Teorema 5.1.

Demonstração do Teorema 5.1. Para provar que $\hat{\Omega}$ é aberto basta mostrar que dado um ponto arbitrário $(t_0, x_0) \in \Omega$ e qualquer par de números reais $a, b \in J(t_0, x_0)$, com $a < t_0 < b$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$(8) \quad I := [a, b] \subset J(t_1, x_1), \quad \forall (t_1, x_1) \in B((t_0, x_0), \delta).$$

Raciocinando por contradição, suponha que existam $a, b \in J(t_0, x_0)$, com $a < t_0 < b$, e uma sequência de pontos $\{(t_n, x_n)\}_{n \geq 1}$ tais que $(t_n, x_n) \rightarrow (t_0, x_0)$ quando $n \rightarrow +\infty$ e que $b \notin J(t_n, x_n)$, para todo $n \geq 1$. O caso do ponto a pode ser tratado

em forma completamente análoga. Por simplicidade de notação, para cada $n \geq 0$ denotaremos $\phi_n := \phi_{t_n, x_n}$.

Dado que o conjunto $\{(t, \phi_0(t)) : t \in I\} \subset \Omega$ é compacto, e Ω é aberto, existe $\eta > 0$ tal que o conjunto compacto

$$K := \bigcup_{t \in I} B[\phi_0(t), \eta] \subset \Omega.$$

Dado que K é uma vizinhança do ponto (t_0, x_0) , não há perda de generalidade supondo que $(t_n, x_n) \in K$ e que $a < t_n < b$, para todo $n \geq 0$.

Desta forma, dado que estamos supondo que $b \notin J(t_n, x_n)$ para todo $n \geq 1$, então pelo Teorema 4.1 teremos que, para cada $n \geq 1$, existe um único ponto s_n no intervalo aberto $]t_n, b[$ tal que $\phi_n(s_n) \in \partial K$ e $\phi_n(t) \in \text{int } K$, para todo $t \in]t_n, s_n[$.

Por compacidade do intervalo $[a, b]$ e do conjunto K , não há perda de generalidade supondo que existem $\bar{s} \in [t_0, b]$ e $\bar{x} \in \partial K$ tais que $s_n \rightarrow \bar{s}$ e $\phi_n(s_n) \rightarrow \bar{x}$, quando $n \rightarrow \infty$.

Se definirmos $M := \max_{(t,x) \in K} \|f(t, x)\|$, então podemos ver que

$$\|x_n - \phi_n(s_n)\| = \|\phi_n(t_n) - \phi_n(s_n)\| \leq M |t_n - s_n| \rightarrow M |t_0 - \bar{s}|,$$

o que mostra que $t_0 < \bar{s}$, já que $x_n \rightarrow x_0 \in \text{int } K$ e $\phi_n(s_n) \rightarrow \bar{x} \in \partial K$, quando $n \rightarrow +\infty$.

Logo, dados a', b' números reais quaisquer com $t_0 < a' < b' < \bar{s}$, temos que existe $N > 0$ tal que $t_n < a'$ e $b' < s_n$, para todo $n \geq N$. Isto implica que $\phi_n(t) \in K$ e

$$\|\phi'_n(t)\| = \|f(t, \phi_n(t))\| \leq M, \quad \forall t \in [a', b'],$$

e todo $n \geq N$.

Logo, pelo teorema de Arzelà-Ascoli, existe uma subsequência ϕ_{n_j} e uma função contínua $\psi: [a', b'] \rightarrow \mathbb{R}^d$ tais que $\phi_{n_j} \rightarrow \psi$ uniformemente em $[a', b']$.

Observando que

$$\phi_{n_j}(t) = x_{n_j} + \int_{t_{n_j}}^t f(s, \phi_{n_j}(s)) \, ds, \quad \forall t \in [a', b'],$$

e todo $n_j \geq N$, tomando limite com $n_j \rightarrow +\infty$ vemos que

$$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) \, ds, \quad \forall t \in [a', b'].$$

Pela unicidade de soluções para os PVI's associados à EDO $x' = f(t, x)$, vemos que, de fato, $\psi \equiv \phi_0$ sobre o intervalo $[a', b']$. Dado que isto vale para qualquer b' arbitrariamente perto de $\bar{s}$, vemos que se contradiz o fato de que $\phi_{n_j}(s_{n_j}) \rightarrow \bar{x} \in \partial K$. Logo, isto mostra que existe $\delta > 0$ tal que a condição (8) se verifica.

Para mostrar a continuidade da função $\phi: \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$, provaremos que se $I = [a, b]$ e $\delta > 0$ são como acima, então para qualquer sequência de pontos $\{(t_n, x_n)\}_{n \geq 1}$ contida na bola $B((t_0, x_0), \delta)$ tal que $(t_n, x_n) \rightarrow (t_0, x_0)$ quando $n \rightarrow +\infty$, mostraremos que $\phi_n := \phi_{t_n, x_n} \rightarrow \phi_0 := \phi_{t_0, x_0}$ uniformemente em $[a, b]$, quando $n \rightarrow \infty$.

Para isso vemos que pelo feito anteriormente temos que existe uma subsequência $\{\phi_{n_j}\}_{n_j}$ que converge uniformemente à função ϕ_0 sobre o intervalo $[a, b]$. Mas seguindo este raciocínio estamos provando que qualquer subsequência da sequência original contém um sub-subsequência que converge para o mesmo limite. Mostre que isto implica que a sequência original $\phi_n \rightarrow \phi_0$ uniformemente em $[a, b]$. $\square$

Este resultado nos permite obter o seguinte

Corolário 5.3. Se $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ é um conjunto aberto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ é C^k com $k \geq 1$, então a função $\phi: \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ dada pelo Teorema 5.1 é C^{k+1} com respeito às suas primeiras e segunda variáveis.

Exercício 8. Prove o Corolário 5.3. Dica: para provar a regularidade respeito à segunda variável, utilize o fato de que

$$\phi(t-s, t_0+s, \phi(t_0+s, t_0, x_0)) = \phi(t, t_0, x_0).$$

O Lema de Gronwall (Lema 4.4) permite nos dar uma estimativa do “módulo de continuidade” da função $\phi: \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$:

Proposição 5.4. Se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $\phi: \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ são como no Teorema 5.1 e supomos que f é Lipschitz respeito a sua segunda variável com constante de Lipschitz $k > 0$, então para todo $(t_0, x_0) \in \Omega$ tem-se

$$\|\phi(t, t_0, x_0) - \phi(t, t_0, y_0)\| \leq e^{k|t-t_0|} \|x_0 - y_0\|, \quad \forall t \in J(t_0, x_0) \cap J(t_0, y_0).$$

Demonstração. Pela equação integral (5) sabemos que

$$\phi(t, t_0, x_0) - \phi(t, t_0, y_0) = x_0 - y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s, t_0, x_0)) - f(s, \phi(s, t_0, y_0)) \, ds,$$

para todo $t \in J(t_0, x_0) \cap J(t_0, y_0)$. Isto implica que, tomando $t > t_0$ obtemos

$$\|\phi(t, t_0, x_0) - \phi(t, t_0, y_0)\| \leq \|x_0 - y_0\| + \int_{t_0}^t k \|\phi(s, t_0, x_0) - \phi(s, t_0, y_0)\| \, ds,$$

e aplicando o Lema 4.4 obtemos

$$\|\phi(t, t_0, x_0) - \phi(t, t_0, y_0)\| \leq \|x_0 - y_0\| e^{k(t-t_0)}, \quad \forall t \in J(t_0, x_0) \cap J(t_0, y_0), \quad t \geq t_0.$$

O caso $t < t_0$ pode ser tratado de forma completamente análoga. $\square$

5.1. Diferenciabilidade respeito à variável de estado. Para estudar a diferenciabilidade da solução $\phi: \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ respeito à terceira variável, precisamos considerar um PVI auxiliar. Para isso, suponhamos que a função $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ é contínua e C^1 respeito à sua segunda variável, i.e. $\partial_2 f = \partial_x f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ existe e é contínua. Seja então $\phi: \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ a função solução dada pelo Teorema 5.1.

Definimos então a função $\mathcal{J}: \hat{\Omega} \rightarrow \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$ dada por

$$\mathcal{J}(t, t_0, x_0) := \partial_2 f(t, \phi(t, t_0, x_0)), \quad \forall (t, t_0, x_0) \in \hat{\Omega},$$

e consideremos então o seguinte PVI:

$$(9) \quad \begin{cases} x(t)' = \mathcal{J}(t, t_0, x_0)x(t); \\ x(t_0) = I_d, \end{cases}$$

onde a função x tem valores em $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$ e I_d é matriz identidade $d \times d$.

Desta forma obtemos

Teorema 5.5. Continuando com a notação introduzida acima, temos que a função $\phi: \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ é C^1 na sua terceira variável (i.e. a variável espacial) e a função $\partial_3 \phi: \hat{\Omega} \rightarrow \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$ é solução do PVI (9), i.e. $\partial_3 \phi(t_0, t_0, x_0) = I_d$ e

$$\partial_1(\partial_3 \phi(t, t_0, x_0)) = \mathcal{J}(t, t_0, x_0) \partial_3 \phi(t, t_0, x_0), \quad \forall (t, t_0, x_0) \in \hat{\Omega}.$$

Para provar este teorema precisaremos do seguinte resultado elementar de cálculo:

Lema 5.6. *Seja $U \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto aberto não vazio e $f: (a, b) \times U \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma contínua e C^1 respeito a sua segunda variável. Então existe uma função contínua $\hat{f}: (a, b) \times U \times U \rightarrow \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$ tal que*

$$\hat{f}(t, x, x) = \partial_2 f(t, x), \quad \forall (t, x) \in (a, b) \times U,$$

e

$$f(t, x_2) - f(t, x_1) = \hat{f}(t, x_1, x_2)(x_2 - x_1), \quad \forall t \in (a, b), \quad \forall x_1, x_2 \in U.$$

Demonstração do Lema 5.6. Dado que U é convexo, basta definir

$$\hat{f}(t, x_1, x_2) := \int_0^1 \partial_2 f(t, sx_2 + (1-s)x_1) ds, \quad \forall t \in (a, b), \quad \forall x_1, x_2 \in U.$$

□

Demonstração do Teorema 5.5. Seja (t, t_0, x_0) um ponto arbitrário de $\hat{\Omega}$, e a, b números reais tais que $\omega^-(t_0, x_0) < a < t_0 < b < \omega^+(t_0, x_0)$. Pelo Teorema 5.1 sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $[a, b] \subset J(\bar{t}, \bar{x})$, para todo $(\bar{t}, \bar{x}) \in B((t_0, x_0), \delta) \subset \Omega$.

Seja $e_k := (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$ o k -ésimo versor coordenado. Para cada $h \in]-\delta, \delta[$, consideremos a função $\phi_h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ dada por

$$\phi_h(t) := \phi(t, t_0, x_0 + he_k), \quad \forall t \in [a, b].$$

Então, aplicando o Lema 5.6 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\phi_h(t) - \phi_0(t)}{h} &= e_k + \frac{1}{h} \int_{t_0}^t f(s, \phi_h(s)) - f(s, \phi_0(s)) ds \\ &= e_k + \int_{t_0}^t \hat{f}(s, \phi_0(s), \phi_h(s)) \frac{\phi_h(s) - \phi_0(s)}{h} ds \end{aligned}$$

Isto significa que, para cada $h \in]-\delta, \delta[$ a função $\psi_h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ dada por

$$\psi_h(t) := \frac{\phi_h(t) - \phi_0(t)}{h}, \quad \forall t \in [a, b],$$

satisfaz a relação

$$\psi_h(t) = e_k + \int_{t_0}^t \hat{f}(s, \phi_0(s), \phi_h(s)) \psi_h(s) ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

Isto permite mostrar que, como consequência do Lema 4.4 e dado que função $\hat{f}$ é contínua, a família $\{\psi_h\}_{h \in]-\delta, \delta[}$ é equicontínua. Logo, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, existe uma sequência $\{h_n\}_{n \geq 1}$ no intervalo aberto $]-\delta, \delta[$, com $h_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$ tal que a sequência $\{\phi_{h_n}\}_{n \geq 1}$ converge uniformemente em $[a, b]$ a uma função ψ que será solução do PVI

$$\begin{cases} \psi'(t) = \partial_2 f(t, \phi_0(t)) \psi(t) = \mathcal{J}(t, t_0, x_0) \psi(t), \\ \psi(t_0) = e_k. \end{cases}$$

De isto segue que $\psi(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \psi_h(t)$ e portanto, $\psi(t) = \partial_3 \phi(t, t_0, x_0) e_k$. □

5.2. Equações com parâmetros. Muitas vezes temos que lidar com EDOs e PVI's que dependem de certos parâmetros. Por exemplo, na § 2.2 vimos como a Segunda Lei de Newton pode ser interpretada como uma EDO de segunda ordem e nessa equação a massa poderia ser considerada um parâmetro.

É por este motivo que às vezes é preciso considerar equações do tipo

$$x' = f(t, x, \lambda),$$

onde $f: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função contínua e Ω um conjunto aberto, e para cada valor de λ podemos pensar que temos uma equação diferente.

Desta forma surge a questão da dependência das soluções, não só em relação às condições iniciais, mas também em relação ao parâmetro.

Podemos dar uma resposta em forma muito simples a esta questão observando que é possível modificar uma equação com parâmetros obtendo uma “equivalente à original” que não depende de parâmetros.

De fato, se $f: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função como acima e $(t_0, x_0, \lambda) \in \Omega$ é um ponto qualquer, fácil ver que $\phi: J(t_0, x_0, \lambda) \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma solução maximal do PVI

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), \lambda), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

se e só se a função $\Phi: J(t_0, x_0, \lambda) \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$ dada por $\Phi(t) := (\phi(t), \lambda)$ é solução do PVI

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)), \\ X(t_0) = (x_0, \lambda), \end{cases}$$

onde $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$ é dada por $F(t, x, \lambda) = (f(t, x, \lambda), 0)$, para todo $(t, x, \lambda) \in \Omega$.

6. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

As EDOs lineares são um tipo particular de equações diferenciais ordinárias extremamente importantes.

Uma EDO linear de primeira ordem é uma equação da forma

$$(10) \quad x'(t) = A(t)x(t) + b(t),$$

onde $A: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$ e $b: I \rightarrow \mathbb{R}^d$ são funções contínuas e I um intervalo aberto. Desta forma vemos que o conjunto Ω , o domínio do “lado direito” nas seções anteriores, neste caso é da forma $\Omega = I \times \mathbb{R}^d$. Além disso, estas EDOs claramente satisfazem as hipóteses do Teorema de Picard (Teorema 3.4) e portanto todo PVI associado a uma EDO linear admite uma única solução maximal.

Por outro lado, pelo Teorema 4.2 sabemos que a EDO é completa sempre que $I = \mathbb{R}$.

6.1. Motivações. Uma das principais motivações para estudar EDOs lineares é que elas costumam ser utilizadas para “aproximar” EDOs que não podem ser resolvidas explicitamente e desta forma obter algum tipo de informação sobre a solução desconhecida da EDO original.

Um caso clássico de “*aproximação por linearização*” no movimento do pêndulo que é estudado como um *oscilador harmônico simples*.

6.1.1. Oscilador harmônico simples. Consideremos um objeto de massa m que pode se deslocar horizontalmente sobre uma superfície em atrito como mostra a Figura 1. Neste caso é sabido que existe uma constante $k > 0$, que depende só da elasticidade da mola tal que a força exercida no corpo de massa m quando ele se encontra no ponto x é igual a $F = -kx$. Isto significa que, pela segunda lei de Newton da § 2.2, a dinâmica deste sistema, usualmente chamado de *oscilador harmônico simples*, vem dada pela equação

$$(11) \quad m\ddot{x}(t) = -kx(t).$$

Pode se provar que toda solução da equação (11) é da forma

$$x(t) = \alpha_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \alpha_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ são constantes.

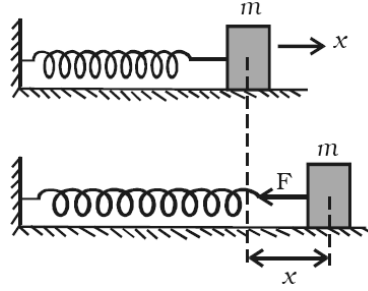


FIGURA 1. Dinâmica da mola.

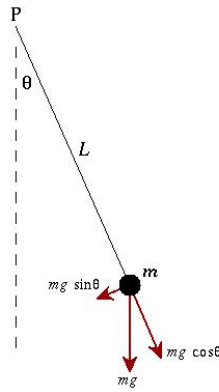


FIGURA 2. Dinâmica do pêndulo.

Em particular, isto implica que qualquer solução diferente da identicamente nula (i.e. quando $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$) é periódica de período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

6.1.2. *O pêndulo.* Como é bem sabido, um pêndulo consta de uma massa m pendurada de uma corda de comprimento ℓ , sendo a força de gravidade a única “externa” que atua sobre o sistema (vide Figura 2).

Neste caso pode-se mostrar que a equação que determina a dinâmica deste sistema é a seguinte:

$$(12) \quad m\ell\ddot{\theta}(t) = -mg \sin(\theta(t)),$$

onde g é a força de gravidade exercida pela Terra.

A diferença da equação (11), a EDO (12) não é linear e solução identicamente nula é a única que vem dada por uma função “elementar”. Porém a linearização da EDO (12), numa vizinhança de $\theta = 0$, é de fato a equação

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{\ell}\theta(t),$$

e pelo mencionado na § 6.1.1 conhecemos todas as soluções desta EDO.

O fato de que todas as soluções desta última equação que não são identicamente nulas têm o mesmo período, tem sido muito usado ao longo da história no desenho, entre outras coisas, de relógios (de pêndulo). Porém, será verdade que todas as soluções não identicamente nulas da EDO (12) têm de fato o mesmo período?

6.2. Equações diferenciais lineares homogêneas. Dizemos que a EDO linear (10) é *homogênea* quando $b \equiv 0$.

No curso de Cálculo já temos estudado como resolver EDOs lineares em dimensão 1. Lembramos então

Exercício 9. Seja $a: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^0 e t_0 um ponto qualquer de I e x_0 um número real arbitrário. Então a função $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(t) := x_0 \exp \left(\int_{t_0}^t a(s) \, ds \right), \quad \forall t \in I,$$

é a solução maximal do seguinte PVI:

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Teorema 6.1. *Seja $A: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$ uma aplicação contínua. Então toda solução maximal da EDO*

$$(13) \quad x'(t) = A(t)x(t)$$

está definida em todo I e o conjunto das soluções maximais de esta EDO é um subespaço vetorial de $C^1(I, \mathbb{R}^d)$ de dimensão d .

Demonstração. O fato de que toda solução maximal da EDO está definida em todo I segue da demonstração do Teorema 4.2.

Seja então $\mathcal{C} := \{x \in C^1(I, \mathbb{R}^d) : x'(t) = A(t)x(t), \forall t \in I\}$. Se $x, y \in \mathcal{C}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então é claro que $x + \alpha y \in \mathcal{C}$, o que mostra que $\mathcal{C}$ é um espaço vetorial.

Para determinar a dimensão do espaço $\mathcal{C}$, basta considerar um ponto qualquer $t_0 \in I$ e aplicação $\text{ev}_{t_0}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^d$ dada por

$$\text{ev}_{t_0}(x) := x(t_0), \quad \forall x \in \mathcal{C}.$$

A aplicação ev_{t_0} é uma transformação linear, e pelo Teorema 3.4, ela é uma bijeção. Logo, $\mathcal{C}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^d$. $\square$

As EDOs lineares de primeira ordem podem ser consideradas tanto com valores em $\mathbb{R}^d$, quanto em $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$. De fato, dada uma $A: I \rightarrow \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$, diremos que $\phi \in C^1(I, \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}))$ é solução de (13) sempre que

$$\phi'(t) = A(t)\phi(t), \quad \forall t \in I,$$

onde a derivação da ϕ é feita coordenada a coordenada. Sempre que for necessária a distinção falaremos de soluções matriciais e vetoriais dependendo do caso.

Exercício 10. Mostrar que $\phi: I \rightarrow \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$ é uma solução matricial de (13) se e só se cada uma das suas funções colunas é uma solução vetorial.

Proposição 6.2. *Seja $\phi \in C^1(I, \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}))$ uma solução matricial da EDO (13). Então existe $t_0 \in I$ com $\det \phi(t_0) = 0$ se e só se $\det \phi(t) = 0$, para todo $t \in I$.*

Demonstração. Suponha que existe $t_0 \in I$ tal que $\det \phi(t_0) = 0$. Então, existem constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ tais que se definimos

$$\psi(t) := \sum_{i=1}^d \alpha_i \phi_i(t) \in \mathbb{R}^d, \quad \forall t \in I,$$

onde $\phi(t) = [\phi_1(t), \dots, \phi_d(t)]$ e $\phi_i(t)$ denota o i -ésimo vetor coluna, teremos que $\psi(t_0) = 0$. Por outro lado, pelo Exercício 10 e o Teorema 6.1 sabemos que ψ é uma solução vetorial de (13). Pela unicidade de solução e o fato de que $\psi(t_0) = 0$, concluímos que $\psi \equiv 0$ em I . Logo, $\det \phi \equiv 0$ em I .

A outra implicação é totalmente trivial. $\square$

Isto nos leva à seguinte

Definição 1. Uma solução matricial $\phi \in C^1(I, \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}))$ da EDO (13) é dita uma *solução fundamental* quando

$$\det \phi(t) \neq 0, \quad \forall t \in I.$$

Se notamos por $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ o grupo geral linear com coeficientes em $\mathbb{R}$, i.e.

$$\mathrm{GL}_d(\mathbb{R}) := \{A \in \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\},$$

então observemos que pela Proposição 6.2 teremos que $\phi \in C^1(I, \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}))$ é solução fundamental se e só se $\phi(t) \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$, para todo $t \in I$.

Observe que $\phi \in C^1(I, \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}))$ é solução fundamental da EDO (13) se e só se $\psi \in C^1(I, \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}))$ dada por $\psi(t) := \phi(t)B$ é solução fundamental para toda $B \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$.

Exercício 11. Seja $A: I \rightarrow \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$ uma aplicação C^0 e, continuando com a notação utilizada na § 5, sejam $\tilde{\Omega} := I \times I \times \mathbb{R}^d$ e $\varphi: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ a solução geral da EDO

$$x'(t) = A(t)x(t),$$

i.e. $\partial_t \varphi(t, t_0, x_0) = A(t)\varphi(t, t_0, x_0)$, e $\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$, para todo $(t, t_0, x_0) \in \tilde{\Omega}$.

Se $\phi: I \rightarrow \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ é uma solução fundamental qualquer, então mostre que

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \phi(t)[\phi(t_0)]^{-1}x_0, \quad \forall (t, t_0, x_0) \in \tilde{\Omega}.$$

Teorema 6.3 (Teorema de Liouville). *Se $A: I \rightarrow \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$ é uma aplicação C^0 e $\phi: I \rightarrow \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ é de classe C^1 tais que*

$$\phi'(t) = A(t)\phi(t), \quad \forall t \in I,$$

então vale

$$(14) \quad \det \phi(t) = \det \phi(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \mathrm{tr} A(s) \, ds \right), \quad \forall t_0, t \in I.$$

Para demonstrar este teorema precisaremos antes do seguinte

Lema 6.4. *Seja $\phi: I \rightarrow \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$ uma aplicação diferenciável. Então, se $\phi(t) = [\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_d(t)]$, onde cada $\phi_i(t)$ denota o i -ésimo vetor coluna da matriz, então temos*

$$(\det \phi)'(t) = \sum_{i=1}^d \det[\phi_1(t), \dots, \phi_i'(t), \dots, \phi_d(t)], \quad \forall t \in I.$$

Exercício 12. Provar o Lema 6.4.

Demonstração do Teorema 6.3. Começamos observando que, pelo Exercício 9, para mostrar (14) é suficiente provar que

$$(\det \phi)'(t) = (\mathrm{tr} A(t)) \det \phi(t), \quad \forall t \in I.$$

Por outro lado, pela Proposição 6.2, vemos que (14) é trivialmente satisfeita sempre que exista um ponto $t \in I$ tal que $\det \phi(t) = 0$.

Portanto, podemos supor daqui para frente que ϕ é uma solução fundamental. Notemos $\phi(t) = [\phi_1(t), \dots, \phi_d(t)]$, onde $\phi_i(t)$ denota o i -ésimo vetor coluna da matriz $\phi(t)$.

Então, aplicando o Lema 6.4 obtemos:

$$\begin{aligned} (\det \phi)'(t) &= \sum_{i=1}^d \det[\phi_1(t), \dots, \phi_i'(t), \dots, \phi_d(t)] \\ &= \sum_{i=1}^d \det[\phi_1(t), \dots, A(t)\phi_i(t), \dots, \phi_d(t)] \end{aligned}$$

Dado que os vetores $\phi_1(t), \dots, \phi_d(t)$ são linearmente independentes para todo $t \in I$, existe uma aplicação $\alpha: I \rightarrow \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$ tal que

$$A(t)\phi_i(t) = \sum_{j=1}^d \alpha_{i,j}(t)\phi_j(t), \quad \forall t \in I, \forall i \in \{1, \dots, d\},$$

onde $\alpha_{i,j}(t) \in \mathbb{R}$ denotam os coeficientes da matriz $\alpha(t)$. Observemos que as matrizes $A(t)$ e $\alpha(t)$ são conjugadas e portanto, $\text{tr}A(t) = \text{tr}\alpha(t)$, para todo $t \in I$. Agora voltando à última igualdade obtemos

$$\begin{aligned} (\det \phi)'(t) &= \sum_{i=1}^d \det[\phi_1(t), \dots, A(t)\phi_i(t), \dots, \phi_d(t)] \\ &= \sum_{i=1}^d \det\left[\phi_1(t), \dots, \sum_{j=1}^d \alpha_{i,j}(t)\phi_j(t), \dots, \phi_d(t)\right] \\ &= \sum_{i=1}^d \det[\phi_1(t), \dots, \alpha_{i,i}(t)\phi_i(t), \dots, \phi_d(t)] = \text{tr}\alpha(t) \det \phi(t) \\ &= \text{tr}A(t) \det \phi(t). \end{aligned}$$

□

6.3. Equações lineares não homogêneas. É claro que toda EDO linear não homogênea tem uma EDO linear homogênea naturalmente associada a ela. De fato, dados $A: I \rightarrow \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$ e $b: I \rightarrow \mathbb{R}^d$ contínuas, a EDO

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

é a EDO linear homogênea associada à EDO não homogênea

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t).$$

Nesta seção veremos que dada uma solução fundamental da EDO linear homogênea é possível, em princípio, resolver a EDO não homogênea.

De fato temos a seguinte

Proposição 6.5. *Se A e b são como acima e $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^d$ é a solução maximal do PVI*

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

para quaisquer $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, e $\phi: I \rightarrow \text{GL}_d(\mathbb{R})$ é uma solução fundamental da EDO linear homogênea associada, então temos

$$\varphi(t) = \phi(t) \left[[\phi(t_0)]^{-1} x_0 + \int_{t_0}^t [\phi(s)]^{-1} b(s) \, ds \right], \quad \forall t \in I.$$

Demonstração. A demonstração da Proposição 6.5 fica como exercício. □

6.4. Equações lineares com coeficientes constantes. Nesta seção estudaremos em detalhe as EDO lineares autônomas, i.e. equações do tipo

$$(15) \quad x'(t) = Ax(t),$$

onde $A \in \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$.

Pelo Corolário 4.3 sabemos que estas EDOs são completas.

No caso unidimensional, que já foi estudado no curso de Cálculo sabemos que a solução geral da EDO $x' = ax$, com $a \in \mathbb{R}$, é $\varphi: \hat{\Omega} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(t, t_0, x_0) = x_0 e^{a(t-t_0)}, \quad \forall (t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^3.$$

Aqui procuraremos uma fórmula análoga para dimensão maior.

REFERÊNCIAS

- [Arn06] V. Arnold, *Ordinary differential equations*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2006, Translated from the Russian by Roger Cooke, Second printing of the 1992 edition.
- [Per01] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, third ed., Texts in Applied Mathematics, vol. 7, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [Sot79] J. Sotomayor, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Projeto Euclides, vol. 11, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- [Tes12] G. Teschl, *Ordinary differential equations and dynamical systems*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 140, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE. NITERÓI, RJ, BRASIL

URL: www.professores.uff.br/kocsard

Email address: akocsard@id.uff.br