Sincronización

Alejandro Kocsard

Universidade Federal Fluminense
Brasil

Cibercoloquio Latinoamericano de Matemáticas

Según el diccionario. . .

- **sincronización:** *f.* Acción y efecto de sincronizar.

Fuente: *Diccionario de la Real Academia Española*

Según el diccionario...

- **sincronización:** *f.* Acción y efecto de sincronizar.

- **sincronizar:** *tr.* Hacer que coincidan en el tiempo dos o más movimientos o fenómenos.

Fuente: *Diccionario de la Real Academia Española*

Formas de sincronización *evidentes*

- **Sincronización voluntaria:** a través de un **esfuerzo consciente**
- **Sincronización forzada:** **acoplamiento** a través de un **vínculo muy fuerte** que restringe la libertad de movimiento

Formas *menos evidentes*

- Sincronización por **acoplamiento débil**

- Sincronización por **azar** o comportamiento **aleatorio**

Sincronización en la Naturaleza

“Principio general”

La sincronización en la Naturaleza es más usual de lo que creemos

Christiaan Huygens (1629-1695): Sincronización de péndulos (metrónomos) con acoplamiento “débil”

Estudiando la sincronización

- Desde la **Física:**
  - Leyes de la mecánica de Newton
  - Ecuaciones del movimiento del **sistema dinámico** (mecánico)
  - Buscar la sincronización dentro de esas ecuaciones

Estudiando la sincronización

- Desde la **Física:**
    - Leyes de la mecánica de Newton
    - Ecuaciones del movimiento del **sistema dinámico** (mecánico)
    - Buscar la sincronización dentro de esas ecuaciones
- Desde la **Matemática:**

Estudiando la sincronización

- Desde la **Física:**
  - Leyes de la mecánica de Newton
  - Ecuaciones del movimiento del **sistema dinámico** (mecánico)
  - Buscar la sincronización dentro de esas ecuaciones

- Desde la **Matemática:**
  - Definir qué es un **sistema dinámico**

Estudiando la sincronización

- Desde la **Física:**
  - Leyes de la mecánica de Newton
  - Ecuaciones del movimiento del **sistema dinámico** (mecánico)
  - Buscar la sincronización dentro de esas ecuaciones

- Desde la **Matemática:**
  - Definir qué es un **sistema dinámico**
  - Definir el concepto de **sincronización**

Estudiando la sincronización

- Desde la **Física:**
  - Leyes de la mecánica de Newton
  - Ecuaciones del movimiento del **sistema dinámico** (mecánico)
  - Buscar la sincronización dentro de esas ecuaciones
- Desde la **Matemática:**
  - Definir qué es un **sistema dinámico**
  - Definir el concepto de **sincronización**
  - Hallar **teoremas** que muestren la presencia de sincronización

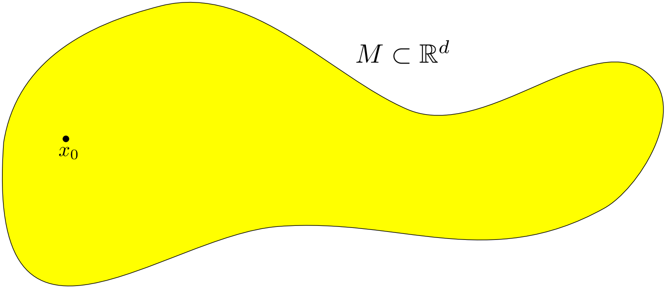
Estudiando la sincronización

- Desde la **Física:**
  - Leyes de la mecánica de Newton
  - Ecuaciones del movimiento del **sistema dinámico** (mecánico)
  - Buscar la sincronización dentro de esas ecuaciones

- Desde la **Matemática:**
  - Definir qué es un **sistema dinámico**
  - Definir el concepto de **sincronización**
  - Hallar **teoremas** que muestren la presencia de sincronización
  - ¿Estos teoremas explican la sincronización de los **modelos físicos?**

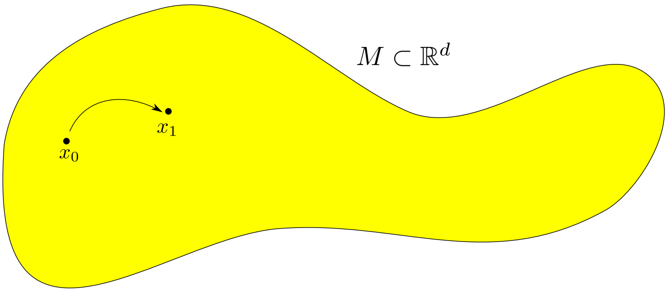
Sistemas Dinámicos

- **Espacio de fases:** $M \subset \mathbb{R}^d$ conjunto de posibles estados del sistema



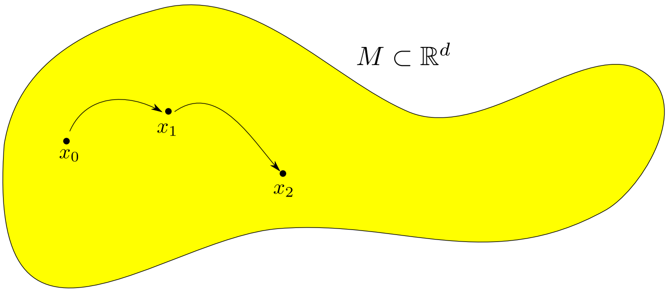
Sistemas Dinámicos

- **Espacio de fases:** $M \subset \mathbb{R}^d$ conjunto de posibles estados del sistema



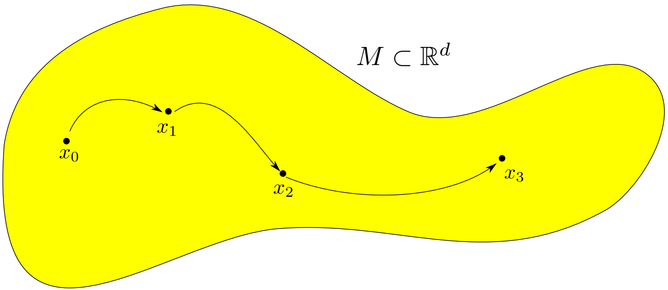
Sistemas Dinámicos

- **Espacio de fases:** $M \subset \mathbb{R}^d$ conjunto de posibles estados del sistema



Sistemas Dinámicos

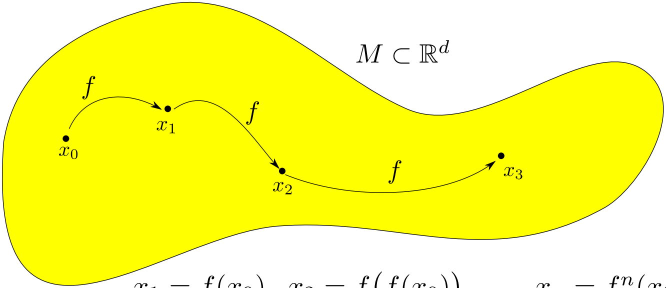
- **Espacio de fases:** $M \subset \mathbb{R}^d$ conjunto de posibles estados del sistema



Sistemas Dinámicos

- **Espacio de fases:** $M \subset \mathbb{R}^d$ conjunto de posibles estados del sistema

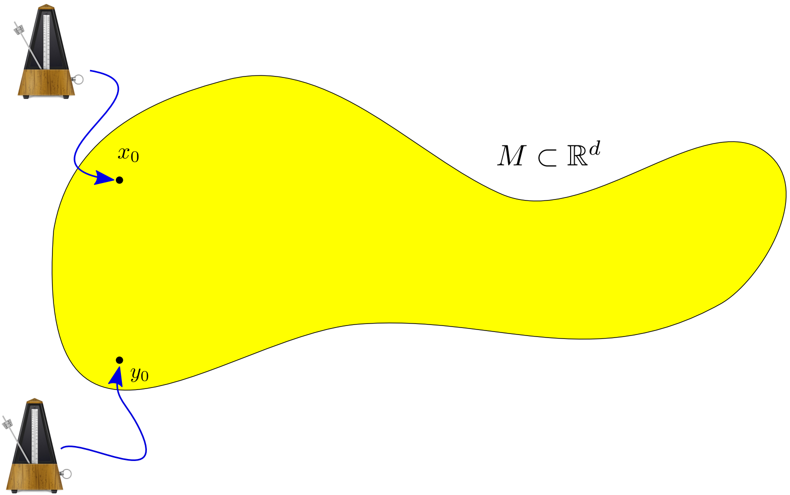
- **Dinámica:** $f : M \to M$ determina la evolución del sistema



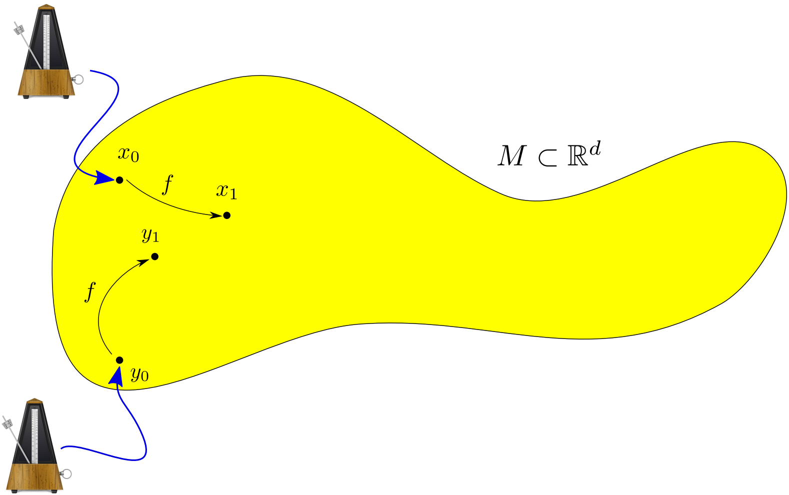
$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f\big(f(x_0)\big), \ldots,\ x_n = f^n(x_0)$$

Definición de Sincronización

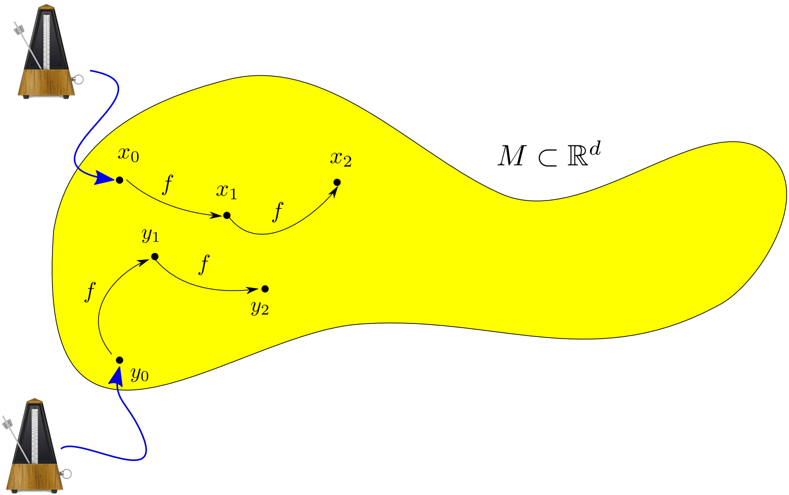
Definición de Sincronización



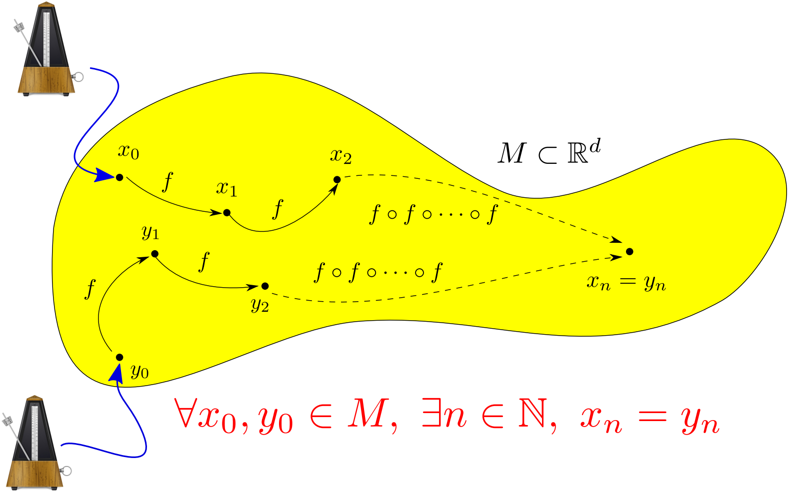
Definición de Sincronización



Definición de Sincronización



Definición de Sincronización



$$\forall x_0, y_0 \in M,\ \exists n \in \mathbb{N},\ x_n = y_n$$

¿Acoplamiento?

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{cases} x_n = f(x_{n-1}) \\ y_n = f(y_{n-1}) \end{cases}$$

¿Acoplamiento?

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{cases} x_n = f(x_{n-1}) + A_1(x_{n-1}, y_{n-1}), \\ y_n = f(y_{n-1}) + A_2(x_{n-1}, y_{n-1}). \end{cases}$$

¿Acoplamiento?

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{cases} x_n = f(x_{n-1}) + A_1(x_{n-1}, y_{n-1}), \\ y_n = f(y_{n-1}) + A_2(x_{n-1}, y_{n-1}). \end{cases}$$

Formalmente, podemos usar la misma definición de sincronización:

$$\forall x_0, y_0 \in M, \ \exists n \in \mathbb{N}, \ x_n = y_n.$$

¿Acoplamiento?

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{cases} x_n = f(x_{n-1}) + A_1(x_{n-1}, y_{n-1}), \\ y_n = f(y_{n-1}) + A_2(x_{n-1}, y_{n-1}). \end{cases}$$

Formalmente, podemos usar la misma definición de sincronización:

$$\forall x_0, y_0 \in M, \ \exists n \in \mathbb{N}, \ x_n = y_n.$$

Pero ahora el espacio de fases pasa a ser $M \times M$...

¿Inyectividad de la f?

En Física (clásica), la $f\colon M \to M$ aparece como tiempo-1 de la solución de una EDO y por lo tanto,

f suele ser un **homeomorfismo**

¿Inyectividad de la f?

En Física (clásica), la $f\colon M \to M$ aparece como tiempo-1 de la solución de una EDO y por lo tanto,

f suele ser un **homeomorfismo**

Con nuestra definición de sincronización tendríamos:

$$f(x_{n-1}) = x_n = y_n = f(y_{n-1}) \iff x_{n-1} = y_{n-1} \iff \dots\ x_0 = y_0$$

¿Inyectividad de la f?

En Física (clásica), la $f : M \to M$ aparece como tiempo-1 de la solución de una EDO y por lo tanto,

f suele ser un **homeomorfismo**

Con nuestra definición de sincronización tendríamos:

$$f(x_{n-1}) = x_n = y_n = f(y_{n-1}) \iff x_{n-1} = y_{n-1} \iff \ldots \; x_0 = y_0$$

Definición (segunda tentativa)

$f : M \to M$ presenta **sincronización** si y sólo si $\forall x_0, y_0 \in M$,

$$d(x_n, y_n) = \|f^n(x_0) - f^n(y_0)\| \to 0, \quad \text{cuando } n \to +\infty$$

Un teoremas de sincronización

Un teoremas de sincronización

Teorema

Si $M \subset \mathbb{R}^d$ es cerrado y $f: M \to M$ es contracción, i.e. $\exists \lambda \in (0,1)$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \lambda \|x - y\|, \quad \forall x, y \in M,$$

entonces **hay sincronización.**

Un teoremas de sincronización

Teorema (de punto fijo de Banach)

Si $M \subset \mathbb{R}^d$ es cerrado y $f : M \to M$ es contracción, i.e. $\exists \lambda \in (0,1)$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \lambda \|x - y\|, \quad \forall x, y \in M,$$

entonces **hay sincronización.**
De hecho, $\exists! x^\star \in M$ tal que $f(x^\star) = x^\star$ y

$$f^n(x) \to x^\star, \quad \text{cuando } n \to +\infty, \ \forall x \in M.$$

Pero. . .

En muchos casos interesantes, M es compacto y recordemos, $f: M \to M$ es homeomorfismo: no hay contracciones sobreyectivas en compactos. . .

Pero. . .

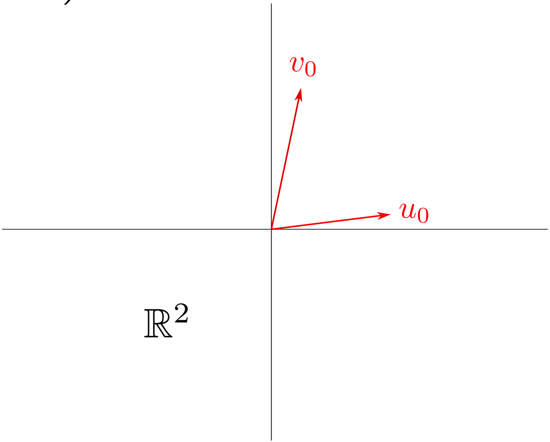
En muchos casos interesantes, M es compacto y recordemos, $f\colon M \to M$ es homeomorfismo: no hay contracciones sobreyectivas en compactos. . .

Ejercicio de topología métrica

Si M es **compacto** y $f\colon M \to M$ es una **contracción sobreyectiva**, entonces M es un punto y $f = id$

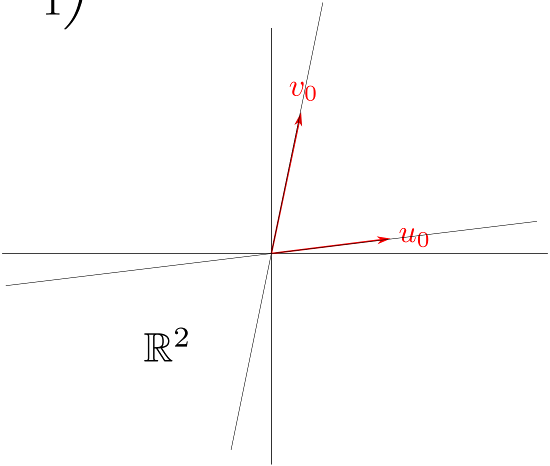
Buscando ejemplos: ¿sincronización lineal?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Buscando ejemplos: ¿sincronización lineal?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

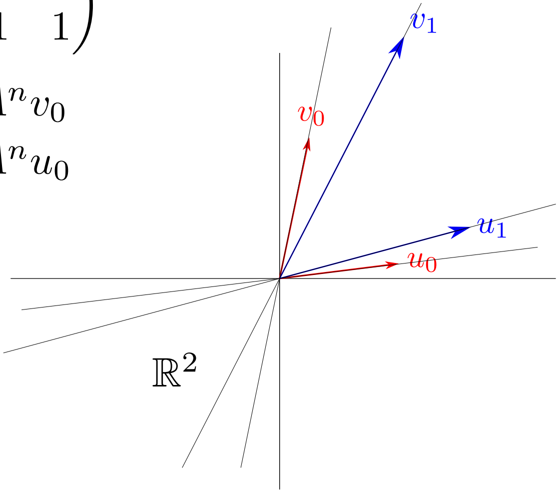


Buscando ejemplos: ¿sincronización lineal?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_n = A^n v_0$$

$$u_n = A^n u_0$$

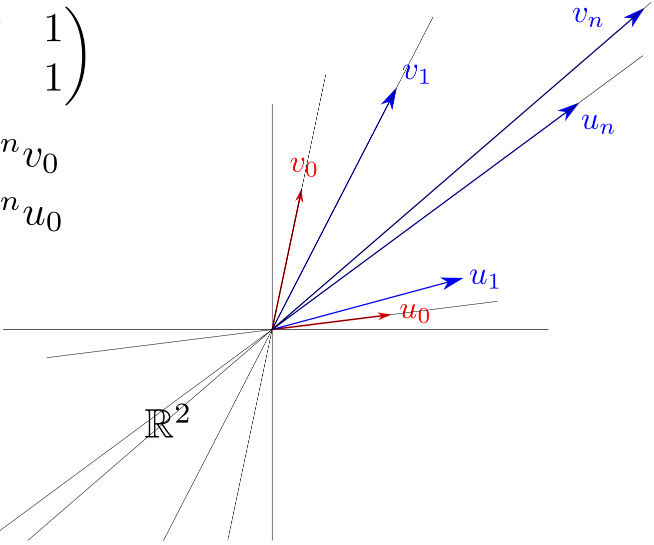


Buscando ejemplos: ¿sincronización lineal?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_n = A^n v_0$$

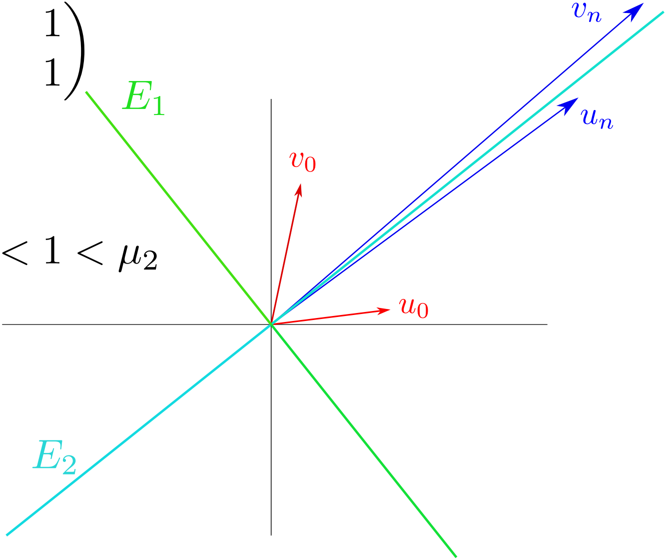
$$u_n = A^n u_0$$



Buscando ejemplos: ¿sincronización lineal?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$0 < \mu_1 < 1 < \mu_2$$



Sincronización para A

Sincronización angular

$\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) = \{$rectas de $\mathbb{R}^2$ por el origen$\}$ es compacto y $A\colon \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \sphericalangle\big(A^n(\ell_1), A^n(\ell_2)\big) = 0, \quad \forall \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)\backslash E_1$$

Sincronización para A

Sincronización angular

$\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) = \{$rectas de $\mathbb{R}^2$ por el origen$\}$ es compacto y $A\colon \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \measuredangle\big(A^n(\ell_1), A^n(\ell_2)\big) = 0, \quad \forall \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)\backslash E_1$$

Exponente de Lyapunov

Para todo $v \in \mathbb{R}^2\backslash E_1$, vale que

$$\lambda_+ := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|A^n\| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|A^n v\| = \log \mu_2 > 0.$$

Sincronización para A

Sincronización angular

$\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) = \{$rectas de $\mathbb{R}^2$ por el origen$\}$ es compacto y $A\colon \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \sphericalangle\big(A^n(\ell_1), A^n(\ell_2)\big) = 0, \quad \forall \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)\backslash E_1$$

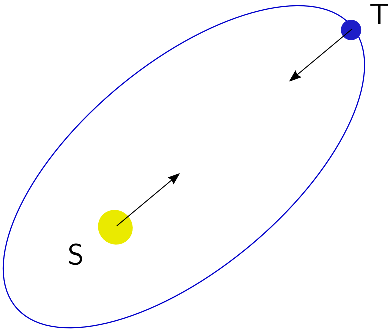
Exponente de Lyapunov

Para todo $v \in \mathbb{R}^2\backslash E_1$, vale que

$$\lambda_+ := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|A^n\| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|A^n v\| = \log \mu_2 > 0.$$

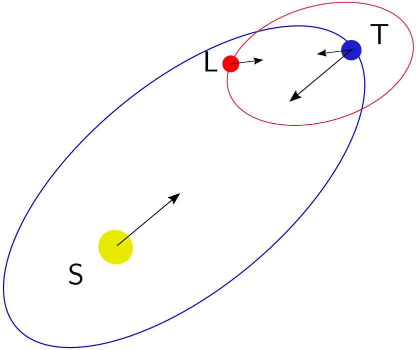
Cuanto más cerca comenzamos de E_1, más demoramos en ver la sincronización

¿Sincronización planetaria?



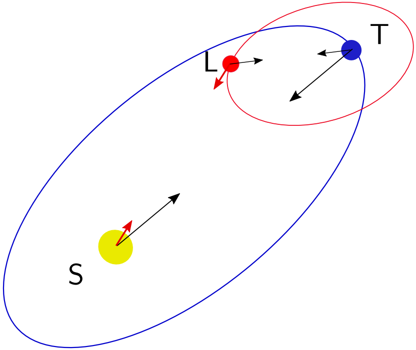
$$P_T = \text{período de T}$$

¿Sincronización planetaria?



$$P_T = \text{período de T}$$
$$P_L = \text{período de L}$$

¿Sincronización planetaria?



$$P_T = \text{período de T}$$
$$P_L = \text{período de L}$$

$$\frac{P_T}{P_L} \approx \mathbb{Z}$$

Sincronización de Antonov

Teorema [Antonov, 1984]:

- $f_1, f_2 \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ difeomorfismos

Sincronización de Antonov

Teorema [Antonov, 1984]:

- $f_1, f_2 \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ difeomorfismos
- $x_0, y_0 \in \mathbb{S}^1$ puntos arbitrarios

Sincronización de Antonov

Teorema [Antonov, 1984]:

- $f_1, f_2 \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ difeomorfismos
- $x_0, y_0 \in \mathbb{S}^1$ puntos arbitrarios
- En cada paso, arrojamos una moneda honesta:

Sincronización de Antonov

Teorema [Antonov, 1984]:

- $f_1, f_2 \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ difeomorfismos
- $x_0, y_0 \in \mathbb{S}^1$ puntos arbitrarios
- En cada paso, arrojamos una moneda honesta:
  - si sale **cara:** $x_n = f_1(x_{n-1})$, $y_n = f_1(y_{n-1})$;
  - si sale **cruz:** $x_n = f_2(x_{n-1})$, $y_n = f_2(y_{n-1})$.

Sincronización de Antonov

Teorema [Antonov, 1984]:

- $f_1, f_2 \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ difeomorfismos
- $x_0, y_0 \in \mathbb{S}^1$ puntos arbitrarios
- En cada paso, arrojamos una moneda honesta:
  - si sale **cara:** $x_n = f_1(x_{n-1})$, $y_n = f_1(y_{n-1})$;
  - si sale **cruz:** $x_n = f_2(x_{n-1})$, $y_n = f_2(y_{n-1})$.
- Si f_1 y f_2 verifican ciertas **"propiedades generales"**, entonces

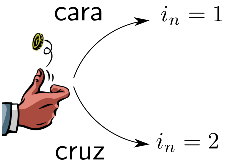
$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0, \qquad \text{con probabilidad } 1!$$

Caso lineal de Furstengberg

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pi.$$

Caso lineal de Furstengberg

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pi.$$



Teorema [Furstenberg, 1963]

$\exists \lambda_+ > 0$, t.q. $\forall v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, si $A^{(n)} := A_{i_n} A_{i_{n-1}} \dots A_{i_1}$, entonces

$$\lambda_+ = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left\| A^{(n)} \right\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left\| A^{(n)} v \right\|,$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \measuredangle\left(A^{(n)}[v], A^{(n)}[w]\right) = 0,$$

con probabilidad 1.

Líneas actuales de investigación

- $f_1, \ldots, f_k \colon M \to M$ aplicaciones C^r, M variedad compacta
- $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$ vector estocástico
- $f^{(n)} := f_{i_n} \circ f_{i_{n-1}} \circ \ldots \circ f_{i_1}$, los i_n son aleatorias i.i.d. con ley $\bar{p}$

Líneas actuales de investigación

- $f_1, \ldots, f_k \colon M \to M$ aplicaciones C^r, M variedad compacta
- $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$ vector estocástico
- $f^{(n)} := f_{i_n} \circ f_{i_{n-1}} \circ \ldots \circ f_{i_1}$, los i_n son aleatorias i.i.d. con ley $\bar{p}$

- **Exponentes de Lyapunov:** ¿Bajo qué condiciones existe $\lambda \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left\| Df_x^{(n)} \right\| = \lambda, \quad \text{para algún } x \in M?$$

Líneas actuales de investigación

- $f_1, \ldots, f_k \colon M \to M$ aplicaciones C^r, M variedad compacta
- $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$ vector estocástico
- $f^{(n)} := f_{i_n} \circ f_{i_{n-1}} \circ \ldots \circ f_{i_1}$, los i_n son aleatorias i.i.d. con ley $\bar{p}$

- **Exponentes de Lyapunov:** ¿Bajo qué condiciones existe $\lambda \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left\| Df_x^{(n)} \right\| = \lambda, \quad \text{para algún } x \in M?$$

- **Positividad del Exponente de Lyapunov:** ¿Cómo la **topología/geometría** de M, las **dinámicas** de las f_i y las propiedades **algebraicas** del grupo generado $\langle f_1, \ldots, f_k \rangle$ influyen en el signo de λ?

¡Muchas gracias!