Questão 9

Calcule o limite, quando possível. Caso conclua que o limite não existe, justifique.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(3x)+\operatorname{sen}(5x)}{\tan(2x)+\tan(4x)+\tan(6x)}$$

Solução

Note que $\frac{\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(3x)+\operatorname{sen}(5x)}{\tan(2x)+\tan(4x)+\tan(6x)}$ é uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ quando $x\to 0$.

Neste limite utilizaremos limite trigonométrico fundamental, onde:

$$\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 1,$$

Também é fácil ver que

$$\lim_{u\to 0}\frac{\tan(u)}{u} = 1,$$

Assim, iremos preparar a função:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(3x)+\operatorname{sen}(5x)}{\tan(2x)+\tan(4x)+\tan(6x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(3x)+\operatorname{sen}(5x)}{\tan(2x)+\tan(4x)+\tan(6x)}\,\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(3x)+\operatorname{sen}(5x)}{x}}{\frac{\tan(2x)+\tan(4x)+\tan(6x)}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}+\frac{3\operatorname{sen}(3x)}{3x}+\frac{5\operatorname{sen}(5x)}{5x}}{\frac{2\tan(2x)}{2x}+\frac{4\tan(4x)}{4x}+\frac{6\tan(6x)}{6x}}$$

Utilizando as propriedades de soma, multiplicação e divisão de limites, onde o limite da soma, da multiplicação e do quociente são, respectivamente, a soma, a multiplicação e o quociente do limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(3x)+\operatorname{sen}(5x)}{\tan(2x)+\tan(4x)+\tan(6x)} = \frac{1+3+5}{1.2+1.4+1.6} = \frac{3}{4}$$

Questão 20

Verifique se a função é contínua no ponto indicado. Justifique a resposta.

$$f(x)=\begin{cases} x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases} \qquad \text{em } x = 0.$$

Solução

Para que a função seja contínua é necessário que:

$\lim_{x\to 0} x^3 \cos\frac{1}{x} = f(0)$

Temos que f(0) = 1.

Para calcular o limite vamos admitir que $g(x) = x^3$ e $h(x) = \cos\frac{1}{x}$. Temos que

$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ e que a função h é uma função limitada já que $-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$. Desta forma, estamos nas condições do Teorema do Anulamento, este diz que:

Se y = h (x) é uma função limitada exceto possivelmente no ponto p e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então,

$$\lim_{x\to p} g(x).h(x) = 0$$

Logo, $\lim_{x\to 0} x^3 \cos\frac{1}{x} = 0$.

Esta função não é contínua em x = 0, pois não satisfaz a condição de continuidade, já que $\lim_{x\to 0} x^3 \cos\frac{1}{x} = 0 \neq 1 = f(0)$.