Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 5 - 2008-1
Limite e continuidade: miscelânea
Teorema do valor intemediário

Nos exercícios 1. a 15. calcule cada limite, quando possível. Caso conclua que o limite não existe, justifique.

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(x^n - x^{n-1}\right)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{3x^3-2x^2-3x+2}{(2x-2)^2}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^5+x^2}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2\sqrt{6x}-3\sqrt{4x}}{4x^2-4x+1}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(3x)+\operatorname{sen}(5x)}{\tan(2x)+\tan(4x)+\tan(6x)}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(x-\operatorname{sen}(ax))(x+\tan(bx))}{1-\cos(cx)},\ a,b,c\neq0$
11. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{x\operatorname{sen}x\cos x}$
12. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{1-x^2}$
13. $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen}(\tan x)}{\tan x}$
14. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}(x)-1}{x\cos x}$
15. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}\right)$
16. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x+\operatorname{sen}x}$
17. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\operatorname{sen}(x)-1}{x^3+1}$
18. Achar as constantes a e b de modo que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(ax+b-\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)=0.$
19. Calcule os limites laterais de $f(x)=\dfrac{g(x)}{\operatorname{sen}x}$ em $x=0$, se $g(x)=\begin{cases}\cos(x)+3 & ,\ x<0\\ x^2-9 & ,\ x\geq0\end{cases}$

Nos exercícios 20. e 21. verifique se a função é contínua no ponto indicado. Justifique a resposta.

20. $f(x)=\begin{cases}x^3\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x\neq0\\ 1 & \text{se } x=0\end{cases}$ em $x=0$
21. $f(t)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{t}}{1-\sqrt[3]{t}} & \text{se } t\neq1\\ 3/2 & \text{se } t=1\end{cases}$ em $t=1$
22. Verifique se existe $a\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\begin{cases}1+ax & ,\ x\leq0\\ x^4+2a & ,\ x>0\end{cases}$ seja contínua em $\mathbb{R}$.
23. Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, tal que $x^2\cos^2 x\leq f(x)\leq x\operatorname{sen}x$, $\forall x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. Verifique se f é contínua em $x=0$.

Para cada função dos exercícios 24. a 26. determine um intervalo de amplitude 1, no qual está localizado pelo menos um zero dessa função.

24. $f(x) = x^3 + x - 1$

25. $f(x) = x^3 + 3x - 5$

26. $f(x) = 1 + x\cos\dfrac{\pi x}{2}$

27. Mostre que os gráficos de $y = 1$ e $y = x^2 \tan x$ têm interseção em pelo menos um ponto do intervalo $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

28. Dê um exemplo de uma função tal que que em dois pontos distintos $x = a$ e $x = b$ a função tem sinais contrários, f não é contínua no intervalo $[a, b]$ e a tese do Teorema do Valor Intermediário é verdadeira.

29. Dê um exemplo de uma função tal que que em dois pontos distintos $x = a$ e $x = b$ a função tem sinais contrários, f não é contínua no intervalo $[a, b]$ e a tese do Teorema do Valor Intermediário é falsa.

30. Se uma função f muda de sinal quando x varia de um ponto $x = x_1$ para o ponto $x = x_2$, existirá obrigatoriamente um ponto entre x_1 e x_2 onde a função f se anula? Justifique sua resposta.

RESPOSTAS

1. Se n for par, $\nexists$ pois a função $\to +\infty$
   e se n for ímpar, $\nexists$ pois a função $\to -\infty$
2. -1
3. 1
4. $\nexists$ pois se $x \to 1^-$ a função $\to -\infty$
   (ou se $x \to 1^+$ a função $\to +\infty$)
5. 10
6. $\nexists$ pois se $x \to \dfrac{1}{2}^-$ a função $\to -\infty$
   (ou se $x \to \dfrac{1}{2}^+$ a função $\to -\infty$)
7. $\dfrac{49}{24}$
8. $\dfrac{1}{144}$
9. $\dfrac{3}{4}$
10. $\dfrac{2(1-a)(1+b)}{c^2}$
11. $\dfrac{3}{2}$
12. $\dfrac{\pi}{2}$
13. 1
14. 0
15. 0
16. 1
17. 0
18. $a = 1$, $b = 0$
19. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$
20. Não, pois $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$
21. Sim, pois $\lim\limits_{t\to 1} f(t) = \dfrac{3}{2} = f(1)$
22. $\dfrac{1}{2}$
23. Sim
24. $f(0) = -1 < 0 < 1 = f(1)$,
    f é contínua em $[0, 1]$.
    Pelo Teorema do Valor Intermediário (TVI), existe um c; $0 < c < 1$; $f(c) = 0$, isto é, existe um zero da função no intervalo $[0, 1]$.
25. Idem ao ex. 24. para o intervalo $[1, 2]$
26. Idem ao ex. 24. para o intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$
27. Aplicando o TVI em $f(x) = -1 + x^2 \tan x$ no intervalo $[0, \pi/3]$, mostra-se que f tem um zero no intervalo $[0, \pi/3]$.
    Isto é, $\exists c; c \in [0, \pi/3];\ f(c) = 0$.
    Como $[0, \pi/3] \subset (-\pi/2, \pi/2)$, temos que
    $\exists c; c \in (-\pi/2, \pi/2);\ -1 + c^2 \tan c = f(c) = 0$.
    Isto é, $\exists c; c \in (-\pi/2, \pi/2);\ c^2 \tan c = 1$.
28. $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{1-x}$ em $[-2, 2]$;
29. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ em $[-1, 1]$
30. Não. Ver exemplo 29.