

uff Universidade Federal Fluminense
 EGM - Instituto de Matemática
 GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 7 - 2008-1
 Algumas aplicações de derivada
 Regra da cadeia

1. Uma partícula se move sobre uma linha reta de acordo com a equação $s = \sqrt{t}$, sendo s a distância (em metros) da partícula ao seu ponto de partida, após decorridos t segundos da partida.
 - (a) Calcule a velocidade média da partícula de $t = 9$ até $t = 16$
 - (b) Calcule a velocidade instantânea da partícula quando $t = 9$.
2. Calcule a taxa de variação do volume de um balão esférico em relação ao seu raio, quando o raio do balão for igual a 5 cm.
3. Um projétil é lançado verticalmente para cima e t segundos após o lançamento está a s metros do solo, onde $s = s(t) = 256t - 16t^2$. Calcule:
 - (a) A velocidade do projétil t segundos após o lançamento;
 - (b) O tempo necessário para o projétil atingir a altura máxima;
 - (c) A altura máxima atingida pelo projétil.
4. No instante t horas um veículo está $16\sqrt{t^3} - 24t + 16$ quilômetros à leste de um ponto de referência na estrada.
 - (a) Qual a velocidade no instante $t = \frac{1}{4}$ e qual é o sentido do movimento em relação ao ponto de referência?
 - (b) Onde está o veículo quando a velocidade é zero?

Nos exercícios 5. a 10. derive a função (se possível, simplifique antes e/ou depois de derivar).

5. $f(x) = \frac{\sqrt[4]{2x^4 + 2x}}{\cos^2 x}$
6. $f(x) = (\sin 2x)(x^3 + 2x)^{2/3}$
7. $F(u) = \frac{u^3 - 3u^2}{(u^4 + 1)^{5/2}}$
8. $G(r) = \sqrt[5]{\frac{2r^2 - 2}{r - 1}}$
9. $M(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$
10. $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x^4} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

11. Sejam $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ e $g(x) = \sqrt{\tan x}$. Calcule $(f \circ g)' \left(\frac{\pi}{4} \right)$.
12. Considere f uma função diferenciável e g definida por $g(x) = f^2(\cos x)$. Sabendo que $f(0) = 1$ e $f'(0) = -\frac{1}{2}$, calcule $g' \left(\frac{\pi}{2} \right)$.
13. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável; $g(0) = \frac{1}{2}$ e $g'(0) = 1$. Calcule $f'(0)$, onde $f(x) = (\cos x)g^2 \left(\tan \frac{x}{x^2 + 2} \right)$.
14. Sejam g diferenciável e $f(x) = x g(x^2)$.
 - (a) Mostre que $f'(x) = g(x^2) + 2x^2 g'(x^2)$;
 - (b) Calcule $g(4)$, sabendo que $g(4) + g'(4) = 1$ e $f'(2) = -1$.
15. Considere as funções $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < -1 \\ |x| & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$ e $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 1 - x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
 - (a) Encontre $(f \circ g)(x)$;
 - (b) Usando (a), encontre $(f \circ g)'(x)$ e determine seu domínio D ;
 - (c) Determine o conjunto C onde podemos aplicar a regra da cadeia para calcular $(f \circ g)'(x)$;
 - (d) Usando a regra da cadeia, encontre $(f \circ g)'(x)$, $\forall x \in C$;
 - (e) Compare (b) e (d);
 - (f) Esboce os gráficos de g , f e $f \circ g$;
 - (g) Indique nos gráficos os pontos onde g , f e $f \circ g$ não são diferenciáveis.

RESPOSTAS

1. (a) $\frac{\sqrt{16} - \sqrt{9}}{16 - 9}$; (b) $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + \Delta t} - \sqrt{9}}{\Delta t} = s'(9) = \frac{1}{6}$ m/seg.

2. Sendo $V =$ volume, $V'(5) = 100\pi \text{ cm}^3/\text{cm}$. 3. (a) 128 m/seg; (b) 8 seg (c) 1024 m

4. (a) $s'(1/4) = -12 < 0 \Rightarrow$ sentido: veículo se aproxima da referência, rumo oeste, com velocidade escalar de 12 km/h; (b) 8 km à leste da referência.

5. $f'(x) = \frac{(\cos^2 x)(1/4)(2x^4 + 2x)^{-3/4}(8x + 2) - (2x^4 + 2x)^{1/4}(2 \cos x)(-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{(4x^3 + 1) \cos x + 8(x^4 + 1) \sin x}{2(2x^4 + 2x)^{3/4} \cos^3 x}$

6. $f'(x) = (\sin 2x)(2/3)(x^3 + 2x)^{-1/3}(3x^2 + 2) + (\cos 2x)(2)(x^3 + 2x)^{2/3} = \frac{2(3x^2 + 2)(\sin 2x) + 6(x^3 + 2x)(\cos 2x)}{3(x^3 + 2x)^{1/3}}$

7. $F'(u) = \frac{(u^4 + 1)^{5/2}(3u^2 - 6u) - (u^3 - 3u^2)(5/2)(u^4 + 1)^{3/2}(4u^3)}{(u^4 + 1)^5} = \frac{-7u^6 + 24u^5 + 3u^2 - 6u}{(u^4 + 1)^{7/2}}$

8. $G'(r) = \frac{1}{5}(2r + 2)^{-4/5}(2) = \frac{2}{5\sqrt[5]{(2r + 2)^4}}$ 9. $f'(x) = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}$

10. $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin \frac{1}{x^4} - \frac{4}{x^2} \cos \frac{1}{x^4} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ 11. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 12. 1 13. $\frac{1}{2}$ 14. $\frac{9}{7}$

15. (a) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 1 - x^2, & x \geq -1 \end{cases}$

(b) $(f \circ g)'(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ -2x, & x > -1 \end{cases}$

$D = \text{dom}(f \circ g)' = \mathbb{R} - \{-1\}$

(c) $g'(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ -1, & -1 < x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ $\nexists g'(-1)$ pois $g'_-(-1) = 0 \neq g'_+(-1) = -1$ e $\nexists g'(0)$ pois $g'_-(0) = -1 \neq g'_+(0) = 1$
Logo $\text{dom}(g') = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$

$f'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -2x, & x \geq 0 \end{cases}$ Logo $\text{dom}(f' \circ g) = \{x \in (\text{dom } g) = \mathbb{R}; y = g(x) \in (\text{dom } f') = \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

Como $C = (\text{dom}(f' \circ g)) \cap (\text{dom}(g'))$, temos $C = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$.

(d) Visando aplicar a regra da cadeia, vamos calcular primeiro $f'(g(x))$ em $C = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$:

Como $g(x) = \begin{cases} 1, & x < -1 \\ |x|, & -1 < x < 0 \\ |x|, & x > 0 \end{cases}$ temos $f'(g(x)) = \begin{cases} f'(1) = -2, & x < -1 \\ f'(|x|) = -2|x| = 2x, & -1 < x < 0 \\ f'(|x|) = -2|x| = -2x, & x > 0 \end{cases}$

Aplicando a regra da cadeia: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = \begin{cases} -2 \times 0 = 0, & x < -1 \\ (2x) \times (-1) = -2x, & -1 < x < 0 \\ (-2x) \times (1) = -2x, & x > 0 \end{cases}$

(e) $(f \circ g)'(x)$ são iguais nos pontos comuns de D e C , mas não é possível aplicar a regra da cadeia para calcular $(f \circ g)'(0)$.

