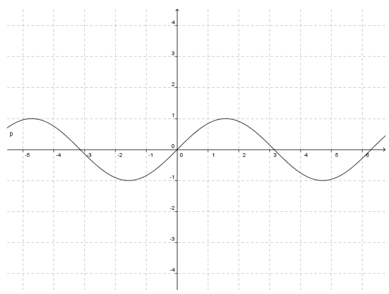
Universidade Federal Fluminense 16/09/2008

Primeira Verificação Escolar de Cálculo IA
GMA00108 - Turma E1

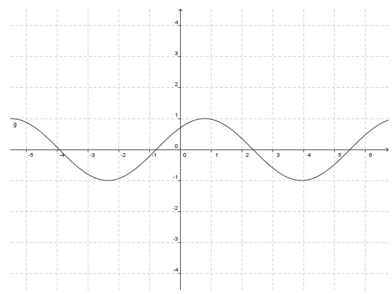
1. Considere a função

$$f(x) = \left| 2 \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 1 \right|.$$

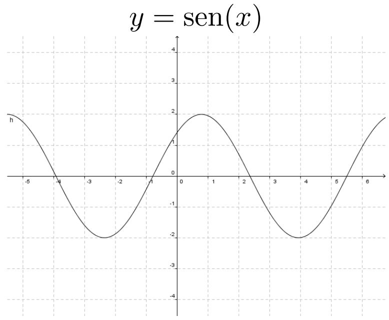
a) (2pt) Faça um esboço do gráfico de f a partir do gráfico da função *seno* usando alongamentos, compressões, translações e reflexões. Em cada etapa, especifique qual transformação você empregou e faça um esboço do gráfico da função intermediária correspondente.



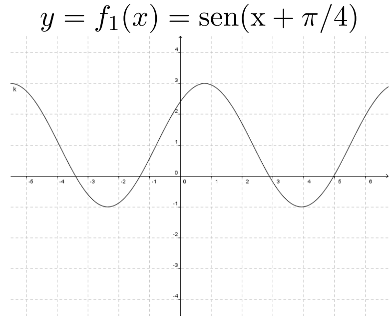
$y = \operatorname{sen}(x)$



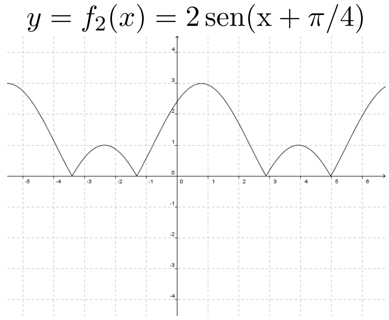
$y = f_1(x) = \operatorname{sen}(\mathrm{x} + \pi/4)$



$y = f_2(x) = 2\operatorname{sen}(\mathrm{x} + \pi/4)$



$y = f_3(x) = 2\operatorname{sen}(\mathrm{x} + \pi/4) + 1$



$y = f(x)$

Etapa 1. $f_1(x) = \operatorname{sen}(x + \pi/4)$. O gráfico de f_1 é obtido fazendo uma translação horizontal de $\pi/4$ unidades para a esquerda do gráfico da função seno.

Etapa 2. $f_2(x) = 2f_1(x) = 2\,\text{sen}(x + \pi/4)$. O gráfico de f_2 é obtido esticando verticalmente o gráfico de f_1 por um fator de 2.

Etapa 3. $f_3(x) = f_2(x)+1 = 2\,\text{sen}(x+\pi/4)+1$. O gráfico de f_3 é obtido deslocando 1 unidade para cima o gráfico de f_2.

Etapa 4. $f(x) = |f_3(x)| = |2\,\text{sen}(x + \pi/4) + 1|$. O gráfico de f é obtido rebatendo a parte do gráfico de f_3 baixo o eixo x com respeito a esse eixo.

b) (1pt) Especifique o dominio e a imagem de f. A função f é par? É ímpar? Justifique.

O dominio de f é $\mathbb{R}$. A sua imagem é o intervalo [0,3]. A função f não é par, pois seu gráfico não é simétrico com respeito ao eixo y, e não é ímpar, pois seu gráfico não é simétrico com respeito á orígem (de fato $f(0) \neq 0$).

2. Considere a função definida por

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{x-2} - 2}.$$

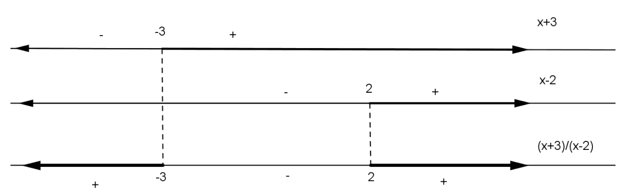
a) (1pt) Determine o dominio de f. Justifique sua resposta.

O dominio de f consiste dos valores de x tais que $x-2 \neq 0$ e $\frac{3x-1}{x-2} - 2 \geq 0$. Notamos que

$$\frac{3x-1}{x-2} - 2 = \frac{3x-1-2(x-2)}{x-2} = \frac{3x-1-2x+4}{x-2} = \frac{x+3}{x-2}.$$

Portanto o dominio de f consiste dos x tais que $\frac{x+3}{x-2} \geq 0$ e $x - 2 \neq 0$.

Solução 1. Consideramos os possiveis sinais de $x + 3$ e $x - 2$ na reta, e assim vemos qual é o sinal de $(x + 3)/(x - 2)$.



Vemos que $(x+3)/(x-2)$ é negativa somente no intervalo $(-3, 2)$. Logo o dominio de f contem todos os pontos fora desse intervalo, exceto o $x = 2$. Ou seja, $\text{Dom}(f) = (-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$.

Solução 2. Consideramos dois casos:
i) Se $x - 2 > 0$ (ou seja, se $x > 2$),

$$\frac{x+3}{x-2} \geq 0 \iff x + 3 \geq 0 \iff x \geq -3.$$

Logo, o conjunto dos x tais que $x > 2$ e $x \geq -3$, que é o intervalo $(2, +\infty)$, é uma parte do dominio.

ii) Se $x - 2 < 0$ (ou seja, $x < 2$)

$$\frac{x+3}{x-2} \geq 0 \iff x + 3 \leq 0 \iff x \leq -3.$$

Logo, o conjunto dos x tais que $x < 2$ e $x \leq -3$, que é o intervalo $(-\infty, -3]$, é outra parte do dominio.

Portanto, o dominio de f é o conjunto dos x tais que $x \leq -3$ ou $x > 2$, isto é,

$$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -3] \cup (2, +\infty).$$

b) (2pt) Diga em quais pontos f é continua. Determine as assíntotas horizontais e verticais de f. Justifique.

Nos pontos do seu dominio, f é continua, pois é a raiz quadrada de uma função racional.

Para determinar as assintotas verticais, primeiro observamos que se a está em $(-\infty, -3]$ ou $(2, +\infty)$ então a reta $x = a$ não pode ser uma assintota vertical, pois f é continua em a. Portanto a única candidata a assintota vertical é a reta $x = 2$. Calculando o limite por direita (lembre do item anterior que $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$),

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} = +\infty,$$

pois

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+3}{x-2} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

portanto $x = 2$ é a única assintota vertical de f.

Para determinar as assintotas horizontais, calculamos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{x-2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x+3}{x}}{\frac{x-2}{x}}} =$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}} = \sqrt{\frac{1+\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}}{1-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}}} = \sqrt{\frac{1+0}{1-0}} = 1$$

e similarmente

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{x+3}{x-2}} = \sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x+3}{x}}{\frac{x-2}{x}}} = \sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}} = 1.$$

Portanto, $y = 1$ é a única assintota horizontal de f.

3. (1pt) Encontre um intervalo de comprimento no máximo 1 onde a equação

$$x^3 - x^2 + 3x + 1 = 0$$

tem uma solução. Justifique sua resposta.

Como $f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$ é uma função continua, basta encontrar dois numeros a e b tais que $|a - b| \leq 1$ e $f(a) \leq 0$, $f(b) \geq 0$, pois então o Teorema do Valor Intermediário nos garante que existe algum $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = 0$. Por inspecção vemos que podemos tomar $a = -1$ e $b = 0$, ja que $f(-1) = -4$ e $f(0) = 1$. Assim, existe uma solução da equação $f(x) = 0$ no intervalo $[-1, 0]$, que tem comprimento 1.

4. (2pt) Calcule os limites

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2(x)\text{sen}(\frac{\pi}{x})}{x} \qquad\qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x - \sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}.$$

Justifique sua resposta..

a) O limite é 0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2(x)\text{sen}(\frac{\pi}{x})}{x} = \lim_{x\to 0} \left[\left(\text{sen}(x) \frac{\text{sen}(x)}{x} \right) \cdot \left(\text{sen} \left(\frac{\pi}{x} \right) \right) \right].$$

Sabemos que $-1 \leq \text{sen}(\theta) \leq 1$ para qualquer θ. Portanto $\text{sen}(\frac{\pi}{x})$ é uma função limitada de x. Por outro lado,

$$\lim_{x\to 0} \text{sen}(x) \frac{\text{sen}(x)}{x} = \left(\lim_{x\to 0} \text{sen}(x) \right) \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} \right) = \text{sen}(0) \cdot 1 = 0.$$

Assim, usando o Teorema do Anulamento (ou Corolário do Teorema do Confronto), concluimos que

$$\lim_{x\to 0} \left[\left(\text{sen}(x) \frac{\text{sen}(x)}{x} \right) \cdot \left(\text{sen} \left(\frac{\pi}{x} \right) \right) \right] = 0,$$

pois é o produto de uma função limitada e uma função que tende a 0 quando $x \to 0$.

Observação. Se em vez de usar o Teorema do Anulamento quisermos usar o Teorema do Confronto diretamente, é só observar que

$$-\frac{\text{sen}^2(x)}{x} \leq \frac{\text{sen}^2(x)\text{sen}(\frac{\pi}{x})}{x} \leq \frac{\text{sen}^2(x)}{x}$$

e as funções dos lados direito e esquerdo da desiguladade acima tendem a 0 quando $x \to 0$ (como ja vimos).

b) O limite é 1:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x - \sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x - \sqrt{x}}{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{\frac{x-\sqrt{x}}{x}}{\frac{x+1}{x}}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{x}}} =$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x}}} = \sqrt{\frac{1-0}{1+0}} = \sqrt{1} = 1.$$

5. (1pt) Encontre a equação da reta tangente no ponto de coordenadas $(0,2)$ ao gráfico da função

$$f(x) = x^2 + 2x + 2.$$

Justifique sua resposta.

A inclinação da reta tangente no ponto $(a, f(a))$ é dada por

$$m = f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Como quereremos achar a reta tangente no ponto $(0, f(0)) = (0,2)$, temos que $a = 0$, portanto

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h^2+2h+2)-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2h}{h} = \lim_{h\to 0} h+2 = 2.$$

Como a reta tem que passar pelo ponto $(0,2)$, a sua equação é:

$$y = m(x-0) + 2 \quad \text{ou seja} \quad y = 2x + 2.$$