Universidade Federal Fluminense
Andrés

Gabarito da Segunda Verificação Escolar
Cálculo IA - GMA00108 - Turma E1

1. Calcule a derivada das seguitnes funções:

a) $f(x) = \ln(\cos(x^3 + 2))$ b) $g(x) = e^{x+\mathrm{arctg}(x)}$

a) Pela regra da cadeia (duas vezes),

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(x^3+2)} \cdot \left(-\operatorname{sen}(x^3+2) \cdot (3x^2)\right) = -3x^2 \operatorname{tg}(x^3+2)$$

b) Pela regra da cadeia,

$$g'(x) = e^{x+\mathrm{arctg}(x)} \cdot \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right)$$

2. Seja $y = f(x)$ uma função definida implicitamente pela equação

$$\cos(x) + xy + y^3 = 0.$$

Calcule $f'(0)$ sabendo que $f(0) = -1$.

Derivando com respeito a x, e usando as regras do produto e da cadeia, temos

$$-\operatorname{sen}(x) + \left(y + x\frac{dy}{dx}\right) + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0.$$

e isolando $\frac{dy}{dx}$ obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}(x) - y}{x + 3y^2}.$$

Como $y = f(x)$, em $x = 0$ temos $y = f(0) = -1$, e substituindo na equação acima obtemos

$$f'(0) = \frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}(0) - (-1)}{0 + 3 \cdot (-1)^2} = \frac{1}{3}.$$

3. Uma certa função é diferenciável, um a um, e satisfaz

$$f(2) = 3 \quad \text{e} \quad f'(2) = 1/2.$$

Ache o valor de $(f^{-1})'(3)$ e justifique claramente sua resposta.

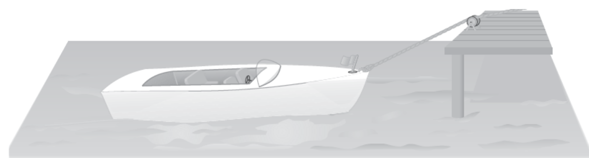
A fórmula para a derivada de f^{-1} diz que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

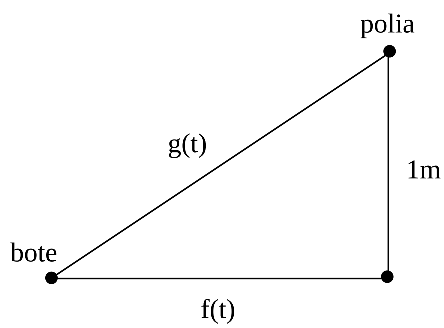
Como $f(2) = 3$, vale que $f^{-1}(3) = 2$. Portanto

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{1/2} = 2.$$

4. Um bote é puxado em direção ao atracadouro por uma corda que está atada na proa do bote e que passa por uma polia sobre o ancoradouro (que está $1m$ mais alto do que a proa do bote). Se a corda é puxada a uma taxa de $2m/s$, quão rápido está se aproximando o bote do ancoradouro quando ele estiver a $4m$ dele?



Chamando de $f(x)$ a distancia do bote até o atracadouro e $g(t)$ o comprimento da corda desde o bote até a polia, como no desenho, vemos que



$$f(t)^2 + 1^2 = g(t)^2 \qquad (*)$$

A velocidade com que o bote se aproxima é $f'(x)$, e temos como dado que $g'(t) = -2\, m/s$ (negativo, pois é a taxa de variação do comprimento da corda, que está diminuindo).

Derivando a equação (*) com respeito a t, obtemos

$$2f(t)f'(t) + 0 = 2g(t)g'(t).$$

Isolando $f'(t)$, vemos que

$$f'(t) = \frac{g(t)}{f(t)} g'(t).$$

no instante t tal que $f(t) = 4$, temos (resolvendo em (*)) $g(t) = \sqrt{4^2 + 1} = \sqrt{17}$. Substituindo na equação acima,

$$f'(t) = \frac{\sqrt{17}}{4} \cdot (-2) = -\frac{\sqrt{17}}{2} \frac{m}{s}.$$

Conclue-se que o bote está se aproximando a uma velocidade de $\frac{\sqrt{17}}{2} m/s$.

5. Calcule os seguintes limites

$$\text{a)}\ \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln(1+3e^x)} \qquad\qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\operatorname{sen}(x^3-1)}$$

a) Forma indeterminada do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Pela regra de L'Hôpital (duas vezes)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln(1+3e^x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{3e^x}{1+3e^x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+3e^x}{3e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3e^x}{3e^x} = 1.$$

b) Forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$. Pela regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\operatorname{sen}(x^3-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\cos(x^3-1)\cdot 3x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\cos(x^3-1)\cdot 3x^3} = \frac{1}{\cos(0)\cdot 3} = \frac{1}{3}$$