Universidade Federal Fluminense

Prof. Andrés

Gabarito - Terceira Verificação Escolar de Cálculo IA
GMA00108 - Turma E1

1. Considere a função

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$$

a) Determine o dominio de f;

O dominio de f é o conjunto dos x tais que $x^2 - 9 \neq 0$, ou seja, todos os reais diferentes de 3 e -3.

b) Determine as interseções do gráfico de f com os eixos coordenados (caso existam);

Com o eixo y: $f(0) = 0$, portanto a interseção é no ponto $(0, 0)$.
Com o eixo x: $f(x) = 0 \iff x = 0$, logo a única interseção com os eixos é no $(0, 0)$.

c) Determine se o gráfico de f possui alguma simetría (f é par, ímpar, periódica?);

f é ímpar, pois $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-9} = -\frac{x}{x^2-9} = -f(x)$ para todo x no dominio de f.

d) Determine, caso existam, as assíntotas horizontais do gráfico de f e a direção de convergência (por esquerda ou por direita);

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2 - 9} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x - 9/x} = 0^+$$

portanto $y = 0$ é assíntota horizontal, e o gráfico de f se aproxima desde cima a essa reta quando $x \to \infty$.
Como f é impar, teremos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(-x) = -\lim_{x\to\infty} f(x) = 0^-,$$

portanto a assíntota é a mesma mas $f(x)$ se aproxima por baixo quando $x \to -\infty$.

e) Determine, caso existam, as assíntotas verticais do gráfico de f, e ache os limites laterais em cada uma delas;

Os candidatos são $x = 3$ e $x = -3$. Calculando,

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x}{x^2 - 9} = \infty \qquad \lim_{x\to 3^-} \frac{x}{x^2 - 9} = -\infty$$

e como f é ímpar teremos

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x}{x^2 - 9} = -\infty \qquad \lim_{x\to -3^+} \frac{x}{x^2 - 9} = \infty$$

Portanto $x = 3$ e $x = -3$ são as assíntotas verticais.

f) Determine os intervalos onde f é crescente e onde f é decrescente;

Temos
$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 - 9) - x \cdot (2x)}{(x^2 - 9)^2} = -\frac{9 + x^2}{(x^2 - 9)^2}.$$
Como $9 + x^2$ e $(x^2 - 9)^2$ são sempre positivos, $f'(x) < 0$ para todo x no dominio de f. Portanto f é crescente nos intervalos $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$ e $(3, \infty)$.

g) Determine os pontos críticos de f (caso existam) e classifique-os em pontos de máximo local, mínimo local ou sela;

A função f é diferenciável em todos os pontos do seu dominio. Alem disso, $f'(x) = 0 \iff 9 + x^2 = 0$, o que nunca pode acontecer. Portanto f não possui pontos críticos.

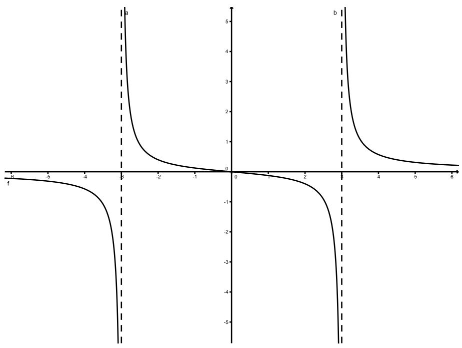
h) Determine os intervalos onde f é côncava p/cima e côncava p/baixo, e os pontos de inflexão (caso existam).

Calculamos
$$f''(x) = -\frac{(2x) \cdot (x^2 - 9)^2 - (9 + x^2) \cdot 2(x^2 - 9)(2x)}{(x^2 - 9)^4} = \frac{2x(x^2 + 27)}{(x^2 - 9)^3}$$
Estudando o sinal, vemos que $f''(x) < 0$ se $x < -3$ ou $0 < x < 3$, e $f''(x) > 0$ se $x > 3$ ou $-3 < x < 0$.

Portanto f é côncava p/baixo em $(-\infty, -3)$ e $(0, 3)$, e côncava p/cima em $(-3, 0)$ e $(3, \infty)$.

O ponto $x = 0$ é o único ponto de inflexão, já que e o único ponto onde muda a concavidade que está no dominio de f.

i) Use as informações obtidas para fazer um esboço do gráfico de f que ilustre suas principais características.



2. Resolva o problema de valor inicial (ache a função f que satisfaz as seguintes equações):

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = x^3 + \operatorname{senh}(x) + \frac{1}{1+x^2} \\ f(0) = 2 \end{array}\right\}$$

Temos

$$\int x^3 + \operatorname{senh}(x) + \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{x^4}{4} + \cosh(x) + \operatorname{arctg}(x) + C.$$

Portanto $f(x)$ deve ter essa forma para alguma constante C. Como $f(0) = 2$, temos

$$2 = \frac{0^4}{4} + \cosh(0) + \operatorname{arctg}(0) + C = 1 + C.$$

De onde deduzimos que $C = 1$. Assim,

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \cosh(x) + \operatorname{arctg}(x) + 1.$$

3. Quer-se construir uma caixa com base quadrada e sem tampa, que tenha um volume de $32,000cm^3$. Encontre as dimensões que deve ter a caixa para que o material utilizado (ou seja, a área da caixa) seja o mínimo possível. Justifique cuidadosamente sua resposta.

Se o lado da base é x, e a altura é h, então queremos que o volume seja $x^2h = 32,000cm^3$, de onde $h = \frac{32,000cm^3}{x^2}$. A área da caixa é

$$A(x) = 4xh + x^2 = 4x\frac{32,000cm^3}{x^2} + x^2 = \frac{128,000cm^3}{x} + x^2$$

Queremos encontrar um ponto de mínimo global para $A(x)$, onde $x > 0$. Para isso, buscamos os pontos críticos de A:

$$A'(x) = \frac{-128,000}{x^2} + 2x = 0 \iff -2x^3 = -128,000 \iff x = \sqrt[3]{64,000} = 40.$$

Portanto $x = 40$ é o único ponto crítico. Por outro lado

$$\lim_{x\to 0^+} A(x) = \infty \text{ e } \lim_{x\to\infty} A(x) = \infty,$$

de onde concluímos que $x = 40$ deve ser ponto de mínimo global. A altura correspondente a $x = 40$ é $h = 32,000/40^2 = 20$. Portanto as dimensões ótimas são: $40 \times 40 \times 20$.

4. Encontre os valores máximo e mínimo globais da função

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2, \quad x \in [-1, 4].$$

Como f é diferenciável em todo $(-1, 4)$ e continua em $[-1, 4]$, basta olhar os valores de f nos pontos críticos e nos pontos extremos do intervalo $(-1, 4)$.

Achando os pontos críticos,

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff x = 3$ ou $x = 1$.

Calculando o valor de f nos pontos críticos:

$$f(1) = 6 \qquad f(3) = 2$$

Calculando o valor de f nos pontos extremos:

$$f(-1) = -14 \qquad f(4) = 6$$

Portanto o valor máximo é 6 e o valor mínimo é -14.