Universidade Federal Fluminense
Andrés

Gabarito - Primeira Verificação Escolar de Cálculo IIIA
GMA00111 - Turma C1

1. *Considere a integral dupla*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy + \int_1^2 \int_{\sqrt{2y-2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy.$$

a) *Esboce a região D.*

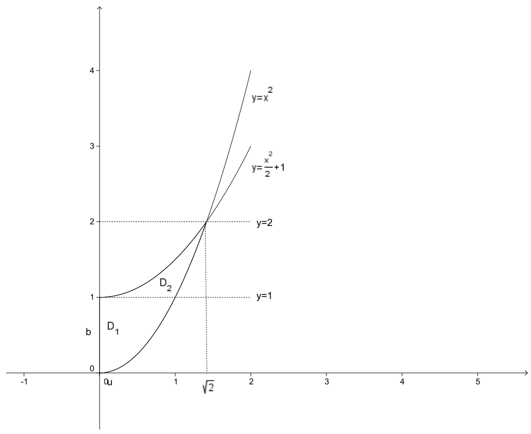
Temos que $D = D_1 \cup D_2$ onde

$$D_1 = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq \sqrt{y}\},$$
$$D_2 = \{(x,y) : 1 \leq y \leq 2,\ \sqrt{2y-2} \leq x \leq \sqrt{y}\}.$$

Observando que

$$x = \sqrt{y} \iff y = x^2, \text{ e } x = \sqrt{2y-2} \iff y = \frac{x^2}{2} + 1$$

vemos que D_1 está limitada pela parabola $y = x^2$ e as retas $x = 0$, $y = 0$ e $y = 1$. Similarmente, D_2 está limitada pelas parábolas $y = \frac{x^2}{2} + 1$, $y = x^2$ e as retas $x = 0$, $y = 1$ e $y = 2$.



b) *Inverta a ordem de integração, expressando a soma das integrais iteradas como uma só integral iterada.*

Pelo feito em a), vemos que, expressando D como região de tipo I,

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \sqrt{2}, x^2 \leq y \leq \frac{x^2}{2} + 1\}.$$

Logo,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{\frac{x^2}{2}+1} f(x,y)dydx.$$

c) *Calcule o valor da integral no caso em que $f(x,y) = 1 - \frac{x^2}{2}$*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{\frac{x^2}{2}+1} 1 - \frac{x^2}{2} dydx$$
$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{x^2}{2} + 1 - x^2\right)\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) dx = \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2 dx$$
$$= \int_0^{\sqrt{2}} 1 - x^2 + \frac{x^4}{4} dx = 2^{\frac{1}{2}} - \frac{2^{3/2}}{3} + \frac{2^{5/2}}{20}$$
$$= \sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{5} = \frac{8\sqrt{2}}{15}$$

2. Use uma conveniente mudança de coordenadas para calcular a integral

$$\iint_D \frac{(2y+x)^2}{\sqrt{2y-x-1}} dxdy$$

onde D é a região limitada pelas retas $2y + x = 0$, $2y + x = 2$, $2y - x = 1$ e $2y - x = 2$.

Escolhemos

$$u = 2y + x, \quad v = 2y - x.$$

Desse jeito temos

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

e portanto

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1} = \frac{1}{4}.$$

A região D é transformada na região limitada pelas retas $u = 0$, $u = 2$, $v = 1$ e $v = 2$. Portanto

$$D_{uv} = \{(u,v) : 0 \leq u \leq 2,\ 1 \leq v \leq 2\},$$

e pela formula de mudança de variáveis

$$\iint_D \frac{(2y+x)^2}{\sqrt{2y-x-1}} dxdy = \iint_{D_{uv}} \frac{u^2}{\sqrt{v-1}} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$
$$= \frac{1}{4} \int_1^2 \int_0^2 \frac{u^2}{\sqrt{v-1}} dudv = \frac{1}{4} \int_0^2 u^2 du \int_1^2 (v-1)^{-\frac{1}{2}} dv$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)\left(\frac{2}{3}(2-1)^{-\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1-1)^{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{4}{3}$$

3. Calcule o volume do sólido que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Usamos coordenadas esféricas. Lembrando que

$$x = \rho \operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta), \quad y = \rho \operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta), \quad y = \rho\cos(\phi)$$

vemos, que $\sqrt{x^2+y^2}$ em coordenadas esféricas é

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2(\phi)\cos^2(\theta) + \rho^2 \operatorname{sen}^2(\phi)\operatorname{sen}^2(\theta)} = \sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2(\phi)} = \rho \operatorname{sen}(\phi)$$

(pois $\rho \geq 0$ e $\operatorname{sen}(\phi) \geq 0$ ja que $0 \leq \phi \leq \pi$). Logo, a equação $z = \sqrt{x^2+y^2}$ em esféricas corresponde a $\rho \operatorname{sen}(\phi) = \rho\cos(\phi)$, ou seja $\operatorname{sen}(\phi) = \cos(\phi)$, o que equivale a $\phi = \frac{\pi}{4}$. Isto é claro geometricamente, pois o cone corresponde aos pontos que formam um mesmo ângulo com o eixo z positivo.

Portanto a condição $0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}$ (ou seja, estar abaixo do cone e acima de $z = 0$) se traduz para

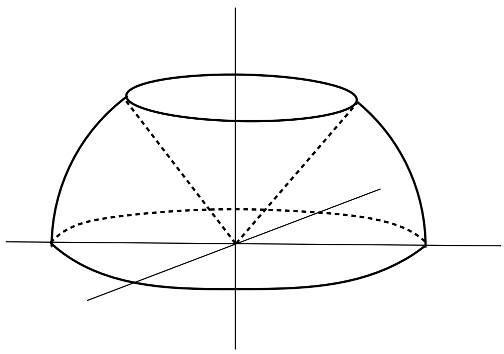
$$\frac{\pi}{2} \geq \phi \geq \frac{\pi}{4},$$

e a condição de estar dentro da esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ é dada por

$$\rho \leq 2.$$

Assim, se o sólido dado é S, sua representação em coordenadas esféricas é

$$S_{\phi\theta\rho} = \left\{(\phi, \theta, \rho) : \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2},\, 0 \leq \theta \leq 2\pi,\, 0 \leq \rho \leq 2\right\}.$$



Lembrando que o jacobiano da mudança de variáveis a coordenadas esféricas é

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\phi,\theta,\rho)} = \rho^2 \sin(\phi),$$

o volume de S é dado por

$$\begin{aligned} V(S) &= \iiint_S 1\, dxdydz = \iiint_{S_{\phi\theta\rho}} \rho^2 \sin(\phi)\, d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 \rho^2 \sin(\phi)\, d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} 1\, d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\phi)\, d\phi \int_0^2 \rho^2\, d\rho \\ &= (2\pi - 0)\left(-\cos(\frac{\pi}{2}) - \left(-\cos(\frac{\pi}{4})\right)\right)\left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{8}{3}\pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

4. Um arame tem a forma da curva C na interseção entre o paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ e o plano $x = y$, acima do plano $z = 0$. Parametrize C e ache a massa do arame, supondo que sua densidade pontual é proporcional à distancia do ponto ao eixo z.

Uma parametrização de C pode ser encontrada colocando $x = t$ e resolvendo para y e z. Nesse caso obtemos, das equações $y = x$ e $z = 1 - x^2 - y^2$,

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t, t, 1 - 2t^2).$$

Para ver em qual intervalo varia t, observamos que a condição $z \geq 0$ se traduz em $1 - 2t^2 \geq 0$, o que implica que $|t| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ou seja,

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Desse jeito obtemos uma parametrização de C indo do ponto $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ ao ponto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Para calcular a massa de C lembramos que a massa é a integral da densidade ao longo de C, ou seja

$$m = \int_C \rho\, ds = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho(\mathbf{r}(t))\, \|\mathbf{r}'(t)\|\; dt.$$

A distancia de um ponto (x, y, z) ao eixo z é $\sqrt{x^2 + y^2}$, portanto a densidade é $\rho(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2}$ para alguma constante K. Logo

$$\rho(\mathbf{r}(t)) = \rho(x(t), y(t), z(t)) = K\sqrt{2t^2} = K\sqrt{2}\,|t|$$

Alem disso,

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = \sqrt{2 + (4t)^2}.$$

Substituindo,

$$m = \int_C \rho\, ds = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{2}K\,|t|\,\sqrt{2 + 16t^2}\, dt.$$

Como o integrando acima é uma função par,

$$m = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{2}Kt\sqrt{2 + 16t^2}\, dt = 2\sqrt{2}K\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} t\sqrt{2 + 16t^2}\, dt$$

Calculando (por substituição, $u = 2+16t^2$, $du = 32t\, dt$), vemos que $\int t\sqrt{2 + 16t^2}\, dt = (2 + 16t^2)^{\frac{3}{2}}/48$, portanto

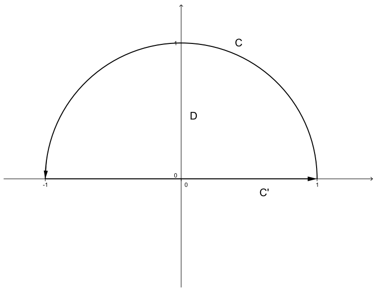
$$m = 2\sqrt{2}K\frac{(2 + 16t^2)^{\frac{3}{2}}}{48}\Bigg|_{t=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}K\left(\frac{10^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}}{48}\right) = \frac{K}{12}(5\sqrt{5} - 1)$$

5. Calcule a integral de linha do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(-x^2y + 2x\sin(y) + x\sin(x^2), y^2x + x^2\cos(y) + 2\sin(y^3)\right)$$

ao longo da curva formada pelo semicirculo $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\}$ orientada de jeito que sai do ponto $(1, 0)$ e chega em $(-1, 0)$.

Seja C o semicirculo $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\}$ orientado como no enunciado. Definimos uma nova curva C', que é o segmento de reta que vai de $(-1, 0)$ até $(1, 0)$.



Desse jeito, $C \cup C'$ é uma curva fechada que limita um semicirculo D, e como $\mathbf{F}$ é de classe C^1 em todo R^2, o teorema de Green nos diz que

$$\oint_{C\cup C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C\cup C'} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy,$$

onde

$$P(x,y) = -x^2y + 2x\sin(y) + x\sin(x^2), \quad Q(x,y) = y^2x + x^2\cos(y) + 2\sin(y^3).$$

Juntando isso com

$$\oint_{C\cup C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

podemos calcular a integral desejada como

$$(1) \qquad \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C\cup C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy - \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Calculando,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2 + 2x\cos(y), \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -x^2 + 2x\cos(y),$$

portanto

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = \iint_D x^2 + y^2\,dxdy = \int_0^\pi \int_0^1 r^2 \cdot r\,drd\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Parametrizando C' por

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t, 0), \quad -1 \le t \le 1$$

podemos calcular pela definição de integral de linha

$$\int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy = \int_{-1}^1 P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\,dt.$$

Como $x(t) = t$ e $y(t) = 0$, temos $x'(t) = 1$ e $y'(t) = 0$. Assim, $Q(x(t), y(t))y'(t) = 0$ e temos

$$\int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^1 P(x(t), y(t))x'(t)\,dt = \int_{-1}^1 P(t, 0)dt = \int_{-1}^1 t\,\mathrm{sen}(t^2)\,dt = 0$$

Este ultimo passo é porque a função $f(t) = t\,\mathrm{sen}(t^2)$ é impar, portanto sua integral no intervalo $[-1, 1]$ é zero. Voltando a (1) e substituindo, vemos que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$