Universidade Federal Fluminense
Prof. Andrés

Gabarito - Segunda Verificação Escolar de Cálculo IIIA
GMA00111 - Turma C1

1. Calcule a integral de superfície

$$\iint_S x^2 z^2 \, dS$$

onde S é a parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que está entre os planos $z = 1$ e $z = 3$.

A superficie S pode ser parametrizada por

$\overline{r}(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta), r)\,, \quad (r,\theta) \in D = \{(r,\theta) : 1 \le r \le 3, \quad 0 \le \theta \le 2\pi\}.$

Por definição,

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D f(\overline{r}(r,\theta)) \left| \frac{\partial \overline{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial \theta} \right| dr\, d\theta.$$

Calculando as derivadas parciais,

$$\frac{\partial \overline{r}}{\partial r}(r,\theta) = (\cos(\theta), \mathrm{sen}(\theta), 1), \quad \frac{\partial \overline{r}}{\partial \theta}(r,\theta) = (-r\,\mathrm{sen}(\theta), r\cos(\theta), 0)\,.$$

Logo,

$$\frac{\partial \overline{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial \theta} = (-r\cos(\theta), -r\,\mathrm{sen}(\theta), r)$$

e portanto

$$\left| \frac{\partial \overline{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial \theta} \right| = \sqrt{(-r\cos(\theta))^2 + (-r\,\mathrm{sen}(\theta))^2 + r^2} = r\sqrt{2}.$$

Sendo $f(x,y,z) = x^2 z^2$, temos

$$f(\overline{r}(r,\theta)) = r^4 \cos^2(\theta).$$

Substituindo,

$$\iint_S x^2 z^2\, dS = \iint_D r^4 \cos^2(\theta)(r\sqrt{2})\, dr\, d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^3 r^5 \cos^2(\theta)\, dr\, d\theta = \sqrt{2}\pi \frac{364}{3}$$

2. Considere o campo vetorial

$$\overline{F}(x,y,z) = \left(\frac{y^2}{1+x^2},\, 2y\,\mathrm{arctg}(x),\, z \right), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^2.$$

a) $\overline{F}$ é conservativo? Por que? Caso seja, encontre uma função $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\overline{F} = \nabla f$.

Para ver se $\overline{F}$ é conservativo, calculamos seu rotacional

$$\mathrm{Rot}\, \overline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y^2}{1+x^2} & 2y\,\mathrm{arctg}(x) & z \end{vmatrix} = (0,0,0).$$

Como o rotacional é 0 em todos os pontos de $\mathbb{R}^3$, que é simplesmente conexo, isso implica que $\overline{F}$ é conservativo.

Queremos achar $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = \overline{F}$, ou seja,

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{1+x^2}, \quad (2) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\,\mathrm{arctg}(x), \quad (3) \quad \frac{\partial f}{\partial z} = z$$

Integrando em (1) com respeito a x, temos

$$(4) \quad f(x,y,z) = y^2 \operatorname{arctg}(x) + g(y,z)$$

para alguma função $g(y,z)$. Derivando (4) com respeito a y, temos

$$(5) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y \operatorname{arctg}(x) + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z).$$

Igualando (5) com (2) obtemos

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = 0$$

e portanto integrando com respeito a y,

$$g(y,z) = h(z)$$

para alguma função $h(z)$. Voltando a (4) e substituindo,

$$(5) \quad f(x,y,z) = y^2 \operatorname{arctg}(x) + h(z).$$

Derivando (5) com respeito a z e igualando com (3),

$$(6) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial h}{\partial z}(z) = z$$

e integrando com respeito a z obtemos

$$h(z) = \frac{z^2}{2} + C$$

para alguma constante C. Voltando a (5), concluimos

$$(7) \quad f(x,y,z) = y^2 \operatorname{arctg}(x) + \frac{z^2}{2} + C$$

onde C é qualquer constante. É fácil verificar que essa função satisfaz $\nabla f = \overline{F}$.

b) Calcule

$$\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r}$$

onde C é a curva parametrizada por

$$\overline{r}(t) = \left(t^3 + e^{t^2},\, t^2 e^t \cos(\pi t),\, t\right), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Como sabemos que $\overline{F}$ é conservativo, e

$$f(x,y,z) = y^2 \operatorname{arctg}(x) + \frac{z^2}{2}$$

é um potencial, o teorema fundamental para integrais de linha diz que

$$\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r} = f(\overline{r}(1)) - f(\overline{r}(0)) = f(1+e, -e, 1) - f(1,0,0) = e^2 \operatorname{arctg}(1+e) + \frac{1}{2}.$$

3) a) Se S é uma superfície parametrizada por $\overline{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$, e $\overline{F}(x,y,z)$ é um campo vetorial definido em uma vizinhança de S, escreva a fórmula para calcular o fluxo de $\overline{F}$ através de S,

$$\iint_S \overline{F} \cdot d\overline{S}.$$

(usando da definição dessa integral).

$$\iint_S \overline{F} \cdot d\overline{S} = \iint_D \overline{F}(\overline{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right) du\, dv.$$

b) Calcule o fluxo do inciso anterior no caso em que $\overline{F}(x,y,z) = (y, x, z^2)$ e

$$\overline{r}(u,v) = (u\cos(v),\, u\,\mathrm{sen}(v),\, v)\,, \quad D = \{(u,v) : 0 \le u \le 1,\, 0 \le v \le \pi\}.$$

Temos

$$\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} = (\cos(v), \mathrm{sen}(v), 0), \quad \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} = (-u\,\mathrm{sen}(v), u\cos(v), 1).$$

Portanto

$$\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} = \left(\mathrm{sen}(v), -\cos(v), u\cos^2(v) + u\,\mathrm{sen}^2(v)\right) = (\mathrm{sen}(v), -\cos(v), u)$$

Por outro lado

$$\overline{F}(\overline{r}(u,v)) = \overline{F}(u\cos(v), u\,\mathrm{sen}(v), v) = \left(u\,\mathrm{sen}(v), u\cos(v), v^2\right).$$

Calculando

$$\overline{F}(\overline{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right) = \left(u\,\mathrm{sen}(v), u\cos(v), v^2\right) \cdot (\mathrm{sen}(v), -\cos(v), u) =$$

$$= u(\mathrm{sen}^2(v) - \cos^2(v)) + uv^2 = -u\cos(2v) + uv^2$$

Portanto

$$\iint_D \overline{F}(\overline{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right) du\, dv = \int_0^1 \int_0^\pi -u\cos(2v) + uv^2\, dv\, du =$$

$$= \int_0^1 u\, du \int_0^\pi \cos(2v)\, dv + \int_0^1 u\, du \int_0^\pi v^2 dv = \frac{\pi^3}{6}$$

4. Calcule

$$\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r},$$

onde

$$\overline{F}(x,y,z) = (x^2 z + e^z, xy^2 + 1, z^2 + xe^z)$$

e C é a curva de interseção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

Vamos usar o teorema de Stokes. A curva é a fronteira da superfície S que é a parte do plano $x + y + z = 1$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 9$ (ou seja, uma elipse). Vendo S como o gráfico da função $f(x,y) = 1 - x - y$ sobre o disco $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 9\}$, temos que $\overline{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$, $(x,y) \in D$ nos dá uma parametrização de S, com orientação para cima. Como a orientação de C é positiva com respeito à orientação de S, o teorema de Stokes diz que

$$\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r} = \iint_S \mathrm{Rot}(\overline{F}) \cdot d\overline{S}$$

Calculamos

$$\mathrm{Rot}(\overline{F}) = \nabla \times \overline{F} = (0, x^2, y^2).$$

Se escrevemos $\mathrm{Rot}(\overline{F}) = (P, Q, R)$, temos que $P = 0$, $Q = x^2$, $R = y^2$, e lembramos que

$$\int_S \mathrm{Rot}(\overline{F})\cdot d\overline{S} = \iint_D -P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\,dx\,dy = \iint_D 0\cdot(-1) - x^2\cdot(-1) + y^2\,dx\,dy =$$

$$= \iint_D x^2 + y^2 dx\,dy = \int_0^3 \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r\,d\theta\,dr = \frac{81\pi}{2}.$$

5. Calcule o fluxo do campo

$$\overline{F}(x,y,z) = \left(z^2x + e^y, \frac{1}{3}y^3 + \mathrm{tg}(z^2), x^2z + y^2\right)$$

através da semi-esfera (orientada p/cima)

$$S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}.$$

Usaremos o Teorema da Divergência. Notamos que $\overline{F}$ é C^1 em uma vizinhaną da bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, portanto podemos usa-lo. A superfície S não é fechada, mas se consideramos a superfície

$$S_1 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\}$$

orientada para cima, temos que $S \cup (-S_1)$ é a fronteira do sólido

$$E = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\},$$

orientada para fora. Portanto o teorema da divergência nos diz que

$$(*) \iiint_E \mathrm{div}\, F\,dx\,dy\,dz = \iint_{S\cup(-S_1)} \overline{F}\cdot d\overline{S} = \iint_S \overline{F}\cdot d\overline{S} - \iint_{S_1} \overline{F}\cdot d\overline{S}.$$

Calculando

$$\iiint_E \mathrm{div}\, F\,dx\,dy\,dz = \iiint_E \frac{\partial}{\partial x}(z^2x + e^y) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{3}y^3 + \mathrm{tg}(z^2)) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2z + y^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_E z^2 + y^2 + x^2\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \rho^2(\rho^2\sin(\phi))\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \frac{2\pi}{5}$$

Por outro lado, parametrizando S_1 como o gráfico da função $f(x,y) = 0$ sobre o disco $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, e escrevendo as coordenadas de $\overline{F}$ como (P, Q, R), temos

$$\iint_{S_1} \overline{F}\cdot d\overline{S} = \iint_D -P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\,dx\,dy = \iint_D R\,dx\,dy = \iint_D x^2\cdot 0 + y^2\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2\sin^2(\theta)\cdot r\,d\theta\,dr = \frac{\pi}{4}.$$

Voltando a $(*)$ e substituindo, obtemos

$$\frac{2\pi}{5} = \iint_S \overline{F}\cdot d\overline{S} - \frac{\pi}{4}$$

de onde

$$\iint_S \overline{F}\cdot d\overline{S} = \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{4} = \frac{13}{20}\pi.$$