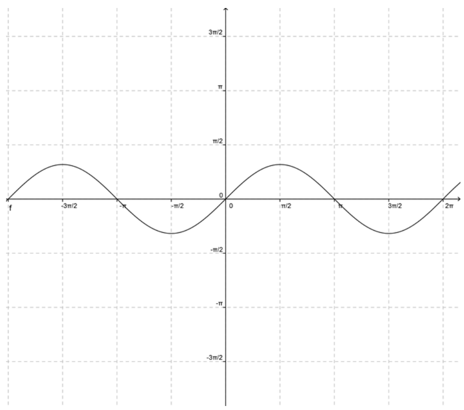
Universidade Federal Fluminense 16/09/2008

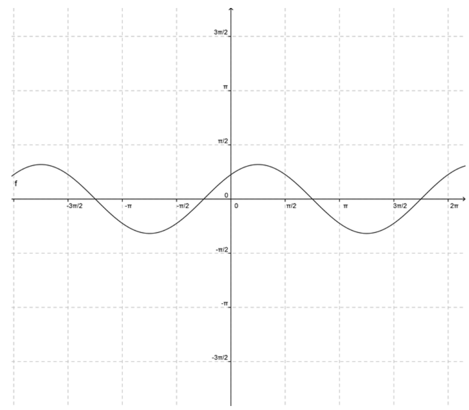
Gabarito - VE1 - Cálculo Diferencial e Integral Aplicado I - Turma J1

1. Considere a função $f(x) = \left|3\,\mathrm{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 1\right|$.

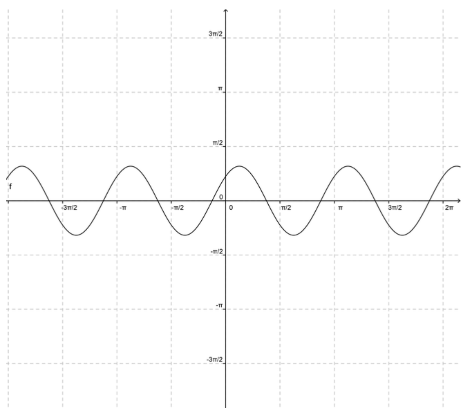
a) (2pt) Faça um esboço do gráfico de f a partir do gráfico da função *seno* usando alongamentos, compressões, translações e reflexões. Em cada etapa, especifique qual transformação você empregou e faça um esboço do gráfico da função intermediária correspondente.



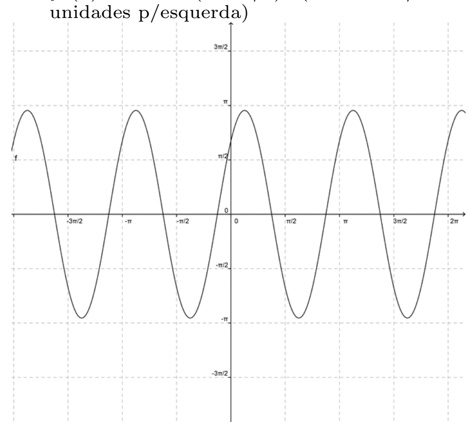
$y = \mathrm{sen}(x)$



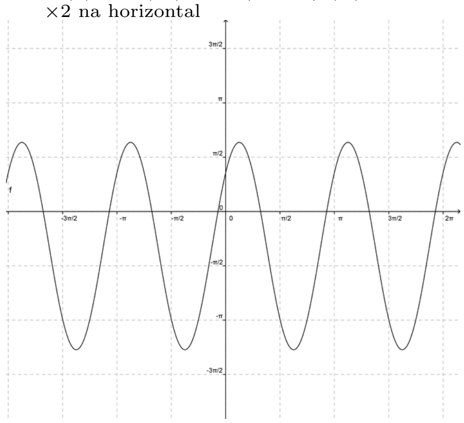
$f_1(x) = \mathrm{sen}(\mathrm{x} + \pi/4)$ (desloca $\pi/4$ unidades p/esquerda)



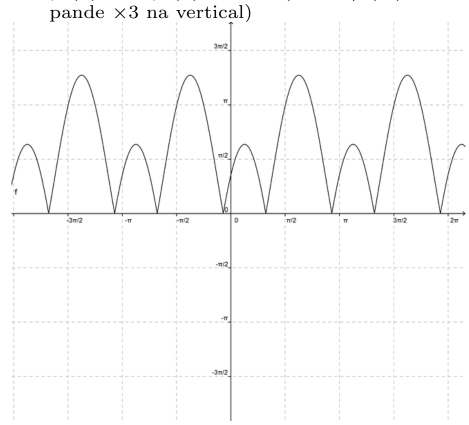
$f_2(x) = f_1(2x) = \mathrm{sen}(2\mathrm{x} + \pi/4)$ (contrai $\times 2$ na horizontal



$f_3(x) = 3\,f_2(x) = 3\,\mathrm{sen}(2\mathrm{x} + \pi/4)$ (expande $\times 3$ na vertical)



$f_4(x) = f_3(x) - 1 = 3\,\mathrm{sen}(2\mathrm{x} + \pi/4) - 1$ (desloca 1 unidade p/baixo)



$f(x) = |f_4(x)| = |3\,\mathrm{sen}(\mathrm{x} + \pi/4) - 1|$ (rebate a parte no semiplano inferior p/cima)

b) (1pt) Especifique o dominio e a imagem de f. A função f é par? É ímpar? Justifique.

O dominio de f é $\mathbb{R}$. A sua imagem é o intervalo [0,4]. A função f não é par, pois seu gráfico não é simétrico com respeito ao eixo y, e não é ímpar, pois seu gráfico não é simétrico com respeito á orígem (de fato $f(0) \neq 0$).

2. (2pt) Considere a função definida por

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}.$$

Qual é o dominio de f? Determine suas assíntotas horizontais e verticais. Justifique sua resposta.

O dominio de f consiste dos valores x tais que $x^2 - 9 > 0$. Como

$$x^2 - 9 > 0 \iff x^2 > 9 \iff |x| > 3 \iff x < -3 \text{ ou } x > 3$$

temos que o dominio de f é $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

Para achar as assíntotas verticais, observamos que os únicos candidatos são $x = 3$ e $x = -3$. Calculando os limites laterais,

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} = \infty,$$

pois o numerador tende a 3 e o denominador tende a 0 sendo sempre positivo. Similarmente,

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} = -\infty,$$

pois o numerador tende a -3, um número negativo, e o denominador tende a 0 sendo sempre positivo. Portanto, $x = 3$ e $x = -3$ são as duas assíntotas verticais.

Para achar as assíntotas horizontais, calculamos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0}} = 1$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x}{-x}}{\frac{\sqrt{x^2-9}}{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - 0}} = -1.$$

(lembrando que $-x$ é positivo se x é negativo e $(-x)^2 = x^2$).

Portanto, $y = 1$ e $y = -1$ são as assintotas horizontais.

3. (1pt) Encontre um intervalo de comprimento no máximo 1 onde a equação

$$x^5 - x^2 + 3x + 1 = 0$$

tem uma solução. Justifique sua resposta.

O Teorema do Valor Intermediario garante que se acharmos a e b tais que $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ então existe um c entre a e b tal que $f(c) = 0$ (sempre que f for continua no intervalo $[a, b]$). Tomando $f(x) = x^5 - x^2 + 3x + 1$ e experimentando com alguns valores, achamos que $f(0) = 1$ e $f(-1) = -4$, portanto existe uma solução para a equação dada no intervalo $[-1, 0]$, que tem comprimento 1.

4. (2pt) Calcule os limites

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)(1-\cos(x))\operatorname{sen}(\frac{\pi}{x})}{x} \qquad\qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}.$$

Justifique sua resposta.

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)(1-\cos(x))\operatorname{sen}(\frac{\pi}{x})}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}(1-\cos(x))\operatorname{sen}(\frac{\pi}{x}))\right].$$

Sabemos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1.$$

Por outro lado, como $\cos(0)=1$,

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos(x))=0.$$

Alem disso, $-1\le \operatorname{sen}(\frac{\pi}{x})\le 1$, e por esses dois fatos o Teorema do Anulamento (ou corolario do Teorema do Confronto) nos diz que

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos(x))\cdot\operatorname{sen}(\frac{\pi}{x})=0.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)(1-\cos(x))\operatorname{sen}(\frac{\pi}{x})}{x} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left[(1-\cos(x))\cdot\operatorname{sen}(\frac{\pi}{x})\right] = 1\cdot 0 = 0.$$

b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1} &= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}\cdot\frac{\sqrt{6-x}+2}{\sqrt{3-x}+1}\cdot\frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{6-x}+2}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(6-x-2^2)(\sqrt{3-x}+1)}{(3-x-1^2)(\sqrt{6-x}+2)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{2-x}\cdot\frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{6-x}+2} = \frac{\sqrt{3-2}+1}{\sqrt{6-2}+2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

5.a) (1pt) Calcule a derivada da função

$$f(x)=x^2+3x+5$$

no ponto $x=0$ **usando a definição** de derivada. Qual é a equação da reta tangente no ponto de coordenadas $(0,5)$ ao gráfico dessa função?

A inclinação da reta tangente no ponto $(a,f(a))$ é dada por

$$m=f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Como quereremos achar a reta tangente no ponto $(0,f(0))=(0,5)$, temos que $a=0$, portanto

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h^2+3h+5)-5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+3h}{h}=\lim_{h\to 0}h+3=3.$$

Como a reta tem que passar pelo ponto $(0,5)$, a sua equação é:

$$y = m(x-0)+5 \quad \text{ou seja} \quad y = 3x+5.$$

b) (1pt) Encontre $f'(x)$ e $g'(x)$ onde

$$f(x) = x^3 \mathrm{sen}^2(x) \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\cos(x)}$$

Pela regra do produto (duas vezes):

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{d}{dx}x^3\right)\mathrm{sen}^2(x) + x^3\left(\frac{d}{dx}textrmsen^2(x)\right)\\
&= 3x^2\mathrm{sen}^2(x) + x^3\left(\frac{d}{dx}\left(\mathrm{sen}(x)\cdot\mathrm{sen}(x)\right)\right)\\
&= 3x^2\mathrm{sen}^2(x) + x^3\left(\left(\frac{d}{dx}\mathrm{sen}(x)\right)\mathrm{sen}(x) + \mathrm{sen}(x)\frac{d}{dx}\mathrm{sen}(x)\right)\\
&= 3x^2\mathrm{sen}^2(x) + x^3\left(\cos(x)\,\mathrm{sen}(x) + \mathrm{sen}(x)\cos(x)\right)\\
&= 3x^2\mathrm{sen}^2(x) + 2x^3\cos(x)\,\mathrm{sen}(x).
\end{aligned}$$

Pela regra do quociente:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{\left(\frac{d}{dx}\sqrt{x}\right)(1+\cos(x)) - \sqrt{x}\left(\frac{d}{dx}(1+\cos(x))\right)}{(1+\cos(x))^2}\\
&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\cos(x)) - \sqrt{x}(-\sin(x))}{(1+\cos(x))^2}\\
&= \frac{1+\cos(x)+2\sin(x)}{2\sqrt{x}(1+\cos(x))^2}
\end{aligned}$$