

Gabarito da Segunda Verificação Escolar
Cálculo Diferencial e Integral Aplicado I
GMA04043 - Turma J1

1. a) Calcule a derivada f' e a segunda derivada f'' da função

$$f(x) = \ln(\cos^2(x))$$

Usando a regra da cadeia duas vezes (ou observando que $\ln(\cos^2(x)) = 2\ln(\cos(x))$ e usando a regra da cadeia uma so vez) obtemos:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \ln(\cos^2(x)) = \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot 2\cos(x) \cdot (-\sin(x)) = -2\operatorname{tg}(x)$$

Portanto

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(-2\operatorname{tg}(x)) = -2\sec^2(x).$$

- b) Calcule a derivada de $g(x) = \arctan(e^x)$.

Usando a regra da cadeia,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (e^x)^2} \cdot e^x = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}.$$

2. Seja $y = f(x)$ uma função definida implicitamente pela equação

$$\sin(x) + xy + y^5 = 1.$$

Calcule $f'(0)$ sabendo que $f(0) = 1$.

Derivando a equação implícita com respeito a x , obtemos

$$\cos(x) + (y + xy') + 5y^4y' = 0.$$

Isolando y' ,

$$y' = -\frac{\cos(x) + y}{5y^4 + x}.$$

Quando $(x, y) = (0, f(0)) = (0, 1)$, temos

$$y' = -\frac{\cos 0 + 1}{5 + 0} = -\frac{2}{5}.$$

Logo $f'(0) = -\frac{2}{5}$.

3. Encontre equação da reta $y = L(x)$ que melhor aproxima a função

$$y = f(x) = 5\sqrt{x^4 + 9}$$

no ponto $x = 2$, e use a linearização L para encontrar o valor aproximado de $f(2.01)$.

A linearização de f em $x = a$ é a função

$$L(x) = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Calculando pela regra da cadeia,

$$f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^4 + 9}} \cdot 4x^3 = \frac{10x^3}{\sqrt{x^4 + 9}}.$$

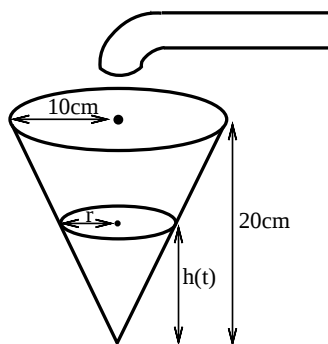
Logo usando $a = 2$, temos

$$L(x) = \frac{10 \cdot 2^3}{\sqrt{2^4 + 9}}(x - 2) + 5\sqrt{2^4 + 9} = 16(x - 2) + 25 = 16x - 7.$$

Como a $L(x) \simeq f(x)$ para x próximo de a , temos a aproximação

$$f(2.01) \simeq L(2.01) = 16 \cdot (2.01 - 2) + 25 = 25.16.$$

4. Bombeia-se água a uma taxa de $100 \text{ cm}^3/\text{s}$ em um recipiente com a forma de um cone invertido com base de raio 10cm e altura 20cm . Qual é a taxa de crescimento da altura do líquido no cone na hora que a altura é de 10cm ?



[obs: volume de um cone = $\frac{1}{3} \times \text{area da base} \times \text{altura}$]

Denotando por $h(t)$ a altura do líquido no cone e por $V(t)$ o volume do líquido no cone, temos como dado que

$$V'(t) = 100 \text{ cm}^3/\text{s}$$

constante, e queremos achar $h'(t)$ no instante t tal que $h(t) = 10\text{cm}$. Para isso precisamos relacionar $V(t)$ com $h(t)$. O líquido no cone tem a forma de um cone de altura $h(t)$ e base de raio

$$r = 10\text{cm} \times \frac{h(t)}{20\text{cm}} = \frac{h(t)}{2}$$

Portanto temos

$$V(t) = \frac{h(t) \cdot (\pi r^2)}{3} = \frac{h(t) \cdot \pi \left(\frac{h(t)}{2}\right)^2}{3} = \frac{\pi}{12} h(t)^3.$$

Derivando,

$$V'(t) = \frac{\pi}{12} \cdot 3h(t)^2 h'(t) = \frac{\pi}{4} \cdot h(t)^2 h'(t).$$

Isolando $h'(t)$ e substituindo ($V'(t) = 100\text{cm}^3/\text{s}$, $h(t) = 10\text{cm}$),

$$h'(t) = \frac{4V'(t)}{\pi h(t)^2} = \frac{400\text{cm}^3/\text{s}}{100\pi\text{cm}^2} = \frac{4}{\pi} \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

5. Considere a função

$$f(x) = x + \sinh(x) = x + \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

a) Mostre que $f'(x) = 1 + \cosh(x) = 1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Pela regra da cadeia

$$f'(x) = 1 + \frac{e^x - e^{-x} \cdot (-1)}{2} = 1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

b) Ache o valor de $(f^{-1})'(1)$, e justifique sua resposta.

Pela formula da derivada da inversa,

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{1 + \cosh(f^{-1}(1))}$$

Por um erro no enunciado, não podemos simplificar mais essa expressão. Portanto quem chegou até aqui terá a resposta correta. Note porém que se soubessemos o valor de $u = f^{-1}(1)$, poderíamos escrever

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{1 + \cosh(u)} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \sinh^2(u)}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + (f(u) - u)^2}}.$$

e como $f(u) = f(f^{-1}(1)) = 1$, teríamos

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + (1 - u)^2}}.$$