Universidade Federal Fluminense

Prof. Andrés

Gabarito - Terceira Verificação Escolar
Cálculo Diferencial e Integral Aplicado I
GMA04043 - Turma J1

1. Considere a função

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

a) Determine o dominio de f, e encontre (caso existam) as interseções do gráfico de f com os eixos coordenados.

O dominio de f é o conjunto dos $x \in \mathbb{R}$ com $x \neq 0$, ou seja $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Interseção com o eixo y: não existe, pois 0 não está no dominio de f.

Interseção com o eixo x: $f(x) = 0 \iff e^{-x}/x = 0 \iff e^{-x} = 0$, e como e^{-x} nunca é zero, também não há interseção com o eixo x.

b) Determine, caso existam, as assíntotas horizontais do gráfico de f e a direção de convergência (por esquerda ou por direita);

Temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0^+$$

pois o denominador tende a ∞ e o numerador tende a 0^+. Tambem,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}}{1} = -\lim_{x\to\infty} e^{x} = -\infty$$

onde usamos l'Hopital. Logo $y = 0$ é assíntota horizontal, e o gráfico de f se aproxima a ela por cima quando $x \to \infty$.

c) Determine, caso existam, as assíntotas verticais do gráfico de f, e ache os limites laterais em cada uma delas;

O único candidato a assíntota vertical é $x = 0$. Calculando

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}}{x} = \infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-x}}{x} = -\infty.$$

Portanto $x = 0$ é assíntota vertical.

d) Determine os intervalos onde f é crescente e onde f é decrescente;

Derivando,

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}\cdot x - e^{-x}\cdot 1}{x^2} = -\frac{e^{-x}(x+1)}{x^2}.$$

Como o denominador é sempre positivo e e^{-x} também, temos que $f'(x) < 0$ se $x+1 < 0$ (ou seja se $x < -1$) e $f'(x) < 0$ se $x+1 > 0$ (ou seja se $x > -1$). Portanto f é crescente em $(-\infty, -1)$, decrescente em $(-1, 0)$ e decrescente em $(0, \infty)$.

e) Determine os pontos críticos de f e classifique-os em pontos de máximo local, mínimo local ou sela;

Como f é diferenciável em todos os pontos do seu dominio, os pontos críticos são aqueles onde $f'(x) = 0$. Usando o item anterior, vemos que

$$f'(x) = 0 \iff e^{-x}(x+1) = 0 \iff x = -1$$

ou seja que o único ponto crítico é $x = -1$, e como $f'(x)$ muda de positivo para negativo em $x = -1$, temos que -1 é ponto de mínimo local.

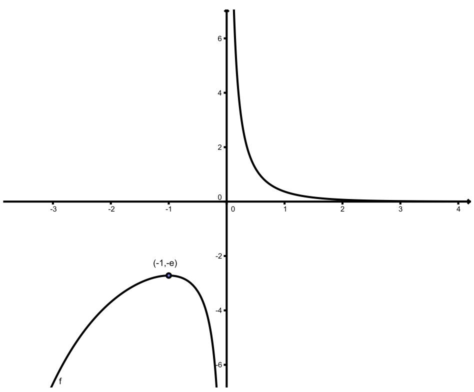
f) Determine os intervalos onde f é côncava p/cima e côncava p/baixo, e os pontos de inflexão (caso existam);

Calculamos

$$f''(x) = -\frac{(-e^{-x} \cdot (x+1) + e^{-x} \cdot 1) \cdot x^2 - e^{-x}(x+1) \cdot 2x}{x^4}$$
$$= \frac{e^{-x}(x^2 + 2x + 2)}{x^3}.$$

Estudando o sinal, vemos que $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$ sempre, portanto o numerador acima é sempre positivo, e o denominador é > 0 se $x > 0$ e < 0 se $x < 0$. Portanto $f'(x) > 0$ se $x > 0$ e $f'(x) < 0$ se $x < 0$. Logo f é cóncava para cima em $(-\infty, 0)$ e para baixo em $(0, \infty)$.

g) Use as informações obtidas nos incisos anteriores para fazer um esboço do gráfico de f que mostre suas principais características.



2. Resolva o problema de valor inicial (ache a função f que satisfaz as seguintes equações):

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = x^2\sqrt{x^3+1} \\ f(0) = 1 \end{array}\right\}$$

Primeiro achamos

$$\int x^2\sqrt{x^3+1}dx = \left[\text{substituição } \begin{array}{c} u = x^3+1 \\ du = 3x^2dx \end{array}\right] = \int \sqrt{u}\frac{1}{3}du =$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3/2} + C = \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Portanto $f(x) = \frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}} + C$ para algum C. Para achar C, usamos

$$1 = f(0) = f(x) = \frac{2}{9}(0^3+1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9} + C$$

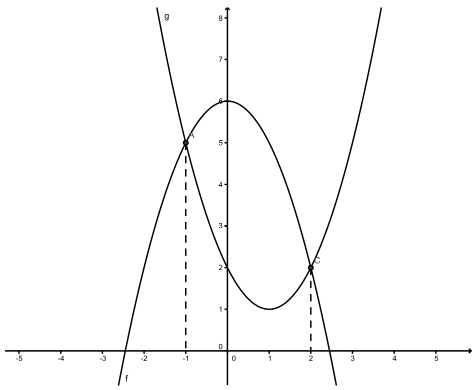
de onde

$$C = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

Portanto

$$f(x) = \frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{9}.$$

3. Calcule a área da região limitada pelos gráficos de $y = x^2 - 2x + 2$ e $y = -x^2 + 6$.



Primeiro achamos a interseção dos gráficos:

$x^2-2x+2 = -x^2+6 \iff 2x^2-2x-4 = 0 \iff x^2-x-2 = 0 \iff x = -1$ ou $x = 2$

Observando que $-x^2+6 > x^2-2x+2$ para $x \in [-1,2]$, calculamos a area

$$A = \int_{-1}^{2}(-x^2+6)-(x^2-2x+2)\,dx = \int_{-1}^{2} -2x^2+2x+4\,dx = -2\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}+4x\Big|_{x=-1}^{x=2} =$$

$$= \left(-2\cdot\frac{2^3}{3}+2\cdot\frac{2^2}{2}+4\cdot 2\right)-\left(-2\cdot\frac{(-1)^3}{3}+2\cdot\frac{(-1)^2}{2}+4\cdot(-1)\right) = \frac{20}{3}-(-\frac{7}{3}) = 9$$

4. Calcule as seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \left[\text{substituição } \begin{matrix} u = e^x+1 \\ du = e^x dx \end{matrix}\right] = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln(e^x+1) + C$

b) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)dx$

Primeiro calculamos a integral indefinida, através da substituição $u = x^2$, $du = 2xdx$:

$$\int x\sin(x^2)dx = \int \sin(u)\frac{1}{2}du = -\frac{\cos(u)}{2} + C = -\frac{\cos(x^2)}{2} + C.$$

Portanto

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)dx = -\frac{\cos(x^2)}{2}\Big|_{x=0}^{x=\sqrt{\pi}} = -\frac{\cos\left((\sqrt{\pi})^2\right)}{2} - \left(-\frac{\cos(0^2)}{2}\right) =$$

$$= -\frac{\cos(\pi)}{2} + \frac{\cos(0)}{2} = -(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = 1.$$

c) $\int_{-2}^{2} \frac{\sin(x)\sqrt{x^2+e^{x^2}}}{x^6+\cos(x)+2}\,dx = 0$ pois o integrando é uma função ímpar, e o intervalo de integração é centrado no 0.

5. Calcule os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3+x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{3x^2+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{6x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{6} = \infty$

(onde usamos l'Hopital 3 vezes pois o limite era uma forma indeterminada do tipo ∞/∞ em cada caso).

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{3x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(x^{3x})}$

Vamos calcular primeiro

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x^{3x}) = \lim_{x\to 0^+} 3x\ln(x) = 3\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

onde usamos l'Hopital pois tinha uma forma indeterminada do tipo ∞/∞. Voltando ao limite original,

$$\lim_{x\to 0^+} x^{3x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(x^{3x})} = e^{\left(\lim_{x\to 0^+} \ln(x^{3x})\right)} = e^0 = 1.$$