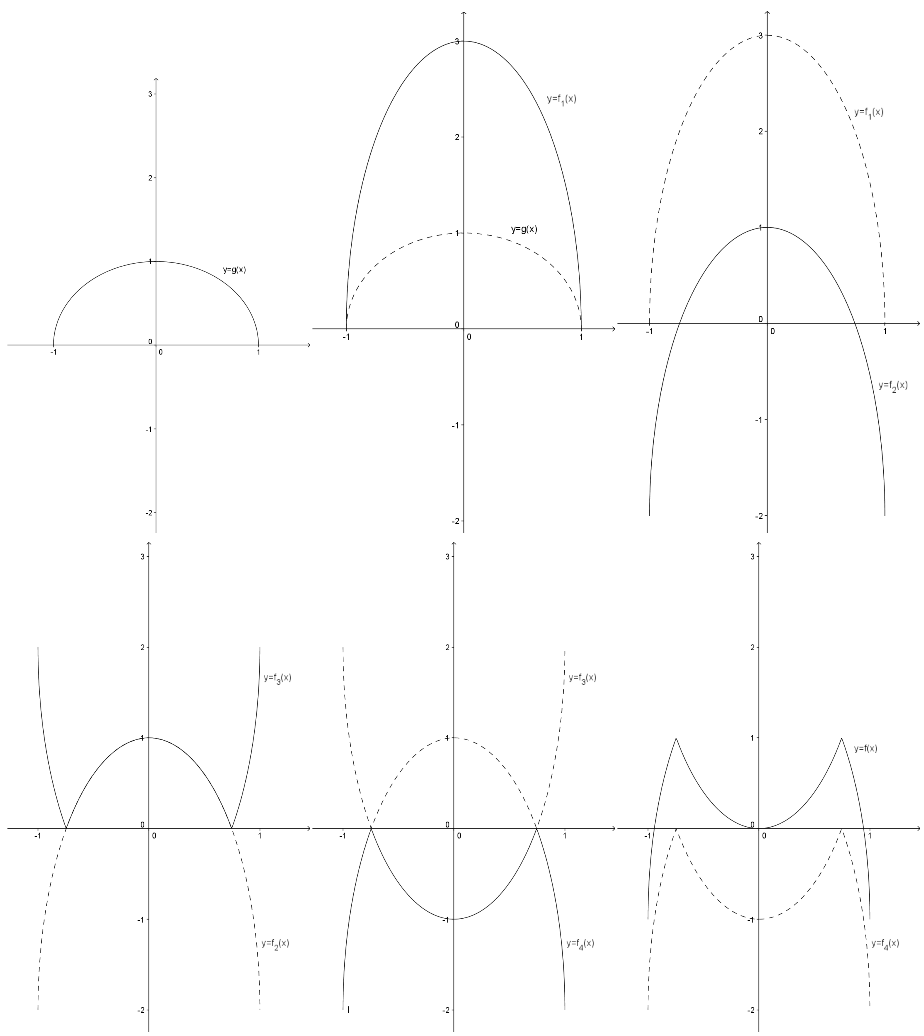
Universidade Federal Fluminense 16/09/2008

Primeira Verificação Escolar de Cálculo IA
GMA00108 - Turma E1

1. Considere a função

$$f(x) = 1 - \left|3\sqrt{1-x^2} - 2\right|.$$

a) (2.5pt) Faça um esboço do gráfico de f a partir do gráfico da função $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ usando alongamentos, compressões, translações, reflexões, etc. Em cada etapa, especifique qual transformação você empregou e faça um esboço do gráfico da função intermediária correspondente.



O gráfico de $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ é um semicírculo de raio 1 centrado na origem.

Etapa 1. $f_1(x) = 3\,g(x)$. O gráfico de f_1 é obtido esticando verticalmente por um fator de 3 o gráfico da função g.

Etapa 2. $f_2(x) = f_1(x) - 2 = 3\,g(x) - 2$. O gráfico de f_2 é obtido deslocando para baixo 2 unidades o gráfico de f_1.

Etapa 3. $f_3(x) = |f_2(x)| = |3\,g(x) - 2|$. O gráfico de f_3 é obtido rebatendo para cima a parte do gráfico de f_2 abaixo do eixo x.

Etapa 4. $f_4(x) = -f_3(x) = -\,|3\,g(x) - 2|$. O gráfico de f_4 é obtido refletindo o gráfico de f_3 com respeito ao eixo x.

Etapa 5. $f(x) = f_4(x) + 1 = 1 - |3\,g(x) - 2|$. O gráfico de f é obtido deslocando o gráfico de f_4 para cima 1 unidade.

b) (1pt) Especifique o dominio e a imagem de f. A função f é par? É ímpar? Justifique.

O dominio de f é [-1,1]. A sua imagem é o intervalo [-1,1]. A função é par, pois é simétrica com respeito ao eixo y.

2. Considere a função definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 - 1}}{2x - 3}.$$

a) (1pt) Determine o dominio de f. Justifique sua resposta.

O dominio de f consiste dos valores de x tais que $2x - 3 \neq 0$ e $3x^2 - 1 \geq 0$. Notamos que

$$2x - 3 \neq 0 \iff x \neq \frac{3}{2},$$

$$3x^2 - 1 \geq 0 \iff x^2 \geq \frac{1}{3} \iff x \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ou } x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Portanto o dominio de f é

$$\mathrm{Dom}(f) = \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right).$$

b) (2pt) Determine as assíntotas horizontais e verticais de f. Justifique.

Nos pontos do seu dominio, f é continua, portanto os candidatos a assíntota vertical devem estar fora do dominio. O único candidato neste caso é $x = 3/2$. Calculando o limite por direita:

$$\lim_{x \to 3/2^+} \frac{\sqrt{3x^2 - 1}}{2x - 3} = +\infty$$

pois o limite do numerador é um número positivo e o do denominador é 0^+. Daí concluimos que $x = 3/2$ é a única assíntota vertical de f. Também poderiamos ter calculado o limite por esquerda:

$$\lim_{x\to 3/2^-} \frac{\sqrt{3x^2-1}}{2x-3} = -\infty.$$

Para determinar as assintotas horizontais, calculamos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^2-1}}{2x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{3x^2-1}{x^2}}}{\frac{2x-3}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3-\frac{1}{x^2}}}{2-\frac{3}{x}} = \frac{\sqrt{3-0}}{2-0} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

portanto $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ é assintota horizontal.

Similarmente (notando que dividimos e multiplicamos por $-x$ em vez de x para que seja positivo e possa entrar na raiz),

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2-1}}{2x-3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{\frac{3x^2-1}{(-x)^2}}}{\frac{2x-3}{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3-\frac{1}{x^2}}}{-2+\frac{3}{x}} = \frac{\sqrt{3-0}}{-2+0} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ também é assintota horizontal.

3. (1pt) Encontre um intervalo de comprimento no máximo $0,5$ onde a equação

$$2x^4 - x^3 - 3x - 5 = 0$$

tem uma solução. Justifique sua resposta.

Como $f(x) = 2x^4 - x^3 - 3x - 5$ é uma função continua, basta encontrar dois numeros a e b tais que $|a-b| \leq 0,5$ e $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, pois então o Teorema do Valor Intermediário nos garante que existe algum x entre a e b tal que $f(x) = 0$. Por inspecção vemos que $f(-1) = 1$ e $f(0) = -5$. Calculando $f(-1/2) = -13/4$, vemos então que $a = -1$ e $b = -1/2$ satisfazem essa condição: $f(-1) > 0 > f(-1/2)$.

Logo o intervalo $(-1, -0,5)$ satisfaz a condição buscada (existem outras respostas possíveis).

4. (1.5pt) Calcule os limites

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(5x)}{\operatorname{tg}(x)} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2-5x+4}}{x+2}.$$

Justifique sua resposta.

$$\text{a)} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(5x)}{\operatorname{tg}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}5x}{\cos 5x}}{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{5\cdot\frac{\operatorname{sen}5x}{5x}}{\frac{\operatorname{sen}x}{x}} \cdot \frac{\cos x}{\cos(5x)} = \frac{5\cdot 1}{1}\cdot\frac{1}{1} = 5.$$

$$\text{b)} \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2-5x+4}}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{\frac{2x^2-5x+4}{(-x)^2}}}{\frac{x+2}{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{\frac{2x^2-5x+4}{x^2}}}{\frac{x+2}{-x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}}{-1-\frac{2}{x}} = \frac{\sqrt{2-0+0}}{-1-0} = -\sqrt{2}.$$

5. (1.5pt) Use *a definição de derivada* para calcular $f'(1)$ onde f é a função

$$f(x) = \frac{3}{x} + x.$$

Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1,4)$.

$$f'(1) = \lim_{h\to0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\frac{3}{1+h}+1+h-\left(\frac{3}{1}+1\right)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\frac{3}{1+h}-3+h}{h}$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{\frac{3-3(1+h)}{1+h}+h}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\frac{-3h}{1+h}+h}{h} = \lim_{h\to0} \frac{-3}{1+h}+1 = -3+1 = -2.$$

A equação da reta tangente no ponto $(a, f(a))$ é dada por

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

No nosso caso, $a = 1$, $f'(a) = -2$, $f(a) = 4$, logo a reta tangente tem equação

$$y = -2(x-1)+4, \quad \text{ou seja} \quad y = -2x+6.$$