Universidade Federal Fluminense

Gabarito da Segunda Verificação Escolar de Cálculo IA
GMA00108 - Turma F1

1.[3pt] Calcule a derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = \ln(\cosh(\sqrt{x}) + 2))$;

$$f'(x) = \frac{\sinh(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}(\cosh(\sqrt{x}) + 2)}.$$

b) $g(x) = e^x \operatorname{arctg}(x)$;

$$g'(x) = e^x \left(\operatorname{arctg}(x) + \frac{1}{1+x^2}\right).$$

c) $h(x) = x^{x^3}$.

$$\frac{d}{dx}\ln(f(x)) = \frac{d}{dx}\ln(x^{x^3}) = \frac{d}{dx}(x^3\ln(x)) = 3x^2\ln(x) + x^2 = x^2(3\ln(x)+1)$$

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln(f(x)) = x^{x^3}\cdot x^2(3\ln(x)+1) = x^{x^3+2}(3\ln(x)+1).$$

2.[2pt] Seja $y = f(x)$ uma função definida implicitamente pela equação

$$3x + \cos(x) + xy\ln(y) - y^2 = 0.$$

Calcule $f'(0)$ sabendo que $f(0) = 1$.

Derivando com respeito a x:

$$3 - \sin(x) + (y\ln(y) + xy'\ln(y) + xy') - 2yy' = 0$$

Isolando y':

$$y' = \frac{-3 + \sin(x) - y\ln(y)}{x\ln(y) + x - 2y}$$

em $(x, y) = (0, 1)$:

$$y' = \frac{-3 + \sin(0) - 1\ln(1)}{0\cdot\ln(1) + 0 - 2\cdot 1} = \frac{3}{2}$$

3.[2pt] **a)** Mostre que a função

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x}$$

é invertível no intervalo $D = (0, \infty)$.

A derivada de f é

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x) - e^x}{(1+x)^2} = \frac{xe^x}{(1+x)^2} > 0 \quad \text{se } x > 0.$$

Pelo teorema da função inversa, como a derivada de f nunca é 0 no intervalo $(0,\infty)$ concluimos que f tem inversa diferenciável nesse intervalo.

b) Calcule $(f^{-1})'(e/2)$.

Notar que $f(1) = e/2$. Portanto $f^{-1}(e/2) = 1$. Pela fórmula da derivada da inversa

$$(f^{-1})'(e/2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(e/2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1 \cdot e^1/(1+1)^2} = \frac{1}{e/4} = \frac{4}{e}$$

4.[2pt] Um ponto com coordenadas (x, y) (em metros) se desloca ao longo da curva

$$x^2 + 2xy + y^3 = 1 \quad (*)$$

A taxa de variação da coordenada x é constante igual a 1. Encontre a taxa de variação da coordenada y no instante em que $x = 0$.

Sabemos que $dx/dt = 1$ constante, e queremos achar dy/dt na hora em que $x(t) = 0$. Para isso derivamos com respeito a t ambos lados d e (*)obtendo:

$$2xx' + 2x'y + 2xy' + 3y^2y' = 0$$

agora isolamos y':

$$y' = \frac{-2x'(x+y)}{2x+3y^2}.$$

Quando $x = 0$, substituindo na equação (*) e resolvendo, temos $y = 1$. Como $x' = dx/dt = 1$, substituindo os dados na equação acima, temos:

$$y' = \frac{-2 \cdot 1(0+1)}{2 \cdot 0 + 3 \cdot 1^2} = -\frac{2}{3}$$

5. [1pt] Demonstre o seguinte teorema: se uma função diferenciável f satisfaz $f'(x) = 0$ para todo x no intervalo (a, b) então f é constante nesse intervalo.

Se usar algum teorema na demostração, enunice com cuidado o teorema antes de utiliza-lo.

O Teorema do Valor Medio nos diz que se f é diferenciável no intervalo (A, B) e continua em $[A, B]$, existe algum $c \in (A, B)$ tal que

$$f(B) - f(A) = f'(c)(B - A).$$

No nosso caso, para mostrar que f é constante, escolhamos A fixo no intervalo (a, b), e seja $B = x$. O teorema acima nos diz que existe c entre A e x tal que $f(x) - f(A) = f'(c)(x - A)$. Mas como $f'(c) = 0$ para qualquer escolha de c (por hipótese), segue disso que $f(x) - f(A) = 0$. Como a escolha de x era arbitrária, concluimos que $f(x) = f(A)$ para qualquer x. Ou seja, f é constante.