Universidade Federal Fluminense

Prof. Andrés

Primeira Verificação Escolar de Cálculo IIB
GMA00110 - Turma C1

Gabarito

1.[1,5pt] Calcule o limite se existir (ou se não, demonstre que não existe):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \sin\left(x^3\right)\sqrt{1+\cos\left(\frac{1}{(x^2+y^2)}\right)}}{x^2+y^2}$$

Solução. Podemos verificar que o limite ao longo das retas $x = 0$ ou $y = 0$ é zero. Isso nos diz que, se o limite acima existir, deverá ser zero. Porém precissamos mostrar que o limite existe. Para isso usaremos o teorema do anulamento. Notando que $0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2$, segue-se que

$$0 \leq \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1.$$

Também, como $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$ para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$, temos que

$$0 \leq \sqrt{1+\cos\left(\frac{1}{(x^2+y^2)}\right)} \leq \sqrt{2}.$$

Definindo

$$g(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2} \cdot \sqrt{1+\cos\left(\frac{1}{(x^2+y^2)}\right)},$$

segue das observações anteriores que g é limitada, pois

$$0 \leq g(x,y) \leq \sqrt{2}.$$

O limite que desejamos calcular é o da função $f(x,y) = \sin(x^3)g(x,y)$ quando $(x,y) \to (0,0)$. Como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin(x^3) = 0$$

temos que f é o produto de uma função que tende a zero vezes uma que é limitada, e o teorema do anulamento nos garante então que o limite de $f(x,y)$ quando $(x,y) \to (0,0)$ existe e é zero.

2.[3pt] Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Em quais pontos f é contínua?

Solução. Lembremos que f é contínua no ponto (x_0,y_0) se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

A função é contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ diferentes de $(0,0)$ pelo fato de ser um quociente de funções polinomiais onde o denominador não se anula. Resta agora ver se a função é contínua no $(0,0)$. Calculando o limite quando $(x,y) \to (0,0)$ ao longo das retas $x = 0$ ou $y = 0$ vemos que o limite é 0. Porém, calculando ao longo da reta $y = x$ temos:

$$\lim_{x \to 0} f(x, x) = \frac{2x^2}{x^2 + x^2} = 1$$

Como os limites ao longo de caminhos diferentes não coincidem, segue-se que o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ não existe e portanto f não é contínua no $(0, 0)$.

b) Em quais pontos existem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$?

Solução. De novo, as derivadas parciais existem em todos os pontos $(x, y) \neq (0, 0)$ pelo fato de f ser o quociente de polinômios onde o denominador não se anula. Falta ver o que acontece no $(0, 0)$. Lembremos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

se o limite existir. Portanto, lembrando que $f(0, 0) = 0$ por definição e observando que $f(h, 0) = 0$ qualquer que seja h,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Segue-se que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ (em particular, existe).

De maneira similar vemos que $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Portanto as derivadas parciais de f existem em todo $\mathbb{R}^2$.

c) Em quais pontos f é diferenciável?

Solução. Novamente, podemos dizer que f é diferenciável em todos os $(x, y) \neq (0, 0)$ pelo fato de f ser o quociente de polinômios onde o denominador não se anula. Porém, no $(0, 0)$ podemos garantir que f *não é diferenciável*, pois se fosse ela sería tambem contínua no ponto, mas já vimos em a) que f não é continua no $(0, 0)$.

3.[2pt] Suponha que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Suponha também que $z = f(x, y)$, onde $x = e^u + v^2$ e $y = \cos(u)$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial u}$ em $(u, v) = (0, 1)$ sabendo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = 2.$$

Solução. Lembremos a regra da cadeia

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Calculando

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(e^u + v^2) = e^u, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(\cos(u)) = -\sin(u).$$

substituindo na regra da cadeia:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} e^u - \frac{\partial z}{\partial y}\sin(u).$$

Em $(u, v) = (0, 1)$, tem-se $(x, y) = (e^0 + 1^2, \cos(0)) = (2, 1)$ e portanto $\frac{\partial z}{\partial x} = 3$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = 2$. Logo

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 3e^0 - 2\sin(0) = 3.$$

4.[2pt] Determine a equação do plano tangente à superfície

$$x^3 + xy^2 + 3zxy + z^2 = 2$$

no ponto $(1, 1, 0)$.

Solução. Definamos $f(x, y, z) = x^3 + xy^2 + 3zxy + z^2$. Então f é uma função diferenciável em todo $\mathbb{R}^3$, e a superfície em questão é a superfície de nível 2 de f, ou seja, os pontos (x, y, z) tais que $f(x, y, z) = 2$.

Lembrando que o gradiente de uma função em um ponto dado é ortogonal à superficie de nível que passa por esse ponto, tem-se que o plano tangente à superficie de nivel $f(x_0, y_0, z_0)$ de f pelo ponto (x_0, y_0, z_0) tem equação

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

Calculando

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (3x^2 + y^2 + 3zy, 2xy + 3zx, 3xy + 2z)$$

No nosso caso, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0)$ portanto

$$\nabla f(1, 1, 0) = (4, 2, 3)$$

e portanto o plano buscado tem equação

$$(4, 2, 3) \cdot (x - 1, y - 1, z) = 0$$

ou seja

$$4(x - 1) + 2(y - 1) + 3z = 0$$

que simplificado resulta

$$4x + 2y + 3z = 6.$$

5.[1,5pt] Se você se encontra no ponto acima de $(x, y) = (3, 2)$ na montanha de equação

$$z = 20 - x^2 - 2y^2 = f(x, y),$$

a) Em qual direção você deve andar para descer o mais rápido possível?

Solução. Na direção oposta á do vetor gradiente de f em $(3, 2)$, ou seja na direção do vetor $-\nabla f(3, 2)$, pois o vetor gradiente aponta na direção de maior crescimento da função. Calculando, em $(x, y) = (3, 2)$,

$$\nabla f(3, 2) = (-2x, -4y) = (-6, -8).$$

Portanto a direção que devemos andar é a do vetor $(6, 8)$.

b) Qual é a derivada direcional de f na dereção correspondente ao item a)?

Solução. Lembrando que se (u, v) é um vetor unitário, a derivada direcional de f na direção (u, v) é

$$D_{(u,v)} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot (u, v).$$

No caso do item a) tem-se $(x, y) = (3, 2)$ e a direçao (u, v) deveria ser um vetor unitário na direção $-\nabla f(3, 2)$, ou seja (normalizando):

$$(u, v) = -\frac{\nabla f(3,2)}{\|\nabla f(3,2)\|} = \frac{(6,8)}{\sqrt{6^2+8^2}} = \left(\frac{6}{10}, \frac{8}{10}\right).$$

Portanto,

$$D_{(u,v)}f(3,2) = \nabla f(3,2) \cdot \left(-\frac{\nabla f(3,2)}{\|\nabla f(3,2\|}\right) = -\frac{\nabla f(3,2) \cdot \nabla f(3,2)}{\|\nabla f(3,2)\|}$$

Lembremos que o produto escalar de um vetor consigo mesmo é o quadrado da norma dele, logo

$$D_{(u,v)}f(3,2) = -\frac{\|\nabla f(3,2)\|^2}{\|\nabla f(3,2)\|} = -\|\nabla f(3,2)\| = -\|(6,8)\| = -10$$

c) Em qual direção você deve andar para manter a sua altitude constante?

Solução. Na direção ortogonal ao vetor gradiente (em qualquer sentido), pois essa é a direção tangente à curva de nível de f que passa pelo ponto dado, e a curva de nível corresponde aos pontos que estão à mesma altitude. Neste caso, como o vetor gradiente é $(-6, -8)$, um vetor ortogonal é $(-8, 6)$ e portanto podemos andar na direção desse vetor ou na direção oposta.