Universidade Federal Fluminense
Prof. Andrés

Gabarito - Segunda Verificação Escolar de Cálculo IIB
GMA00110 - Turma C1

1.[3pt] Encontre os valores máximo e mínimo de

$$x + 2y - 2z$$

quando (x, y, z) varia na esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Determine também em quais pontos da esfera o máximo e o mínimo são atingidos.

Se $f(x, y, z) = x + 2y - 2z$ e $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, queremos encontrar os máximos e mínimos de f sujeita a restrição $g(x, y, z) = 1$.

Por multiplicadores de Lagrange, sabemos que os pontos de máximo e mínimo devem satisfazer as equações

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) &= 1 \end{aligned}$$

que se traduzem em

$$(1, 2, -2) = (2\lambda x, 2\lambda y, 2\lambda z) \tag{1}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \tag{2}$$

Da primeira equação obtemos $y = 2x$ e $z = -2x$, e substituindo na segunda equação temos

$$x^2 + (2x)^2 + (-2x)^2 = 1 \implies 9x^2 = 1 \implies x = \pm\frac{1}{3}.$$

Portanto os (x, y, z) que resolvem as equações acima são

$$P_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right), \text{ e } P_1 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Calculando os valores de f,

$$f(P_0) = 3, \quad f(P_1) = -3.$$

Portanto o valor máximo de f é 3, atingido no ponto P_0 e o valor mínimo é -3, atingido no ponto P_1.

2.[3pt] Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$(u, v) = f(x, y) = \left(x^3 + 2xy + y^2, x^2 + y\right)$$

a) Pode-se garantir que f tem inversa diferenciável em uma vizinhança do ponto $(x_0, y_0) = (1, 1)$? Por que?

O teorema da função inversa nos garantirá que isso é poissível se a matriz $Df(x_0, y_0)$ for invertível (ou seja, se tiver determinante diferente de 0). Calculando,

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 + 2y & 2x + 2y \\ 2x & 1 \end{bmatrix}$$

no ponto $(x, y) = (1, 1)$,

$$\det Df(1,1) = \det \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 5 \times 1 - 4 \times 2 = -3 \neq 0,$$

portanto a resposta é sim.

b) Se a resposta do ítem anterior for afirmativa, encontre a função afim que melhor aproxima a inversa de f numa vizinhança do ponto $(u_0, v_0) = f(1, 1)$.

A aproximação afim de f^{-1} no ponto (u_0, v_0) é

$$A(u, v) = f^{-1}(u_0, v_0) + df^{-1}(u_0, v_0)(u - u_0, v - v_0)$$

Como $(u_0, v_0) = f(1, 1)$, temos

$$Df^{-1}(u_0, v_0) = Df(f^{-1}(u_0, v_0))^{-1} = Df(f^{-1}(f(1, 1)))^{-1} = Df(1, 1)^{-1}.$$

Portanto

$$Df^{-1}(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 4/3 \\ 2/3 & -5/3 \end{bmatrix}.$$

Notando que $(u_0, v_0) = f(1, 1) = (4, 2)$, temos

$$Df^{-1}(u_0, v_0) \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 4/3 \\ 2/3 & -5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u - 4 \\ v - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-u + 4v - 4)/3 \\ (2u - 5v + 2)/3 \end{bmatrix}$$

Portanto, lembrando que $f^{-1}(u_0, v_0) = f^{-1}(f(1, 1)) = (1, 1)$, temos

$$A(u, v) = (1, 1) + ((-u + 4v - 4)/3, (2u - 5v + 2)/3).$$

Logo,

$$A(u, v) = ((-u + 4v - 1)/3, (2u - 5v + 5)/3).$$

3.[3pt] Considere o sistema

$$\begin{cases} x + y^2 - 2yv - uv - 2z = 0 \\ \qquad x^2 - yz - 2u - v = 0 \end{cases}$$

a) Explique por que o sistema acimadefine implícitamente uma função diferenciável $(u, v) = f(x, y, z)$ tal que $f(1, -1, 1) = (2, -2)$ numa vizinhança do ponto $(1, -1, 1)$.

Seja

$$g(x, y, z, u, v) = (x + y^2 - 2yv - uv - 2z, x^2 - yz - 2u - v).$$

Observemos que $g(1, -1, 1, 2, -2) = 0$. O teorema da função implícita nos diz que se $D_{(u,v)}g(1, -1, 1, 2, -2)$ for uma matriz invertível, então existe uma função diferenciável $(u, v) = f(x, y, z)$ tal que $f(1, -1, 1) = (2, -2)$ e

$$g(x, y, z, f(x, y, z)) = 0$$

para todo (x, y, z) numa vizinhança do ponto $(1, -1, 1)$. Portanto resta verificar que $D_{(u,v)}g(1, -1, 1, 2, -2)$ é invertível. Calculando,

$$D_{(u,v)}g = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v & -2y - u \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

No ponto $(1,-1,1,2,-2)$,

$$D_{(u,v)}g(1,-1,1,2,-2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

e seu determinante é $-2 \neq 0$, portanto a matriz é invertivel. Logo a resposta é sim.

b) Encontre a matriz derivada $Df(1,-1,1)$. O teorema da função implícita ainda nos diz que

$$Df(x_0,y_0,z_0) = -D_{(u,v)}g(x_0,y_0,z_0,f(x_0,y_0,z_0))^{-1}D_{(x_0,y_0,z_0)}g(x_0,y_0,z_0,f(x_0,y_0,z_0)).$$

No nosso caso, $(x_0,y_0,v_0) = (1,-1,1)$ e $f(1,-1,1) = (2,-2)$, portanto

$$Df(1,-1,1) = -D_{(u,v)}g(1,-1,1,2,-2)^{-1}D_{(x,y,z)}g(1,-1,1,2,-2). \tag{3}$$

calculando a inversa

$$D_{(u,v)}g(1,-1,1,2,-2)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

e tambem calculamos

$$D_{(x,y,z)}g = \begin{bmatrix} 1 & 2y-2v & -2 \\ 2x & -z & -y \end{bmatrix},$$

portanto

$$D_{(x,y,z)}g(1,-1,1,2,-2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Substituindo em (3),

$$Df(1,-1,1) = -\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4.[1pt] Suponha que $G(x,y) = (x^2+y, xy)$ e $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma função diferenciável tal que

$$DF(2,1) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabendo que $H(x,y) = F(G(x,y))$, calcule $DH(1,1)$.

Pela regra da cadeia,

$$DH(1,1) = DF(G(1,1))DG(1,1) = DF(2,1)DG(1,1).$$

Calculando

$$DG(1,1) = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ y & x \end{bmatrix}_{(x,y)=(1,1)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$DH(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$