Universidade Federal Fluminense
Professor: Andrés

Gabarito - Primeira Verificação Escolar

Cálculo Aplicado II - Turma D1 — Cálculo Diferencial e Integral Aplicado II - Turma D2

1.[4pt] a) Integrando por partes, com

$$u = \ln(x) \qquad du = \frac{1}{x}\,dx$$
$$dv = x^2\,dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$$

obtemos

$$\int_1^2 x^2 \ln(x) = uv\Big|_{x=1}^{2} - \int_1^2 v\,du = \frac{x^3\ln(x)}{3}\Big|_{x=1}^{2} - \int_1^2 \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{x^3}{9}\Big|_{x=1}^{2} = \boxed{\frac{8}{3}\ln(2) - \frac{7}{9}.}$$

b) Fazendo a substituição trigonométrica

$$x = 3\,\mathrm{sen}(\theta), \qquad dx = 3\cos(\theta)\,d\theta, \qquad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

obtemos

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\,dx = \int \frac{3\cos\theta}{3\,\mathrm{sen}\,\theta}(3\cos\theta)\,d\theta = 3\int \frac{\cos^2\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}\,d\theta$$
$$= 3\int \frac{1-\mathrm{sen}^2\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}\,d\theta = 3\left(\int \csc\theta\,d\theta - \int \mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\right)$$
$$= 3\left(-\ln|\csc\theta + \mathrm{ctg}\,\theta| + \cos\theta\right) + C$$

Observando que $\mathrm{sen}\,\theta = x/3$ e usando identidades trigonométricas (desenhar um triángulo rectángulo de hipotenusa 3 e um cateto de comprimento x), obtemos

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}, \quad \csc\theta = \frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{3}{x}, \quad \mathrm{ctg}\,\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

e portanto substituindo e simplificando obtemos

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\,dx = \boxed{-3\ln\left|\frac{3+\sqrt{9-x^2}}{x}\right| + \sqrt{9-x^2} + C}$$

c) Fazemos a substituição racionalizante

$$u = \sqrt{x}, \qquad \big(x = u^2, \quad dx = 2u\,du\big)$$

obtendo

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})(1+x)}\,dx = \int \frac{u}{(1+u)(1+u^2)}(2u)\,du = \int \frac{2u^2}{(1+u)(1+u^2)}\,du$$

Notar que o integrando é uma função racional, e o grau do numerador é menor que o grau do denominador. Além disso o denominador está fatorado em termos irredutéiveis (um quadrático e um linear). Portanto para escrever o integrando como soma de fracões contínuas devemos resolver

$$\frac{A}{1+u}+\frac{Bu+C}{1+u^2}=\frac{2u^2}{(1+u)(1+u^2)}$$

Fazendo fator comum e multiplicando por $(1+u)(1+u^2)$ ambos lados, temos

$$A(1+u^2)+(Bu+C)(1+u)=2u^2.$$

Expandindo e agrupando termos, obtemos

$$(A+B)u^2+(B+C)u+(A+C)=2u^2.$$

Portanto, igualando os coeficientes dos termos u^0, u^1 e u^2 obtemos as equações

$$A+B=2, \qquad B+C=0, \qquad A+C=0$$

que tem solução

$$A=1, \quad B=-1, \quad C=-1.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})(1+x)}\,dx &= \int \frac{1}{1+u}+\frac{u-1}{1+u^2}\,du \\
&= \int \frac{1}{1+u}\,du+\int \frac{u}{1+u^2}\,du-\int \frac{1}{1+u^2}\,du \\
&= \ln|1+u|+\ln\left|1+u^2\right|-\operatorname{arctg} u+C \\
&= \boxed{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+|x|\right)-\operatorname{arctg}(\sqrt{x})+C}
\end{aligned}$$

2.[2pt] a) Integrando por partes, com

$$\begin{aligned}
u &= \sec x & du &= \sec x\ \operatorname{tg} x\,dx \\
dv &= \sec^2 x\,dx & v &= \operatorname{tg} x
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\int \sec^3(x) = uv-\int v\,du &= \sec x\ \operatorname{tg} x-\int \sec x\ \operatorname{tg}^2 x\,dx \\
&= \sec x\ \operatorname{tg} x-\int \sec x\left(\sec^2 x-1\right)\,dx \\
&= \sec x\ \operatorname{tg} x-\int \sec^3 x\,dx+\int \sec x\,dx \\
&= \sec x\ \operatorname{tg} x-\int \sec^3 x\,dx+\ln|\sec x+\operatorname{tg} x|+C
\end{aligned}$$

Somando $\int \sec^3 x\,dx$ a ambos lados e dividindo por 2, obtemos

$$\boxed{\int \sec^3(x)=\frac{1}{2}\sec x\ \operatorname{tg} x+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\operatorname{tg} x|+C'}$$

onde C' é uma constante.

b) De novo integramos por partes, com

$$u = \sec^3 x \qquad du = 3\sec^3 x\ \operatorname{tg} x\, dx$$
$$dv = \sec^2 x\, dx \qquad v = \operatorname{tg} x$$

obtendo

$$\begin{aligned}
\int \sec^3(x) &= uv - \int v\, du = \sec^3 x\ \operatorname{tg} x - 3\int \sec^3 x\ \operatorname{tg}^2 x\, dx \\
&= \sec^3 x\ \operatorname{tg} x - 3\int \sec^3 x\ \left(\sec^2 x - 1\right)\, dx \\
&= \sec^3 x\ \operatorname{tg} x - 3\int \sec^5 x\, dx + 3\int \sec^3 x\, dx
\end{aligned}$$

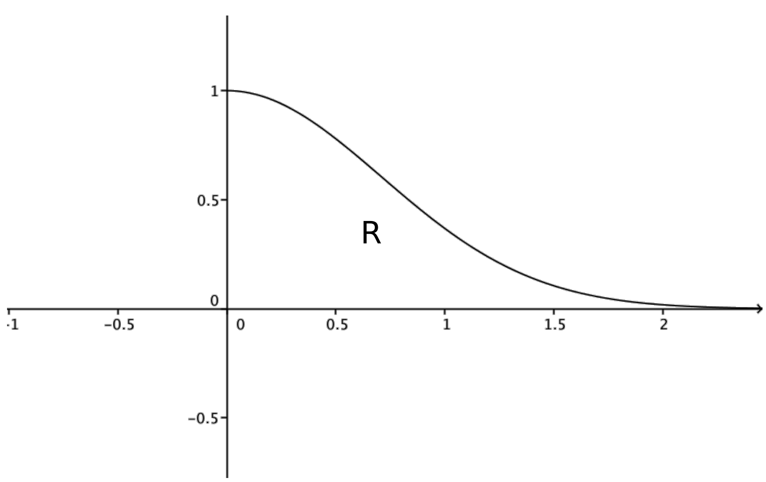
Somando $\int \sec^5 x\, dx$ a ambos lados e dividindo por 4 obtemos

$$\begin{aligned}
\int \sec^5(x) &= \frac{1}{4}\sec^3 x\ \operatorname{tg} x + \frac{3}{4}\int \sec^3 x\, dx \\
&= \frac{1}{4}\sec^3 x\ \operatorname{tg} x + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\sec x\ \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C'\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{4}\sec^3 x\ \operatorname{tg} x + \frac{3}{8}\sec x\ \operatorname{tg} x + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C''}
\end{aligned}$$

onde C'' é uma constante. Notar que no ultimo passo usamos o cálculo feito na parte a).

3.[2pt] Considere a região R debaixo do gráfico de $y = e^{-x^2}$, acima do eixo x, com $x \in [0, \infty)$.

a) Esboce a região R.



b) A área de R é finita ou infinita? A área, se finita, é definida por

$$\text{área}(R) = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\, dx.$$

Dividimos a integral desse jeito pois notamos que se $x \geq 1$ tem-se $x^2 \geq x$ e portanto $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$, e por outro lado

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty} -e^{-x}\Big|_{x=1}^t = \lim_{t\to\infty} e^1 - e^{-t} = e.$$

Portanto, pelo critério da comparação que a integral imprópria $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ é convergente, e

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx \leq \int_1^\infty e^{-x} = e.$$

Daí concluimos que a área de R é finita e

$$\text{área}(R) = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + e.$$

c) Calcule o volume do sólido obtido ao rotar R ao redor do eixo $\mathbf{y}$.

Como estamos rotando ao redor do eixo y, é provável que o método das cascas cilíndricas seja mais conveniente. A casca cilíndrica de raio x, terá altura e^{-x^2}, e portanto sua área será $2\pi\,x\,e^{-x^2}$. Os raios variam entre 0 e ∞, portanto

$$\begin{aligned}\text{vol}(S) &= \int_0^\infty 2\pi x e^{-x^2}\,dt = \lim_{t\to\infty} 2\pi\int_0^t e^{-x^2} dx = \lim_{t\to\infty} 2\pi(-\frac{1}{2}e^{-x^2})\Big|_{x=0}^t \\ &= \pi\lim_{t\to\infty} 1 - e^{-t^2} = \boxed{\pi}.\end{aligned}$$

(usamos a substituição $u = -x^2$ para calcular $\int xe^{-x^2}\,dx$).

4.[2pt] Determine se as seguintes integrais impróprias são convergentes ou divergentes.

a) O integrando é disontinuo em $x = 1$. Para a integral ser convergente, o seguinte limite tem que existir:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{t\to 1^-}\int_1^{1-t} -\frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \lim_{t\to 1^-} -2\sqrt{u}\Big|_{u=1}^{1-t} = \boxed{2}$$

onde fizemos a substituição $u = 1-x$, $du = -dx$. Como acabamos de calcular o limite, a integral é convergente.

b) Vamos usar o critério da comparação. Notar que

$$\left|\cos(x^{3/2})\right| \leq 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{1+e^x} \leq e^{-x}.$$

Portanto

$$0 \leq \left|\frac{\cos(x^{3/2})}{1+e^x}\right| \leq e^{-x}.$$

E já sabemos (como no item b do exercício anterior) que $\int_1^\infty e^x\,dx$ é convergente. Portanto pelo critério da comparação, $\int_1^\infty \left|\frac{\cos(x^{3/2})}{1+e^x}\right| dx$ é convergente. Mas como vimos na aula, se a integral de $|f|$ for convergente então a integral de f também é convergente. Portanto

$$\boxed{\int_1^{\infty} \frac{\cos(x^{3/2})}{1+e^x}\,dx \text{ é convergente.}}$$