Universidade Federal Fluminense
Professor: Andrés 25/10/2010

Segunda Verificação Escolar - Gabarito

Cálculo Aplicado II - Turma D1 — Cálculo Diferencial e Integral Aplicado II - Turma D2

1. Calcule o limite, se existir, ou explique por que não existe.

$$\text{a)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Calculando o limite ao longo de $x = 0$ obtemos

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{0+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}$$

e esse limite não existe. Portanto o limite original também não existe.

$$\text{b)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Observando que

$$\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y|\,,$$

temos que

$$\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1.$$

portanto, aplicando o Teorema do Anulamento,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot y = 0$$

por ser o produto de uma função limitada com uma que tende a 0.

$$\text{c)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \operatorname{sen}(xy) + x^2 + 1}{1+x^2}$$

Observando que

$$1 + x^2 \geq x^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{1+x^2} \leq 1$$

e por outro lado que $\operatorname{sen}(xy) \to \operatorname{sen}(0) = 0$ quando $(x,y) \to (0,0)$, podemos aplicar o Teorema do anulamento:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \operatorname{sen}(xy) + x^2 + 1}{1+x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \operatorname{sen}(xy) + 1 = 1.$$

2. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) f é continua em $(0,0)$? Por que?

Para ser continua em $(0,0)$, o limite de $f(x,y)$ quando $(x,y) \to (0,0)$ deveria ser $f(0,0)$, que é 0. Mas calculando esse limite ao longo de $x = y = t$ obtemos

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2+t^2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Isso mostra que (caso exista)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq 0 = f(0,0),$$

portanto f não é continua em $(0,0)$.

b) f tem derivadas parciais em $(0,0)$? Se tiver, calcule; se não, justifique.
Para calcular as derivadas parciais usamos a definição:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x \cdot 0}{\Delta x^2 + 0^2} = 0.$$

similarmente vemos que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe e vale 0.

c) f é diferenciável em $(0,0)$? Por que?
Não, f não é diferenciável em $(0,0)$ pois funções diferenciáveis são contínuas, e já vimos que f não é contínua em $(0,0)$.

3. Considere a função

$$f(x,y,z) = x^2 + z\ln(y) + z^3y^2$$

a) Qual é o dominio de f? Resposta: $\{(x,y,z) : y > 0\}$.
b) Calcule $\nabla f(x,y,z)$.

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(2x, \frac{z}{y} + 2yz^3, \ln(y) + 3z^2y^2\right).$$

c) Qual é a direção de maior crescimento de f no ponto $(1,1,-1)$? É a direção do gradiente

$$\nabla(f)(1,1,-1) = (2,-3,3).$$

d) Calcule a taxa de variação de f na direção do item anterior, no ponto $(1,1,-1)$. Primeiro normalizamos o vetor $(2,-3,3)$: $\|(2,-3,3)\| = \sqrt{2^2+(-3)^2+3^2} = \sqrt{22}$, portanto o vetor unitario na direção desejada é

$$\overline{u} = \frac{(2,-3,3)}{\sqrt{22}}$$

e a taxa de variação é

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{u}}(1,1,-1) = \nabla f(1,1,-1) \cdot \overline{u} = (2,-3,3) \cdot \frac{(2,-3,3)}{\sqrt{22}} = \frac{22}{\sqrt{22}} = \sqrt{22}.$$

e) Verifique que o ponto $(1,1,-1)$ está na superficie S_0 de nivel 0 de f.

$$f(1,1,-1) = 1^2 + (-1)\ln(1) + (-1)^3 \cdot 1^2 = 1 + 0 - 1 = 0.$$

f) Ache a equação do plano tangente a S_0 nesse ponto.

Como S_0 é superficie de nível de f, o plano tangente é ortogonal ao gradiente de f no ponto. Portanto a equação é

$$\nabla f(1,1,-1) \cdot (x-1, y-1, z-(-1)) = 0,$$

ou seja

$$(2,-3,3) \cdot (x-1, y-1, z+1) = 0$$

que simplificada fica

$$2x - 3y + 3z = -4.$$

g) Ache a equação da reta normal a S_0 no ponto $(1,1,-1)$.

A reta normal tem a direção do gradiente $\nabla f(1,1,-1) = (2,-3,3)$. portanto é a reta com essa direção que passa pelo ponto $(1,1,-1)$, que em equações paramétricas fica

$$x = 2t+1, \quad y = -3t+1, \quad z = 3t-1 \qquad (t \in \mathbb{R})$$

h) A equação $f(x,y,z) = 0$ define implicitamente z como função C^1 de (x,y) perto de $(1,1,-1)$? (com $z(1,1) = -1$). Justifique, e se a resposta for afirmativa, calcule $\partial z/\partial x$ em $(x,y) = (1,1)$.

Sim, pois valem as hipóteses do Teorema da Função Implícita: f é C^1, o ponto $(1,1,-1)$ satisfaz a equação, e $\partial f/\partial z(1,1,-1) = 3 \neq 0$. Para calcular a derivada buscada, podemos usar derivação implícita: tomando $\partial/\partial x$ a ambos lados na equação

$$x^2 + z\ln(y) + z^3y^2 = 0$$

obtemos

$$2x + \frac{\partial z}{\partial x}\ln(y) + 3z^2y^2\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

e isolando $\partial z/\partial x$ obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{\ln(y) + 3z^2y^2}.$$

Em $(x,y) = (1,1)$ temos $z = -1$, e substituindo acima temos

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = \frac{-2}{\ln(1) + 3 \cdot 1^2 \cdot 1^2} = -\frac{2}{3}.$$

i) Suponha que $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$ e $z = k(u,v)$. onde g, h, k são funções diferenciáveis tais que

$$g(0,0) = 1, \quad h(0,0) = 1, \quad k(0,0) = -1$$
$$\frac{\partial x}{\partial u}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial u}(0,0) = -1, \quad \frac{\partial z}{\partial u}(0,0) = 0$$
$$\frac{\partial x}{\partial v}(0,0) = 2, \quad \frac{\partial y}{\partial v}(0,0) = 0,, \quad \frac{\partial z}{\partial v}(0,0) = 3.$$

Se $w = f(x,y,z) = f(g(u,v), h(u,v), k(u,v))$, calcule $\frac{\partial w}{\partial u}(0,0)$.

Observando que em $(u, v) = (0, 0)$ tem-se $(x, y, z) = (1, 1, -1)$, e aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{\partial w}{\partial u}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,-1)\cdot\frac{\partial x}{\partial u}(0,0)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,-1)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}(0,0)+\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,-1)\cdot\frac{\partial z}{\partial u}(0,0).$$

Substituindo pelos valores dados (e os já calculados) obtemos

$$\frac{\partial w}{\partial u}(0,0) = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = 5.$$