Universidade Federal Fluminense 1/12/2010

Professor: Andrés

Terceira Verificação Escolar

Cálculo Aplicado II - Turma D1 — Cálculo Diferencial e Integral Aplicado II - Turma D2

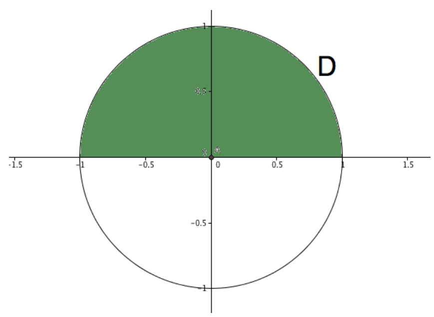
Observações: Proibido usar calculadora ou celulares
Respostas sem justificação serão desconsideradas
Devolver esta folha junto com a prova

1. Considere a integral dupla

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}\,dydx.$$

a) Faça um esboço da região de integração;

$$D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}.$$



b) Calcule o valor da integral; Em coordenadas polares, a região de integração é

$$D_{r\theta} = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq r \leq 1\}$$

portanto fazendo a mudança de coordenadas para polares obtemos:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}\,dydx = \int_{0}^{1}\int_{0}^{\pi} e^{r^2} r d\theta\, dr = \pi\int_{0}^{1} e^{r^2} r dr = \pi\frac{e^{r^2}}{2}\Bigg|_{r=0}^{r=1} = \pi(e-1).$$

c) Escreva a fórmula da mesma integral com a ordem de integração invertida (não precisa calcular de novo o valor da integral). Como região de tipo II, vemos que

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1,\ -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\},$$

portanto

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}\,dydx = \int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2+y^2}.$$

2. Considere a integral tripla

$$I = \iiint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$$

onde

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

a) Escreva a fórmula dessa integral em coordenadas esféricas:

$$S_{\rho\theta\phi} = \{(\rho, \theta, \phi) : 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi/2, 0 \le \phi \le \pi/2\}$$

portanto

$$I = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\rho^2}\rho^2 \operatorname{sen}(\phi) d\phi\, d\theta\, d\rho = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \rho^3 \operatorname{sen}(\phi) d\phi\, d\theta\, d\rho.$$

b) Escreva a fórmula dessa integral em coordenadas cilíndricas:

$$S_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) : 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi/2, 0 \le z \le \sqrt{1 - r^2}\}$$

portanto

$$I = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{r^2 + z^2} \cdot r\, dz\, d\theta\, dr.$$

c) Calcule o valor da integral (do jeito que quiser).

Usando a formula achada em a),

$$I = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \rho^3 \operatorname{sen}(\phi) d\phi\, d\theta\, d\rho = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \rho^3\, d\theta\, d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{8}.$$

3. Calcule o volume da região de $\mathbb{R}^3$ definida dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acima do plano $z = 0$, sob a superficie $z = 2 - x^2 - y^2$. A região é

$$R = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 2 - x^2 - y^2\}.$$

Em coordenadas cilíndricas,

$$R_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) : r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le 2 - r^2\}$$

que é uma região de tipo 1, portanto

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(R) &= \iiint_R dx\, dy\, dz = \iiint_{R_{r\theta z}} r\, dz\, d\theta\, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2-r^2} r\, dz\, d\theta\, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(2 - r^2)\, d\theta\, dr = 2\pi \int_0^1 2r - r^3\, dr = \frac{3}{2}\pi.\end{aligned}$$

4. Considere o problema de otimização

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & x + 2y - 2z \\ \text{sujeito a} \quad & x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{aligned}$$

a) Por que podemos garantir que o problema possui solução?

Pelo Teorema de Weierstrass, pois a função $f(x, y, z) = x + 2y - 2z$ é contínua, e a região $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é a esfera unitaria que é fechada e limitada.

b) Resolva o problema (determine o valor máximo e o(s) ponto(s) de máximo global).

Pelo Teorema dos multiplicadores de Lagrange, os extremos devem satisfazer o sistema de equações

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z), \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Isto se traduz em

$$(1) \qquad 1 = \lambda(2x)$$
$$(2) \qquad 2 = \lambda(2y)$$
$$(3) \qquad -2 = \lambda(2z)$$
$$(4) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Claramente $\lambda \neq 0$. De (1) e (2) obtemos que $\boxed{y = 2x}$. De (1) e (3) obtemos $\boxed{z = -2x}$. Substituindo em (4), temos

$$x^2 + (2x)^2 + (-2x)^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = \pm\frac{1}{3}}.$$

Se $x = 1/3$ temos $y = 2/3$, $z = -2/3$, e se $x = -1/3$ temos $y = -2/3, z = 2/3$. Portanto os candidatos a extremos são

$$(1/3, 2/3, -2/3) \quad \text{e} \quad (-1/3, -2/3, 2/3).$$

Calculando os valores de f,

$$f(1/3, 2/3, -2/3) = 3, \quad \text{e} \quad f(-1/3, -2/3, 2/3) = -3.$$

Portanto o valor máximo é 3, atingido em $(1/3, 2/3, -2/3)$, e o valor mínimo é -3, atingido em $(-1/3, 2/3, -2/3)$.