

Primeira Verificação Escolar de Cálculo IIB - Turma B1

Atenção: não é permitido usar calculadora, sair da sala durante a prova por qualquer motivo, ou manipular o celular. Deixe na sua mesa somente somente material para escrever e sua identidade. Desligue e guarde o celular.

1. Considere a função

$$f(x, y) = 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}.$$

- Determine seu domínio e imagem.
- Descreva as curvas de nível de f .
- Encontre a equação da reta normal à curva de nível 1 de f no ponto de coordenadas $(\frac{6}{5}, \frac{12}{5})$.
- Encontre a equação da linearização de f no ponto $(\frac{6}{5}, \frac{12}{5})$.

2. Suponha que f é uma função diferenciável tal que

$$\nabla f(x, y) = (x^2 - y, x + 2y), \quad \text{e} \quad f(2, 2) = 3.$$

- Se $z = f(s^2t, s + 1)$, calcule $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$ quando $(s, t) = (1, 2)$.
- Partindo de $(s, t) = (1, 2)$, em qual direção devemos avançar para aumentar o valor de z o mais rápido possível?

3. Considere a função

$$f(x, y, z) = x^2 + xy^2 + y^3 + z + 2.$$

- Calcule a equação do plano tangente à superfície de nível 1 de f no ponto $(x_0, y_0, z_0) = (2, -3, 4)$.
- Calcule a derivada direcional de f no ponto $(2, -3, 4)$ na direção do vetor $\bar{v} = (1, 3, 2)$.

4. Determine se os limites existem, e justifique sua resposta detalhadamente:

$$\text{a) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad \text{b) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \cos(xy)}{x^2 + y^2}.$$

- 5) Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Explique brevemente por que f é diferenciável em todo $(x, y) \neq (0, 0)$.
- f é contínua no ponto $(0, 0)$? Justifique.
- f tem derivadas parciais no ponto $(0, 0)$? (se tiver, calcule-as).
- f é diferenciável no ponto $(0, 0)$? Justifique.